Oponentský posudek bakalářské práce

Martin Rmoutil: „O existenci velkých zobecněných obdélníků v podmnožině roviny kladné míry“

V předložené práci jsou dokázány následující dva výsledky:

(1) Za hypotézy kontinua pro každou množinu $S \subset [0,1]^2$ plné míry existují množiny $A, B \subset [0,1]$, které mají vnější míru 1 a splňují $A \times B \subset S$. (Věta 1.3)

(2) Existuje taková množina $S \subset [0,1]^2$ plné míry, že kdykoli $A, B \subset [0,1]$ jsou měřitelné množiny splňující $A \times B \subset S$, pak alespoň jedna z nich má míru nula. (Důsledek 2.9)

Jde o výsledky známé, důkaz prvního ovšem v literatuře uveden není, důkaz druhého v této formě rovněž ne, proto zpracování důkazů vyžadovalo netriviální úsilí.

Důkaz Věty 1.3 (tedy prvního výsledku) je proveden transfinitní indukcí, což vyžadovalo porozumění této netriviální technice. Druhý výsledek je odvozen z Věty 2.8, jejíž důkaz pomocí věty o implicitní funkci tvoří větší část druhé kapitoly.

Práce je celkově dobře napsaná, i když nějaké nepřesnosti a překlepy se též najdou:

(i) V důkazu Lemmatu 1.4 na straně 7 by mělo být, že bez újmy na obecnosti $I = [0,1]$.

(ii) Strana 9, řádky 11-8 zdola: Tento odstavec nedává smysl. Mělo by tam být pouze, že množina $G(\dots)$ je neprázdná, kdykoli je definovaná.

(iii) Strana 10, poslední odstavec: Chybí zde limitní krok transfinitní indukce. Nicméně, díky formulaci tvrzení $V(\delta)$ je triviální.

Dále uvádím několik poznámek a námětů k výsledkům jako takovým:

- Věta 1.3 je formulovaná a dokázaná za hypotézy kontinua. Zcela stejný důkaz projde i za Martinova axiomu. Jediný důsledek hypotézy kontinua, který se používá, je fakt, že sjednocení méně než kontinua nulových množin je nulová množina. A toto platí i za Martinova axiomu. Pak je přirozená otázka, zda Věta 1.3 platí i bez dodatečných axiomů či nikoli.
- V důkaze Lemmatu 2.3 o vrstevnicích se zbytečně používá Zornovo lemma. Množina $\mathcal{A}$ je totiž usměrněná (tedy každé dva prvky mají společnou horní závoru). To plyne z toho, že každé dva prvky se shodují na průniku svých definičních oborů, což se vlastně dokazuje v posledním odstavci.
- Důsledek 2.9 je možné dokázat jednodušeji. Jednak není potřeba lemma o vrstevnicích, protože pro zvolenou funkci víme předem, jak vypadají vrstevnice. Navíc, kdyby se zvolila funkce $f(x,y) = x + y$, nebyla by potřeba Věta 2.8, ale stačilo by použít známou Steinhausovu větu. To ovšem nijak nesnižuje význam Věty 2.8 ani Lemmatu 2.3, které jsou pěkné a zajímavé i samy o sobě.

Závěr: Práce jednoznačně splňuje požadavky [illegible] bakalářskou práci.

V Praze dne 30. 8. 2007

[illegible]

KMA MFF UK

Návrh klasifikace bakalářské práce

Martin Rmoutil: „O existenci velkých zobecněných obdélníků v podmnožině roviny kladné míry“

Práci navrhuji klasifikovat stupněm **výborně**.

V Praze dne 30. 8. 2007

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, PhD.
KMA MFF UK