Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Helena Kubátová

Modifikace stochastického procesu

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc.
Studijní program: matematika

2007

Poděkování

Děkuji vedoucímu své práce prof. RNDr. Josefu Štěpánovi, DrSc. za odborné konzultace a cenné podněty, které mi poskytl při psaní práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 28.5.2007 Helena Kubátová

Obsah

Název práce: Modifikace stochastického procesu
Autor: Helena Kubátová
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc.
E-mail vedoucího: Josef.Stepan@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme některé základní vlastnosti stochastických procesů, a to především různé typy jejich spojitosti. Zabýváme se modifikacemi stochastických procesů a některými dalšími relacemi mezi stochastickými procesy definovanými na tomtéž pravděpodobnostním prostoru. Dále se zabýváme hledáním spojitých modifikací daného stochastického procesu a dokazujeme některá významná kritéria pro jejich existenci, jako je například Kolmogorovova věta o spojité modifikaci. Jako důležitý příklad spojitého stochastického procesu uvádíme Wienerův proces spolu s důkazem jeho existence.

Klíčová slova: stochastický proces, spojitá modifikace, Wienerův proces

Title: Modifications of a Stochastic Process
Author: Helena Kubátová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc.
Supervisor's e-mail address: Josef.Stepan@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study some basic characteristics of stochastic processes, particularly various types of their continuity. We deal with modifications of a stochastic process and some other relations between stochastic processes defined on the same probability space. We seek continuous modifications of a stochastic process and we prove some criteria for their existence, such as the Kolmogorov continuity theorem. As an important example of a continuous stochastic process we describe the Wiener process, including the proof of its existence.

Keywords: stochastic process, continuous modification, Wiener Process

Kapitola 1

Stochastický proces

1.1 Pojem stochastického procesu, jeho trajektorie a vlastnosti

Definice 1.1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor a $T \subset [0, \infty)$. Množina reálných náhodných veličin $(X(t), t \in T)$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ se nazývá *stochastický proces.*

Definice 1.2. Je-li $(X(t), t \in T)$ daný stochastický proces, je tím každému $\omega \in \Omega$ (jednoznačně) přiřazena reálná funkce proměnné t, kterou značíme $X_\omega(t),\ t \in T$. Funkce $\{X_\omega, \omega \in \Omega\}$ se nazývají *trajektorie stochastického procesu* $(X(t), t \in T)$.

Definice 1.3. Nechť $(X(t), t \in T)$ je stochastický proces a nechť J je konečná podmnožina T. Uvažujme parciální zobrazení $(X(t), t \in J)$, ta jsou podle [1], I.2.3, str. 40, a I.3.4, str. 43, měřitelná ve smyslu

$$(X(t), t \in J) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^J, \mathcal{B}(\mathbb{R}^J))$$

(kde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^J)$ značí borelovskou σ-algebru nad $\mathbb{R}^J$). Potom borelovské pravděpodobnostní míry F_J definované na $\mathbb{R}^J$ předpisem

$$F_J(B) = \mathsf{P}[(X(t), t \in J) \in B], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^J)$$

nazýváme *konečněrozměrná rozdělení* procesu X.

Definice 1.4. Řekneme, že stochastický proces $(X(t), t \in T)$ je *spojitý podle pravděpodobnosti*, jestliže

$$\lim_{t \to t_0} \mathsf{P}\left[|X(t) - X(t_0)| > \varepsilon\right] = 0 \quad \text{pro } \forall t_0 \in T \text{ a } \forall \varepsilon > 0\,.$$

Definice 1.5. Řekneme, že stochastický proces $(X(t), t \in T)$ je *spojitý*, jsou-li všechny jeho trajektorie spojité na T.

1.2 Modifikace stochastického procesu, existence spojitých modifikací

Definice 1.6. Nechť $X := (X(t), t \in T)$ a $Y := (Y(t), t \in T)$ jsou stochastické procesy definované na tomtéž pravděpodobnostním prostoru. Pak řekneme, že proces Y je *modifikace procesu* X, jestliže $X(t) = Y(t)$ skoro jistě pro každé $t \in T$.

Poznámka 1.7. Relace "být modifikací" je zřejmě ekvivalence na množině všech stochastických procesů definovaných na prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Operací modifikace lze velmi podstatně měnit trajektorie procesu $(X(t), t \in T)$, přičemž rozdělení jednotlivých veličin $X(t)$ se zachovávají.

Další ekvivalencí na množině všech stochastických procesů definovaných na prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je relace "rovnost skoro jistě":

Definice 1.8. Nechť $X := (X(t), t \in T)$ a $Y := (Y(t), t \in T)$ jsou stochastické procesy definované na tomtéž pravděpodobnostním prostoru. Pak řekneme, že procesy X a Y jsou si *rovny skoro jistě* ($X = Y$ *s. j.*), jestliže $X_\omega = Y_\omega$ pro $\omega \notin N$, $N \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(N) = 0$.
Jinak řečeno: $X(t) = Y(t)$ pro $\forall t \in T$ skoro jistě.

Rovnost skoro jistě procesů X a Y zřejmě implikuje, že proces Y je modifikací procesu X (neboť veličiny $X(t)$ a $Y(t)$ se pro kterékoli $t \in T$ mohou lišit pouze v bodech $\omega \in N$, tedy na množině P-míry 0).

Opačná implikace obecně neplatí, pro její platnost je třeba, aby byl splněn navíc předpoklad spojitosti obou procesů:

Lemma 1.9. *Nechť $X := (X(t), t \in T)$ a $Y := (Y(t), t \in T)$ jsou spojité stochastické procesy definované na tomtéž pravděpodobnostním prostoru a nechť proces Y je modifikací procesu X (ekvivalentně X je modifikací Y). Potom $X = Y$ s. j.*

Důkaz. Proces X je modifikací procesu Y, to znamená, že $X(t) = Y(t)$ s. j. pro $\forall t \in T$, tedy speciálně $X(t) = Y(t)$ s. j. pro $\forall t \in T \cap \mathbb{Q}$. Ze spočetnosti množiny $T \cap \mathbb{Q}$ plyne, že platí také $X(t) = Y(t)$ $\forall t \in T \cap \mathbb{Q}$ s. j. Ze spojitosti (trajektorií) obou procesů pak dostáváme, že $X(t) = Y(t)$ pro $\forall t \in T$ s. j., tedy procesy X a Y jsou si skoro jistě rovny. $\square$

Nutnost splnění podmínky spojitosti obou procesů ukazuje následující příklad.

Příklad 1.10. Nechť U je nezáporná náhodná veličina definovaná na Ω, která má spojité rozdělení, tedy $\mathsf{P}[U = u] = 0$ $\forall u \geq 0$. Zvolme trajektorie procesu X na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ následovně:

$$X_\omega(t) = 1 \text{ pro } t = U(\omega),$$

$$X_\omega(t) = 0 \text{ jinak.}$$

Proces Y zvolíme nulový, tj. $Y_\omega \equiv 0$ pro $\forall \omega \in \Omega$. Potom Y je zřejmě modifikace X, protože $\mathsf{P}[U = U(\omega)] = 0$ pro $\forall \omega \in \Omega$, tj. pro každé $t \in T$ se $X(t)$ může od $Y(t)$ lišit nejvýše na množině P-míry 0. Rovnost skoro jistě mezi procesy X a Y ovšem neplatí – trajektorie obou procesů se neshodují dokonce v žádném $\omega \in \Omega$ (v každém $\omega \in \Omega$ nabývá veličina U nějaké nezáporné hodnoty t; pro toto t je $X_\omega(t) = 1 \neq Y_\omega(t)$).

Následující věta poskytuje důležité kritérium pro zjišťování, zda daný stochastický proces má spojitou modifikaci.

Věta 1.11 (Kolmogorovova o spojité modifikaci)**.** *Nechť stochastický proces $X := (X(t), T \geq 0)$ splňuje podmínku*

$$\mathsf{E}|X(s)-X(t)|^\alpha \leq K|s-t|^{1+\delta} \qquad \textit{pro } s,t \geq 0 \textit{ a nějaké kladné konstanty } K, \alpha \textit{ a } \delta.$$

Potom existuje spojitá modifikace procesu X.

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vezměme stochastický proces $(X^{(n)}(t), t \in [0,1])$, který má spojité po částech lineární trajektorie a který splňuje podmínku

$$X^{(n)}(k \cdot 2^{-n}) = X(k \cdot 2^{-n}) \text{ pro } 0 \leq k \leq 2^n.$$

Potom platí

$$\left\|X^{(n)} - X^{(n-1)}\right\| \leq \max_{0 \leq k \leq 2^n - 1} |X(k \cdot 2^{-n}) - X((k+1) \cdot 2^{-n})|$$

všude na Ω pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Zdůvodnění je následující:

$$\begin{aligned}
&\left\|X^{(n)} - X^{(n-1)}\right\| = \max_{k \in \{1,\dots,2^n-1\}} |X^{(n)}(k \cdot 2^{-n}) - X^{(n-1)}(k \cdot 2^{-n})| \\
&= \max_{l \in \{0,1,\dots,2^{n-1}-1\}} |X^{(n)}((2l+1) \cdot 2^{-n}) - X^{(n-1)}((2l+1) \cdot 2^{-n})| \\
&= \max_{l \in \{0,1,\dots,2^{n-1}-1\}} \left| X^{(n)}((2l+1) \cdot 2^{-n}) - \frac{X^{(n)}(2l \cdot 2^{-n}) + X^{(n)}((2l+2) \cdot 2^{-n})}{2} \right| \\
&\leq \max_l \left(\frac{|X^{(n)}((2l+1) \cdot 2^{-n}) - X^{(n)}(2l \cdot 2^{-n})|}{2} + \frac{|X^{(n)}((2l+1) \cdot 2^{-n}) - X^{(n)}((2l+2) \cdot 2^{-n})|}{2} \right) \\
&\leq 2 \cdot \max_l \left(\max \left\{ \frac{|X^{(n)}((2l+1) \cdot 2^{-n}) - X^{(n)}(2l \cdot 2^{-n})|}{2}, \frac{|X^{(n)}((2l+1) \cdot 2^{-n}) - X^{(n)}((2l+2) \cdot 2^{-n})|}{2} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Zvolme nyní $c \in \left(0, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ libovolně, potom je

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}[\left\|X^{(n)} - X^{(n-1)}\right\| > 2^{-nc}] &\leq \Sigma_{k=0}^{2^n-1} \mathsf{P}[|X(k \cdot 2^{-n}) - X((k+1) \cdot 2^{-n})| > 2^{-nc}] \\
&\leq 2^n \cdot (2^{-nc})^{-\alpha} \cdot \mathsf{E}|X(k \cdot 2^{-n}) - X((k+1) \cdot 2^{-n})|^\alpha \\
&\leq 2^n \cdot 2^{nc\alpha} \cdot K|k \cdot 2^{-n} - (k+1) \cdot 2^{-n}|^{1+\delta} \\
&= K \cdot 2^{n(c\alpha - \delta)}.
\end{aligned}$$

Z Borelova-Cantelliho lemmatu (neboť platí $\Sigma K \cdot 2^{n(c\alpha-\delta)} < \infty$ pro $c \in \left(0, \frac{\delta}{\alpha}\right)$) máme

$$\mathsf{P}[\left\|X^{(n)} - X^{(n-1)}\right\| > 2^{-nc} \text{ pro nekonečně mnoho } n \in \mathbb{N}] = 0.$$

To znamená, že

$$\Sigma_{n=2}^{\infty} \left\|X^{(n)} - X^{(n-1)}\right\| < \infty \text{ skoro jistě.}$$

Tj. existuje množina $A \in \mathcal{A}$ s $\mathsf{P}(\mathcal{A})$, pro kterou platí

$$\omega \in A \Rightarrow \left\{X_\omega^{(n)}\right\} \text{ je cauchyovská, a tedy konvergentní posloupnost v } \mathcal{C}[0,1].$$

($\mathcal{C}[0,1]$ je prostor všech spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$.)

Zvolme nyní libovolné $x_0 \in \mathcal{C}[0,1]$ a definujme trajektorie

$$Y_\omega(t) := \lim_{n\to\infty} X_\omega^{(n)}(t) \text{ pro } \omega \in A, t \in [0,1]$$

$$Y_\omega(t) := x_0(t) \text{ pro } \omega \notin A, t \in [0,1].$$

Zřejmě $Y := (Y(t), t \in [0,1])$ je spojitý proces s vlastností

$$Y(s) = X(s) \text{ s. j. pro } s \in S := \{k \cdot 2^{-n}, 0 \leq k \leq 2^n, n \in \mathbb{N}\}$$

(neboť je $X^{(n)}(k \cdot 2^{-n}) = X(k \cdot 2^{-n})$).
Nechť $t \in [0,1]$ je libovolné, potom existují $s_n \in S$ taková, že

$$lim_{n\to\infty} s_n = t,$$

protože S je hustá množina v $[0,1]$.
Ze spojitosti procesu Y a z předpokladu věty potom plyne

$$X(t) = lim_{n\to\infty} X(s_n) = lim_{n\to\infty} Y(s_n) = Y(t),$$

kde první limita je podle pravděpodobnosti, druhá rovnost platí skoro jistě a třetí všude na Ω. Celkem tedy $Y(t) = X(t)$ skoro jistě pro každé $t \in [0,1]$.
Proto pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje proces $(Y^{(n)}(t), t \in [n, n+1])$, který je spojitou modifikací procesu $(X(t), t \in [n, n+1])$.
Nechť g je libovolná spojitá funkce na $[0, \infty)$ a

$$M := [Y^{(n)}(n+1) = Y^{(n+1)}(n+1), n \in \mathbb{N}];$$

zřejmě $\mathsf{P}(M) = 1$.
Položíme

$$Z_\omega(t) := Y_\omega^{(n)}(t) \text{ pro } \omega \in M, t \in [n, n+1],$$

$$Z_\omega(t) := g(t) \text{ pro } \omega \notin M, t \in [n, n+1].$$

Proces $Z := (Z(t), t \in [0, \infty))$ je tak již zřejmě spojitou modifikací procesu X (všechny trajektorie procesu Z jsme definovali jako spojité a $\mathsf{P}[\omega \in M] = 1$) a jsme hotovi.

$\square$

Další věta poskytuje dokonce nutnou a postačující podmínku pro existenci spojité modifikace daného procesu, jsou-li splněny navíc některé předpoklady.

Věta 1.12. *Nechť* $X := (X(t), t \in [0,1])$ *je stochastický proces spojitý podle pravděpodobnosti. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(A) X *má spojitou modifikaci.*

(B) Existuje $S \subset [0,1]$ *spočetná hustá v* $[0,1]$ *tak, že*

$$(\heartsuit) \qquad \lim_{\delta \searrow 0} \mathsf{P}\left[\sup_{\substack{|s_1 - s_2| < \delta \\ s_1, s_2 \in S}} |X(s_1) - X(s_2)| > \varepsilon\right] = 0 \qquad \textit{pro } \forall \varepsilon > 0\,.$$

Důkaz. (A) $\Rightarrow$ (B): Zvolme $S := \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Pro Y spojitou modifikaci X zřejmě platí ($\heartsuit$), neboť všechny trajektorie Y jsou spojité na $[0,1]$. Náhodná veličina $X(t)$ se liší od veličiny $Y(t)$ nejvýše na množině P-míry nula pro každé $t \in [0,1]$, speciálně

$$\mathsf{P}\{\omega : X_\omega(s) \neq Y_\omega(s)\} = 0 \text{ pro } \forall s \in S.$$

Ze spočetnosti S potom platí

$$\mathsf{P}\{\omega : X_\omega \text{ se liší od } Y_\omega \text{ pro nějaké } s \in S\} = \mathsf{P}[\cup_{s \in S}\{\omega : X_\omega(s) \neq Y_\omega(s)\}] = 0,$$

takže ($\heartsuit$) platí i pro samotný proces X. Celkem jsme tedy našli spočetnou množinu hustou v $[0,1]$ s vlastností ($\heartsuit$).

(B) $\Rightarrow$ (A): Položme

$$U(S) = \{\omega \in \Omega : X_\omega \text{ je stejnoměrně spojitá funkce na S}\}.$$

(Pozn. Řekneme, že X_ω je *stejnoměrně spojitá* na S, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $s_1, s_2 \in S$ s $|s_1 - s_2| < \delta$ je $|X_\omega(s_1) - X_\omega(s_2)| < \varepsilon$.) Potom platí ($\heartsuit$) $\Leftrightarrow$ $P(U(S)) = 1$: Je-li $P(U(S)) = 1$, platí ($\heartsuit$) zřejmě.
Opačná implikace se ukáže následovně: Množinu $U(S)$ můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} U(S) &= \{\omega : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |s_1 - s_2| \leq \delta, s_1, s_2 \in S \Rightarrow |X_\omega(s_1) - X_\omega(s_2)| < \varepsilon\} \\ &= \{\omega : \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : \quad |s_1 - s_2| \leq 1/m \Rightarrow |X_\omega(s_1) - X_\omega(s_2)| < 1/n\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left[\sup_{\substack{|s_1 - s_2| \leq 1/m \\ s_1, s_2 \in S}} |X(s_1) - X(s_2)| < 1/n\right]. \end{aligned}$$

Zvolme $n \in \mathbb{N}$ pevně a označme

$$A_m = \left[\sup_{\substack{|s_1 - s_2| \leq 1/m \\ s_1, s_2 \in S}} |X(s_1) - X(s_2)| \geq 1/n\right],$$

pak zjevně

$$m < m' \Rightarrow A_{m'} \subset A_m \text{ pro } \forall m, m' \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$A_m \downarrow \cap_{m\in\mathbb{N}} A_m =: H \text{ při } m \to \infty.$$

Potom ale

$$\mathsf{P}(H) = \mathsf{P}(\cap_{m\in\mathbb{N}} A_m) = \mathsf{P}(\lim_{m\to\infty} A_m) = \lim_{m\to\infty} \mathsf{P}(A_m) = 0,$$

díky platnosti ($\heartsuit$).
Takže

$$\mathsf{P}(H^{\mathcal{C}}) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left[\sup_{\substack{|s_1-s_2|\le 1/m \\ s_1,s_2\in S}} |X(s_1) - X(s_2)| < 1/n\right]\right) = 1$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, a proto

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left[\sup_{\substack{|s_1-s_2|\le 1/m \\ s_1,s_2\in S}} |X(s_1) - X(s_2)| < 1/n\right]\right) = 1 = P(U(S)).$$

Nechť $\omega \in U(S)$, ze stejnoměrné spojitosti X_ω na S víme, že existuje spojité rozšíření X_ω na celý interval $[0,1]$; označme jej Y_ω. Pro $\omega \notin U(S)$ definujme $Y_\omega = 0$ na $[0,1]$. Pak Y je spojitá modifikace X (plyne ze spojitosti procesu X podle pravděpodobnosti; trajektorie procesu Y jsou spojité ze své definice). $\square$

Kapitola 2

Wienerův proces

Wienerův proces je příkladem spojitého stochastického procesu (tj. procesu se spojitými trajektoriemi - viz definice 1.5). Někdy se též nazývá *proces Brownova pohybu.*

Definice 2.1. Řekneme, že stochastický proces $W := (W(t), t \in [0,\infty))$ je *Wienerův*, jestliže splňuje následující podmínky:

(a) $\mathcal{L}(W(t) - W(s)) = N(0, |t-s|), \quad t, s \in [0,\infty)$

(b) $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), ..., W(t_n) - W(t_{n-1})$ jsou nezávislé náhodné veličiny pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in [0,\infty)$ (Wienerův proces je tedy proces s nezávislými přírůstky).

(c) W je spojitý a $W(0) \equiv 0$.

Speciálně z (a) a (c) je $\mathcal{L}(W(t)) = N(0,t)$.

Tvrzení 2.2. *Stochastický proces* $(W(t), t \in [0,\infty))$ *splňuje podmínky* (a) *a* (b) *právě tehdy, když*

(i) $\mathcal{L}(W(t_1), \dots, W(t_n))$ *je n-rozměrné normální rozdělení s nulovým vektorem středních hodnot pro* $\forall \{t_1, ..., t_n\} \subset [0,\infty)$, $n \in N$,

a zároveň

(ii) $\mathsf{cov}(W(t), W(s)) = \min(s,t), \quad s, t \geq 0.$

Důkaz. Nechť $0 \leq t_{i_1} \leq \cdots \leq t_{i_n}$ je uspořádání množiny $\{t_1, \dots, t_n\}$ podle velikosti.
Potom platí:

$$\mathcal{L}(W(t_1), \dots, W(t_n))$$

je n-rozměrné normální rozdělení, právě když

$$\mathcal{L}(W(t_{i_1}), W(t_{i_2}) - W(t_{i_1}), \dots, W(t_{i_n}) - W(t_{i_{n-1}}))$$

je n-rozměrné normální rozdělení. ($\clubsuit$)
To plyne z [1], II.7.30, str. 167, následovně: Položme

$$a_{i_1 1} = 1, a_{j1} = 0 \text{ pro } j \in \{1, \dots, i_1 - 1, i_1 + 1, \dots, n\},$$

$$a_{i_k k} = 1, a_{i_{k-1} k} = -1, a_{jk} = 0 \text{ pro } j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_{k-1}, i_k\}, k \in \{2, \dots, n\}.$$

Označíme-li $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, pak je

$$(W(t_{i_1}), W(t_{i_2}) - W(t_{i_1}), \dots, W(t_{i_n}) - W(t_{i_{n-1}})) = (W(t_1), \dots, W(t_n)) \cdot A.$$

Naopak, označíme-li

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

je

$$\big(W(t_{i_1}), W(t_{i_2}) - W(t_{i_1}), \dots, W(t_{i_n}) - W(t_{i_{n-1}})\big) \cdot B = (W(t_{i_1}), W(t_{i_2}), \dots, W(t_{i_n})).$$

Nakonec označme symbolem Π matici permutace, která převádí vektor $(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$ na vektor $(t_1, \dots, t_n)$, tj. matici s prvky

$$\pi_{k i_k} = 1, k \in \{1, \dots, n\}$$

$$\pi_{kj} = 0 \text{ pro } j \in \{1, \dots, i_k - 1, i_k + 1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Potom je

$$(W(t_1), \dots, W(t_n) = \big(W(t_{i_1}), W(t_{i_2}) - W(t_{i_1}), \dots, W(t_{i_n}) - W(t_{i_{n-1}})\big) \cdot (B \cdot \Pi).$$

Našli jsme tedy matice lineárních zobrazení, které mezi sebou navzájem převádějí vektory $\big(W(t_{i_1}), W(t_{i_2}) - W(t_{i_1}), \dots, W(t_{i_n}) - W(t_{i_{n-1}})\big)$ a $(W(t_1), \dots, W(t_n)$, a odtud plyne tvrzení ($\clubsuit$).

Nechť nyní platí (a) a (b). Potom (i) plyne z definice mnohorozměrného normálního rozdělení (viz např. [1], II.7.25, str. 166) a tvrzení ($\clubsuit$).
Tvrzení (ii) ověříme přímým výpočtem:

$$\begin{aligned} \mathsf{cov}(W(t), W(s)) &= \mathsf{E}W(t)W(s) - \mathsf{E}W(t)\mathsf{E}W(s) \\ &\overset{\text{(a)}}{=} \mathsf{E}W(t)[W(s) - W(t)] + \mathsf{E}[W(t)]^2 \\ &\overset{\text{(b)}}{=} \mathsf{E}W(t)\mathsf{E}[(W(t) - W(s)] + \mathsf{E}[W(t)]^2 \\ &\overset{\text{(a)}}{=} 0 + \mathsf{var}W(t) \\ &= t \quad \text{pro } t \le s. \end{aligned}$$

Platí-li naopak (i) a (ii), je podle (♣)

$$\mathcal{L}(W(t) - W(s)) = N(0, \mathsf{var}[W(t) - W(s)]),$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathsf{var}[W(t) - W(s)] &= \mathsf{E}[W(t) - W(s)]^2 - (\mathsf{E}[W(t) - W(s)])^2 \\
&= \mathsf{E}[W(t)]^2 + \mathsf{E}[W(s)]^2 - 2\mathsf{E}[W(t) \cdot W(s)] - 0 \\
&= \mathsf{var}[W(t)] + \mathsf{var}[W(s)] - 2\mathsf{cov}[W(t), W(s)] \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} t + s - 2\min(t, s) \\
&= |t - s|.
\end{aligned}$$

Tedy máme dokázáno (a).

Pro $0 \le s < t < u$ platí

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}[W(u) - W(s)][W(s) - W(t)] = \\
&\quad = \mathsf{E}[W(u)W(s)] - \mathsf{E}[W(s)]^2 - \mathsf{E}[W(u)W(t)] \\
&\qquad + \mathsf{E}[W(s)W(t)] \\
&\quad = \mathsf{cov}[W(u)W(s)] - \mathsf{var}[W(s)] - \mathsf{cov}[W(u)W(t)] \\
&\qquad + \mathsf{cov}[(W(s)W(t)] \\
&\quad \overset{\text{(ii)}}{=} s - s - t + t \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

tedy přírůstky jsou nekorelované. Podle (i) a (♣) má vektor přírůstků normální rozdělení, takže z nekorelovanosti přírůstků plyne jejich nezávislost (viz např. [1], II.7.28, str. 167). Tj. dokázali jsme (b). □

Věta 2.3 (Existence Wienerova procesu)**.**

(i) Existuje stochastický proces s vlastnostmi (a) a (b).

(ii) Každý stochastický proces s vlastnostmi (a) a (b) má modifikaci, která je Wienerův proces.

Důkaz. (i) Pro každou $\{t_1, \dots, t_n\} \subset [0, \infty)$ budiž

$$F_{t_1,\dots,t_n} = N_n(0, K), \text{ kde} K = (k_{ij})_{i,j=1}^n;\ k_{ij} = \min(t_i, t_j),\ 1 \le i, j \le n.$$

Z [1], II.7.30 a II.7.31, str. 167, plyne, že $\{F_{t_1,\dots,t_n}\}$ je konzistentní systém distribučních funkcí, takže splňuje předpoklady Daniellovy-Kolmogorovovy věty, viz [1], I.10.3, str. 84. Podle této věty existuje stochastický proces $X := (X(t), t \in$

$[0,\infty))$ s konečněrozměrnými rozděleními $\{F_{t_1,\ldots,t_n}\}$ a podle věty 2.2 má X vlastnosti (a) i (b).

(ii) Nechť $(X(t), t \in [0,\infty))$ je proces s vlastnostmi (a) a (b), tj.

$$\begin{aligned}\mathsf{var}(X(s) - X(t)) = |s-t| \text{ pro } s \neq t \\ &\Rightarrow |s-t|^{-1/2} \cdot (X(s) - X(t)) \sim N(0,1) \\ &\Rightarrow \mathsf{E}[|s-t|^{-1/2} \cdot (X(s) - X(t))]^4 = 3 \\ &\Rightarrow \mathsf{E}|X(s) - X(t)|^4 = 3 \cdot |s-t|^2.\end{aligned}$$

Potom podle 1.11 existuje spojitá modifikace procesu X; označme ji $(Y(t), t \in [0,\infty))$. Platí, že $Y(0) = 0$ skoro jistě (to plyne z věty 2.2 dosazením nuly do vlastností (i) i (ii)). Položme

$$W_\omega \equiv Y_\omega, \text{ je-li } Y_\omega(0) = 0,$$

a

$$W_\omega \equiv 0, \text{ je-li } Y_\omega(0) \neq 0.$$

Pak $W := (W(t), t \in [0,\infty))$ je modifikací procesu Y (změnili jsme trajektorie jen na množině P-míry 0, kde $Y(0) \neq 0$) a přitom zřejmě W je Wienerův proces; z tranzitivity relace "být modifikací" máme tedy Wienerův proces, který je modifikací procesu X. $\square$

Literatura

[1] Štěpán J.: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha, 1987.