Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Rmoutil

O existenci velkých zobecněných obdélníků v podmnožině roviny kladné míry

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc.
Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2007

Děkuji prof. RNDr. Luďkovi Zajíčkovi, DrSc. za trpělivost a ochotu, zejména však za zajímavé náměty pro mou práci.
Rovněž děkuji prof. RNDr. Janu Malému, DrSc. za několik cenných rad, které mi ochotně poskytl, když pan profesor Zajíček nebyl k dispozici.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Martin Rmoutil

Obsah

Název práce: O existenci velkých zobecněných obdélníků v podmnožině roviny kladné míry
Autor: Martin Rmoutil
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc.
e-mail vedoucího: zajicek@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme problém existence podmnožin tvaru kartézského součinu v měřitelných podmnožinách roviny. Konkrétně se soustředíme na následující otázku: Je-li S měřitelná podmnožina roviny jednotkové míry obsažená v jednotkovém čtverci $[0,1]^2$, ptáme se, zda existují měřitelné množiny A a B kladné míry takové, že kartézský součin $A \times B$ je podmnožinou S. Ve druhé kapitole ukazujeme, že odpověď na tuto otázku je obecně záporná a to tak, že najdeme protipříklad. Toho dosáhneme použitím netriviální věty a chytrého triku, které objevil M. L. Brodskij.

Nicméně pokud vypustíme požadavek měřitelnosti množin A a B, dá se za předpokladu hypotézy kontinua ukázat, že odpověď je v jistém smyslu kladná – to ukážeme v první kapitole. Samozřejmě, není-li zaručena měřitelnost množin A a B, můžeme hovořit pouze o vnější míře těchto množin.

Klíčová slova: Lebesgueova míra, zobecněný obdélník, R. O. Davies, M. L. Brodskij

Title: On the existence of big generalized rectangles in a subset of the plane of positive measure
Author: Martin Rmoutil
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: Prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc.
Supervisor's e-mail address: zajicek@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis we study the problem of existence of Cartesian product subsets of a measurable plane set. In particular we concentrate on the following question: If S is a measurable plane set of Lebesgue measure unity contained in the unit square $[0, 1]^2$, do there exist measurable sets A and B of positive measure such that the Cartesian product $A \times B$ is a subset of S? In the second chapter we show that the answer to this question is generally negative by finding a counterexample. That is acomplished by using a non-trivial theorem and a clever trick, both discovered by M. L. Brodskiy.

However if we omit the demand of measurability of sets A and B, the first chapter shows that assuming the continuum hypothesis, the answer can be (from a certain point of view) also positive. Of course in case the sets A and B are not necessarily measurable, we can only speak in terms of outer Lebesgue measure.

Keywords: Lebesgue measure, generalized rectangle, R. O. Davies, M. L. Brodskiy

Kapitola 1

Daviesův nepublikovaný výsledek

1.1 Úvod O následující větě 1.3 se zmiňuje Z. Buczolich ve své práci [1], kde tvrdí, že jde o nepublikovaný výsledek R. O. Daviese.

Předložený důkaz této věty zahrnuje konstrukci transfinitní rekurzí (resp. indukcí), která je v něm provedena poněkud neobvyklým a snad i krkolomným způsobem. Po dlouhém zvažování jsem se rozhodl pro tento způsob, aby bylo dosaženo dvou věcí: Jednak jsem chtěl, aby byla konstrukce provedena opravdu precizně tak, aby bylo například jasně vidět, jakým způsobem se při konstrukci používá axiom výběru. Mým druhým cílem bylo na důkaz nasadit výsledky teorie množin v takové formě, v jaké jsou k vidění na přednáškách Matematicko-fyzikální fakulty UK.

1.2 Značení

- V celé práci značíme λ_k k-dimenzionální Lebesgueovu míru a λ_k^* značí k-dimenzionální vnější Lebesgueovu míru.
- Pokud je $f : X \to Y$ nějaké zobrazení, potom, je-li $A \subset X$, značíme množinu $\{f(x) \mid x \in A\}$ důsledně symbolem $f[A]$.
- Je-li A nějaká množina, značíme $\mathcal{P}(A)$ množinu všech podmnožin množiny A a $\operatorname{card}(A)$ mohutnost množiny A.
- Symbolem ω_1 značíme, jak je zvykem, nejmenší nespočetný ordinál.
- Je-li φ libovolné zobrazení, symbol $\operatorname{Dom}(\varphi)$ značí definiční obor φ.

- Je-li $S \subset \mathbb{R}^2$ nějaká množina, pak řezy touto množinou značíme

$$S^{x,*} := \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in S\},$$

$$S^{*,y} := \{x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in S\}.$$

1.3 Věta Buď $S \subset [0,1]^2$ měřitelná množina taková, že $\lambda_2(S) = 1$. Za předpokladu platnosti hypotézy kontinua potom existují množiny $A, B \subset [0,1]$ takové, že $\lambda_1^*(A) = 1$, $\lambda_1^*(B) = 1$ a platí $A \times B \subset S$.

Dříve než přistoupíme k důkazu této věty, dokážeme pro přehlednost několik pomocných tvrzení.

1.4 Lemma Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný uzavřený interval. Potom množina $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(I)$ všech uzavřených podmnožin I kladné míry má mohutnost kontinua.

Důkaz Každá množina tvaru $[0, \frac{1}{2}] \cup \{x\}$, kde $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, leží v $\mathcal{H}$. Tedy mohutnost $\mathcal{H}$ je nejméně kontinuum.

Na druhou stranu prostor I je kompaktní, tedy i separabilní. Separabilita je pro metrické prostory ekvivalentní s tím, že prostor I má spočetnou bázi otevřených množin – označme ji $\mathcal{B}$. Protože $\mathcal{B}$ je báze otevřených množin, můžeme ke každé otevřené množině $G \subset I$ najít množinu $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ tak, že $G = \bigcup \mathcal{A}$. Tedy zobrazení φ z $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ do otevřených množin v I definované předpisem

$$\varphi : \mathcal{A} \longmapsto \bigcup \mathcal{A}$$

je surjektivní. Dostáváme tedy $\operatorname{card}(\mathcal{G}) \leq \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathcal{B})) = 2^\omega$, kde písmenem $\mathcal{G}$ značíme množinu všech otevřených množin v I (označme ještě $\mathcal{F}$ množinu všech uzavřených podmnožin I). Protože však triviálně (příslušnou bijekci zprostředkuje dělaní doplňků) $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = \operatorname{card}(\mathcal{G})$, dostáváme, že mohutnost $\mathcal{H}$ je nejvýše kontinuum, neboť $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Protože platí obě nerovnosti, platí tvrzení lemmatu.

1.5 Lemma Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný uzavřený interval a nechť $A \subset I$. Jestliže A má neprázdný průnik s každou uzavřenou podmnožinou I kladné míry, potom $\lambda_1^*(A) = \lambda_1(I)$.

Důkaz Provedeme nepřímo; předpokládejme tedy, že rovnost v závěru neplatí. Potom samozřejmě $\lambda_1^*(A) < \lambda_1(I)$. Víme, že platí rovnost

$$\lambda_1^*(A) = \inf\{\lambda_1(G) \mid G \supset A,\ G \in \mathcal{G}\},$$

kde $\mathcal{G}$ značí množinu všech otevřených množin v $\mathbb{R}$. Existuje tedy otevřená množina $G \supset A$ taková, že $\lambda_1(G) < \lambda_1(I)$. Označme $F := I \cap (\mathbb{R} \backslash G)$. Je zřejmé, že F má kladnou míru a je uzavřená, přitom má však prázdný průnik s množinou A. Dokázali jsme negaci předpokladu a důkaz je hotov.

1.6 Lemma (o transfinitní rekurzi) Nechť G_1 je (třídové) zobrazení, které každé množině x přiřazuje množinu $G(x)$. Potom existuje právě jedno (třídové) zobrazení F, které každému ordinálu α přiřazuje množinu

$$F(\alpha) = G_1(F\lfloor\alpha).$$

1.7 Poznámka Lemma 1.6 je zde uvedeno v přesném (až na značení G_1) znění z knihy [3] (tam je ovšem uvedeno jako věta 2.3, str.145). Definice příslušných pojmů lze nalézt tamtéž. Pouze poznamenejme, že symbolem On značíme třídu všech ordinálů a symbolem $\mathbf{V}$ značíme univerzální třídu (tj. třídu všech množin).

1.8 Důkaz věty 1.3 Vzhledem k předpokladu hypotézy kontinua nám Lemma 1.4 dává, že množinu $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}([0,1])$ všech uzavřených podmnožin kladné míry inrtervalu $[0,1]$ lze psát ve tvaru

$$\mathcal{H} = \{F_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}.$$

Transfinitní rekurzí sestrojíme zobecněnou posloupnost uspořádaných dvojic reálných čísel $\{(a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha<\omega_1}$ takovou, že pro každý spočetný ordinál α platí následující podmínky (i)-(iv):

(i) $a_\alpha \in F_\alpha$ a zároveň $b_\alpha \in F_\alpha$

(ii) $\lambda_1(S^{a_\alpha,*}) = 1$ a zároveň $\lambda_1(S^{*,b_\alpha}) = 1$

(iii) pro všechna $\beta < \alpha$ je $b_\beta \in S^{a_\alpha,*}$

(iv) pro všechna $\beta \leq \alpha$ je $a_\beta \in S^{*,b_\alpha}$

Před vlastní konstrukcí ještě uvažujme množiny:

$$X := \{x \in [0,1] \mid \lambda_1(S^{x,*}) = 1\},$$

$$Y := \{y \in [0,1] \mid \lambda_1(S^{*,y}) = 1\}.$$

Dokažme, že obě tyto množiny jsou měřitelné a mají v intervalu $[0,1]$ plnou míru. Toto ukážeme pouze pro množinu X; pro Y je důkaz zcela analogický.

Definujme tedy funkci $f : [0,1] \to [0,1]$ předpisem $f(x) := \lambda_1(S^{x,*})$. Protože je množina S měřitelná podle předpokladu, je podle Fubiniho věty funkce f měřitelná. Ale lze psát $X = f^{-1}[\{1\}]$, z čehož ihned plyne měřitelnost množiny X. Předpokládejme nyní pro spor, že $\lambda_1(X) < 1$. Potom množina $Z := [0,1] \setminus X$ má kladnou míru a podle definice pro všechna $x \in Z$ platí $f(x) < 1$. Z toho plyne

$$\lambda_1(Z) - \int_Z f(x)\,dx = \int_Z (1 - f(x))\,dx > 0,$$

protože integrand posledního integrálu je kladný na Z a to je množina kladné míry. Tedy $\lambda_1(Z) > \int_Z f(x)\,dx$. Nyní s opětovným použitím Fubiniho věty (v druhé rovnosti) počítejme:

$$1 = \lambda_2(S) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx + \int_Z f(x)\,dx$$

$$= \lambda_1(X) + \int_Z f(x)\,dx < \lambda_1(X) + \lambda_1(Z) = 1$$

a to je spor. Tedy opravdu množiny X a Y mají v intervalu $[0,1]$ plnou míru. Nyní již k samotné konstrukci:

Mějme zobecněnou posloupnost tvaru $\{(a_\delta, b_\delta)\}_{\delta<\gamma}$ pro nějaký ordinál $\gamma < \omega_1$. V případě, že posloupnost $\{(a_\delta, b_\delta)\}_{\delta<\gamma}$ navíc splňuje podmínky (i)-(iv) pro všechna $\alpha < \gamma$, definujeme množinu $[0,1]^2 \supset G\left(\{(a_\delta, b_\delta)\}_{\delta<\gamma}\right) :=$

$$:= \left\{ (a_\gamma, b_\gamma) \;\middle|\; \{(a_\delta, b_\delta)\}_{\delta<\gamma+1} \text{ splňuje (i)-(iv) pro všechna } \alpha < \gamma + 1 \right\}$$

Dokážeme, že pro každou zobecněnou posloupnost $\{(a_\delta, b_\delta)\}_{\delta<\gamma}$ platí $G(\{(a_\delta, b_\delta)\}_{\delta<\gamma}) \neq \emptyset$. Speciálně tedy v případě, že $G(\{(a_\delta, b_\delta)\}_{\delta<\gamma})$ je definována (tj. $\{(a_\delta, b_\delta)\}_{\delta<\gamma}$ splňuje výše uvedené předpoklady), je $G(\{(a_\delta, b_\delta)\}_{\delta<\gamma})$ neprázdná množina:

Podle předpokladu je γ spočetný ordinál a pro všechna $\alpha < \gamma$ je $\lambda_1(S^{*,b_\alpha}) = 1$. Z tohoto, z De Morganových pravidel a σ-aditivity Lebesgueovy míry triviálně plyne (uvážíme-li ještě již dokázaný fakt, že $\lambda_1(X) = 1$) rovnost:

$$\lambda_1\Big(X \cap \bigcap_{\alpha<\gamma} S^{*,b_\alpha}\Big) = 1,$$

a tedy

$$\lambda_1\Big(F_\gamma \cap X \cap \bigcap_{\alpha<\gamma} S^{*,b_\alpha}\Big) > 0.$$

Speciálně je tedy tato poslední množina neprázdná, volme tedy nějaký její prvek a označme ho a_γ. Protože speciálně je $a_\gamma \in X$, máme $\lambda_1(S^{a_\gamma,*}) = 1$. Proto naprosto stejný postup jako výše dává:

$$F_\gamma \cap Y \cap \bigcap_{\alpha \le \gamma} S^{a_\alpha,*} \ne \emptyset,$$

volme tedy b_γ libovolný prvek této množiny. Z postupu je nyní snadno vidět, že posloupnost $\{(a_\delta, b_\delta)\}_{\delta<\gamma+1}$ splňuje podmínky (i)-(iv) pro všechny ordinály $\alpha < \gamma + 1$. K ověření podmínek (iii) a (iv) si stačí uvědomit, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ nastává $x \in S^{*,y}$ tehdy a jen tehdy, když $y \in S^{x,*}$. Tedy $(a_\gamma, b_\gamma) \in G(\{(a_\delta, b_\delta)\}_{\delta<\gamma})$, tedy $G(\{(a_\delta, b_\delta)\}_{\delta<\gamma}) \ne \emptyset$.

Ve světle výše uvedeného můžeme symbol G chápat jako zobrazení definované na množině zobecněných posloupností splňujících jisté podmínky. Označme $\mathcal{G} := \mathrm{Rng}(G)$. Právě jsme dokázali, že $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Máme tedy (evidentně neprázdný) soubor neprázdných množin a axiom výběru nám nyní zaručuje existenci selektoru $g : \mathcal{G} \to \bigcup \mathcal{G}$. (To, že zobrazení g je selektor, podle definice znamená, že kdykoli $\emptyset \ne C \in \mathcal{G}$, potom $g(C) \in C$.) Nyní definujeme třídové zobrazení $G_1 : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ (na které posléze užijeme Lemma 1.6) předpisem:

$$G_1(A) = \begin{cases} g(G(A)), & G(A) \in \mathcal{G} \\ \emptyset, & \text{jinak} \end{cases}$$

Lemma 1.6 nám nyní zaručuje existenci jediného třídového zobrazení $F : On \to \mathbf{V}$, které splňuje rovnost $F(\alpha) = G_1(F\lfloor\alpha)$ pro každé $\alpha \in On$. Přitom ztotožňujeme zobecněnou posloupnost tvaru $\{(a_\delta, b_\delta)\}_{\delta<\gamma}$ se zobrazením $\delta \mapsto (a_\delta, b_\delta)$ definovaným na ordinálu γ. Tedy také chápeme pro každé $\gamma \le \omega_1$ restrikci $F\lfloor\gamma$ jako posloupnost $\{F(\delta)\}_{\delta<\gamma}$. Dále pro účely definice G_1 chápeme libovolné zobrazení jako množinu (tj. rozumíme φ je zobrazení $\Longrightarrow \varphi \subset \mathrm{Dom}(\varphi) \times \mathrm{Rng}(\varphi)$). Tedy $\mathrm{Dom}(G_1) \supset \mathrm{Dom}(G)$.

Transfinitní indukcí ukážeme pro každé $\delta < \omega_1$ výrok $V(\delta)$:

Posloupnost (zobecněná) $F\lfloor\delta$ splňuje podmínky (i)-(iv) pro každé $\alpha < \delta$ (a tedy $F(\delta) \in [0,1]^2$ podle definice zobrazení G_1 a rovnosti $F(\delta) = G_1(F\lfloor\delta)$).

Pro $\delta = 0$ platí výrok $V(\delta)$ triviálně.

Nechť $\gamma < \omega_1$ a pro každé $\alpha \le \gamma$ platí výrok $V(\alpha)$. Potom zřejmě $(a_\gamma, b_\gamma) = F(\gamma) = G_1(F\lfloor\gamma) \in [0,1]^2$, protože $F\lfloor\gamma$ splňuje podmínky (i)-(iv) pro všechna $\alpha < \gamma$. Podle definice zobrazení G a G_1 navíc platí, že posloupnost $(a_\delta, b_\delta)_{\delta<\gamma+1} = F(\delta)_{\delta<\gamma+1}$ splňuje podmínky (i)-(iv) pro všechna $\alpha < \gamma + 1$. To znamená, že platí výrok $V(\gamma + 1)$.

Nyní již stačí položit $A := \{a_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ a $B := \{b_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ (kde pro všechna $\alpha < \omega_1$ je $F(\alpha) = (a_\alpha, b_\alpha)$). Zbývá si uvědomit, že množiny A a B mají požadované vlastnosti. Předně, z konstrukce zobrazení F plyne, že pro všechna spočetná α je $a_\alpha \in F_\alpha$ a rovněž $b_\alpha \in F_\alpha$. Z lemmatu 1.5 nyní plynou rovnosti $\lambda_1^*(A) = 1 = \lambda_1^*(B)$.
Volme nyní libovolné spočetné ordinály δ a ϵ. Chceme ukázat, že $(a_\delta, b_\epsilon) \in S$. Položme $\gamma := \max\{\delta, \epsilon\} + 1$; to je spočetný ordinál. Uvědomme si, že platí rovněž ekvivalence $x \in S^{*,y}$, právě když $[x; y] \in S$. Požadovaný závěr nyní plyne z toho, že posloupnost $F\lfloor\gamma$ splňuje podmínky (iii) a (iv) pro všechna $\alpha < \gamma$.

Kapitola 2

Druhá strana mince

2.1 Smyslem druhé kapitoly je ukázat, proč ve větě 1.3 nelze zajistit měřitelnost množin A a B. Protipříklad není těžké zkonstruovat, avšak k tomu, abychom věděli, že to protipříklad je, potřebujeme netriviální větu, jejímž důkazem se de facto celá tato kapitola zabývá.

Důkaz (ne příliš precizní, spíše náznak) věty 2.8 podal už M. L. Brodskij v práci [2], nicméně učinil tak poněkud jiným způsobem, než jak to zde provedeme my. Brodskij rovněž objevil trik, jímž z věty 2.8 plyne pro nás podstatný důsledek 2.9.

2.2 Značení

- Je-li $s = [s_1; s_2] \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$, značíme $U(s, \delta) := U_{\max}(s, \delta) = (s_1 - \delta, s_1 + \delta) \times (s_2 - \delta, s_2 + \delta)$.
- Je-li f libovolná funkce, značíme symbolem $\mathbb{D}_f = \mathrm{Dom}(f)$ její definiční obor a symbolem $\mathrm{Rng}(f) := f[\mathbb{D}_f]$ její obor hodnot.
- Je-li X topologický prostor a $A \subset X$, značíme uzávěr množiny A symbolem $\overline{A}$ a vnitřek množiny A symbolem $\mathrm{Int}(A)$.
- Pro účely lemmatu 2.3 zavedeme značení sloužící k nalepování funkcí. Nechť je tedy $\mathcal{A}$ nějaká množina reálných funkcí reálné proměnné. Pokud
$$\bigcup_{f \in \mathcal{A}} \mathrm{graf}(f)$$
je grafem nějaké funkce $g : \bigcup_{f \in \mathcal{A}} \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$, potom definujeme symbol
$$\bigvee_{f \in \mathcal{A}} f := g.$$

- Pro funkce $g : \mathbb{D}_g \to \mathbb{R}$ a $h : \mathbb{D}_h \to \mathbb{R}$ definujeme operátor $\vee$ předpisem

  $$g \vee h := \bigvee_{f \in \{g,h\}} f,$$

  má-li pravá strana smysl.

2.3 Lemma (O vrstevnicích) Buďte $(a_1, a_2) \subset \mathbb{R}$ a $(b_1, b_2) \subset \mathbb{R}$ omezené otevřené intervaly, označme $G := (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ je třídy C^1 a taková že pro každý bod $[x; y] \in G$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0.$$

Potom pro každé $[x_1; y_1] \in G$ existuje spojitě diferencovatelná funkce $g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ jedné reálné proměnné taková, že platí:

(i) $g(x_1) = y_1$

(ii) pro všechna $x \in \mathbb{D}_g$ platí $f(x, g(x)) = f(x_1, y_1)$

(iii) funkce g je ryze monotónní a $g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))}$

(iv) $\mathrm{graf}(g) \subset G$

(v) není pravda, že $\overline{\mathrm{graf}\left(g\lfloor_{\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right)} \subset G$

(vi) není pravda, že $\overline{\mathrm{graf}\left(g\lfloor_{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)}\right)} \subset G$

2.4 Definice Nechť funkce f je jako v lemmatu 2.3. Funkci g s vlastnostmi z lemmatu 2.3 budeme nazývat *vrstevnice funkce* f příslušná (například) bodu $[x_1, y_1]$.

2.5 Důkaz lemmatu 2.3 Volme nějaký bod $[x_1; y_1] \in G$. Věta o implicitní funkci (dále pouze VIF) v naší situaci tvrdí, že existují čísla $\Delta_1 > 0$ a $\Delta_2 > 0$ taková, že pro každé $x \in (x_1 - \Delta_1, x_1 + \Delta_1)$ existuje právě jedno $y \in (y_1 - \Delta_2, y_1 + \Delta_2)$ takové, že $f(x, y) = f(x_1, y_1)$. (VIF zde můžeme použít, protože předpokládáme $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ na G.) Označme tedy toto $g_1(x) := y$. Protože podle předpokladu je $f \in C^1(G)$, je podle VIF $g_1 \in C^1((x_1 - \Delta_1, x_1 + \Delta_1))$. Položme nyní:

$$\mathcal{A} := \Big\{ g : I_g \to (b_1, b_2) \,\Big|\, I_g \subset (a_1, a_2) \text{ je ot. interval, } x_1 \in I_g,\ g(x_1) = y_1,$$
$$g \in C^1(I_g) \text{ a pro všechna } x \in I_g \text{ je } f(x, g(x)) = f(x_1, y_1) \Big\}$$

Již víme, že $\mathcal{A} \neq \emptyset$, protože $g_1 \in \mathcal{A}$. Na A definujeme uspořádání $\prec$ takto:

$$g \prec h \iff \operatorname{graf}(g) \subset \operatorname{graf}(h).$$

Nechť nyní $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ je řetězec (tj. lineárně uspořádaná podmnožina). Najdeme horní závoru $g_2 \in \mathcal{A}$ řetězce $\mathcal{R}$. Položme nejprve

$$I := \bigcup_{h \in \mathcal{R}} I_h.$$

Zřejmě I je otevřená množina. Protože navíc jde o sjednocení souvislých množin s neprázdným průnikem (pro všechna $h \in \mathcal{R}$ je $x_1 \in I_h$), je $I \subset \mathbb{R}$ souvislá množina, tedy interval. Definujme nyní funkci $g_2 : I \to \mathbb{R}$ takto:

$$g_2 := \bigvee_{h \in \mathcal{R}} h.$$

Funkce g_2 je dobře definována, protože $\mathcal{R}$ je řetězec. Skutečně, je-li $x \in I$ a jsou-li $h_1 \in \mathcal{R}$ a $h_2 \in \mathcal{R}$ funkce takové, že $x \in I_{h_1} \cap I_{h_2}$, potom buďto $h_1 \prec h_2$ nebo $h_2 \prec h_1$. V obou případech máme $h_1(x) = h_2(x)$.

Ověřit další vlastnosti g_2 je rovněž snadné. Že platí $g_2 \in C^1(I)$ dostaneme takto: Volme $x \in I$ libovolně. Existuje funkce $h \in \mathcal{R}$ taková, že $x \in I_h$. Ale I_h je otevřená množina, tedy (podle předchozího kroku) $g_2 \equiv h$ na nějakém okolí bodu x. Protože $h \in C^1(I_h)$, je nutně g_2' spojitá v bodě x. Dále z toho, že $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ dostáváme

$$f(x, g(x)) = f(x, h(x)) = f(x_1, y_1).$$

Celkem tedy $g_2 \in \mathcal{A}$ a je zřejmé, že g_2 je horní závorou řetězce $\mathcal{R}$. Protože $\mathcal{R}$ byl libovolný, ověřili jsme předpoklad Zornova lemmatu.

Víme tedy, že existuje $g \in \mathcal{A}$ maximální prvek, z čehož speciálně ihned plyne, že g splňuje podmínky (i), (ii) a (iv). Označme $\alpha := \inf I_g$ a $\beta := \sup I_g$ (tedy $I_g = (\alpha, \beta)$). Řetízkové pravidlo tvrdí pro $x \in (\alpha, \beta)$

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x, g(x))\Big) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x). \tag{2.1}$$

Protože však g splňuje podmínku (ii), je levá strana rovnice (2.1) nulová, z čehož ihned plyne vzorec v (iii). Uvědomme si ještě, že $f \in C^1(G)$ a její parciální derivace jsou nenulové na G. Z Darbouxovy vlastnosti spojitých funkcí snadno plyne, že $\operatorname{sgn}(g')$ je konstantní na G, z čehož plyne ryzí monotonie funkce g.

Dokážeme, že g splňuje podmínku (vi), podmínka (v) se ukáže analogicky. Předpokládejme tedy, že (vi) neplatí, to jest:

$$\overline{\operatorname{graf}\left(g\lfloor_{\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)}\right)} \subset G$$

Již bylo řečeno, že g je (ryze) monotónní, je navíc i omezená, protože $\operatorname{Rng}(g) \subset (b_1, b_2)$. Tedy existuje

$$\gamma := \lim_{t\to\beta} g(t) \in \mathbb{R}.$$

Přitom zřejmě platí

$$[\beta;\gamma] \in \overline{\operatorname{graf}\left(g\lfloor_{\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)}\right)}, \tag{2.2}$$

celkem tedy $[\beta;\gamma] \in G$. Funkce f je spojitá, a tedy

$$f(\beta,\gamma) = f(\beta, \lim_{t\to\beta} g(t)) = \lim_{t\to\beta_-} f(t, g(t)) = f(x_1, y_1). \tag{2.3}$$

Vzhledem k řádku (2.2) existuje podle VIF C^1-funkce $h : \mathbb{D}_h \to \mathbb{R}$ definovaná na otevřeném intervalu a taková, že $\beta \in \mathbb{D}_h$, $h(\beta) = \gamma$ a pro všechna $x \in \mathbb{D}_h$ platí $f(x, h(x)) = f(\beta,\gamma)$, a tedy (vzhledem k řádku (2.3)) je $f(x, h(x)) = f(x_1, y_1)$ na $\mathbb{D}_h$. Je zřejmé, že $\mathbb{D}_g \cap \mathbb{D}_h \neq \emptyset$.

To, že funkce g a h jsou na průniku svých definičních oborů shodné, dostaneme například takto: Nechť existuje bod $x \in I_g \cap I_h$ takový, že $g(x) \neq h(x)$. Protože však g a h splňují podmínku (ii), platí $f(x, g(x)) = f(x, h(x))$. Tedy podle Lagrangeovy věty existuje nějaké y mezi $g(x)$ a $h(x)$ takové, že $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. To je ale spor s předpoklady na funkci f.

Proto funkce $g \vee h$ leží v $\mathcal{A}$. Navíc $\sup \mathbb{D}_g < \sup \mathbb{D}_h$, a tedy $(g \prec g \vee h)$ & $(g \neq g \vee h)$, což je spor s maximalitou g.

2.6 Lemma Nechť $s = [s_1; s_2] \in \mathbb{R}^2$ je nějaký bod, $\delta > 0$ a označme $G := U(s, \delta)$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ je třídy C^1 a taková že pro každý bod $[x; y] \in G$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0.$$

Nechť dále funkce $\varphi : G \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\varphi : [x, y] \longmapsto -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} \tag{2.4}$$

je omezená konstantou $0 < R \in \mathbb{R}$, tj. splňuje pro všechna $[x; y] \in G$ nerovnost $|\varphi(x, y)| \leq R$. Označme

$$\delta_1 := \frac{\delta}{2R + 1}.$$

Potom, je-li $[x; y] \in U(s, \delta_1)$, platí pro vrstevnici g funkce f příslušnou bodu $[x; y]$:

$$\mathbb{D}_g \supset (s_1 - \delta_1, s_1 + \delta_1).$$

Důkaz Volme bod $[x_1; y_1] \in U(s, \delta_1)$ buď g vrstevnice funkce f příslušná tomuto bodu. Chceme dokázat, že $(\alpha, \beta) := \mathbb{D}_g \supset (s_1 - \delta_1, s_1 + \delta_1)$.

Protože φ je nenulová na G, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\varphi > 0$ na G (to plyne z triviální úvahy využívající Darbouxovy vlastnosti spojitých funkcí jedné proměnné). Přitom pro všechna $t \in \mathbb{D}_g$ je podle předchozího lemmatu $g'(t) = \varphi(t, g(t))$, tedy g je rostoucí.

Nyní předpokládejme pro spor, že existuje nějaké $x_2 \in (s_1 - \delta_1, s_1 + \delta_1) \setminus \mathbb{D}_g$. Nechť například $x_2 < x_1$. Potom zřejmě $\alpha \in (s_1 - \delta_1, s_1 + \delta_1)$. Dodefinujme funkci g v bodě α limitou $g(\alpha) := \lim_{t \to \alpha_+} g(t)$. Pak ale z lemmatu 2.3 (a toho, že g je rostoucí) je jasné, že $g(\alpha) = s_2 - \delta$, neboť pokud by bylo $g(\alpha) > s_2 - \delta$, potom by platilo

$$\overline{\text{graf}\left(g\lfloor_{\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right)} \subset G,$$

a tedy g by nebyla vrstevnice.

Nyní ale víme, že platí nerovnosti

$$|\alpha - x_1| < 2\delta_1 \quad \text{a} \quad |g(\alpha) - g(x_1)| > \delta - \delta_1,$$

přitom g je na (α, x_1) (spojitě) diferencovatelná, tedy podle Lagrangeovy věty existuje $\gamma \in (\alpha, x_1)$ tak, že

$$g'(\gamma) > \frac{\delta - \delta_1}{2\delta_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta_1} - 1\right) = \frac{1}{2}(2R + 1 - 1) = R.$$

To je ale spor, protože podle předpokladu je $g'(\gamma) = \varphi(\gamma, g(\gamma)) < R$.

2.7 Lemma Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je měřitelná a nechť x je bodem hustoty A. Buď $0 < \alpha < 1$ libovolné číslo. Potom platí:

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall h \in (0, \delta])\ (\forall D \subset (x-h, x+h)) :$$

$$(\text{D je měřitelná})\ \&\ (\lambda_1(D) \geq \alpha \cdot 2h) \Longrightarrow \frac{\lambda_1(D \cap A)}{\lambda_1(D)} > 1 - \epsilon.$$

Důkaz Je dána množina A, x bod hustoty A, $\alpha \in (0,1)$. Volme $\epsilon > 0$ libovolně. Protože x je bod hustoty A, existuje podle definice $\delta > 0$ tak, že pro všechna $h \in (0, \delta]$ platí

$$\frac{\lambda_1(A \cap (x-h, x+h))}{2h} > 1 - \alpha\epsilon.$$

Volme měřitelnou množinu $D \subset (x-h, x+h)$ takovou, že $\lambda_1(D) > \alpha \cdot 2h$. Potom

$$\frac{\lambda_1(D \cap (\mathbb{R} \setminus A))}{\lambda_1(D)} < \frac{\lambda_1((x-h, x+h) \cap (\mathbb{R} \setminus A))}{\alpha \cdot 2h} < \frac{\alpha\epsilon}{\alpha} = \epsilon.$$

Ale D je disjunktním sjednocením množiny $D \cap (\mathbb{R} \setminus A)$ a množiny $D \cap A$, a tedy

$$\frac{\lambda_1(D \cap A)}{\lambda_1(D)} > 1 - \epsilon.$$

2.8 Věta Nechť $(a_1, a_2) \subset \mathbb{R}$ a $(b_1, b_2) \subset \mathbb{R}$ jsou omezené otevřené intervaly, $G := (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ je třídy C^1 na G, která pro každý bod $[x; y] \in G$ splňuje

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0.$$

Dále buďte množiny $A \subset (a_1, a_2)$ a $B \subset (b_1, b_2)$ měřitelné, $x_0 \in A$ bod hustoty A a $y_0 \in B$ bod hustoty B. Potom $f(x_0, y_0) \in \operatorname{Int}(f[A \times B])$.

Důkaz Chceme najít $\Delta > 0$ takové, že $f[U([x_0; y_0], \Delta)] \subset f[A \times B]$. Potom totiž $f(x_0, y_0) \in \operatorname{Int}(f[A \times B])$.

Skutečně, $U([x_0; y_0], \Delta)$ je souvislá množina, tedy, protože f je spojitá na G, je $J := f[U([x_0; y_0], \Delta)] \subset \mathbb{R}$ souvislá, to jest interval (nevíme ale jakého typu). Pokud by platilo, že $f(x_0, y_0)$ je krajním bodem intervalu J, znamenalo by to, že funkce f nabývá v bodě $[x_0; y_0]$ lokálního extrému (vzhledem k tomu, že $[x_0; y_0] \in \operatorname{Int}(U([x_0; y_0], \Delta))$). V tom případě by ale platily rovnosti $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, jelikož $f \in C^1(G)$. To by

však byl spor s předpoklady věty, tedy opravdu $f(x_0, y_0) \in \mathrm{Int} J$.
Zbytek důkazu pro přehlednost rozdělíme do několika kroků.

(a) Definujme stejně jako v lemmatu 2.6 funkci $\varphi : G \to \mathbb{R}$ předpisem (2.4). Zopakujme, že tato funkce je za daných předpokladů spojitá a nenulová na G. Stejně jako v důkazu lemmatu 2.6 tedy bez újmy na obecnosti předpokládejme, že φ je kladná na G. Zdůrazněme, že z tohoto předpokladu plyne, že každá vrstevnice funkce f je rostoucí.

(b) Ze spojitosti φ snadno plyne existence $\delta_2 > 0$ takového, že označíme-li

$$R := \sup \Big\{ \varphi(z) \;\Big|\; z \in U([x_0; y_0], \delta_2) \Big\}, \qquad r := \inf \Big\{ \varphi(z) \mid z \in U([x_0; y_0], \delta_2) \Big\},$$

potom $\frac{r}{R} \in (\frac{9}{10}, 1]$. (Je jasné, že můžeme δ_2 volit tak, že $\overline{U([x_0; y_0], \delta_2)} \subset G$, a tedy $0 < r = \min\{\varphi(z) \mid z \in \overline{U([x_0; y_0], \delta_2)}\}$.)

(c) Podle lemmatu 2.6 nyní najdeme $0 < \delta_3 < \delta_2$ tak, že pro všechna $[x; y] \in U([x_0; y_0], \delta_3)$ pro příslušnou vrstevnici funkce f platí, že

$$\operatorname{graf} \left(g\lfloor_{(x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3)} \right) \subset U([x_0; y_0], \delta_2).$$

Označme pro libovolnou vrstevnici h funkce f

$$R_h := \sup_{t \in (x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3)} h'(t), \qquad r_h := \inf_{t \in (x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3)} h'(t).$$

Z volby δ_3 nyní speciálně plyne, že $\frac{r_h}{R_h} \in (\frac{9}{10}, 1]$, protože funkce $[a; b] \mapsto \frac{a}{b}$ je na $(0, \infty) \times (0, \infty)$ rostoucí v proměnné a a klesající v proměnné b (a $\varphi > 0$ na G). Tuto samozřejmou skutečnost již nebudeme zdůrazňovat (tím méně pro vrstevnice restringované na ještě užší interval) a budeme nadále pracovat pouze s R a r.

(d) Podle předpokladu je bod x_0 bodem hustoty množiny A, tedy podle definice existuje $\delta_4 > 0$ takové, že pro všechna $h \in (0, \delta_4]$ je splněna nerovnost $\lambda_1((x_0 - h, x_0 + h) \cap A) > \frac{9}{10} \cdot 2h$.

(e) Nyní užijeme lemma 2.7 na množinu B, její bod hustoty y_0, $\alpha := \frac{r}{2R+1}$ a $\epsilon := \frac{1}{10}$. Lemma 2.7 nám zaručuje existenci takového $\delta > 0$, že pro všechna $h \in (0, \delta)$ a pro všechny množiny $D \subset (y_0 - h, y_0 + h)$ platí implikace

$$(\text{D je měřitelná}) \;\&\; (\lambda_1(D) \geq \alpha \cdot 2h) \Longrightarrow \frac{\lambda_1(D \cap B)}{\lambda_1(D)} > \frac{9}{10}.$$

Zvolme tedy nějaké kladné $h < \min\{\delta_3, \delta_4, \delta\}$ a k tomuto h najděme podle lemmatu 2.6 příslušné $\delta_5 > 0$, konkrétně

$$\delta_5 := \frac{h}{2R+1} < h.$$

Potom pro vrstevnici g_1 příslušnou nějakému bodu $[x;y] \in U([x_0;y_0],\delta_5)$ máme:

$$\begin{aligned}\lambda_1\big(\mathrm{Rng}(g_1\lfloor_{(x_0-\delta_5,x_0+\delta_5)})\big) &= g_1\big((x_0+\delta_5)_-\big) - g_1\big((x_0-\delta_5)_+\big)\\ &= \int_{x_0-\delta_5}^{x_0+\delta_5} g_1'(t)\,dt \geq r\cdot 2\delta_5 = 2h\cdot\frac{r}{2R+1} = 2h\cdot\alpha,\end{aligned}$$

a tedy (protože vzhledem k volbě δ_5 z lemmatu 2.6 je $\mathrm{Rng}\,\big(g_1\lfloor_{(x_0-\delta_5,x_0+\delta_5)}\big) \subset (y_0-h,y_0+h)$) platí

$$\lambda_1\big(\mathrm{Rng}(g_1\lfloor_{(x_0-\delta_5,x_0+\delta_5)}) \cap B\big) \geq \frac{9}{10}\cdot\lambda_1\big(\mathrm{Rng}(g_1\lfloor_{(x_0-\delta_5,x_0+\delta_5)})\big)\,. \tag{2.5}$$

(f) Na závěr položme $\Delta := \delta_5$ a ukažme, že $f[U([x_0;y_0],\Delta)] \subset f[A\times B]$. Volme proto libovolné $[x_1,y_1] \in U([x_0;y_0],\Delta)$. Chceme ukázat, že $f(x_1,y_1) \in f[A\times B]$. Najděme g_1 vrstevnici f příslušnou bodu $[x_1;y_1]$ a označme $g := g_1\lfloor_{(x_0-\Delta,x_0+\Delta)}$.

Stačí nám, že $g[\mathbb{D}_g\cap A]\cap B \neq \emptyset$. To totiž znamená, že existuje $x_2 \in \mathbb{D}_g \cap A$ takové, že $y_2 := g(x_2) \in B$, tedy $[x_2,y_2] \in A\times B$, tedy $f(x_1,y_1) = f(x_2,g(x_2)) = f(x_2,y_2) \in f[A\times B]$, kde první rovnost platí proto, že g je restrikcí vrstevnice příslušné bodu $[x_1,y_1]$. K tomu nám ale zřejmě stačí, že $\lambda_1(g[\mathbb{D}_g\cap A]) + \lambda_1(\mathrm{Rng}(g)\cap B) > \lambda_1(\mathrm{Rng}(g))$.

(g) Podle kroku (d) víme, že $\lambda_1\big((x_0-\Delta,x_0+\Delta)\cap A\big) > \frac{9}{10}\cdot 2\Delta$, protože $\Delta < \delta_4$. Dále podle kroku (e) máme (2.5). Před závěrečným výpočtem ještě uvažme, že z vnitřní regularity Lebesgueovy míry plyne, že můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že množina A je tvaru

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

kde všechny množiny K_n jsou kompaktní. Protože funkce g je spojitá a spojitý obraz kompaktu je kompaktní, je množina $g_1\big[\overline{\mathbb{D}_g}\cap A\big]$ (která se od množiny $g[\mathbb{D}_g\cap A]$ liší nejvýše o dva body) typu F_σ, tedy měřitelná. Nyní počítejme s použitím věty o substituci (v druhé rovnosti), bodu (b) a toho, že $\Delta < \delta_2$:

$$\lambda_1(g[\mathbb{D}_g\cap A]) = \int_{g[\mathbb{D}_g\cap A]} 1 = \int_{\mathbb{D}_g\cap A} |g'(t)|\,dt \geq \int_{\mathbb{D}_g\cap A} r = r\cdot\lambda_1(\mathbb{D}_g\cap A)$$

$$\geq r\cdot\frac{9}{10}\cdot 2\Delta = \frac{9}{10}\cdot\frac{r}{R}\cdot R\cdot 2\Delta > \left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot R\cdot 2\Delta > \left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\lambda_1(\mathrm{Rng}(g)).$$

Z právě provedeného výpočtu, odhadu (2.5) a úvah provedených v kroku (f) plyne, že jsme s důkazem hotovi.

2.9 Důsledek Existuje množina $S \subset [0,1]^2$ taková, že $\lambda_2(S) = 1$ a přitom kdykoli měřitelné množiny $A \subset [0,1]$, $B \subset [0,1]$ splňují $A \times B \subset S$, pak alespoň jedna z množin A, B má míru nula.

Důkaz Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definována předpisem $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Je jasné, že tato funkce splňuje předpoklady věty 2.8 na množině $G := (0,1)^2$. Položme

$$S := [0,1]^2 \cap f^{-1}[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}].$$

Platí $\lambda_2(S) = 1$, neboť doplňek množiny S ve čtverci $(0,1)^2$ je sjednocením částí kružnic s racionálními poloměry. Ty mají míru nula a samozřejmě jich je spočetně mnoho. Ze σ-aditivity míry plyne zbytek.

Tvrzení dokážeme nepřímo; předpokládejme tedy, že měřitelné množiny $A \subset (0,1)$ a $B \subset (0,1)$ mají obě kladnou míru a platí $A \times B \subset S$. Podle Lebesgueovy věty o hustotě jsou skoro všechny body množiny A body hustoty A a skoro všechny body množiny B jsou body hustoty B. Speciálně tedy existují body $x_0 \in A$ bod hustoty A a $y_0 \in B$ bod hustoty B. Podle předchozí věty však platí, že $f(x_0, y_0) \in \mathrm{Int}(f[A \times B])$, tedy speciálně $f[A \times B]$ má neprázdný vnitřek. Avšak množina všech racionálních čísel je hustá v $\mathbb{R}$, a tedy existuje nějaké $q \in \mathbb{Q} \cap f[A \times B]$. Z toho plyne, že neplatí inkluze $A \times B \subset S$, protože z definice S plyne $f[S] \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. Tím je důkaz hotov.

Literatura

[1] Z. Buczolich, Product sets in plane, sets of the form $A + B$ on the real line and Hausdorff measures, *Acta Math. Hungar.* **65** (1994), no. 2, 107-113

[2] M. L. Brodskiy, On some properties of sets of positive measure, *Uspekhi Mat. Nauk.* 4, No. 3, **31** (1949), 136-139.

[3] B. Balcar, P. Štěpánek: *Teorie množin*, Academia, Praha, 2001.