Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Milan Benda

Diferenciální rovnice v ekonomických modelech

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Oldřich John, CSc.
Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2007

Děkuji Doc. RNDr. Oldřichu Johnovi, CSc. za trpělivost, kterou se mnou měl během psaní mé práce, dále děkuji Prof. RNDr. Janu Malému, DrSc. a Doc. RNDr. Luboši Pickovi, CSc., DSc. za pomoc při technické realizaci práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 9. 8. 2007 Milan Benda

Milan Benda

Obsah

Název práce: Diferenciální rovnice v ekonomických modelech
Autor: Milan Benda
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Oldřich John, CSc.
e-mail vedoucího: Oldrich.John@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme chování vybraných ekonomických modelů a jejich stabilitu. Základním podkladem pro tuto práci byla publikace Giancarlo GANDOLFO: *Economic Dynamics*, konkrétně její 19. kapitola, týkající se soustav rovnic. Ke studiu byly zvoleny Model nabídky a poptávky a Růstový model s lidským kapitálem. Dále byla zařazena vybraná cvičení, která mají k těmto modelům vztah. Hlavním cílem práce zpřesnit použitou matematiku, zejména vybudovat precizní důkazy stability vybraných modelů, a ukázat souvislosti mezi některými použitými matematickými metodami.

Klíčová slova: Stabilita řešení soustav diferenciálních rovnic, Model rovnováhy trhy, Růstový model

Title: Diferential equations in economic models
Author: Milan Benda
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: Doc. RNDr. Oldřich John, CSc.
Supervisor's e-mail address: Oldrich.John@mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis we study the behavior and stability of certain selected economic models. Our basic point of departure was the book *Economic Dynamics* by Giancarlo Gandolfo, more precisely Chapter 19 of this book, focused on systems of equations. We choose the demand and supply model and the human capital in growth model for our investigation. We further include several exercises related to these models. Our main objective is to develop rigorous mathematical proofs of the stability of the selected models and to point out some interesting relations between the techniques which are used here.

Keywords: Stability of the solution of diferential equations systems, Demand and supply model, Human capital in growth model

1. Motivační úvod

Předmětem této práce je studium vybraných ekonomických modelů a stability jejich stacionárních řešení. Motivaci ke studiu této problematiky uvedeme na jednoduchém modelu.

Model "nabídka - poptávka": Uvažujeme nabídku S a poptávku D jakožto funkce ceny p. Předpokládáme, že jejich závislost na ceně je lineární:

$$S(p) = s_0 + a \cdot p, \qquad a > 0,\ s_0 < 0$$

$$D(p) = d_0 - b \cdot p, \qquad b > 0,\ d_0 > 0$$

Bod p^*, ve kterém platí $S(p^*) = D(p^*)$, nazveme *bodem rovnováhy* nabídky a poptávky.

Můžeme studovat chování nabídky a poptávky na okolí tohoto bodu, tj. co se stane, vychýlíme-li cenu z rovnováhy (to je otázka statické stability), nebo lze studovat obecný vývoj ceny a její konvergenci. Lze předpokládat, že cena se upravuje vzhledem k optimu v závislosti na nabídce a poptávce, přesněji na jejich rozdílu.

Označíme $E = D - S$. Pro E kladné poptávka převyšuje nabídku a tedy cena poroste, naopak pro E záporné nabídka převyšuje poptávku a tedy cena bude klesat.

Uvažujme nyní posloupnost cen $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ odpovídající rostoucím hodnotám času $t = 0, 1, 2, \dots, n$. Označíme $E_i = E(p_i)$ a budeme předpokládat, že se cena v následujícím čase mění podle vztahu

$$p_{i+1} = p_i + \alpha \cdot E_i, \qquad \alpha > 0,\ i = 0, 1, \dots, n.$$

To je soustava diferenčních rovnic, která se obvykle zapisuje ve tvaru

$$p_{i+1} - p_i = \alpha \cdot E(p_i), \qquad \alpha > 0,\ i = 0, 1, \dots, n. \tag{1}$$

Nyní provedeme přechod ke spojitému modelu (tj. $p = p(t)$). Nahradíme formuli (1) obecnějším vztahem

$$p(t + h) - p(t) = \alpha h \cdot E(p(t)).$$

Limitním přechodem pro $h \to 0_+$ dostáváme diferenciální rovnici

$$p'(t) = \alpha \cdot E(p(t)). \tag{2}$$

Nyní pro náš případ, kdy nabídka a poptávka jsou lineárně závislé na ceně, máme

$$E(p) = D(p) - S(p) = d_0 - b \cdot p - s_0 - a \cdot p = (d_0 - s_0) - (a + b)p.$$

Dosadíme do (2) a dostáváme diferenciální rovnici 1. řádu

$$p' + \alpha(a + b)p = \alpha(d_0 - s_0). \tag{3}$$

Rovnováha nabídky a poptávky ($E(p) = 0$) nastává v bodě

$$p^* = \frac{d_0 - s_0}{a + b}.$$

To je stacionární bod rovnice. Nyní se podíváme, jak vypadají řešení rovnice (3). Nechť je dána počáteční podmínka

$$p(0) = p_0.$$

Pak řešení je tvaru

$$p(t) = (p_0 - p^*) \cdot e^{-\alpha(a+b)t} + p^*.$$

Vidíme, že pro $p_0 = p^*$ je toto řešení stacionární. Pro $p_0 \neq p^*$ se řešení pro velká t blíží k stacionárnímu řešení (tj. $|p(t) - p^*| \to 0$ pro $t \to \infty$). Tuto situaci budeme nazývat stabilitou stacionárního řešení rovnice. Přesnou definici uvedeme v sekci 2.

Zatímco v našem jednoduchém motivačním příkladu bylo možné provést diskuzi asymptotického chování řešení na základě jeho explicitního vyjádření, v případě obecné autonomní soustavy diferenciálních rovnic nemáme explicitní řešení k dispozici. V tomto případě budeme diskutovat charakter stacionárních bodů na základě dvou obecných vět, které uvedeme v následující sekci.

2. Shrnutí použité teorie

Označme $x = (x_1, \dots, x_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme soustavu rovnic

$$x'(t) = f(x(t)). \tag{4}$$

Nechť f je definovaná na nějaké $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřené a všechna maximální řešení soustavy jsou definovaná na celém $\mathbb{R}$.

Definice 1. Řekneme, že $a \in G$ je *stacionárním bodem* rovnice (4), jestliže $f(a) = 0$. Konstantní vektorovou funkci $x(t) = a$, $t \in \mathbb{R}$, nazveme *stacionárním řešením* rovnice (4).

Definice 2. Řekneme, že stacionární bod $a \in G$ rovnice (4) je

(i) *stabilní*, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $x(t)$ rovnice (4) takové, že $\|x(0) - a\| < \delta$ platí:
$$\forall\, t \geq 0 \quad \|x(t) - a\| < \varepsilon.$$

(ii) *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc $\exists \eta > 0$, že pro $\|x(0) - a\|$ je
$$\lim_{t \to \infty} x(t) = a.$$

(iii) *nestabilní*, pokud není stabilní.

Poznámka 3. Někdy místo stabilní bod říkáme *stabilní řešení* (ve smyslu stacionárního řešení výše).

Nyní uvažujeme soustavu

$$x'(t) = \mathbb{A}x(t), \tag{5}$$

kde $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. To je lineární soustava s konstantními koeficienty. Pro ni budeme formulovat kritéria stability ve stacionárním bodě.

Poznámka 4. Používáme značení $\sigma(\mathbb{A})$ pro množinu vlastních čísel matice $\mathbb{A}$.

Věta 5 (o stabilitě lineární soustavy). *Nechť $\mathbb{A}$ je matice $n \times n$. Pak*

(i) *0 je asymptoticky stabilní, právě když $\forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ je $Re\ \lambda < 0$.*

(ii) *0 je stabilní, právě když $\forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ je $Re \lambda \leq 0$ a pokud $Re\ \lambda = 0$, pak je odpovídající Jordanův blok matice $\mathbb{A}$ jednoduchý.*

Zkoumání kvalitativního chování nelineární soustavy lze někdy převést na zkoumání vhodné soustavy lineární. O tom vypovídá následující věta.

Věta 6 (Ljapunovova věta). *Nechť $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ a $a \in G$ je stacionárním bodem rovnice (4). Označme*
$$\mathbb{A} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^{n}.$$

Pak platí:

(i) *Je-li* 0 *asyptoticky stabilní pro soustavu* $y' = \mathbb{A}y$, *pak* a *je asymptoticky stabilní bod rovnice* (4).
(ii) *Jestliže alespoň jedno vlastní číslo matice* $\mathbb{A}$ *má kladnou reálnou část, je bod* a *nestabilní pro rovnici* (4).

3. Model "nabídka - poptávka"

V úvodu jsme se seznámili s jednoduchým modelem nabídky a poptávky. V tomto modelu se vyskytovala pouze jediná komodita. Ve skutečnosti je ale komodit značné množství a jejich nabídka a poptávka nezávisí pouze na jejich ceně, ale také na ceně ostatních komodit.

Rovnováha trhu s n komoditami: Uvažujme tedy trh s n komoditami. Pro $j = 1, \dots, n$ označíme
$p_j \dots$ cena j-té komodity
$S_j = S_j(p_1, \dots, p_n) \dots$ nabídka j-té komodity
$D_j = D_j(p_1, \dots, p_n) \dots$ poptávka po j-té komoditě
$E_j = D_j - S_j \dots$ přebytek poptávky po j-té komoditě.

To znamená, že pro $E_j > 0$ poptávka převyšuje nabídku, naopak pro $E_j < 0$ nabídka převyšuje poptávku.

Můžeme uvažovat statický systém v rovnováze

$$E_1(p_1, \dots, p_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$E_n(p_1, \dots, p_n) = 0$$

a studovat jeho stacionární chování. Tj. hledáme takové $p = (p_1, \dots, p_n)$, aby splňovalo rovnici, tedy aby nastala rovnováha systému. Pak můžeme studovat, co se stane, vychýlíme-li systém z rovnováhy.

Tyto otázky ovšem nejsou příliš zajímavé, neboť výsledky studia dynamického systému na ně odpovídají. Formulujeme-li jakási kritéria statické stability, budou to pouze nutné podmínky pro stabilitu dynamického systému. Budeme se proto zabývat přímo dynamickým systémem. Podrobnosti o statické stabilitě jsou uvedeny v [1].

Uvažujme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} p_1' &= \alpha_1 \cdot E_1(p_1, \dots, p_n), \qquad \alpha_1 > 0 \\ &\vdots \\ p_n' &= \alpha_n \cdot E_n(p_1, \dots, p_n), \qquad \alpha_n > 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Nechť existuje stacionární bod soustavy (6)

$$p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*).$$

Označíme

$$a_{ij} = \frac{\partial E_i}{\partial p_j}(p^*)$$

a matici

$$\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n .$$

Dále označíme $q = p - p^*$ a budeme pro jednoduchost předpokládat, že $\alpha_j = 1$, $j = 1, \ldots, n$. (To můžeme udělat, neboť α_j ovlivňují pouze rychlost změny cen jednotlivých komodit, na stabilitu vliv nemají.)

Uvažujeme nyní soustavu

$$q' = \mathbb{A} \cdot q \tag{7}$$

a použijeme větu o stabilitě. Platí-li, že $\forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ je $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, pak 0 je asymptoticky stabilní bod soustavy (7). Podle Ljapunovovy věty je pak p^* asymptoticky stabilním bodem soustavy (6).

Vidíme, že stabilita soustavy (6) závisí na vlastních číslech matice $\mathbb{A}$. Nyní uvedeme několik speciálních případů, pro které je náš systém nabídky a poptávky stabilní a zamyslíme se nad jejich ekonomickým významem.

Příklad 1: Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická a negativně definitní. Pak ze symetrie plyne, že všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ jsou reálná. Nechť λ je vlastní číslo matice $\mathbb{A}$. Potom platí

$$\mathbb{A}x = \lambda x.$$

Uvažme skalární součin

$$(\mathbb{A}x, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x).$$

Protože $(x, x) \geq 0$ pro $\forall x$ a $(\mathbb{A}x, x) < 0$ pro $\forall x \neq 0$, je nutně $\lambda < 0$.

Ekonomická interpretace symetrie je taková, že změna ceny i-té komodity vyvolá stejnou změnu v poptávce po j-té komoditě, jako vyvolá změna ceny j-té komodity v poptávce po i-té komoditě. V některých případech to může být rozumný předpoklad, ale obecně nemusí platit.

Příklad 2: Nechť pro matici $\mathbb{A}$ platí podmínky:

(i) $a_{ii} < 0$ pro $\forall i = 1, \ldots n$

(ii) $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$,

neboli $\mathbb{A}$ je diagonálně dominantní. Pak její vlastní čísla mají záporné reálné části. (To je důsledkem Geršgorinovy věty z lineární algebry.)

Předpoklad (i) je naprosto přirozený, neboť odpovída tomu, že při zvýšení ceny i-té komodity klesne poptávka po této komoditě. Ekonomická interpretace předpokladu (ii) je taková, že změna ceny i-té komodity má na poptávku po této komoditě větší vliv, než odpovídající změny cen všech ostatních komodit. To je naopak silný předpoklad. Mohl by být splněn například na trhu složeném z odlišných komodit, které si vzájemně konkurují pouze minimálně.

Model s očekávanou cenou: Uvažme model nabídky a poptávky, ve kterém navíc přebytek poptávky po j-té komoditě, tj. $E_j = D_j - S_j$, zavisí na očekávané ceně této komodity $\hat{p_j}$, tedy $E_j = E_j(p_1, \ldots p_n, \hat{p_j})$. Ve stacionárním bodě je $\hat{p_j} = p_j$.

Předpokládejme, že očekávaná cena se řídí vztahem:

$$\hat{p_j} = p_j + r_j p_j',$$

kde r_j je koeficient, určující vývoj předpokládané ceny. Uvažujme linearizovaný systém ve stacionárním bodě p^*: (tj. nyní $p_j = p_j - p_j^*$)

$$p_j' = k_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} p_j + b_j \hat{p_j} \right), \qquad k_j > 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

Nechť pro $r_j = 0$ je systém stabilní. Dosazením za $\hat{p_j}$ dostáváme soustavu

$$p_j' = k_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} p_j + b_j (p_j + r_j p_j') \right).$$

Tu upravíme do tvaru

$$p_j' \left(\frac{1}{k_j} - r_j b_j \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} + b_j \right) p_j.$$

V [1] jsou zmíněny dva speciální případy:

(a) Očekávaná cena se řídí extrapolativním odhadem ($r_j > 0$) a současně vyšší očekávaná cena ma záporný efekt na poptávku ($b_j < 0$). Pak systém zůstává stabilní.

(b) Očekávaná cena se řídí konzervativním odhadem ($r_j < 0$) a současně vyšší očekávaná cena ma kladný efekt na poptávku ($b_j > 0$). Pak opět systém zůstává stabilní.

Obecně, systém zůstává stabilní, je-li splněna podmínka

$$\left(\frac{1}{k_j} - r_j b_j \right) > 0,$$

neboli $r_j b_j$ je dostatečně malé.

Model "cena - zásoba": Vraťme se ještě jednou k příkladu z úvodu. Máme trh s jednou komoditou. Uvažme však situaci, kdy se s časem mění cena (p) a zásoba komodity (q). Náš nový, sofistikovanější model tedy bude studovat dvě funkce p a q svázané podmínkami:

$$\begin{aligned} p' &= c(D(p) - q) \\ q' &= k(p - S(q)), \end{aligned}$$

kde $c > 0$, $k > 0$, $D(p)$ je funkce poptávky a $S(q)$ je funkce nabídky. Budeme studovat stabilitu systému, nejprve ve speciálním případě, kdy $D(p)$ a $S(q)$ jsou lineární, poté obecně.

Nechť nejprve (tvar rovnic je převzatý z [1])

$$\begin{aligned} D(p) &= a + b \cdot p, & b &< 0, \\ S(q) &= -\frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{b_1} \cdot q, & b_1 &> 0. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} p' &= c(a + bp - q) \\ q' &= k(p + \frac{a_1}{b_1} - \frac{1}{b_1} q), \end{aligned}$$

Spočteme stacionární body. Vyjde

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{a_1 - a}{b - b_1} \\ q^* &= \frac{a_1 b - a b_1}{b - b_1}. \end{aligned}$$

Ukážeme, kdy je stacionární bod asymptoticky stabilní. Označíme $x = (p, q)$. Vidíme, že soustava je tvaru

$$x' = \mathbb{A}_0 x + a_0,$$

kde

$$\mathbb{A}_0 = \begin{pmatrix} cb, & -c \\ k, & -\frac{k}{b_1} \end{pmatrix}, \qquad a_0 = \begin{pmatrix} ca \\ k\frac{a_1}{b_1} \end{pmatrix}.$$

Zajímají nás vlastní čísla matice $\mathbb{A}_0$. Pro matici 2×2 odvodíme jednoduché kritérium, kdy mají vlastní čísla záporné reálné části. To pak použijeme i v obecném případě, kdy už nemůžeme vlastní čísla počítat explicitně.

Nechť

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}. & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Počítejme rovnici det $(\mathbb{A} - \lambda I) = 0$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0.$$

$$\lambda^2 - \lambda(a_{22} + a_{11}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

To je kvadratická rovnice s kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{22} + a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22} + a_{11})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}.$$

Z toho plyne následující tvrzení.

Tvrzení (Kritérium stability pro matice 2×2): *Re* $\lambda < 0$, právě když jsou splněny obě podmínky

(i) $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$, neboli det $\mathbb{A} > 0$

(ii) $a_{11} + a_{22} < 0$.

Pro náš speciální případ tedy dostáváme podmínky asymptotické stability

$$cb - \frac{k}{b_1} < 0,$$

$$ck(1 - \frac{b}{b_1}) > 0.$$

Snadno ověříme, že pro zadané předpoklady $b < 0$, $b_1 > 0$ jsou podmínky splněny, tedy systém je asymptoticky stabilní.

Nyní uvažme obecný případ. Pro jednoduchost předpokládejme, že $c = k = 1$. Máme rovnici

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(p,q) \\ f_2(p,q) \end{pmatrix},$$

kde

$$f_1(p,q) = D(p) - q,$$

$$f_2(p,q) = p - S(q).$$

Předpokládejme, že existuje stacionární bod $x^* = (p^*, q^*)$. Použijeme Ljapunovovu větu. Spočteme parciální derivace ve stacionárním bodě

$$\frac{\partial f_1}{\partial p}(x^*) = D'(x^*),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q}(x^*) = -1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p}(x^*) = 1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q}(x^*) = -S'(x^*)$$

a zajímáme se o vlastní čísla matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} D'(x^*), & -1 \\ 1, & -S'(x^*) \end{pmatrix}.$$

Použijeme odvozené kritérium stability. Chceme, aby

$$D' - S' < 0,$$
$$1 - D'S' > 0.$$

Pak vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ mají záporné reálné části a tedy stacionární bod naší rovnice je asymptoticky stabilní. Podmínky jsou splněny například v případě, že D je klesající a S je rostoucí.

Ještě se krátce zamyslíme nad existencí stacionárního bodu. Bod $x^* = (p^*, q^*)$ je stacionární, pokud

$$D(p^*) - q^* = 0,$$
$$p^* - S(q^*) = 0.$$

To lze přepsat jako

$$D(S(q^*)) = q^*,$$

nebo také

$$S(D(p^*)) = p^*,$$

tj. zobrazení $D \circ S$ a $S \circ D$ mají pevný bod.

4. Růstový model

Posledním modelem, který budeme studovat, je růstový model lidského kapitálu. Tento model je poměrně moderní záležitostí a nebyl ješte tolik studován. Nejprve ukážeme jednodušší, tzv. Solowův model růstu kapitálu a pak ukážeme, jak ho lze zobecnit rozdělením kapitálu na dvě složky.

Solowův model: Nechť K a L jsou funkce zachycující časový vývoj kapitálu a práce v makroekonomickém smyslu. Závislost hrubého domácího produktu Y na vstupním kapitálu a práci je dána vztahem

$$Y = f(K, L),$$

kde f je produkční funkce. O ní předpokládáme, že je lineárně homogenní, neboli $f(tK, tL) = tf(K, L)$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$. Dále model předpokládá, že konstantní podíl produkce Y je investován do rozvoje kapitálu, a pracovní síla roste exponenciálně.

$$K' = sY \tag{8}$$
$$L' = \lambda L$$

Zajímá nás vývoj veličiny $k = \frac{K}{L}$, podíl kapitálu a práce. Díky lineární homogenitě funkce f můžeme produkční funkci vyjádřit ve tvaru

$$Y = Lf(\frac{K}{L}, 1) = Lf(k, 1).$$

Po dosazení do rovnice (8) a několika úpravách dostaneme diferenciální rovnici pro k:

$$k' = sf(k, 1) - \lambda k. \tag{9}$$

Jak vypadá řešení této rovnice, to závisí na vlastnostech funkce f. Více informací je možné najít např. v [2].

Solowův model je možné dále zobecňovat, například přidáním technického pokroku A, který zvyšuje pracovní sílu. Pak produkční funkce má tvar $Y = f(K, LA)$. Dále můžeme například uvažovat, že kapitál se samovolně znehodnocuje tempem $-\delta = \frac{K'}{K}, \delta > 0$. Pak rovnice (9) bude mít podobu

$$k' = sf(k, 1) - (\lambda + \delta)k.$$

Hlavní kvalitativní změnou však bude přidání lidského kapitálu. To povede na soustavu dvou rovnic.

Růstový model s lidským kapitálem: V Solowově modelu se objevuje pouze kapitál jako celek. Nyní ho rozdělíme na dvě složky, fyzický kapitál a lidský kapitál, což lépe odráží ekonomickou realitu. Lidský kapitál je možné interpretovat například jako úroveň kvalifikace pracovníků. Tu je možné zvyšovat investicemi (školení pracovníků), naopak samovolně se úroveň snižuje (nové technické postupy, změny zaměstnání), tedy budeme s ní zacházet jako s fyzickým kapitálem v Solowově modelu.

Označíme:
$Y(t)$... celková produkce,
$K(t)$... fyzický kapitál,
$H(t)$... lidský kapitál,
$A(t)$... technický pokrok,
$L(t)$... pracovní síla.
Uvažme produkční funkci

$$Y = f(K, H, AL), \tag{10}$$

kde f je lineárně homogenní. Součin AL znamená efektivní jednotku práce. Podobně jako v Solowově modelu budeme studovat časový vývoj veličin $k = \frac{K}{AL}$ a $h = \frac{H}{AL}$, neboli fyzický, respektive lidský kapitál v přepočtu na efektivní jednotku práce. Díky homogenitě funkce f můžeme přepsat rovnici (10) do tvaru

$$y = f(k, h, 1), \tag{11}$$

kde $y = \frac{Y}{AL}$. Model dále předpokládá, že konstatní části s_k a s_h celkové produkce jsou investovány do rozvoje lidského a fyzického kapitálu, a dále že pracovní síla i technický pokrok rostou exponenciálně, a lidský i fyzický kapitál se s časem znehodnocují (také exponenciálně). To popíšeme vztahy

$$\begin{aligned}
K' &= s_k Y, & s_k &> 0,\\
H' &= s_h Y, & s_h &> 0,\\
A' &= nA, & n &> 0,\\
L' &= gL, & g &> 0,\\
-\delta &= \frac{K'}{K} = \frac{H'}{H}, & \delta &> 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Odvodíme odpovídající růstový model. Vyjdeme z rovnic (12) vyjadřujících změnu fyzického a lidského kapitálu:

$$\begin{aligned}
K' &= s_k f(K, H, AL) - \delta K,\\
H' &= s_h f(K, H, AL) - \delta H.
\end{aligned}$$

Po vydělení efektivní jednotkou AL práce dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{K'}{AL} &= s_k f(k,h,1) - \delta k, \\ \frac{H'}{AL} &= s_h f(k,h,1) - \delta h. \end{aligned} \tag{13}$$

Nyní stačí použít vztah $K = kAL$ a spočítat

$$\frac{K'}{AL} = \frac{k'AL + k(A'L + AL')}{AL} = k' + k \cdot (n+g).$$

Analogickým postupem pro H a dosazením do (13) dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} k' &= s_k f(k,h,1) - k \cdot (n+g+\delta), \\ h' &= s_h f(k,h,1) - h \cdot (n+g+\delta). \end{aligned} \tag{14}$$

Nyní budeme pokračovat ve studiu růstového modelu pro konkrétní produkční funkci, tzv. Cobb-Douglasovu formuli

$$Y(t) = K(t)^\alpha H(t)(A(t)L(t))^{1-\alpha-\beta},$$

kde $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$. Navíc označíme $\gamma = n + g + \delta$. Pak soustava (14) má tvar

$$\begin{aligned} k' &= s_k k^\alpha h^\beta - k\gamma, \\ h' &= s_h k^\alpha h^\beta - h\gamma. \end{aligned} \tag{15}$$

Tato soustava popisuje vývoj lidského a fyzického kapitálu v přepočtu na efektivní jednotku práce. První část vztahu představuje investice, druhá je způsobena znehodnocením kapitálu a zvýšením efektivity práce.

Vyšetříme nyní existenci stacionárních bodů soustavy (15). Vyřešíme soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= s_k k^\alpha h^\beta - k\gamma, \\ 0 &= s_h k^\alpha h^\beta - h\gamma. \end{aligned} \tag{16}$$

Vidíme, že bod $[0,0]$ je řešení, z hlediska aplikací je ale nezajímavé. Každé další řešení (pokud existuje), je nenulové v obou složkách. Najdeme tedy takové řešení.

V (16) vynásobíme 1. rovnici s_k, 2. rovnici s_h a odečteme. Dostáváme

$$0 = \gamma(s_h k - s_k h).$$

Z toho plyne

$$\frac{k}{s_k} = \frac{h}{s_h}.$$

Dosadíme za k do (16) a dostáváme

$$h^{\alpha+\beta} \frac{s_k^\alpha}{s_h^{\alpha-1}} = h\gamma.$$

Pro $h \neq 0$ můžeme vydělit a vyjádřit h. Analogický postup použijeme pro vyjádření k. Označíme

$$\begin{aligned} k^* &= \left(\frac{s_k^\alpha s_h^{1-\alpha}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \\ h^* &= \left(\frac{s_k^{1-\beta} s_h^\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Bod $[k^*, h^*]$ je stacionárním bodem soustavy (15). Vyšetříme jeho stabilitu. Soustava (15) je tvaru

$$\begin{pmatrix} k \\ h \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(k,h) \\ f_2(k,h) \end{pmatrix} = (F(a)),$$

kde $a = [k, h]$. Užijeme Ljapunovovu větu. Počítejme parciální derivace:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial k} &= \alpha \cdot s_k k^{\alpha-1} h^{\beta} - \gamma, \\
\frac{\partial f_1}{\partial h} &= \beta \cdot s_k k^{\alpha} h^{\beta-1}, \\
\frac{\partial f_2}{\partial k} &= \alpha \cdot s_h k^{\alpha-1} h^{\beta}, \\
\frac{\partial f_2}{\partial h} &= \beta \cdot s_h k^{\alpha} h^{\beta-1} - \gamma.
\end{aligned}$$

Dosadíme $a^* = [k^*, h^*]$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial k}(a^*) &= \alpha\gamma s_k^{\frac{1-\alpha-\beta+(\alpha-1)(1-\beta)+\alpha\beta}{1-\alpha-\beta}} s_h^{\frac{(\alpha-1)\beta+(1-\alpha)\beta}{1-\alpha-\beta}} - \gamma &&= \gamma(\alpha-1), \\
\frac{\partial f_1}{\partial h}(a^*) &= \beta\gamma s_k^{\frac{1-\alpha-\beta+\alpha(1-\beta)+(\beta-1)\alpha}{1-\alpha-\beta}} s_h^{\frac{\alpha\beta+(\beta-1)(1-\alpha)}{1-\alpha-\beta}} &&= \beta\gamma\frac{s_k}{s_h}, \\
\frac{\partial f_2}{\partial k}(a^*) &= \alpha\gamma s_k^{\frac{(\alpha-1)(1-\beta)+\alpha\beta}{1-\alpha-\beta}} s_h^{\frac{1-\alpha-\beta+(\alpha-1)\beta+\beta(1-\alpha)}{1-\alpha-\beta}} &&= \alpha\gamma\frac{s_h}{s_k}, \\
\frac{\partial f_2}{\partial h}(a^*) &= \beta\gamma s_k^{\frac{\alpha(1-\beta)+\alpha(\beta-1)}{1-\alpha-\beta}} s_h^{\frac{1-\alpha-\beta+\alpha\beta+(1-\alpha)(\beta-1)}{1-\alpha-\beta}} - \gamma &&= \gamma(1-\beta).
\end{aligned}$$

Zajímají nás vlastní čísla matice

$$\mathbb{A} = (F'(a^*)) = \begin{pmatrix} \gamma(\alpha-1), & \beta\gamma\frac{s_k}{s_h} \\ \alpha\gamma\frac{s_h}{s_k}, & \gamma(1-\beta) \end{pmatrix}.$$

Řešme rovnici

$$\det\,(\mathbb{A} - \lambda I) = 0.$$

Máme

$$(\alpha - 1 - \lambda)(\beta - 1 - \lambda) - \alpha\beta = 0,$$

což upravíme na

$$\lambda^2 + \lambda(2 - \alpha - \beta) + (1 - \alpha - \beta) = 0.$$

Použitím Vietových vzorců

$$\begin{aligned}
\lambda_1\lambda_2 &= (1 - \alpha - \beta), \\
\lambda_1 + \lambda_2 &= -(2 - \alpha - \beta),
\end{aligned}$$

dostáváme vlastní čísla

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -1, \\
\lambda_2 &= -(1 - \alpha - \beta).
\end{aligned}$$

Protože obě vlastní čísla jsou záporná ($(1-\alpha-\beta) > 0$ z předpokladu), je stacionární bod $a^* = [k^*, h^*]$ asymptoticky stabilní.

Závěrem podotkněme, že asymptotická stabilita nezávisí na výši investic, ty mají vliv pouze na hodnotu stacionárního bodu $[k^*, h^*]$. Přejdeme nyní zpátky k K a H.

Zásoba fyzického a lidského kapitálu roste úměrně růstu pracovní síly a technického pokroku, tj.

$$K^*(t) = k^* A_0 L_0 e^{(n+g)t},$$

$$H^*(t) = h^* A_0 L_0 e^{(n+g)t},$$

kde A_0 a L_0 jsou hodnoty práce a technického pokroku v čase $t = 0$.

Zde jsme ověřili stabilitu řešení pro Cobb-Douglasovu produční funkci. Problém stability je možné studovat i pro obecnější produkční funkce. Závěrem naznačíme možný postup pro soustavu (14). Označíme $\phi(k,h) = f(k,h,1)$ funkci dvou proměnných. Pak máme stoustavu

$$\begin{aligned} k' &= s_k \phi(k,h) - k \cdot \gamma, \\ h' &= s_h \phi(k,h) - h \cdot \gamma. \end{aligned} \tag{18}$$

Nechť existuje stacionární bod $[k^e, h^e]$ soustavy (18). Znovu použijeme Ljapunovovu větu. Chceme spočítat vlastní čísla matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial k}(k^e,h^e) - \gamma, & \frac{\partial \phi}{\partial h}(k^e,h^e) \\ \frac{\partial \phi}{\partial k}(k^e,h^e), & \frac{\partial \phi}{\partial h}(k^e,h^e) - \gamma \end{pmatrix}.$$

oprava: chybí koeficienty s_k a s_h

Použijeme kritérium stability pro matice 2×2 a dostáváme podmínku

$$s_k \frac{\partial \phi}{\partial k}(k^e,h^e) + s_h \frac{\partial \phi}{\partial h}(k^e,h^e) < \gamma.$$

To je omezení na rychlost růstu produkční funkce v proměnných k a h. Vidíme tedy, že pro obecnou lineárně homogenní produkční funkci nemáme stabilitu přímo, musíme ještě něco předpokládat a parciálních derivacích. V zobecňování bychom mohli dále pokračovat, ale základním nástrojem je pro nás Ljapunovova věta. Případy, kdy Ljapunovovu větu nemůžeme použít (např. nediferencovatelnost, nebo nespojitost produční funkce), jsou mimo rámec této práce.

Reference

[1] Giancarlo Gandolfo: *Economic Dynamics*, Third Edition, Springer, Germany 1997.
[2] O. John, O. Kalenda, M. Zelený: *Matematika (pokračování)*, Matfyzpress 2003.

PŘIJATO K OBHAJOBĚ 10.8.04

O. John

PŘEDSEDA KOMISE PRO BSZZ
STUDIJNÍ PROGRAM MATEMATIKA