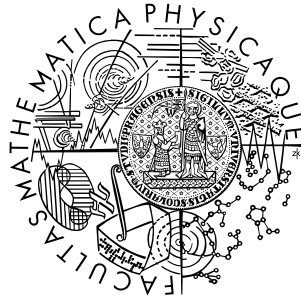


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Tereza Baumová

### Boolovské modely

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Kateřina Helisová

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

2007

Na tomto místě bych chtěla poděkovat Mgr. Kateřině Helisové za odborné vedení a přátelský přístup, Tomáši Kohanovi, Janu Bártkovi, Daliboru Slovákovi, Lucii Kračmerové a Josefu Janákovi za teoretické rady i praktickou pomoc a rodičům a přátelům za podporu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 5.8.2007

Tereza Baumová

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Bodové procesy</b>	<b>6</b>
2.1	Binomický bodový proces . . . . .	7
2.2	Poissonův proces . . . . .	7
2.2.1	Homogenní Poissonův proces . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Boolovské modely</b>	<b>11</b>
3.1	Základní vlastnosti . . . . .	11
3.2	Charakteristiky Booleovských modelů . . . . .	12
3.2.1	Funkcionál kapacity . . . . .	12
3.2.2	Objemový podíl . . . . .	13
3.2.3	Kontaktní distribuční funkce . . . . .	15
3.2.4	Kovariance . . . . .	16
3.3	Simulace . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Závěr</b>	<b>20</b>
	<b>Literatura</b>	<b>21</b>

Název práce: Boolovské modely

Autor: Tereza Baumová

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Kateřina Helisová

e-mail vedoucího: helisova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Předložená práce se zabývá stručným popisem bodových procesů a dále studiem na ně navazujících Booleovských modelů. V první části je zaveden bodový proces obecně a poté binomický a Poissonův bodový proces a některé jejich vlastnosti, především stacionarita. Ve druhé části je definována náhodná množina a Booleovský model a odvozeny vztahy pro základní charakteristiky Booleovských modelů. V závěru práce jsou uvedeny simulace Booleovských modelů s konkrétními parametry.

Klíčová slova: Poissonův bodový proces, náhodná množina, Booleovský model

Title: Boolean models

Author: Tereza Baumová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Kateřina Helisová

Supervisor's e-mail address: helisova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The present work concerns a brief description of the point processes and then a study of Boolean models, which are based on the point processes. In the first part of the work a general point process is introduced and then there are binomial and Poisson point process with several properties, especially the stationarity. In the second part a random set and a Boolean model are defined and formulas for their basic characteristics are deduced. Several simulations of Boolean models with specific parameters are presented in the end of the work.

Keywords: Poisson point process, random set, Boolean model

# Kapitola 1

## Úvod

Booleovské modely hrají důležitou roli ve stochastické geometrii. Často popisují přírodní a společenské jevy v jazyce matematiky. Představme si například krajinu porostlou keři. Tvar a velikost keřů i rozmístění jednotlivých keřů je náhodné, i když se řídí jistými přírodními zákonitostmi. Řekneme-li nyní, že rozmístění i tvar keřů mají pevně daná rozdělení, máme Booleovský model. Booleovské modely jsou tedy zjednodušeně řečeno systémy náhodných množin náhodně rozmístěných v prostoru.

Ve druhé kapitole popisujeme bodové procesy alespoň v takovém rozsahu, jaký je potřeba ke studiu Booleovských modelů. Nejprve definujeme bodový proces, jeho rozdělení a míru intenzity. Velmi stručně pohovoříme o binomickém bodovém procesu a zbytek kapitoly věnujeme Poissonovu bodovému procesu, jehož speciální případ (stacionární Poissonův proces) potřebujeme pro definici Booleovského modelu. Dokážeme větu o existenci a jednoznačnosti Poissonova procesu pro danou míru intenzity.

Na začátku třetí kapitoly definujeme náhodnou množinu a Booleovský model. Poté uvedeme některé jeho charakteristiky a odvodíme pro ně vzorce, které využijeme při řešení ilustrativních příkladů. V závěru kapitoly předvedeme simulace Booleovských modelů s konkrétními parametry.

# Kapitola 2

## Bodové procesy

Označme:

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ... pravděpodobnostní prostor

$\mu$  ... Lebesgueova míra na  $\mathbb{R}^n$

Zavedme měřitelný prostor  $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$  tak, že  $\mathcal{N}$  je systém všech lokálně konečných podmnožin  $\mathbb{R}^n$  (tj. jejich průnik s libovolnou omezenou podmnožinou  $\mathbb{R}^n$  je konečný) a  $\mathfrak{N}$  je  $\sigma$ -algebra na  $\mathcal{N}$ .

**Definice:** Měřitelné zobrazení  $\Phi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{N})$ , se nazývá *bodový proces* v  $\mathbb{R}^n$ .

**Definice:** Jestliže pro každé dva body libovolné realizace  $\xi_i, \xi_j, i \neq j$ , platí  $\xi_i \neq \xi_j$ , řekneme, že bodový proces je *jednoduchý*.

$\Phi(B) = |\Phi \cap B|$  značí počet bodů procesu  $\Phi$  obsažených v borelovské množině  $B \in (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ . Rozdělení  $P$  bodového procesu  $\Phi$  je

$$P(Y) = \mathbf{P}(\Phi \in Y) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : \Phi(\omega) \in Y\}) \text{ pro } Y \in \mathfrak{N}.$$

Rozdělení  $P$  je jednoznačně určeno konečně rozměrnými rozděleními

$$\mathbf{P}(\Phi(B_1) = n_1, \dots, \Phi(B_k) = n_k), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

kde  $B_1, \dots, B_k$  jsou po dvou disjunktní omezené borelovské množiny a  $n_1, \dots, n_k \geq 0$ . Dále platí, že rozdělení bodového procesu je jednoznačně určeno tzv. *prázdnými pravděpodobnostmi*  $v_B$ :

$$v_B = \mathbf{P}(\Phi(B) = 0) = \mathbf{P}(\Phi \cap B = \emptyset),$$

kde  $B$  probíhá všechny kompaktní množiny v  $\mathbb{R}^n$ .

**Definice:** Střední hodnota počtu bodů bodového procesu  $\Phi$  v borelovské množině  $B$  se nazývá *míra intenzity* a značí se  $\Lambda$ . Má-li míra intenzity  $\Lambda$  hustotu vzhledem k Lebesgueově míře, platí vztah

$$\mathbf{E} \Phi(B) = \Lambda(B) = \int_B \lambda(x) dx, \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

a  $\lambda$  se nazývá *funkce intenzity* bodového procesu. Platí-li  $\Lambda(B) = \lambda \cdot \mu(B)$  a  $\lambda$  je nějaká kladná konstanta, řekneme, že bodový proces je *homogenní s intenzitou*  $\lambda$ .

**Definice:** Označme  $B_x := \{b + x : b \in B\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Mají-li pro všechny borelovské množiny  $B$  a všechna  $x \in \mathbb{R}^n$  náhodné veličiny  $\Phi(B)$  a  $\Phi(B_x)$  stejné rozdělení, řekneme, že bodový proces  $\Phi$  je *stacionární*, neboli invariantní vůči posunutí. Je-li  $r$  rotace a platí

$$r\Phi(B) = \Phi\{rB\},$$

říkáme, že Poissonův proces je *izotropní*, neboli invariantní vzhledem k rotaci.

## 2.1 Binomický bodový proces

Nejjednodušší bodový proces je takový, který obsahuje jen jeden bod. *Rovnoměrně rozmístěný bod* (a *uniformly distributed point*)  $\xi$  v kompaktní množině  $W \subset \mathbb{R}^n$  je takový bod, pro který platí

$$P(\xi \in A) = \mu(A)/\mu(W), \quad \forall A \subset W,$$

tj. pravděpodobnost, že se bod nachází v množině  $A \subset W$ , je přímo úměrná velikosti  $A$ .  $N$  nezávislých náhodných bodů rovnoměrně rozmístěných v množině  $W$  tvoří *binomický bodový proces*. Platí

$$\begin{aligned} P(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) &= P(\xi_1 \in A_1) \cdots P(\xi_n \in A_n) \\ &= \frac{\mu(A_1) \cdots \mu(A_n)}{(\mu(W))^n}, \quad A_1, \dots, A_n \subset W. \end{aligned}$$

Binomický bodový proces budeme značit  $\Phi_W^{(n)}$ , zkráceně  $\Phi^{(n)}$ . Přestože rozmístění bodů je nezávislé, počet bodů v podmnožinách  $W$  nezávislý není, což je zřejmé z implikace

$$[\Phi^{(n)}(B) = m] \Rightarrow [\Phi^{(n)}(W \setminus B) = n - m].$$

Je-li  $A$  borelovská podmnožina  $W$ ,  $\Phi^{(n)}$  má binomické rozdělení s parametry  $n = \Phi^{(n)}(W)$  a  $p$ ,  $p(A) = \mu(A)/\mu(W)$ , tzn.  $P(\Phi^{(n)}(A) = k) = \binom{n}{k} (p(A))^k (1 - p(A))^{n-k}$ . Ze vztahu

$$E\Phi^{(n)}(A) = n \cdot p(A) = \frac{n}{\mu(W)} \cdot \mu(A)$$

je zřejmé, že binomický proces je homogenní s intenzitou

$$\lambda = n \cdot p(A)/\mu(A) = \Phi^{(n)}(W)/\mu(W).$$

## 2.2 Poissonův proces

Na rozdíl od binomického procesu, u obecného Poissonova procesu je počet bodů v množině náhodný. Poissonův proces je charakterizován mírou intenzity  $\Lambda = E\Phi$ , kde  $\Lambda$  je difúzní (samostatnému bodu přiřadí míru 0) Radonova míra (míra kompaktní podmnožiny  $\mathbb{R}^n$  je konečná). Poissonův proces má následující dvě vlastnosti:

1. počet bodů v omezené borelovské množině  $B$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\Lambda(B)$ , tedy

$$\mathbf{P}(\Phi(B) = m) = \frac{[\Lambda(B)]^m}{m!} \cdot \exp\{-\Lambda(B)\}$$

2. jsou-li  $B_1, \dots, B_k$  disjunktní borelovské množiny pro  $k \in \mathbb{N}$ , pak  $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_k)$  jsou nezávislé náhodné veličiny.

Protože rovnost  $\Lambda(B) = \mathbf{E}\Phi(B) = \mathbf{E}\Phi(B_x) = \Lambda(B_x)$  obecně neplatí, je zřejmé, že Poissonův proces není obecně stacionární.

Intenzita  $\lambda$  pro Poissonův proces v  $\mathbb{R}^n$  existuje.

**Věta:** Pro danou míru intenzity  $\Lambda$  existuje právě jeden Poissonův proces.

*Důkaz:* Zkonstruujeme nejprve bodový proces  $\Phi$ : zvolme  $0 \in \Phi$ . Definujeme  $T_1 := B(0, 1)$  (uzavřená koule se středem 0 a poloměrem 1),  $T_i := B(0, i) \setminus B(0, i-1)$ . Necht'  $N_i$  jsou nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametrem  $\Lambda(T_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Nyní za podmínky  $N_i = n_i$  generujeme binomický proces  $X_i = \{x_{i1}, \dots, x_{in_i}\}$ , kde  $X_i$  jsou vzájemně nezávislé.

$$\mathbf{P}(X_{ij} \in A \mid N_i = n_i) = \frac{\Lambda(A)}{\Lambda(T_i)}$$

Nyní položíme  $\Phi := \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ .  $\Phi$  je měřitelné zobrazení, neboť  $\Phi(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{1}_{x_{ij} \in B}$ .  $\Phi$  je tedy bodový proces, zbývá dokázat, že je Poissonův a jednoznačný. Necht'  $B$  je omezená borelovská množina.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Phi(T_i \cap B) = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}(N_i = n) \cdot \mathbf{P}(\Phi(T_i \cap B) = k \mid N_i = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\Lambda(T_i)]^n}{n!} \cdot \exp\{-\Lambda(T_i)\} \cdot \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \left(\frac{\Lambda(T_i \cap B)}{\Lambda(T_i)}\right)^k \cdot \left(\frac{\Lambda(T_i \setminus B)}{\Lambda(T_i)}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\exp\{-\Lambda(T_i)\}}{k!} \cdot (\Lambda(T_i \cap B))^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\Lambda(T_i \setminus B)]^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\Lambda[(T_i \cap B)]^k}{k!} \cdot \exp\{-\Lambda(T_i \cap B)\} \\ &\Rightarrow \Phi(T_i \cap B) \sim Po(\Lambda(T_i \cap B)) \Rightarrow \Phi(B) = \sum_{i: T_i \cap B \neq \emptyset} \Phi(T_i \cap B) \sim Po(\Lambda(B)). \end{aligned}$$

Nezávislost veličin  $\Phi(T_i \cap A)$ ,  $\Phi(T_j \cap B)$  pro  $i \neq j$  a  $A, B$  disjunktní borelovské množiny plyne z konstrukce množin  $T_n$ . Dokážeme nezávislost pro  $i = j$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Phi(T_i \cap A) = k, \Phi(T_i \cap B) = l) &= \\ &= \sum_{n=k+l}^{\infty} \mathbf{P}(N_i = n) \cdot \mathbf{P}(\Phi(T_i \cap A) = k, \Phi(T_i \cap B) = l \mid N_i = n) \\ &= \sum_{n=k+l}^{\infty} \frac{[\Lambda(T_i)]^n}{n!} \cdot \exp\{-\Lambda(T_i)\} \cdot \binom{n}{k} \binom{n-k}{l} \cdot \left(\frac{\Lambda(T_i \cap A)}{\Lambda(T_i)}\right)^k \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{\Lambda(T_i \cap B)}{\Lambda(T_i)}\right)^l \cdot \left(\frac{\Lambda(T_i \setminus (A \cup B))}{\Lambda(T_i)}\right)^{n-k-l} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \exp\{-\Lambda(T_i)\} \cdot \frac{(\Lambda(T_i \cap A))^k}{k!} \cdot \frac{(\Lambda(T_i \cap B))^l}{l!} \cdot \sum_{n=k+l}^{\infty} \frac{[\Lambda(T_i \setminus (A \cup B))]^{n-k-l}}{(n-k-l)!} \\
&= \exp\{-\Lambda(T_i \cap A)\} \cdot \frac{(\Lambda(T_i \cap A))^k}{k!} \cdot \exp\{-\Lambda(T_i \cap B)\} \cdot \frac{(\Lambda(T_i \cap B))^l}{l!} \\
&= \mathbf{P}(\Phi(T_i \cap A) = k) \cdot \mathbf{P}(\Phi(T_i \cap B) = l),
\end{aligned}$$

neboť

$$-\Lambda(T_i) + \Lambda(T_i \setminus (A \cup B)) = -\Lambda(T_i \cap (A \cup B)) = -[\Lambda(T_i \cap A) + \Lambda(T_i \cap B)].$$

Tudíž  $\Phi(T_i \cap A)$ ,  $\Phi(T_i \cap B)$  jsou nezávislé náhodné veličiny a  $\Phi$  je Poissonův proces. Jelikož bodový proces je jednoznačně určen prázdnými pravděpodobnostmi a  $\mathbf{P}(\Phi(A) = 0) = \exp\{-\Lambda(A)\}$ , důkaz věty je dokončen. □

V teorii Boolovských modelů se využívá stacionární Poissonův proces. Později dokážeme, že homogenní Poissonův proces je stacionární, a proto popíšeme také tento speciální případ.

## 2.2.1 Homogenní Poissonův proces

Homogenní Poissonův proces je limitním případem binomického procesu, pro který celkový počet bodů  $n$  jde k nekonečnu,  $p = p(A)$  se blíží k nule a zároveň hodnota  $p \cdot n$  se blíží ke kladné konstantě  $\lambda$ . Z toho vyplývá, že počet bodů procesu v borelovské množině  $B$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\lambda \cdot \mu(B)$ , tj.

$$\mathbf{P}(\Phi(B) = k) = \frac{\lambda^k \cdot [\mu(B)]^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot \mu(B)},$$

kde  $\lambda \in (0, \infty)$ .

Střední hodnota procesu  $\Phi$  je  $\mathbf{E}\Phi(B) = \lambda \cdot \mu(B)$ , tedy  $\lambda$  je intenzita Poissonova procesu. Z nezávislosti veličin  $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_k)$  plyne konečně rozměrné rozdělení

$$\mathbf{P}(\Phi(B_1) = n_1, \dots, \Phi(B_k) = n_k) = \frac{\lambda^{n_1 + \dots + n_k} [\mu(B_1)]^{n_1} \dots [\mu(B_k)]^{n_k}}{n_1! \dots n_k!} \cdot \exp\left\{-\sum_{i=1}^k \lambda \mu(B_i)\right\}.$$

$$\mathbf{P}(\Phi(B_x^1) = n_1, \dots, \Phi(B_x^k) = n_k) =$$

$$= \frac{\lambda^{n_1 + \dots + n_k} [\mu(B_x^1)]^{n_1} \dots [\mu(B_x^k)]^{n_k}}{n_1! \dots n_k!} \cdot \exp\left\{-\sum_{i=1}^k \lambda \mu(B_x^i)\right\} =$$

$$= \frac{\lambda^{n_1 + \dots + n_k} [\mu(B^1)]^{n_1} \dots [\mu(B^k)]^{n_k}}{n_1! \dots n_k!} \cdot \exp\left\{-\sum_{i=1}^k \lambda \mu(B^i)\right\} =$$

$$= \mathbf{P}(\Phi(B^1) = n_1, \dots, \Phi(B^k) = n_k),$$

Homogenní Poissonův proces je tedy stacionární.

Prázdné pravděpodobnosti mají v případě homogenního Poissonova procesu tvar

$$v_B = \frac{[\lambda \cdot \mu(B)]^0}{0!} \cdot \exp\{-\lambda\mu(B)\} = \exp\{-\lambda\mu(B)\}.$$

# Kapitola 3

## Booleovské modely

### 3.1 Základní vlastnosti

Označme:

$$A \oplus B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

$$\bar{A} := \{-a : a \in A\}$$

$\mathbb{K}$  ... systém všech kompaktních podmnožin  $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{F}$  ... systém všech uzavřených podmnožin  $\mathbb{R}^n$

**Definice:** Měřitelné zobrazení  $\Xi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{F}, \mathcal{F})$  se nazývá *náhodná množina*. Pro  $A \in \mathcal{F}$  je  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\Xi \in A)$  *rozdělení náhodné množiny*  $\Xi$ .

**Definice:** Necht'  $\Phi = \{x_1, x_2, \dots\}$  je stacionární Poissonův proces v  $\mathbb{R}^n$  a  $\Xi_1, \Xi_2, \dots$  jsou nezávislé stejně rozdělené kompaktní náhodné množiny v  $\mathbb{R}^n$ , které nezávisí na Poissonově procesu  $\Phi$ . Necht' dále množina  $\Xi_0 \in \mathbb{K}$  je náhodná množina nezávislá na  $\{\Xi_1, \Xi_2, \dots\}$  a na Poissonově procesu  $\Phi$ , ale se stejným rozdělením, jako  $\{\Xi_1, \Xi_2, \dots\}$ , a platí:

$$\mathbb{E}\mu(\Xi_0 \oplus K) < \infty, \quad \forall K \in \mathbb{K}.$$

Pak náhodnou množinu

$$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n + \Xi_n) = (x_1 + \Xi_1) \cup (x_2 + \Xi_2) \cup \dots$$

nazveme Booleovským modelem. Body Poissonova procesu  $\Phi$  se nazveme *jádra Booleovského modelu (germs)*, náhodné množiny  $\Xi_n$  *zrna Booleovského modelu (grains)* a  $\Xi_0$  *typické zrno (primary grain)*.

Je-li intenzita Poissonova procesu  $\lambda$  malá v poměru k velikosti zrn  $\Xi_n$ , pak se jen malý počet zrn překrývá a Booleovský model sestává většinou z izolovaných množin. Takový model může popisovat například systém náhodně rozmístěných částic. Se zvyšujícím se  $\lambda$  se zvyšuje i počet překrytí zrn. Zrna nemusí být souvislé množiny, mohou je tvořit také množiny izolovaných bodů, což vede zpět k bodovým procesům. Booleovské modely mohou popisovat i velmi různorodé přírodní jevy.

Jelikož bodový proces  $\Phi$  je v našem případě stacionární a náhodné množiny  $\Xi_n$  jsou stejně rozdělené, je také Booleovský model  $\Xi$  stacionární. Je-li rozdělení zrn navíc izotropní, je Booleovský model také izotropní.

## 3.2 Charakteristiky Booleovských modelů

### 3.2.1 Funkcionál kapacity

**Definice:** Necht'  $\Xi$  je Booleovský model. Zobrazení  $T_\Xi : \mathbb{K} \rightarrow [0, 1]$  takové, že

$$T_\Xi(K) = \mathbb{P}(\Xi \cap K \neq \emptyset), \quad \forall K \in \mathbb{K}$$

nazveme *funkcionál kapacity*.

Necht'  $K_1, \dots, K_n \in \mathbb{K}$ ,  $K \in \mathbb{K}$  a  $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n$ . Pak  $T_\Xi$  má následující vlastnosti:

1.  $[K_n \searrow K, n \rightarrow \infty] \Rightarrow [T_\Xi(K_n) \searrow T_\Xi(K), n \rightarrow \infty]$
2.  $S_n(K; K_1, \dots, K_n) \geq 0$ , kde  
 $S_n(K; K_1, \dots, K_n) = S_{n-1}(K; K_1, \dots, K_{n-1}) - S_{n-1}(K \cup K_n; K_1, \dots, K_{n-1})$  a  
 $S_0 = 1 - T_\Xi(K)$ .
3.  $T_\Xi(\emptyset) = 0$
4.  $S_n(K; K_1, \dots, K_n) = \mathbb{P}(\Xi \cap K = \emptyset, \Xi_1 \cap K \neq \emptyset, \dots, \Xi_n \cap K \neq \emptyset)$
5. Booleovský model je funkcionálem kapacity jednoznačně určen.

Dokážeme, že  $T_\Xi(K) = 1 - \exp\{-\lambda \mathbb{E}\mu(\bar{\Xi}_0 \oplus K)\}$ .

Zvolme pevně  $K \in \mathbb{K}$ ,  $K \neq \emptyset$ . Nyní definujme  $\Phi_K := \{x_n \in \Phi : (\Xi_n + x_n) \cap K \neq \emptyset\}$ , kde  $\Phi$  je bodový proces jader Booleovského modelu. Zúžený proces  $\Phi_K$  je Poissonův proces, ale není stacionární, neboť pro  $B$  takovou, že  $B \cap K = \emptyset$  platí

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

zatímco

$$\mathbb{P}(\Phi(K) = n) = \frac{\mu(K)}{\mu(\mathbb{R}^n)} \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Existuje tedy míra  $\Lambda_K$  intenzity procesu  $\Phi_K$  a

$$\Lambda_K(B) = \lambda \cdot \int_B p(x) dx, \quad \text{kde } p(x) = \mathbb{P}((\Xi_0 + x) \cap K \neq \emptyset).$$

Zřejmě  $T_\Xi = 1 - \mathbb{P}(\Phi_K(\mathbb{R}^n) = 0)$ . Víme, že

$$\mathbb{P}(\Phi_K(\mathbb{R}^n) = 0) = \frac{[\Lambda_K(\mathbb{R}^n)]^0}{0!} \cdot \exp\{-\Lambda_K(\mathbb{R}^n)\} = \exp\{-\Lambda_K(\mathbb{R}^n)\},$$

$$\text{kde } \Lambda_K(\mathbb{R}^n) = \lambda \cdot \int_{\mathbb{R}^n} p(x) dx.$$

Abychom spočetli  $\Lambda_K$ , vyjádříme si ekvivalentně  $p(x)$ :

$$[(\Xi_0 + x) \cap K \neq \emptyset] \Leftrightarrow [\exists \xi \in \Xi_0 \ \& \ \exists k \in K : \xi + x = k] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\exists \xi \in \Xi_0 \ \& \ \exists k \in K : x = k - \xi] \Leftrightarrow [x \in (\bar{\Xi}_0 \oplus K)],$$

tedy  $p(x) = \mathbf{P}(x \in (\bar{\Xi}_0 \oplus K))$ . Nyní

$$\begin{aligned} \Lambda_K(\mathbb{R}^n) &= \lambda \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}(x \in (\bar{\Xi}_0 \oplus K)) \, dx \\ &= \lambda \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{E}\mathbf{1}_{(\bar{\Xi}_0 \oplus K)}(x) \, dx \\ &= \lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0 \oplus K). \end{aligned}$$

První rovnost plyne z vlastností střední hodnoty a druhou jsme dostali záměnou integrálů. Tedy

$$T_{\Xi}(K) = 1 - \exp\{-\lambda \mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0 \oplus K)\},$$

což jsme chtěli dokázat.

**Poznámka:** Užitečné je označení  $\psi(K) := -\ln[\mathbf{P}(\Xi \cap K = \emptyset)]$ .

$$\begin{aligned} \psi(K) &= -\ln[1 - T_{\Xi}(K)] \\ &= -\ln[\exp\{-\lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0 \oplus K)\}] \\ &= \lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0 \oplus K) \end{aligned}$$

**Příklad 1:** Nechť  $\Xi_n \in \mathbb{R}^2$  jsou koule s náhodným poloměrem  $R$  s exponenciálním rozdělením s parametrem 4 a intenzita Poissonova procesu  $\lambda = 2$  (obrázek takového modelu je v části Simulace). Pro danou  $K \in \mathbb{R}^2$  spočtěme funkcionál kapacity  $T_{\Xi}(K)$ . Nechť  $K := \{[x, y] : x = 0, y \in [0, 5]\}$ , tj.  $K$  je úsečka délky 5.

$$T_{\Xi}(K) = 1 - \exp\{-\lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0 \oplus K)\}$$

Zřejmě  $\mu(\bar{\Xi}_0 \oplus K) = \mu(\Xi_0 \oplus K) = \pi R^2 + 10R$ .

$$R \sim \text{Exp}(4) \Rightarrow f(r) = 4e^{-4r}, \quad r > 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{E}R = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu(\Xi_0 \oplus K) &= \mathbf{E}(\pi R^2 + 10R) = \pi \mathbf{E}R^2 + 10\mathbf{E}R \\ &= \pi \cdot \int_0^{\infty} 4r^2 \cdot e^{-4r} \, dr + \frac{10}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_{\Xi}(K) = 1 - \exp\left\{-2 \cdot \left(\frac{\pi}{8} + \frac{5}{2}\right)\right\} = 1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{4} - 5\right\}$$

### 3.2.2 Objemový podíl

**Definice:** Nechť  $\Xi$  je Booleovský model,  $A, B \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  je omezená Borelovská množina a  $B$  je jednotková krychle. Řekneme, že:

$$p = \mathbf{E}\left(\frac{\mu(\Xi \cap A)}{\mu(A)}\right) = \mathbf{E}\mu(\Xi \cap B),$$

je objemový podíl.

Objemový podíl  $p$  tedy vyjadřuje, jakou část dané množiny model v průměru zaujímá.

$$\begin{aligned}
 p &= \mathbf{E}\mu(\Xi \cap B) = \mathbf{E} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\Xi \cap B}(x) dx \\
 &= \mathbf{E} \int_B \mathbf{1}_{\Xi}(x) dx = \int_B \mathbf{E}\mathbf{1}_{\Xi}(x) dx \\
 &= \int_B \mathbf{P}(x \in \Xi) dx = \int_B \mathbf{P}(0 \in \Xi) dx \\
 &= \mathbf{P}(0 \in \Xi) = T_{\Xi}(\{0\}) \\
 &= 1 - \exp\{-\lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\Xi_0)\}
 \end{aligned}$$

Předchozí rovnosti vyplývají z poznatků teorie pravděpodobnosti, ze stacionarity Booleovského modelu a z vlastností funkcionálu kapacity. Je-li  $\mu(\Xi_n) = 0$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , pak zřejmě  $p = 0$ .

Vyberme nyní náhodně jedno zrno a označme ho  $\Xi^*$ . Zrn sice může být nekonečně mnoho, limitně se však lze přiblížit stavu, kdy pravděpodobnost zvolení zrna je pro všechna zrna stejná. Označme  $\Xi' := \{\Xi_i + x_i : x_i \in \Phi \setminus \{x^*\}\}$ , kde  $x^*$  je jádro příslušné zrna  $\Xi^*$ . Definujme následující pravděpodobnosti:

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \mathbf{P}(x^* \in \Xi') \\
 p_G &= \mathbf{P}((x^* + \Xi^*) \cap \Xi' \neq \emptyset) \\
 p_S &= \frac{\mu(\Xi^* \cap \Xi')}{\mu(\Xi^*)}, \text{ je-li } \mu(\Xi_n) > 0
 \end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned}
 p_0 &= p \\
 p_G &= 1 - \mathbf{E} \exp\{-\psi(\Xi_0)\} \\
 p_S &= p
 \end{aligned}$$

**Příklad 2:** Necht'  $\Xi_n$  jsou stejná jako v příkladě 1. Spočtěme objemový podíl  $p$ .

$$\begin{aligned}
 p &= 1 - \exp\{-\lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\Xi_0)\}, \quad \mathbf{E}\mu(\Xi_0) = \pi R^2 \\
 \mathbf{E}\mu(\Xi_0) &= \pi \mathbf{E}R^2 = \pi \cdot \int_0^\infty 4r^2 \cdot e^{-4r} dr = \frac{\pi}{8} \\
 \Rightarrow p &= 1 - \exp\left\{-2 \cdot \frac{\pi}{8}\right\} = 1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{4}\right\}
 \end{aligned}$$

**Příklad 3:** Necht'  $\Xi_n \in \mathbb{R}^2$  jsou koule s náhodným poloměrem  $R$  s rovnoměrným rozdělením na  $[0, 2; 0, 5]$  a intenzita Poissonova procesu  $\lambda = 2$ . Spočtěme objemový podíl  $p$ .

$$\begin{aligned}
 p &= 1 - \exp\{-\lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\Xi_0)\}, \quad \mathbf{E}\mu(\Xi_0) = \pi R^2 \\
 R &\sim R[0, 2; 0, 5] \Rightarrow f(r) = \frac{10}{3} \cdot \mathbf{1}_{[0,2; 0,5]}(r), \quad \mathbf{E}R = 0,35
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mu(\Xi_0) &= \pi \mathbb{E}R^2 = \pi \cdot \int_{0,2}^{0,5} \frac{10}{3} r^2 dr = \frac{13}{100} \pi \\ \Rightarrow p &= 1 - \exp\left\{-2 \cdot \frac{13}{100} \pi\right\} = 1 - \exp\left\{-\frac{13}{50} \pi\right\} \end{aligned}$$

### 3.2.3 Kontaktní distribuční funkce

**Definice:** Další veličinou popisující “velikost” Boolovského modelu je *kontaktní distribuční funkce*  $H_B$ . Je-li  $B$  konvexní množina obsahující 0, pak kontaktní distribuční funkci definujeme takto:

$$H_B(r) = 1 - \mathbb{P}(0 \notin \Xi \oplus r\bar{B} \mid 0 \notin \Xi), \quad r \geq 0.$$

Platí:

$$\begin{aligned} H_B(r) &= 1 - \frac{\mathbb{P}((0 \notin \Xi \oplus r\bar{B}) \& (0 \notin \Xi))}{\mathbb{P}(0 \notin \Xi)} \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}((\Xi \cap r\bar{B} = \emptyset) \& (0 \notin \Xi))}{1 - p} \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(\Xi \cap r\bar{B} = \emptyset)}{1 - p} \end{aligned}$$

Při odvozování jsme využili předpoklad, že  $0 \in B$ . Kontaktní distribuční funkce tedy vyjadřuje pravděpodobnost, že  $r$ -násobek konvexní množiny obsahující 0 protíná Boolovský model  $\Xi$  za předpokladu, že  $0 \notin \Xi$ .

Označme  $R := \inf\{s \in \mathbb{R} : \Xi \cap sB \neq \emptyset\}$ . Pak

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R \leq r \mid R > 0) &= 1 - \mathbb{P}(R > r \mid R > 0) = 1 - \mathbb{P}(R > r \mid 0 \notin \Xi) = \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}((\Xi \cap rB = \emptyset) \& (0 \notin \Xi))}{\mathbb{P}(0 \notin \Xi)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(\Xi \cap rB = \emptyset)}{1 - p} = H_B(r). \end{aligned}$$

Zřejmě je funkce  $H_B$  neklesající,

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} H_B(r) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} H_B(r) = 1.$$

Dále pro  $h > 0$

$$H_B(r+h) - H_B(r) = \frac{\mathbb{P}(\Xi \cap rB = \emptyset) - \mathbb{P}(\Xi \cap (r+h)B = \emptyset)}{1 - p} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

což znamená, že funkce  $H_B$  je spojitá zprava. Tedy  $H_B$  je skutečně distribuční funkce.

Dvě nejčastěji používané testovací množiny  $B$  jsou úsečka délky 1 a jednotková koule. V případě jednotkové koule se dá kontaktní distribuční funkce vykládat jako distribuční funkce vzdálenosti bodů  $a$  a  $b$ , přičemž  $a$  je bod náhodně vybraný mimo  $\Xi$  a  $b$  je bodem  $\Xi$  nejbližším k bodu  $a$ .

**Příklad 4:** Necht'  $\Xi_n \in \mathbb{R}^2$  jsou koule s náhodným poloměrem  $R \sim R[1, 2]$  a intenzita procesu jader je  $\lambda = 2$ . Necht'  $B \in \mathbb{R}^2$  je jednotková koule. Pro  $z \geq 0$  spočtěme kontaktní distribuční funkci  $H_B(z)$ .

$$H_B(z) = 1 - \frac{\mathbf{P}(\Xi \cap z\bar{B} = \emptyset)}{1 - p}$$

$p = 1 - \exp\{-\lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\Xi_0)\}$  a  $\mathbf{P}(\Xi \cap z\bar{B} = \emptyset) = 1 - T_\Xi(z\bar{B}) = \exp\{-\lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0 \oplus z\bar{B})\}$ . Jelikož  $B$  je jednotková koule,  $\mu(\bar{\Xi}_0 \oplus z\bar{B}) = \mu(\Xi_0 \oplus zB)$  a tedy

$$H_B(z) = 1 - \exp\{-\lambda[\mathbf{E}\mu(\Xi_0 \oplus zB) - \mathbf{E}\mu(\Xi_0)]\}.$$

$$\mathbf{E}\mu(\Xi_0) = \mathbf{E}\pi R^2 = \pi \cdot \int_1^2 r^2 dr = \frac{7\pi}{3}$$

$$\mathbf{E}\mu(\Xi_0 \oplus zB) = \mathbf{E}\pi(R+z)^2 = \pi \cdot \int_1^2 (r+z)^2 dr = \pi \cdot \left(\frac{7}{3} + 3z + z^2\right)$$

$$\Rightarrow H_B(z) = 1 - \exp\{-2\pi(z^2 + 3z)\}$$

### 3.2.4 Kovariance

**Definice:** Necht'  $\Xi$  je Booleovský model,  $p > 0$  a  $z \in \mathbb{R}^n$ . Kovarianci  $c$  Booleovského modelu definujeme jako:

$$c(z) = \mathbf{P}(0 \in \Xi \ \& \ z \in \Xi).$$

Označme  $\gamma_{\Xi_0}(z) = \mathbf{E}\mu(\Xi_0 \cap (\Xi_0 - z))$  pro  $\Xi_0$  typické zrno Booleovského modelu  $\Xi$ . Dokážeme, že

$$c(z) = 2p - 1 + (1 - p)^2 \cdot \exp\{\lambda \cdot \gamma_{\Xi_0}(z)\}.$$

$$\begin{aligned} c(z) &= \mathbf{P}(0 \in \Xi \cap (\Xi - z)) \\ &= 1 - \mathbf{P}(0 \notin \Xi \cap (\Xi - z)) \\ &= 1 - \mathbf{P}(0 \notin \Xi) - \mathbf{P}(0 \notin \Xi - z) + \mathbf{P}(0 \notin \Xi \cap (\Xi - z)) \\ &= \mathbf{P}(0 \in \Xi) + \mathbf{P}(0 \in \Xi - z) - 1 + \mathbf{P}(0 \notin \Xi \cap (\Xi - z)) \\ &= 2p - 1 + \mathbf{P}(0 \notin \Xi \cap (\Xi - z)) \end{aligned}$$

Dále  $\mathbf{P}(0 \notin \Xi \cap (\Xi - z)) = \mathbf{P}(\Xi \cap (\Xi - z) = \emptyset) = \exp\{-\psi(\{0, z\})\}$ . Je-li  $A_x = A \oplus \{x\}$ , pak  $A \oplus B = \bigcup_{x \in B} A_x$ . Z toho vyplývá

$$\begin{aligned} \psi(\{0, z\}) &= -\ln[\mathbf{P}(\Xi \cap \{0, z\} = \emptyset)] \\ &= \lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0 \oplus \{0, z\}) = \lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0 \cup \bar{\Xi}_0 + z) \\ &= \lambda \cdot [\mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0) + \mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0 + z) - \mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0 \cap (\bar{\Xi}_0 + z))] \\ &= \lambda \cdot [2\mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0) - \mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0 \cap (\bar{\Xi}_0 + z))] \end{aligned}$$



Víme, že  $1 - p = \exp\{-\lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\Xi_0)\}$ ,  $\gamma_{\Xi_0}(z) = \mathbf{E}\mu(\Xi_0 \cap (\Xi_0 - z))$  a  $\mu(\bar{\Xi}_0) = \mu(\Xi_0)$ .

$$\begin{aligned} c(z) &= 2p - 1 + \mathbf{P}(0 \notin \Xi \cap (\Xi - z)) \\ &= 2p - 1 + \exp\{\ln[\mathbf{P}(0 \notin \Xi \cap (\Xi - z))]\} \\ &= 2p - 1 + \exp\{-\lambda [2\mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0) - \mathbf{E}\mu(\bar{\Xi}_0 \cap (\bar{\Xi}_0 - z))]\} \\ &= 2p - 1 + \exp\{2(-\lambda \mathbf{E}\mu(\Xi_0))\} \cdot \exp\{\lambda \mathbf{E}\mu(\Xi_0 \cap (\Xi_0 - z))\} \\ &= 2p - 1 + (1 - p)^2 \cdot \exp\{\lambda \cdot \gamma_{\Xi_0}(z)\}, \end{aligned}$$

čímž je požadovaná rovnost dokázána.

**Příklad 5:** Necht'  $\Xi_n \in \mathbb{R}^2$  jsou koule s poloměrem  $R = 0,3$  a intenzita procesu jader je  $\lambda = 2$ . Spočtěme kovarianci  $c(z)$ .

$$c(z) = 2p - 1 + (1 - p)^2 \cdot \exp\{\lambda \cdot \gamma_{\Xi_0}(z)\},$$

kde  $\gamma_{\Xi_0}(z) = \mathbf{E}\mu(\Xi_0 \cap (\Xi_0 - z))$ .

Zřejmě  $\mathbf{E}\mu(\Xi_0 \cap (\Xi_0 - z))$  závisí pouze na velikosti  $z$  a pro  $z \geq 2R$  platí

$$\mathbf{E}\mu(\Xi_0 \cap (\Xi_0 - z)) = 0.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu(\Xi_0 \cap (\Xi_0 - z)) &= \int_{\frac{\|z\|}{2}}^{0,3} \sqrt{0,09 - z^2} dz \\ &= 0,09\pi - \|z\| \cdot \sqrt{0,09 - \frac{\|z\|^2}{4}} - 0,18 \cdot \arcsin \frac{\|z\|}{0,6} = \gamma_{\Xi_0}(z) \end{aligned}$$

$$p = 1 - \exp\{-\lambda \cdot \mathbf{E}\mu(\Xi_0)\} = 1 - \exp\{-0,18\pi\}$$

$$\Rightarrow c(z) = 2 - 2 \cdot \exp\{-0,18\pi\} + [\exp\{-0,18\pi\}]^2 \cdot$$

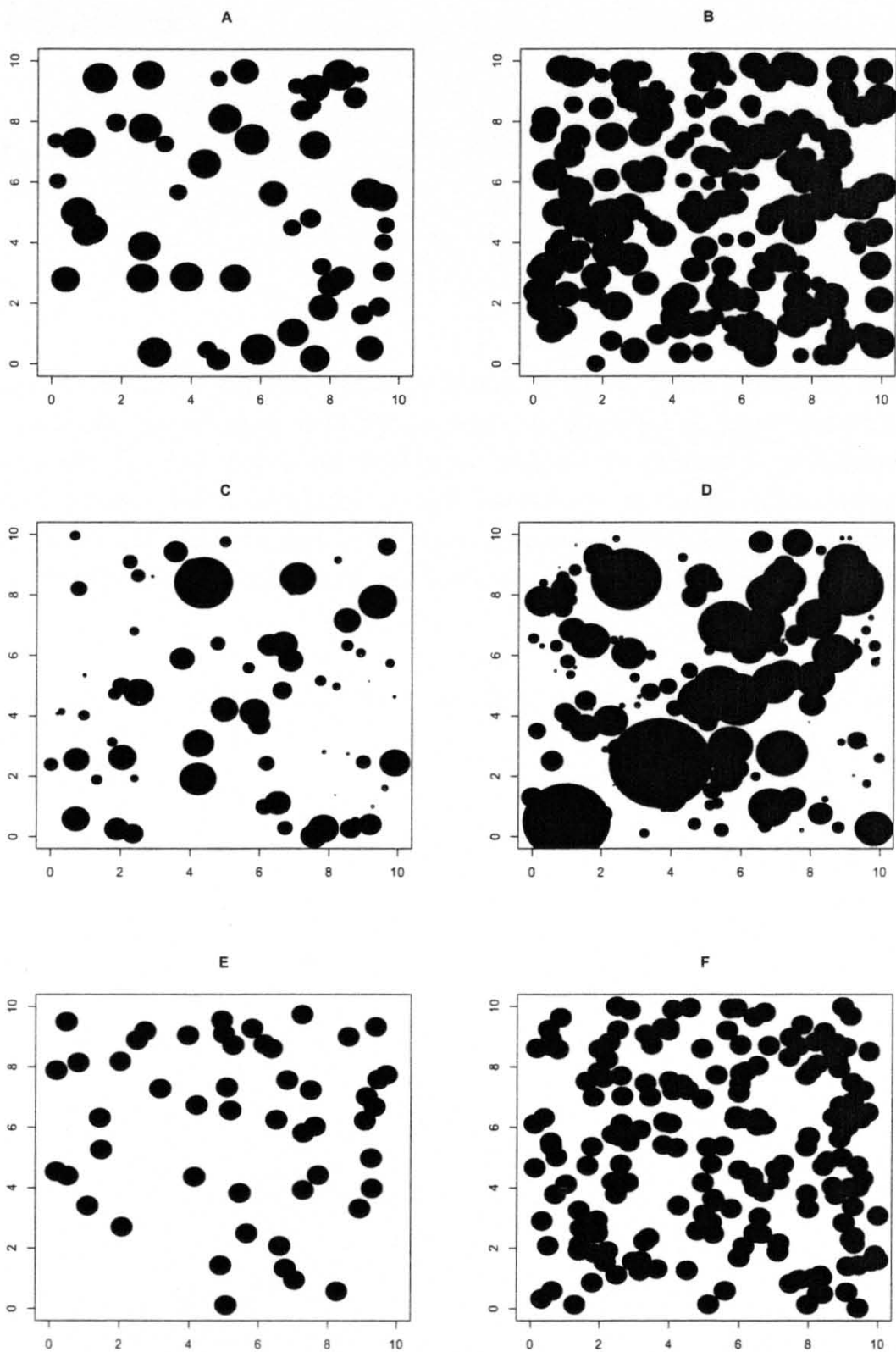
$$\exp\left\{0,18\pi - 2\|z\| \cdot \sqrt{0,09 - \frac{\|z\|^2}{4}} - 0,36 \cdot \arcsin \frac{\|z\|}{0,6}\right\}.$$

### 3.3 Simulace

Provedli jsme několik simulací Booleovských modelů v  $\mathbb{R}^2$  v programu R. V simulacích jsme jako náhodné množiny  $\Xi_n$  nejprve volili koule se středem 0 s pevným poloměrem  $R = 0,3$  a poté s náhodným poloměrem  $R$  s rovnoměrným rozdělením na intervalu  $[0,2; 0,5]$  a s exponenciálním rozdělením s parametrem 4. Všechny tři příklady jsou vyobrazeny s intenzitou procesu jader  $\lambda = 0,5$  a  $\lambda = 2$  ve čtvercích o straně 10 (čtverce budeme dále značit A).

Jelikož homogenní Poissonův proces je stacionární, jeho rozdělení je stejné ve všech množinách shodné míry a závisí pouze na intenzitě  $\lambda$  a na velikosti dané množiny. Restrikce homogenního Poissonova procesu na kompaktní množinu  $A$  je opět homogenní Poissonův proces a počet bodů procesu  $n$  v množině  $A$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\lambda \cdot \mu(A)$ . Ve čtvercích  $A$  tedy vytvoříme proces jader tak, že nejprve vygenerujeme počet jader jako náhodné číslo  $n$  s Poissonovým rozdělením s parametrem  $\lambda \cdot \mu(A)$  a poté získáme souřadnice jader tak, že vygenerujeme  $2n$  náhodných čísel s rovnoměrným rozdělením na intervalu  $[0, 1]$  ( $n$  x-ových a  $n$  y-ových souřadnic) a vynásobíme je délkou strany čtverce  $A$  (body homogenního Poissonova procesu jsou rozmístěny navzájem nezávisle, tudíž i souřadnice jader generujeme nezávisle).

K dokončení simulace již zbývá jen vygenerovat  $n$  poloměrů s patřičným rozdělením a za středy kruhů vzít jednotlivá jádra.



Obrázek 3.1:  $A : \lambda = 0,5; R \sim R[0,2;0,5]$ ,  $B : \lambda = 2; R \sim R[0,2;0,5]$ ,  $C : \lambda = 0,5; R \sim Exp(4)$ ,  $D : \lambda = 2; R \sim Exp(4)$ ,  $E : \lambda = 0,5; R = 0,3$ ,  $F : \lambda = 2; R = 0,3$

# Kapitola 4

## Závěr

Cílem této práce bylo popsat základy teorie Booleovských modelů. Pro jejich definování jsme potřebovali znalost bodových procesů, především homogenního Poissonova procesu. Vlastnosti Booleovských modelů jsme ukázali na řešených příkladech. Poznatky byly získávány především z anglicky psané literatury a česká terminologie se teprve vytváří, proto se čtenář může setkat i s jiným pojmenováním některých uvedených pojmů. U čtenáře se předpokládají základní znalosti teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky.

Jak bodové procesy, tak i Booleovské modely mají široké uplatnění v přírodních i společenských vědách.

# Literatura

- [1] Stoyan D., Kendall W. S., Mecke J.: *Stochastic geometry and its applications*, John Wiley & sons, New York, 1989.
- [2] Rataj J.: *Bodové procesy*, Univerzita Karlova v Praze - Nakladatelství Karolinum, Praha, 2000.
- [3] Helisová K. : *Spatial and Spatio-temporal point Processes*, Week of doctoral students 2006.