

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Vojtěch Rybář

### **Aplikace algebraického multigridu založeného na výpočetních molekulách**

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. Mgr. Petr Knobloch, Dr.

Studijní program: Matematika

2007

Děkuji vedoucímu této práce Doc. Mgr. Petru Knoblochovi, Dr. za poskytnutí literatury a testovacích dat, podporu a trpělivost.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 8.srpna 2007

Vojtěch Rybář

# Obsah

|   |           |
|---|-----------|
| Úvod  | 5         |
| <b>1 Multigrid</b>  | <b>6</b>  |
| 1.1 Geometrický multigrid . . . . .                               | 6         |
| 1.2 Algebraický multigrid . . . . .                               | 10        |
| <b>2 Algebraický multigrid založený na výpočetních molekulách</b> | <b>15</b> |
| 2.1 Hranové matice . . . . .                                      | 15        |
| 2.2 Hrany . . . . .   | 20        |
| 2.3 Hrubá síť . . . . .   | 21        |
| 2.4 Interpolační molekuly . . . . .                               | 24        |
| 2.5 Interpolační předpis . . . . .                                | 27        |
| 2.6 Víceúrovňová metoda . . . . .                                 | 29        |
| 2.7 Multigrid . . . . .   | 30        |
| <b>3 Numerické testy</b>  | <b>31</b> |
| Literatura  | 34        |

Název práce: Aplikace algebraického multigridu založeného na výpočetních molekulách

Autor: Vojtěch Rybář

Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. Mgr. Petr Knobloch, Dr.

e-mail vedoucího: knobloch@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Předložená práce je věnována nové variantě algebraického multigridu. Uvažujeme rozklad symetrické pozitivně definitní matice tuhosti vzniklé diskretizací metodou konečných prvků na tzv. hranové matice, které zavedeme. Uvedeme nutnou a postačující podmínku pro existenci tohoto rozkladu a navrhneme vhodnou aproximaci, pokud rozklad neexistuje. Poté ukážeme, jak lze hranové matice využít při výběru hrubé sítě a jak lze pomocí malého souboru těchto matic, tzv. výpočetních molekul, určit interpolační předpis algebraického multigridu. Na úvod stručně představíme geometrický a algebraický multigrid, na závěr uvedeme výsledky numerických testů.

Klíčová slova: algebraický multigrid, hranové matice, výběr hrubé sítě, určení interpolačního předpisu

Title: Application of Algebraic Multigrid Based on Computational Molecules

Author: Vojtěch Rybář

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: Doc. Mgr. Petr Knobloch, Dr.

Supervisor's e-mail address: knobloch@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The present work is dedicated to the new variant of algebraic multigrid. We consider splitting of symmetric positive definite stiffness matrix arising from finite element discretization into sum of so-called edge matrices. We give necessary and sufficient condition for existence of this splitting and propose suitable approximation if the splitting does not exist. Then we show how to use edge matrices in selecting coarse-grid nodes and how can be small collections of edge matrices (so-called computational molecules) used for deriving interpolation rules. In the beginning we briefly introduce geometric and algebraic multigrid, in the end we show numerical results.

Keywords: algebraic multigrid, edge matrices, coarse grid selection, interpolation rules

# Úvod

Výpočetní metody typu multigrid jsou známy jako jedny z nejrychlejších způsobů pro řešení lineárních systémů přinášející řešení v  $O(N)$  krocích.

Svých vlastností dosahují kombinací dvou navzájem se doplňujících prvků. Prvním z nich je tzv. „zhlazování“, což je pojmenování pro aplikaci jednoduché iterační metody, např. Gaussovy-Seidelovy. Druhým prvkem je korekce na hrubé síti, kde dochází k eliminování zbylé složky chyby.

Původní myšlenka, známá již přes třicet let, je stále vylepšována, aby byla použitelná pro co nejširší třídu problémů a mohla sloužit při řešení stále náročnějších soustav.

Tato práce vychází z článku [1] zveřejněného v roce 2006, který přináší nový pohled a představuje Algebraický multigrid založený na výpočetních molekulách. Ten je – po stručném představení základních typů multigridu v první kapitole – popsán v druhé kapitole. Nakonec jsou uvedeny numerické testy.

# Kapitola 1

## Multigrid

V této kapitole stručně představíme základní typy multigridu. Budeme vycházet z [3], při popisu algebraického multigridu navíc ještě z [4].

### 1.1 Geometrický multigrid

Uvažujme pro začátek modelový problém

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), & x \in \Omega = (0, 1) \\ u(x) &= 0, & x \in \Gamma = \{0, 1\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

jeho diskretizací na stejnoměrné síti

$$\Omega^h = \left\{ x_j \in \Omega \mid x_j = jh, \quad j = 0, \dots, n, \quad h = \frac{1}{n} \right\} \quad (1.2)$$

dostaneme systém lineárních rovnic

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (1.3)$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & -2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix}, \quad f_j = h^2 f(x_j). \quad (1.4)$$

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že  $h$  je mocnina dvou.

Vývoj metod typu multigridu začal analýzou klasických iteračních metod (např. metody Jacobiho a Gaussova-Seidelova) pro řešení soustav lineárních rovnic  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ .

Spektrální analýzou lze ukázat, že tyto metody redukují pouze vysokofrekvenční složku chyby  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ , kde  $\mathbf{u}$  je přesné a  $\mathbf{v}$  přibližné řešení soustavy. Tedy místo redukce chyby ji pouze zhlazují. Díky tomu bývají tyto metody nazývány jako „zhlazovače“.

Uvažujme nyní dvě stejnoměrné sítě  $\Omega^h$  a  $\Omega^{2h}$  na  $[0, 1]$ , tzv. jemnou a hrubou síť, určené podle předpisu (1.2). Základní myšlenka metod typu multigrid je naznačena v následujícím postupu:

- Iterujeme pomocí zhlazovače na  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$  na  $\Omega^h$ , abychom získali přiblížení  $\mathbf{v}^h$ .
- Určíme reziduum  $\mathbf{r} = \mathbf{f} - A\mathbf{v}^h$ . Přejdeme k síti  $\Omega^{2h}$ , na ní vyřešíme rovnici  $A\mathbf{e} = \mathbf{r}$ .
- Zpřesníme přibližné řešení získané na  $\Omega^h$  pomocí opravy  $\mathbf{e}$  získané na  $\Omega^{2h}$ .

Na jemné síti je zhlazovačem efektivně eliminována vysokofrekvenční složka chyby, zatímco přechodem na hrubou síť zredukujeme chybu s nízkou frekvencí.

Nyní se zaměříme na to, jakým způsobem lze „přecházet“ z jedné sítě na druhou, tedy na určení operátorů interpolace a restrikce. Existuje více možností jak takový operátor zkonstruovat, protože je však dostatečně efektivní nejjednodušší z nich, uvedeme lineární interpolační operátor.

Tedy operátor  $P_{2h}^h$  je lineární interpolace zobrazující vektor  $\mathbf{v}^{2h} \in \mathbb{R}^{n/2-1}$  na vektor  $\mathbf{v}^h \in \mathbb{R}^{n-1}$  podle následujícího předpisu:

$$(v^h)_{2j} = (v^{2h})_j, \quad (1.5)$$

$$(v^h)_{2j+1} = \frac{1}{2}[(v^{2h})_j + (v^{2h})_{j+1}], \quad 0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1. \quad (1.6)$$

Pro  $n = 8$  má operátor následující tvar:

$$P_{2h}^h \mathbf{v}^{2h} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & 2 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & 1 & & & & \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{2h} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}_h = \mathbf{v}^h. \quad (1.7)$$

K přenášení vektorů opačným směrem, tedy z jemné sítě  $\Omega^h$  na hrubou síť  $\Omega^{2h}$ , slouží operátor restrikce,  $P_h^{2h} : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^{n/2-1}$ . Jeho nejprůchočejší volbou je předpis

$$(v^{2h})_j = (v^h)_{2j}. \quad (1.8)$$

Další možností, jak definovat operátor restrikce, je vážený průměr hodnot sousedních uzlů jemné sítě:

$$(v^{2h})_j = \frac{1}{4} [(v^h)_{2j-1} + 2(v^h)_{2j} + (v^h)_{2j+1}], \quad 1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1. \quad (1.9)$$

Opět uvedeme příklad pro  $n = 8$ :

$$P_h^{2h} \mathbf{v}^h = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}_h = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{2h} = \mathbf{v}^{2h}. \quad (1.10)$$

Když jsme ukázali, jak lze přecházet mezi sítěmi, můžeme zpřesnit schéma, které jsme uvedli výše:

- Iterujeme  $\nu_1$ -krát zhlazovačem rovnici  $A^h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$  na  $\Omega^h$  s počátečním přiblížením  $\mathbf{v}^h$ .
- Určíme reziduum na jemné síti, tedy vypočítáme  $\mathbf{r}^h = \mathbf{f}^h - A^h \mathbf{v}^h$  a restringujeme jej na hrubou síť:  $\mathbf{r}^{2h} = P_h^{2h} \mathbf{r}^h$ .
- Vyřešíme  $A^{2h} \mathbf{e}^{2h} = \mathbf{r}^{2h}$  na  $\Omega^{2h}$ .



- Interpolujeme chybu vypočtenou na hrubé síti na jemnou síť:  $\mathbf{e}^h = P_{2h}^h \mathbf{e}^{2h}$ , tímto vektorem opravíme přibližné řešení:  $\mathbf{v}^h \leftarrow \mathbf{v}^h + \mathbf{e}^h$ .
- Iterujeme  $\nu_2$ -krát zhlazovačem rovnici  $A^h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$  na  $\Omega^h$  s počátečním přiblížením  $\mathbf{v}^h$ .

Na jemné síti iterujeme tolikrát, kolikrát dojde k výraznější redukci chyby, v praxi  $\nu_{1,2} = 1, 2, \dots, 5$ .

Předtím, než uvedeme celý algoritmus multigridu, zbývá zodpovědět dvě otázky. Jak určit matici  $A^{2h}$  a co znamená vyřešení soustavy na hrubé síti.

Pro určení matice  $A^{2h}$  existují dva obvyklé přístupy, které mohou při některých diskretizacích vést ke stejnému výsledku. Jednak je možné úlohu opět diskretizovat na hrubší síti, druhou možností je tzv. Galerkinův součin

$$A^{2h} = P_h^{2h} A^h P_{2h}^h. \quad (1.11)$$

Jelikož problém řešený na hrubé síti  $A^{2h} \mathbf{e}^{2h} = \mathbf{r}^{2h}$  není příliš odlišný od původního problému, nabízí se myšlenka použít schéma rekurzivně. Aplikujeme jej na počáteční problém  $A^{2h} \mathbf{e}^{2h} = \mathbf{r}^{2h}$  na  $\Omega^{2h}$  a opravu hledáme na hrubé síti  $\Omega^{4h}$ . Tak pokračujeme, dokud se nedostaneme na síť, kde dokážeme opravu spočítat přesně nějakou přímou metodou.

Nechť je dána hierarchie  $l$  sítí  $\Omega^h \supseteq \Omega^{2h} \supseteq \dots \supseteq \Omega^{Lh=2^{l-1}h}$ , všechny operátory restrikce a interpolace mezi nimi, matice  $A^h, A^{2h}, \dots, A^{Lh}$ , zhlazovač a čísla  $\mu, \nu_1$  a  $\nu_2$ . Pak klasický algoritmus multigridu vypadá takto:

---

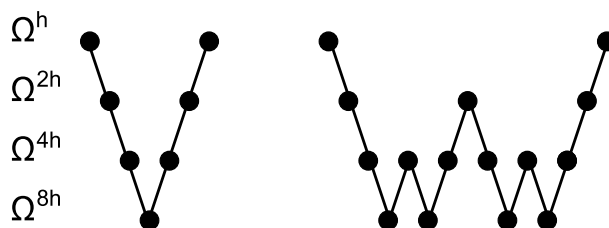
**Algoritmus 1:**  $MG(\mathbf{v}^h, \mathbf{f}^h)$ 

---

```
H  $n \leftarrow 1$ 
if  $\Omega^h$  je nejhrubší síť then
  |  $\mathbf{v}^h \leftarrow (A^h)^{-1}\mathbf{f}^h$ 
else
  Iteruj  $\nu_1$ -krát  $A^h\mathbf{u}^h = \mathbf{f}$  s počátečním přiblížením  $\mathbf{v}^h$ 
   $\mathbf{f}^{2h} \leftarrow P_h^{2h}(\mathbf{f}^h - A^h\mathbf{v}^h)$ 
   $\mathbf{v}^{2h} \leftarrow \mathbf{0}$ 
  while  $n \leq \mu$  do
    |  $\mathbf{v}^{2h} \leftarrow MG(\mathbf{v}^{2h}, \mathbf{f}^{2h})$ 
  end
   $\mathbf{v}^h \leftarrow \mathbf{v}^h + P_{2h}^h\mathbf{v}^{2h}$ 
  Iteruj  $\nu_2$ -krát  $A^h\mathbf{u}^h = \mathbf{f}$  s počátečním přiblížením  $\mathbf{v}^h$ 
end
```

---

Je-li  $\mu = 1$  nebo  $\mu = 2$ , bývá algoritmus označován za  $V(\nu_1, \nu_2)$ -cyklus, respektive  $W(\nu_1, \nu_2)$ -cyklus. Obecně bývají metody tohoto typu nazývány geometrickým multigridem.



Obrázek 1.1: V- a W-cyklus

## 1.2 Algebraický multigríd

Výše uvedený postup nelze vždy jednoduše aplikovat. Například pokud neznáme síť, která byla použita pro definici matice soustavy, tato síť má nepravidelnou strukturu nebo matice nebyla definována pomocí žádné sítě. Tyto problémy řeší metody algebraického multigrídu (AMG). Ten má všechny základní komponenty, jako jsou zhlazovač, hierarchie sítí, operátory restrikce

a interpolace, společně s geometrickým multigridem, ale všechny tyto komponenty jsou určeny výhradně na základě matice soustavy lineárních rovnic.

Uvažujme opět soustavu lineárních rovnic  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ . Pro jednoduchost budeme předpokládat, že  $A$  je M-matice (tedy symetrická pozitivně definitní matice mající na diagonále všechny prvky kladné a mimo diagonálu nulové nebo záporné). V geometrickém případě neznámé byly hodnoty v uzlech (geometrické) síti. V případě algebraického multigridu uzly sítě ztotožníme s indexy matice  $A$ . Tedy je-li řešení naší soustavy vektor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

pak za uzly jemné sítě považujeme indexy  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Nyní vezmeme matici  $A = (a_{ij})_{ij}$  jako matici sousednosti uzlů  $\{1, 2, \dots, n\}$ , tedy uzly  $i$  a  $j$  budeme považovat za spojené hranou, bude-li buď  $a_{ij} \neq 0$  nebo  $a_{ji} \neq 0$ . Tím jsme definovali jemnou algebraickou síť.

Dalším rozdílem mezi geometrickým a algebraickým multigridem je, že zhlazovač bývá pevně zvolen. Pak chybu, která jím není odstráňena nazveme algebraicky hladkou chybou. Ta je tedy charakterizována vztahem:

$$\|S\mathbf{e}\|_A \approx \|\mathbf{e}\|_A, \quad (1.13)$$

kde  $S$  značí zhlazovač a  $\|\cdot\|_A$  energetickou normu danou maticí  $A$ . Takto definovaná chyba však často není hladká v geometrickém smyslu.

Pro běžné zhlazovaže lze pomocí (1.13) odvodit (např. v [3] je toto odvození naznačeno pro Jacobiho a Gaussovu-Seidelovu metodu)

$$A\mathbf{e} \approx \mathbf{0}, \quad (1.14)$$

tedy, že algebraicky hladká chyba má relativně malé reziduum. Vztah (1.14) přímo implikuje

$$a_{ii}e_i \approx - \sum_{j \neq i} a_{ij}e_j, \quad (1.15)$$

jinými slovy, je-li  $\mathbf{e}$  algebraicky hladkou chybou, pak lze její složku  $e_i$  dobře aproximovat váženým průměrem jejích sousedů. Tento poznatek je klíčový pro určení interpolačního předpisu.

Protože  $A$  je M-maticí, a tedy v každém řádku je největší prvek na diagonále, přiřadíme  $i$ -tou rovnici  $i$ -té neznámé. Tedy „úkolem  $i$ -té rovnice je určit  $u_i$ ,  $i$ -tou složku vektoru řešení  $\mathbf{u}$ “.

Nyní se zaměříme na to, které další neznámé jsou nejdůležitější v  $i$ -té rovnici pro určení  $u_i$ . Všimněme si, že je-li koeficient  $a_{ij}$  násobící  $u_j$  v  $i$ -té rovnici relativně větší než ostatní koeficienty ve stejné rovnici, pak malá změna hodnoty neznámé  $u_j$  má relativně větší vliv na určení hodnoty  $u_i$  než změna ostatních neznámých ve stejné rovnici. Mohli bychom se tedy domnívat, že bude výhodné využít hodnoty proměnné  $u_j$  pro interpolaci hodnoty  $u_i$ , a proto zahrnout uzel  $j$  do hrubé sítě. Z této myšlenky vychází následující definice.

**Definice 1.1.** *Nechť je dáno  $0 < \theta < 1$ , pak řekneme, že neznámá  $u_i$  silně závisí na neznámé  $u_j$ , pokud*

$$-a_{ij} \geq \theta \max_{k \neq i} \{-a_{ik}\}. \quad (1.16)$$

*V tomto případě dále řekneme, že neznámá  $u_j$  silně ovlivňuje neznámou  $u_i$ , že uzel  $i$  je silně spojen s uzlem  $j$ , a hranu spojující uzly  $i$  a  $j$  nazveme silnou.*

Víme-li, co je to algebraicky hladká chyba a koncept silných spojení mezi uzly, můžeme začít konstruovat komponenty algebraického multigridu.

Začneme výběrem hrubé sítě. Její prvky jsou voleny tak, aby na výsledné síti bylo možno dobře aproximovat algebraicky hladkou chybu a aby měla podstatně méně uzlů než hrubá síť.

Těchto požadavků lze docílit relativně jednoduchým algoritmem:

- Vytvoříme matici sousednosti silných spojení  $A_s$  tak, že v matici  $A$  vynulujeme prvky určující hrany, které nejsou silné.
- Na základě matice  $A_s$  zvolíme nezávislou podmnožinu množiny všech uzlů za hrubou síť.
- Hrubou síť doplníme dalšími uzly, aby byly splněny podmínky pro interpolaci. V případě klasického algebraického multigridu, jehož interpolační předpis později uvedeme, je požadováno, aby každý pár silně spojených uzlů, které zůstanou v jemné síti, byl silně spojen s uzlem hrubé sítě. Pokud tomu tak není, jeden uzel z takového páru přidáme do hrubé sítě.

Můžeme pokračovat určením interpolačního operátoru. Označíme-li  $\mathcal{D}_c$  množinu všech uzlů hrubé sítě,  $\mathcal{D}_f$  množinu všech uzlů pouze jemné sítě a  $\mathcal{S}_i$  množinu uzlů silně spojených s uzlem  $i$ , pak po interpolačním operátoru požadujeme, aby splňoval:

$$(P\mathbf{e})_i = \begin{cases} e_i & \text{pro } i \in \mathcal{D}_c, \\ \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \omega_{ij} e_j & \text{pro } i \in \mathcal{D}_f. \end{cases} \quad (1.17)$$

Iterpolační operátor tedy získáme, určíme-li koeficienty (váhy)  $\omega_{ij}$ .

Začneme tak, že rozepíšeme (1.15) do následujícího tvaru:

$$a_{ii}e_i \approx - \sum_{j \in \mathcal{S}_i^c} a_{ij}e_j - \sum_{j \in \mathcal{S}_i^f} a_{ij}e_j - \sum_{j \in \mathcal{N}_i^w} a_{ij}e_j, \quad (1.18)$$

kde množiny  $\mathcal{S}_i^c$ ,  $\mathcal{S}_i^f$  a  $\mathcal{N}_i^w$  jsou definovány následovně:

- $\mathcal{S}_i^c$  uzly hrubé sítě silně spojené s uzlem  $i$ ,
- $\mathcal{S}_i^f$  uzly jemné sítě silně spojené s uzlem  $i$ ,
- $\mathcal{N}_i^w$  všechny uzly slabě spojené s uzlem  $i$ .

Nejdříve převedeme třetí sumu na pravé straně (1.18) na levou stranu tímto způsobem:

$$\left( a_{ii} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^w} a_{ij} \right) e_i \approx - \sum_{j \in \mathcal{S}_i^c} a_{ij}e_j - \sum_{j \in \mathcal{S}_i^f} a_{ij}e_j. \quad (1.19)$$

Abychom tento krok odůvodnili, předpokládejme, že  $e_i$  silně závisí na hodnotách v neznámých z množiny  $\mathcal{N}_i^w$ . Protože algebraická chyba se příliš nemění ve směru silné závislosti, máme  $e_i \approx e_j$ , a tedy tento krok má smysl.

Druhou sumu na pravé straně (1.18) bychom také mohli převést na levou stranu stejným způsobem a v mnoha aplikacích by nám to stačilo.

Ukážeme ale ještě i jiný přístup. Chceme vyjádřit všechna  $e_j$  pro  $j \in \mathcal{S}_i^f$  pomocí váženého součtu  $e_k$ , kde  $k \in \mathcal{S}_i^c$ . K tomu nám poslouží následující předpis pro zvolené  $j \in \mathcal{S}_i^f$ :

$$e_j \approx \frac{\sum_{k \in \mathcal{S}_i^c} a_{jk} e_k}{\sum_{k \in \mathcal{S}_i^c} a_{jk}}. \quad (1.20)$$

Čitatel dobře aproximuje  $e_j$  díky tomu, že  $e_k$  pro  $k \in \mathcal{S}_i^c$  silně ovlivňuje  $e_j$ . Jmenovatel zajišťuje, aby konstanty byly aproximovány přesně. Na tomto

místě je vidět smysl podmínky v třetím kroku algoritmu pro výběr hrubé sítě.

Když nyní dosadíme (1.20) do (1.18), po úpravách naznačených v [3, str. 144] dostaneme následující předpis pro  $\omega_{ij}$ :

$$\omega_{ij} = \frac{a_{ij} + \sum_{m \in \mathcal{S}_i^f} \left( \frac{a_{im} a_{mj}}{\sum_{k \in \mathcal{S}_i^c} a_{mk}} \right)}{a_{ii} + \sum_{n \in \mathcal{N}_i^w} a_{in}}. \quad (1.21)$$

Máme-li algoritmus pro určení hrubé sítě a interpolační operátor, doplníme, že operátor restrikce  $R$  je v případě algebraického multigridu téměř výhradně volen vztahem

$$R = P^T \quad (1.22)$$

a matice lineární soustavy na hrubé síti  $A^h$  je dána Galerkinovým součinem

$$RA^h P. \quad (1.23)$$

Tím jsme definovali všechny komponenty potřebné pro dvouúrovňovou metodu. Tu rekurzivně rozšíříme podle stejného algoritmu jako v geometrickém případě, a dostaneme tak opět víceúrovňovou metodu, v tomto případě klasický algebraický multigrid.

Posledním rozdílem mezi geometrickým a algebraickým multigridem, který uvedeme, je fakt, že v případě algebraického multigridu nelze předpovědět výpočetní nároky, speciálně počet prvků v jednotlivých sítích. Pro porovnání efektivit se proto používají následující dvě veličiny:

**Definice 1.2.** *Složitost sítě  $\sigma^\Omega$  je poměr celkového počtu uzlů ve všech sítích ku počtu uzlů na nejjemnější síti. Složitost operátoru  $\sigma^A$  je poměr celkového počtu nenulových prvků matic soustav lineárních rovnic na všech sítích ku počtu nenulových prvků matice  $A$  na nejjemnější síti.*

V případě geometrického multigridu se složitost sítě pohybuje kolem hodnot  $2$ ,  $\frac{4}{3}$  a  $\frac{8}{7}$  v jednorozměrném, dvourozměrném a trojrozměrném případě.

## Kapitola 2

# Algebraický multigrid založený na výpočetních molekulách

Tato kapitola popisuje Algebraický multigrid založený na výpočetních molekulách (AMGm) tak, jak je uveden v nedávno zveřejněné práci autorů Krause a Schicha [1]. Uvažujeme v ní rozklad symetrické pozitivně definitní matice tuhosti  $A$  vzniklé ze symetrických pozitivně semidefinitních lokálních matic tuhosti na tzv. hranové matice, které v této kapitole zavedeme. Uvedeme nutnou a postačující podmínku pro existenci tohoto rozkladu a navrhneme vhodnou aproximaci, pokud rozklad neexistuje.

Poté ukážeme, jak lze hranové matice využít při vytváření hrubé sítě a určení interpolačního předpisu dvouúrovňové metody algebraického multigridu. Nakonec metodu rozšíříme na víceúrovňovou a dostaneme tak plnohodnotný algebraický multigrid.

### 2.1 Hranové matice

**Definice 2.1.** *Nechť  $A_T$  je  $(nd) \times (nd)$  symetrická pozitivně semidefinitní matice konečného prvku, kde  $n$  značí počet uzlů prvku  $T$  a  $d$  počet stupňů volnosti v každém uzlu. Pro  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  nazveme hranovou maticí  $(nd) \times (nd)$  matici  $E_{ij}$ , která má všechny prvky nulové až na  $(2d) \times (2d)$  hodnot příslušných uzlům  $i, j$ .*

Hrany chápeme v následujícím smyslu:

**Definice 2.2** (Algebraická síť a její hrany). *Platí-li pro dva uzly  $i$  a  $j$  z množiny všech uzlů triangulace, že se vyskytují zároveň v alespoň jednom ele-*

mentu  $T$  triangulace  $\mathcal{T}$  námi uvažované oblasti, pak je budeme považovat za spojené hranou. Množinu všech uzlů triangulace a hran (podle této definice) mezi nimi nazveme algebraickou sítí.

Hranové matice odpovídají hranám mezi uzly, bereme proto  $E_{ij} = E_{ji}$  pro  $i > j$ . Pro  $i = j$  hranová matice není definována. Z pozitivní semidefinitnosti vyplývá, že  $E_{ij}\mathbf{v} = 0 \forall \mathbf{v} \in \ker(A_T)$ , neboť pro každý součet pozitivně semidefinitních matic platí, že jádro sčítanců obsahuje jádro součtu.

**Definice 2.3.** Řekneme, že matice  $A_T$  má pozitivní rozklad, pokud lze zapsat jako součet pozitivně semidefinitních hranových matic.

V této podkapitole chceme uvést nutnou a postačující podmínku pro existenci pozitivního rozkladu a jeho konstrukci, je-li tato podmínka splněna, pro případ  $d = 1$ .

Pro rozložitelnou matici existuje takové očíslování uzlů, pro které má matice  $A_T$  blokově diagonální tvar. Lze ukázat, že  $A_T$  má pozitivní rozklad, právě když každý diagonální blok má pozitivní rozklad. Proto se soustředíme na nerozložitelné (ireducibilní) matice.

**Definice 2.4.** Matice  $A_T = (a_{ij})_{ij}$  nazveme  $L$ -maticí, pokud  $a_{ii} > 0$  a  $a_{ij} \leq 0$  pro  $1 \leq i \neq j \leq n$ . Pokud  $A_T$  není  $L$ -maticí, pak jednoznačně určenou  $L$ -maticí  $B = (b_{ij})_{ij}$  takovou, že  $|a_{ij}| = |b_{ij}| \forall i, j$ , nazveme  $L$ -akcí matice  $A_T$ .

**Lemma 2.5.** Symetrická matice má pozitivní rozklad, právě když její  $L$ -akce má pozitivní rozklad.

*Důkaz.* Nechť  $\sum_{i,j} E_{ij}$  je pozitivní rozklad matice  $A_T$ . Pak  $L$ -akce matice  $A_T$  je součet  $L$ -akcí matic  $E_{ij}$ . Jelikož pozitivní semidefinitnost symetrické  $2 \times 2$  matice nezávisí na znaménku mimodiagonálních prvků, tento rozklad je pozitivní rozklad  $L$ -akce matice  $A_T$ .

Naopak, nechť  $\sum_{i,j} E_{ij}$  je pozitivní rozklad  $L$ -akce matice  $A_T$ . Přenásobíme-li mimodiagonální prvky hranových matic  $\pm 1$  v závislosti na znaménku dané hodnoty matice  $A_T$ , pak hranové matice zůstanou pozitivně semidefinitní a jejich součet dává matici  $A_T$ .  $\square$

**Lemma 2.6.** Je-li  $A_T$  symetrická nerozložitelná singulární  $L$ -matice, pak její jádro je dimenze jedna. Navíc je generováno kladným vektorem.

*Důkaz.* Nechť  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \ker(A_T)$ . Řádkovými a sloupcovými úpravami matice  $A_T$  a přenásobením vektoru  $\mathbf{v}$  minus jedničkou, lze dosáhnout



toho, aby  $v_1, \dots, v_l > 0$ ,  $v_{l+1}, \dots, v_m < 0$  a  $v_{m+1} = \dots = v_n = 0$  pro  $1 \leq l \leq m \leq n$ . Pak matici  $A_T$  lze zapsat v blokovém tvaru

$$A_T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

s pozitivně semidefinitními bloky  $A_{ii}$  a bloky  $A_{ij}$  mající všechny prvky záporné pro  $i \neq j$ .

Pro  $i = l + 1, \dots, m$  máme

$$a_{i1}v_1 + \dots + a_{il}v_l + \sum_{j=l+1}^m a_{ij}v_j = 0,$$

tedy

$$\sum_{j=l+1}^m a_{ij}v_i v_j = v_i \left( \sum_{j=1}^l a_{ij}v_j \right) \leq 0.$$

To ale s předchozím dává, že

$$\sum_{i,j=l+1}^m a_{ij}v_i v_j \leq 0.$$

Jelikož ale  $A_{22}$  je pozitivně semidefinitní, dostaneme všude rovnost. Tudíž  $A_{21} = 0$  a vektory  $\mathbf{w} = (v_1, \dots, v_l, 0, \dots, 0)^T$  a  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  jsou prvky jádra matice  $A_T$ . Z  $A_T \mathbf{w} = 0$  dostáváme  $A_{31} = 0$  a z  $A_T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0$  máme, že  $A_{32} = 0$ . Protože  $A_T$  je nerozložitelná (a tedy její graf silně souvislý), máme  $l = m = n$ .  $\square$

**Lemma 2.7.** *Nechť  $A_T$  je symetrická nerozložitelná singulární  $L$ -matice. Pak má jednoznačný pozitivní rozklad.*

*Důkaz.* Z lemmatu 2.6 víme, že existuje vektor  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$ , který má všechny prvky kladné a generuje jádro matice  $A_T$ . Pro všechny indexy  $i, j$  splňující  $1 \leq i < j \leq n$  existuje jednoznačně určená matice  $E_{ij}$  tvaru

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} -a_{ij}v_j/v_i & a_{ij} \\ a_{ij} & -a_{ij}v_i/v_j \end{pmatrix}$$

pro  $a_{ij} \neq 0$ . Pro  $a_{ij} = 0$  je matice  $E_{ij}$  nulová. Přímým výpočtem lze ověřit, že součet matic  $E_{ij}$  dává matici  $A_T$ . Pozitivní definitnost tohoto rozkladu vyplývá z toho, že  $a_{ij} \leq 0$  a  $v_i v_j > 0$ .  $\square$

**Lemma 2.8.** *Každá pozitivně semidefinitní matice lze zapsat jako součet singulární pozitivně semidefinitní matice a diagonální pozitivně semidefinitní matice.*

*Důkaz.* Nechť  $B$  je pozitivně semidefinitní matice a  $D$  je nenulová pozitivně semidefinitní diagonální matice. Množina všech reálných čísel  $\lambda$  takových, že  $B - \lambda D$  je pozitivně semidefinitní matice je uzavřená, obsahuje nulu a je shora omezená, neboť  $-D$  není pozitivně semidefinitní. Je-li  $\lambda_0$  největší prvek této množiny, pak matice  $B - \lambda_0 D$  je singulární a pozitivně semidefinitní a  $\lambda_0 D$  je pozitivně semidefinitní diagonální matice.  $\square$

**Věta 2.9.** *Symetrická matice má pozitivní rozklad, právě když její L-akce je pozitivně semidefinitní.*

*Důkaz.* Podle lemmatu 2.5 můžeme předpokládat, že  $A_T$  je L-matice. Z toho je zřejmé, že pokud  $A_T$  má pozitivní rozklad, pak je pozitivně semidefinitní.

Nechť je nyní matice  $A_T$  pozitivně semidefinitní. Bez újmy na obecnosti můžeme o  $A_T$  předpokládat, že je také nerozložitelná. Je-li  $A_T$  singulární, má pozitivní rozklad podle lemmatu 2.7. Jinak ji podle lemmatu 2.8 rozložíme na součet  $A_T = A' + D$ , kde  $A'$  je singulární L-matice a  $D$  je pozitivně semidefinitní diagonální matice. Matice  $A'$  má pozitivní rozklad podle lemmatu 2.7, matici  $D$  rozložíme snadno. Sečtením hranových matic příslušných daným uzlům v matici  $A'$  a  $D$  dostaneme pozitivní rozklad matice  $A_T$ .  $\square$

Nyní víme, kdy pozitivní rozklad existuje a soustředíme se na to, jak jej nalézt. Je-li  $A_T$  singulární pozitivně semidefinitní L-matice, lze aplikovat lemma 2.7. Je-li  $A_T$  pozitivně semidefinitní L-matice, ale není singulární, nalezneme nejmenší vlastní číslo  $\lambda_{min}$ , rozložíme matici  $A_T - \lambda_{min}I$ , a přičteme příslušné hranové matice vzniklé rozkladem diagonální matice  $\lambda_{min}I$ , stejně jako v důkazu lemmatu 2.8. Není-li matice  $A_T$  L-maticí, ale je-li její L-akce pozitivně semidefinitní, rozložíme L-akci matice  $A_T$  a mimodiagonální prvky takto vzniklých hranových matic vynásobíme  $\pm 1$  podle toho, zda-li jsme příslušné prvky matice  $A_T$  násobili  $\pm 1$  při konstrukci její L-akce.

Další otázkou je, jak pracovat s maticemi, které nemají pozitivní rozklad. V takovém případě se snažíme najít matici  $A_+$ , která má pozitivní rozklad a existují kladná reálná čísla  $\lambda$  a  $\mu$ , aby platilo

$$\lambda \langle \mathbf{x}, A_+ \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{x}, A_T \mathbf{x} \rangle \leq \mu \langle \mathbf{x}, A_+ \mathbf{x} \rangle \quad (2.1)$$

a poměr  $\mu/\lambda$  byl minimální. Taková matice  $A_+$  však nemusí existovat.

Předpokládejme nyní, že  $\text{rank}(A_T) \leq n - 1$  a existuje vektor  $\mathbf{v}$  generující jádro, který má nenulové všechny složky. Přenásobením matice  $A_T$  vhodnou diagonální maticí z obou stran můžeme docílit toho, že  $\mathbf{v} = (1, \dots, 1)^T$ . Je-li  $A_+$  taková, že platí (2.1) pro nějaká kladná reálná čísla  $\lambda$  a  $\mu$ , pak  $E_{ij}\mathbf{v} = 0$  pro všechny pozitivně semidefinitní hranové matice  $E_{ij}$  z pozitivního rozkladu matice  $A_+$ . Tedy matice  $E_{ij}$  jsou určeny jednoznačně až na konstantu.

**Definice 2.10.** *Symetrickou pozitivně definitní matici, která má mimodiagonální prvky nulové nebo záporné a pro kterou platí, že součet prvků každého řádku je roven nule, nazveme SPM maticí.*

Problém nalezení matice  $A_+$  pro matici  $A_T$ , jejíž jádro generuje vektor  $\mathbf{v} = (1, \dots, 1)^T$ , lze převést na problém nalezení nejlepší SPM matice aproximující matici  $A_T$  v následujícím smyslu:

**Lemma 2.11.** *Nechť  $A_T$  je symetrická pozitivně semidefinitní matice s jádrem generovaným vektorem  $\mathbf{v} = (1, \dots, 1)^T$ . Nechť  $A_{n-1}$  je matice vzniklá z matice  $A_T$  odebráním posledního řádku a sloupce. Nechť  $B$  je symetrická matice se stejným jádrem jako matice  $A_T$  a matice  $B_{n-1}$  (která vznikla z matice  $B$  stejným způsobem jako  $A_{n-1}$  z  $A_T$ ) je SPM matice. Pak  $B$  je nejlepší aproximace matice  $A_T$ , právě když  $B_{n-1}$  je nejlepší SPM matice aproximující matici  $A_{n-1}$ .*

Nyní uvedeme nejlepší aproximaci SPM maticí pro  $n = 3$ . Je-li v jádru matice  $A_T$  vektor  $(1, 1, 1)^T$ , může ji jednoznačně zapsat ve tvaru

$$A_T = \begin{pmatrix} a+b & -a & -b \\ -a & a+c & -c \\ -b & -c & b+c \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

kde  $a, b, c$  jsou reálná čísla. Protože  $A_T$  je pozitivně semidefinitní, záporné může být nejvýše jedno z čísel  $a, b, c$ . Rozlišíme dva případy:

1. Všechna tři čísla  $a, b, c$  jsou nezáporná. Pak matice  $A_T$  má tento pozitivní rozklad:

$$A_T = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -c \\ 0 & -c & c \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

2. Jedno z čísel, pro příklad budeme uvažovat  $a$ , je záporné. Pak nejlepší pozitivní aproximace matice  $A_T$  je:

$$A_+ = \begin{pmatrix} a+b & 0 & -(a+b) \\ 0 & 0 & 0 \\ -(a+b) & 0 & a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+c & -(a+c) \\ 0 & -(a+c) & a+c \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Hranové matice  $E_{ij}$  dostaneme tak, že sečteme příslušné matice v rozkladu lokálních matic všech prvků, ve kterých se hrana  $\{i, j\}$  vyskytuje.

## 2.2 Hrany

AMGm patří do třídy algebraických multigrídů, které využívají znalosti lokálních matic. Je proto přirozené, že chceme na jejich základě určovat ohodnocení jednotlivých hran. Hodnocení  $s_{ij}$  hrany  $\{i, j\}$  lze například určit tímto předpisem

$$s_{ij} = \frac{|a_{ij}|}{\sqrt{a_{ii}a_{jj}}}, \quad (2.5)$$

kde  $A_T = (a_{ij})_{ij}$  je lokální matice tuhosti. Tento způsob má svá omezení, přenesení lokálních matic tuhosti na hrubou síť je výpočetně náročné a omezené geometrií. My budeme ke stejnému účelu využívat hranové matice.

Pro každou smyčku (neorientovanou cestu začínající i končící ve stejném uzlu) délky tři v algebraické síti obsahující hrany mezi uzly  $(i, j)$ ,  $(j, k)$  a  $(i, k)$  uvažujme molekulu  $M^{(i,j,k)}$  určenou vztahem

$$M^{(i,j,k)} = E_{ij} + E_{jk} + E_{ik} \quad (2.6)$$

a množinu  $\mathcal{M}^\Delta$  všech takových molekul mající nenulové diagonální prvky, tedy

$$\mathcal{M}^\Delta = \{M^{(i,j,k)} = (c_{pq})_{pq} \mid c_{pp} \neq 0 \quad \forall p = 1, 2, 3\} \quad (2.7)$$

Pak lze ohodnocení hrany definovat tímto způsobem:

**Definice 2.12** (Ohodnocení hrany). *Nechť  $\mathcal{M}^{i,j} = \{M^{(i,j,k)} \mid \exists k, \text{ že } M^{(i,j,k)} \in \mathcal{M}^\Delta\}$ . Ohodnocení  $s_{ij}$  hrany (vycházející z hranových matic) spojující uzly  $i$  a  $j$  je dáno tímto předpisem:*

$$s_{ij} = \min \left\{ 1, \min_{M^{i,j}} \frac{|c_{p_i p_j}|}{\sqrt{c_{p_i p_i} c_{p_j p_j}}} \right\}, \quad (2.8)$$

kde  $p_i$  a  $p_j$  jsou lokální uzly příslušející uzlům  $i$  a  $j$ . Uzly  $i$  a  $j$ , které jsou spojeny hranou s ohodnocením  $s_{ij} \geq \theta$ , pro  $0 < \theta < 1$  (typicky  $\theta = 0.25$ ), nazveme silně spojené a hraně, která je spojuje, budeme říkat silná hrana. Je-li  $\mathcal{M}^{i,j}$  prázdná množina, bereme  $s_{ij} = 1$ .

Víme-li, které uzly jsou spojené silně, můžeme začít vytvářet hrubou síť.

## 2.3 Hrubá síť

Existuje více možností, jak klást požadavky, které by měly splňovat uzly obsažené v hrubé síti. My se budeme řídit požadavky uvedenými v [1] a také např. v [3, str. 196] a uvedeme algoritmus z [1], který zajistí jejich splnění.

Po uzlech naší hrubé sítě tedy požadujeme:

1. Množina hrubých uzlů je největší podmnožina množiny všech uzlů taková, že žádné uzly v ní obsažené nejsou silně spojené.
2. Každý uzel  $j$  silně spojený s uzlem  $i$  nepatřícím do hrubé sítě je buď sám v hrubé síti, nebo je silně spojený s nějakým uzlem hrubé sítě, jenž je silně spojen s uzlem  $i$ .

Algoritmus, který použijeme, abychom splnili tato kritéria, má dvě části. V první části zajistíme splnění první podmínky, v druhé části přidáme do hrubé sítě ty uzly z jemné sítě, které zajistí splnění druhé podmínky.

Rozdíl oproti jiným algoritmům vyplývá z toho, že relace „být silně spojen s jiným uzlem“ je v našem případě symetrická, tedy je-li uzel  $i$  silně spojen s uzlem  $j$ , je i  $j$  silně spojen s  $i$ .

Následující značení množin použijeme při popisu algoritmů:

|                   |   |
|-------------------|---|
| $\mathcal{D}_f$   | uzly jemné sítě   |
| $\mathcal{D}_c$   | uzly hrubé sítě   |
| $\mathcal{D}$     | všechny uzly ( $\mathcal{D} = \mathcal{D}_c \cup \mathcal{D}_f$ )                                   |
| $\mathcal{N}_i$   | uzly spojené s uzlem $i$ hranou   |
| $\mathcal{N}_i^f$ | uzly jemné sítě spojené s uzlem $i$ hranou ( $\mathcal{N}_i^f = \mathcal{N}_i \cap \mathcal{D}_f$ ) |
| $\mathcal{S}_i$   | uzly silně spojené s uzlem $i$  |
| $\mathcal{S}_i^c$ | uzly hrubé sítě silně spojené s uzlem $i$ ( $\mathcal{S}_i^c = \mathcal{S}_i \cap \mathcal{D}_c$ )  |
| $ \mathcal{M} $   | počet prvků množiny $\mathcal{M}$   |

---

**Algoritmus 2:** Splnění první podmínky

---

```
 $\mathcal{D}_c \leftarrow \emptyset; \quad \mathcal{D}_f \leftarrow \emptyset; \quad U \leftarrow \mathcal{D}$   
 $\lambda_m \leftarrow |\mathcal{S}_m| \quad \forall m = 1, 2, \dots, |\mathcal{D}|; \quad n \leftarrow 0$   
while  $n < |\mathcal{D}|$  do  
  najdi  $i$  takové, že  $\lambda_i = \max_{m \in U} \lambda_m$   
   $\mathcal{D}_c \leftarrow \mathcal{D}_c \cup \{i\}$   
   $U \leftarrow U \setminus \{i\}$   
   $n \leftarrow n + 1$   
  forall  $j \in \mathcal{S}_i \cap U$  do  
     $\mathcal{D}_f \leftarrow \mathcal{D}_f \cup \{j\}$   
     $U \leftarrow U \setminus \{j\}$   
     $n \leftarrow n + 1$   
    forall  $k \in \mathcal{S}_j \cap U$  do  
       $\lambda_k \leftarrow \lambda_k + 1$   
    end  
  end  
end
```

---

---

**Algoritmus 3:** Úprava hrubé sítě tak, aby splňovala druhou podmínku

---

```
 $\lambda_m \leftarrow 0 \quad \forall m = 1, 2, \dots, |\mathcal{D}|; \quad i \leftarrow 0$   
while  $i < |\mathcal{D}|$  do  
   $i \leftarrow i + 1$   
  if  $i \in \mathcal{D}_f$  then  
     $n_1 \leftarrow 0$   
    forall  $k \in \mathcal{S}_i \cap \mathcal{D}_c$  do  
       $n_1 \leftarrow n_1 + 1$   
       $\lambda_k \leftarrow 1$   
    end  
    forall  $j \in \mathcal{S}_i \cap \mathcal{D}_f$  do  
       $n_2 \leftarrow 0; \quad n_3 \leftarrow 0$   
      forall  $k \in \mathcal{S}_j \cap \mathcal{D}_c$  do  
         $n_2 \leftarrow n_2 + 1$   
        if  $\lambda_k = 1$  then  
           $n_3 \leftarrow n_3 + 1$   
        end  
      end  
      if  $n_3 < 1$  then  
        if  $n_1 < n_2$  then  
           $\mathcal{D}_c \leftarrow \mathcal{D}_c \cup \{i\}$   
           $\mathcal{D}_f \leftarrow \mathcal{D}_f \setminus \{i\}$   
        else  
           $\mathcal{D}_c \leftarrow \mathcal{D}_c \cup \{j\}$   
           $\mathcal{D}_f \leftarrow \mathcal{D}_f \setminus \{j\}$   
           $n_1 \leftarrow n_1 + 1$   
           $\lambda_j \leftarrow 1$   
        end  
      end  
    end  
  forall  $k \in \mathcal{N}_i$  do  
     $\lambda_k \leftarrow 0$   
  end  
end  
end
```

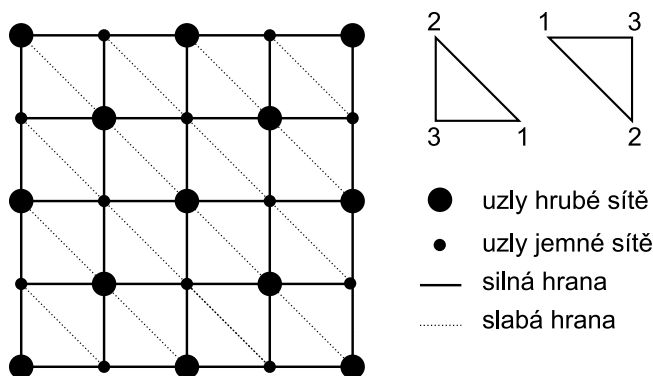
---

Pro názornost uvedeme příklad.

*Příklad 2.13.* Uvažujme diskretizaci Laplaceova operátoru pomocí konformních  $P_1$  konečných prvků na oblasti, která je znázorněna na obrázku 2.1.

Očíslovíme-li uzly stejným způsobem jako na obrázku, bude mít lokální matice tuhosti tvar

$$A_T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$



Obrázek 2.1: Jemná a hrubá síť.

Pozitivní rozklad  $A_T$  na hranové matice  $A_T = E_{12} + E_{13} + E_{23}$  dostaneme podle (2.3) takto:

$$A_T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Zvolme uzly  $i, j$  a  $k$  tak, aby všechny ležely v jednom elementu triangulace, který není na hranici a aby hrana  $\{i, j\}$  byla na obr. 2.1 diagonální, hrana  $\{j, k\}$  svislá a konečně hrana  $\{i, k\}$  vodorovná. Pak jsou hrany ohodnoceny podle definice 2.12 následovně:  $s_{ij} = 0$ ,  $s_{jk} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  a  $s_{ik} = 1$ . Lze tedy vidět, že pro  $\theta = \frac{1}{4}$  jsou všechny silné hrany vodorovné a svislé hrany sítě.

## 2.4 Interpolační molekuly

Stejně jako při tvorbě hrubé sítě budeme chtít při určení interpolačního předpisu využít hranové matice. Z nich vytvoříme malé matice, tzv. výpočetní molekuly, a interpolační koeficienty zvolíme tak, abychom v určitém smyslu lokálně minimalizovali energii vzhledem k výpočetním (v tomto případě interpolačním) molekulám.



Nejprve přesně vysvětlíme, co myslíme pod pojmem výpočetní molekula. Nechť  $\mathcal{E}_M$  je malá podmnožina množiny všech hran  $\mathcal{E}$ . Pak matice  $M$  je výpočetní molekula, je-li malá nerozložitelná matice sestavená z hranových matic příslušných uzlům z množiny  $\mathcal{M}$ . Tedy platí

$$M = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_M} E_{ij}. \quad (2.11)$$

Matice  $M$  je typu  $n_M \times n_M$ , kde  $n_M$  je počet různých uzlů náležejících alespoň jedné hraně z množiny  $\mathcal{E}_M$ . Matice  $M$  tedy vlastně vznikne z  $N \times N$  matice (kde  $N$  značí počet všech uzlů v námi uvažované oblasti)

$$K = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_M} R_{ij}^T E_{ij} R_{ij}, \quad (2.12)$$

ve které vynecháme všechny nulové řádky a sloupce,  $2 \times N$  matice  $R_{ij}$  je permutační matice převádějící globální číslování uzlů na lokální.

Uvažujme nyní množinu lokálních matic  $\{A_T\}_{T \in \mathcal{T}}$  takových, že každá z nich je rozložena na hranové matice, tedy

$$A_T \approx \sum_{i,j \in T} E_{ij} \quad \forall T \in \mathcal{T}. \quad (2.13)$$

Jsou-li všechny hranové matice  $E_{ij}$  symetrické pozitivně semidefinitní, zachovávají lokálně jádro globální matice tuhosti:

**Lemma 2.14.** *Nechť matice  $B = \sum_{T \in \mathcal{T}_B} A_T$  a  $\mathbf{v}_B \in \ker(B)$ . Nechť  $M = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_M} E_{ij}$  je libovolná výpočetní molekula taková, že každá hrana  $\{i, j\} \in \mathcal{E}$  náleží do nějakého prvku  $T \in \mathcal{T}_B$ . Nechť dále  $\mathbf{v}_M$  je restrikce  $\mathbf{v}_B$  na uzly z  $\mathcal{E}_M$ . Je-li rozklad (2.13) pozitivní  $\forall T \in \mathcal{T}_B$ , pak*

$$M\mathbf{v}_M = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

*Důkaz.* Pro každou symetrickou pozitivně semidefinitní matici  $B$  platí, že  $B\mathbf{v}_B = \mathbf{0}$  je ekvivalentní s  $\mathbf{v}_B^T B \mathbf{v}_B = 0$ . Proto

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{v}_B^T B \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_B^T \left( \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_M} E_{ij} + \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_B \setminus \mathcal{E}_M} E_{ij} \right) \mathbf{v}_B \\ &= \mathbf{v}_M^T \left( \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_M} E_{ij} \right) \mathbf{v}_M + \mathbf{v}_F^T F \mathbf{v}_F \end{aligned}$$

pro příslušnou symetrickou pozitivně semidefinitní matici  $F$  a vektor  $\mathbf{v}_F$ , který je restrikcí vektoru  $\mathbf{v}_B$ . To implikuje  $\mathbf{v}_M^T M \mathbf{v}_M = 0$  a tedy i (2.14).  $\square$

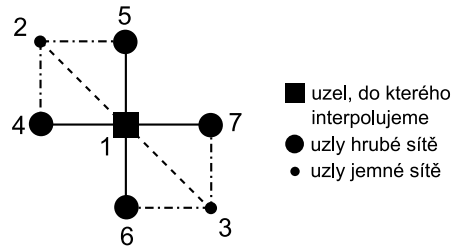
V této chvíli již víme, co to jsou výpočetní molekuly, a známe jejich důležitou vlastnost, zaměříme se proto na vytvoření výpočetní molekuly vhodné pro interpolaci hodnot v uzlech hrubé sítě do daného uzlu jemné sítě, tzv. interpolační molekulu. Předpokládejme, že hrubá a jemná síť byly zvoleny a máme k dispozici všechny potřebné hranové matice, pak pro každý uzel  $i$  jemné sítě definujeme interpolační molekulu tímto způsobem:

$$M(i) = \sum_{k \in \mathcal{S}_i^c} E_{ik} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^f : \exists k \in \mathcal{S}_i^c \cap \mathcal{N}_j} E_{ij} + \sum_{k \in \mathcal{S}_i^c \cap \mathcal{N}_j : j \in \mathcal{N}_i^f} E_{jk}. \quad (2.15)$$

Je tedy vytvořena z hranových matic příslušných třem druhům hran:

- první suma zahrnuje hranové matice těch hran, které silně spojují uzel  $i$  s uzlem hrubé sítě  $k$ ,
- druhou sumu tvoří hranové matice spojující uzel  $i$  s takovými uzly jemné sítě  $j$ , které jsou spojeny alespoň s jedním uzlem hrubé sítě  $k$ , který je silně spojen s uzlem  $i$ ,
- v třetí sumě se vyskytují hranové matice příslušné hranám  $\{j, k\}$ , kde  $j$  je uzel jemné sítě spojený s uzlem  $i$  a  $k$  je uzel hrubé sítě silně spojený s uzlem  $i$ .

Vrátíme-li se k příkladu 2.13, pak bude interpolační molekula pro interpolaci do uzlu jemné sítě, který není na hranici oblasti, vypadat tak, jak je znázorněno na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Tři druhy hran, jejichž hranové matice se podílejí na sestavení interpolační molekuly.

## 2.5 Interpolační předpis

Interpolační předpis, který používají autoři [1], vychází z předpisu uvedeného v [2]. Ten je založený na následujícím pozorování:

**Pozorování 2.15.** *Chyba ve směru vlastního vektoru příslušnému velkému vlastnímu číslu je rychle redukována iteracemi zhlazovače, zatímco chyba ve směru vlastního vektoru příslušnému vlastnímu číslu s malou hodnotou je zhlazováním redukována jen velmi pomalu.*

Proto se snažíme interpolační matici zvolit tak, abychom přechodem k hrubé síti eliminovali algebraicky hladkou chybu. V [2] jsou k tomuto účelu využity lokální matice tuhosti, my využijeme hranové matice složené do interpolační molekuly (2.15).

V ní přeskupíme řádky a sloupce tak, aby koeficienty  $M(i)$  v prvních řádcích a sloupcích příslušely uzlům jemné sítě a až po nich uzlům hrubé sítě, pak  $M(i)$  bude v následujícím tvaru:

$$M(i) = M = \begin{pmatrix} M_{ff} & M_{fc} \\ M_{cf} & M_{cc} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

tedy bude mít  $2 \times 2$  blokovou strukturu příslušnou  $n_M^f$  uzlům jemné a  $n_M^c$  uzlům hrubé sítě.

V tomto případě interpolační matice příslušná interpolační molekule  $M$  bude ve tvaru:

$$P_M = P = \begin{pmatrix} P_{fc} \\ I_{cc} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Její  $n_M^f \times n_M^c$  podmatice  $P_{fc}$  zajišťuje interpolaci do uzlů jemné sítě, pro uzly hrubé sítě se matice  $P$  chová jako identita.

Budeme-li předpokládat, že matice  $M$  je symetrická pozitivně semidefinitní, můžeme využít postup z [2] pro určení matice  $P_{fc}$ . Při použití dvouúrovňového schématu korekce řešení na hrubé síti zcela eliminuje chybu v  $\text{Rng}(P)$  obrazu interpolačního operátoru. Abychom doplnili efekt zhlazování, které se chová podle pozorování 2.15, chceme po interpolačním operátoru, aby aproximoval vlastní vektor s chybou, která je úměrná velikosti příslušného vlastního čísla.

Tedy označíme-li pro vektor  $\mathbf{e}^T = (\mathbf{e}_f^T, \mathbf{e}_c^T) \perp \ker(M)$

$$\mathbf{d}_f = \mathbf{e}_f - P_{fc}\mathbf{e}_c \quad (2.18)$$

lokální chybu interpolace, potom požadujeme, aby matice  $P_{fc}$  byla argumentem minima výrazu

$$\max_{\mathbf{e} \perp \ker(M)} \frac{(\mathbf{e}_f - P_{fc}\mathbf{e}_c)^T (\mathbf{e}_f - P_{fc}\mathbf{e}_c)}{(\mathbf{e}^T M \mathbf{e})}. \quad (2.19)$$

Označíme-li  $G = P_{fc}^T M_{ff} P_{fc} + P_{fc}^T M_{fc} + M_{cf} P_{fc} + M_{cc}$ , můžeme (2.19) upravit takto:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{d}_f, \mathbf{e}_c} \frac{\mathbf{d}_f^T \mathbf{d}_f}{\begin{pmatrix} \mathbf{d}_f + P_{fc}\mathbf{e}_c \\ \mathbf{e}_c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M_{ff} & M_{fc} \\ M_{cf} & M_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_f + P_{fc}\mathbf{e}_c \\ \mathbf{e}_c \end{pmatrix}} \\ &= \max_{\mathbf{d}_f, \mathbf{e}_c} \frac{\mathbf{d}_f^T \mathbf{d}_f}{\langle M_{ff}(\mathbf{d}_f + P_{fc}\mathbf{e}_c), \mathbf{d}_f + P_{fc}\mathbf{e}_c \rangle + 2\langle M_{fc}\mathbf{e}_c, \mathbf{d}_f + P_{fc}\mathbf{e}_c \rangle + \langle M_{cc}\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_c \rangle} \\ &= \max_{\mathbf{d}_f, \mathbf{e}_c} \frac{\mathbf{d}_f^T \mathbf{d}_f}{\begin{pmatrix} \mathbf{d}_f \\ \mathbf{e}_c \end{pmatrix}^T B \begin{pmatrix} \mathbf{d}_f \\ \mathbf{e}_c \end{pmatrix}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

kde

$$B = \begin{pmatrix} M_{ff} & M_{ff}P_{fc} \\ P_{fc}^T M_{ff} + M_{cf} & G \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

je symetrická pozitivně semidefinitní matice.

Pak

$$\begin{aligned} & \min_{P_{fc}} \max_{\mathbf{d}_f, \mathbf{e}_c} \frac{\mathbf{d}_f^T \mathbf{d}_f}{\begin{pmatrix} \mathbf{d}_f \\ \mathbf{e}_c \end{pmatrix}^T B \begin{pmatrix} \mathbf{d}_f \\ \mathbf{e}_c \end{pmatrix}} = \min_{P_{fc}} \max_{\mathbf{d}_f} \frac{\mathbf{d}_f^T \mathbf{d}_f}{\min_{\mathbf{e}_c} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_f \\ \mathbf{e}_c \end{pmatrix}^T B \begin{pmatrix} \mathbf{d}_f \\ \mathbf{e}_c \end{pmatrix}} = \\ & \min_{P_{fc}} \max_{\mathbf{d}_f} \frac{\mathbf{d}_f^T \mathbf{d}_f}{\mathbf{d}_f^T [M_{ff} - (M_{ff}P_{fc} + M_{fc})G^{-1}(P_{fc}M_{ff} + M_{cf})] \mathbf{d}_f}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Jsou-li matice  $M_{ff}$  a  $G$  symetrické pozitivně definitní a je-li  $\mathbf{d}_f$  libovolný vektor, jmenovatel v (2.22) je největší a tedy minimum se nabývá pro

$$P_{fc} = -M_{ff}^{-1}M_{fc}. \quad (2.23)$$

Tak dostaneme chybu rovnou  $1/(\lambda_{\min}(M_{ff}))$ . Za interpolační koeficienty pro uzel  $i$  vezmeme hodnoty v tom řádku (2.23), který v lokálním očíslování odpovídá uzlu  $i$ .

Ještě jednou se vrátíme k příkladu 2.13. Za předpokladu, že uzly jsou lokálně očíslovány stejně jako na obrázku 2.2, bude mít interpolační molekula pro interpolaci do uzlu jemné sítě  $i$  (v lokálním indexování je na prvním místě) tvar

$$M(i) = \left( \begin{array}{ccc|cccc} 4 & & & -1 & -1 & -1 & -1 \\ & 2 & & -1 & -1 & & \\ & & 2 & & & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & & 2 & & & \\ -1 & -1 & & & 2 & & \\ -1 & & -1 & & & 2 & \\ -1 & & -1 & & & & 2 \end{array} \right). \quad (2.24)$$

## 2.6 Víceúrovňová metoda

Nyní již víme, jak rozložit lokální matice na hranové matice, které pak umíme využít pro určení hrubé sítě a interpolačního předpisu, máme tedy dvouúrovňovou metodu. Potřebujeme najít způsob, jak určit hranové matice v hrubé síti, abychom rozšířili naši metodu na víceúrovňovou.

Nejprve určíme, které uzly hrubé sítě budou spojeny hranou:

**Definice 2.16** (Hrany v hrubé síti). *Každý pár  $(i, j)$  uzlů hrubé sítě je spojen hranou v hrubé síti, pokud existuje cesta délky nejvýše tři po silných hranách spojující uzly  $i$  a  $j$  přes nejvýše dva uzly jemné sítě. Tedy pokud  $\{i, j\}$  nebo  $\{i, k_1\}$  a  $\{k_1, j\}$  nebo  $\{i, k_1\}$ ,  $\{k_1, k_2\}$  a  $\{k_2, j\}$  jsou silné hrany v jemné síti a  $k_1, k_2$  jsou uzly jemné sítě, pak  $\{i, j\}$  je hrana v hrubé síti.*

Matice sousednosti uzlů v hrubé síti  $\mathcal{A}_c$  lze jednoduše určit jako součin tří booleovských matic

$$\mathcal{A}_c = \mathcal{P}^T \mathcal{S}_f \mathcal{P}, \quad (2.25)$$

kde matice  $\mathcal{P}$  má hodnotu jedna na těch pozicích, kde má matice  $P$  nenulové hodnoty a nula jinde a matice  $\mathcal{S}_f$  je maticí sousednosti silně spojených uzlů v jemné síti.

Máme-li určeny hrany v hrubé síti, složíme ze všech hranových matic pomocnou matici  $B_f$  a vyčíslíme součin matic  $P^T B_f P$  pro mimodiagonální prvky určené maticí  $\mathcal{A}_c$ . Tak dostaneme matici  $B_c$ . Její mimodiagonální prvky určují příslušné  $2 \times 2$  hranové matice v hrubé síti. Pro skalární eliptické parciální diferenciální rovnice je každá taková hranová matice tvaru  $E_{ij} = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$  a stačí nám tedy pro ně ukládat pouze jednu hodnotu.

## 2.7 Multigrid

Nyní již máme plnohodnotný algebraický multigrid, který se od klasického liší – jak jsme uvedli již na začátku této kapitoly – způsobem výběru hrubé sítě a určením interpolačního předpisu. Pro úplnost ještě uvedeme, že matici tuhosti přenášíme na hrubou síť obvyklým Galerkinovým součinem, tedy  $A_c = P^T AP$ .

# Kapitola 3

## Numerické testy

Prvním problémem, na kterém jsme testovali AMGm, je diskretizace Poissonovy rovnice na jednotkovém čtverci s Dirichletovou okrajovou podmínkou pomocí  $P_1$  konformních a nekonformních konečných prvků. Tedy na rovnici

$$-\varepsilon \Delta u = f \quad \text{v } \Omega = (0, 1)^2 \quad (3.1)$$

$$u = u_0 \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (3.2)$$

kde jsme zvolili  $f = x_1 x_2$  a  $u_0 = \cos(x_1) \sin(x_2)$  pro  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ . Uvažovali jsme jak strukturovanou, tak nestrukturovanou triangulaci. V případě strukturované jsme oblast rozdělili stejně jako v příkladu 2.13.

Testovali jsme V(5,5)- a W(5,5)-cyklus čtyřúrovňového AMGm implementovaného v prostředí Matlab a na strukturované síti výsledky porovnali s W(5,5)-cyklem čtyřúrovňového geometrického multigridu. Za zhlazovač jsme zvolili klasickou Gaussovou-Seidelovu metodu. Iterovali jsme, dokud eukleidovská norma rezidua neklesla pod  $10^{-8}$ . Dostali jsme následující výsledky:

| Počet prvků                                      | $\varepsilon$ | GMG    |        | AMGm   |               |                    |
|--|---------------|--------|--------|--------|---------------|--------------------|
|  |               | W(5,5) | V(5,5) | W(5,5) | $\sigma^{A*}$ | $\sigma^{\Omega*}$ |
| Strukturovaná síť, $P_1$ konformní konečné prvky |               |        |        |        |               |                    |
| 961  | 1             | 5      | 8      | 3      | 2,10          | 1,64               |
| 5041   | 1             | 5      | 9      | 3      | 2,15          | 1,65               |
| 25281  | 1             | 5      | 9      | 3      | 2,38          | 1,65               |
| 961  | 0,001         | 5      | 8      | 3      | 2,10          | 1,64               |
| 5041   | 0,001         | 5      | 9      | 3      | 2,15          | 1,65               |
| 25281  | 0,001         | 5      | 9      | 3      | 2,38          | 1,65               |

\*Viz definice 1.2.

| Počet prvků  | $\varepsilon$ | GMG    |        | AMGm   |            |                 |
|--|---------------|--------|--------|--------|------------|-----------------|
|  |               | W(5,5) | V(5,5) | W(5,5) | $\sigma^A$ | $\sigma^\Omega$ |
| Strukturovaná síť, $P_1$ nekonformní konečné prvky   |               |        |        |        |            |                 |
| 736  | 1             | 6      | 7      | 2      | 1,94       | 1,57            |
| 3008   | 1             | 6      | 11     | 2      | 1,94       | 1,55            |
| 12160  | 1             | 6      | 11     | 2      | 1,95       | 1,54            |
| 736  | $10^{-7}$     | 6      | 9      | 2      | 1,93       | 1,56            |
| 3008   | $10^{-7}$     | 6      | 13     | 3      | 1,94       | 1,55            |
| 12160  | $10^{-7}$     | 6      | 14     | 3      | 1,95       | 1,54            |
| Nestrukturovaná síť, $P_1$ konformní konečné prvky   |               |        |        |        |            |                 |
| 486  | 1             |        | 13     | 6      | 1,33       | 1,39            |
| 1593   | 1             |        | 21     | 8      | 1,30       | 1,37            |
| 6930   | 1             |        | 30     | 8      | 1,39       | 1,31            |
| 27224  | 1             |        | 39     | 9      | 1,41       | 1,31            |
| 486  | 0,3           |        | 13     | 6      | 1,33       | 1,39            |
| 1593   | 0,3           |        | 21     | 8      | 1,30       | 1,37            |
| 6930   | 0,3           |        | 30     | 8      | 1,39       | 1,31            |
| 27224  | 0,3           |        | 39     | 9      | 1,41       | 1,31            |
| Nestrukturovaná síť, $P_1$ nekonformní konečné prvky |               |        |        |        |            |                 |
| 1541   | 1             |        | 21     | 8      | 1,62       | 1,40            |
| 4904   | 1             |        | 29     | 8      | 1,61       | 1,39            |
| 21046  | 1             |        | 35     | 9      | 1,39       | 1,61            |
| 1541   | $10^{-7}$     |        | 26     | 9      | 1,62       | 1,40            |
| 4904   | $10^{-7}$     |        | 38     | 11     | 1,61       | 1,39            |
| 21046  | $10^{-7}$     |        | 44     | 13     | 1,39       | 1,61            |

Druhým problémem, na který jsme se zaměřili, je rovnice reakce-difúze

$$-\varepsilon\Delta u + ru = f \quad \text{v } \Omega = (0,1)^2 \quad (3.3)$$

$$u = u_0 \quad \text{na } \partial\Omega. \quad (3.4)$$

Opět jsme zvolili  $f = x_1x_2$  a  $u_0 = \cos(x_1)\sin(x_2)$ , navíc jsme položili  $r = (x_1 + x_2 - 0,6)^4$ . Za použití stejných metod jako u předchozího problému jsme dospěli k následujícím výsledkům:



| Počet prvků  | $\varepsilon$ | GMG    |        | AMGm   |            |                 |
|--|---------------|--------|--------|--------|------------|-----------------|
|  |               | W(5,5) | V(5,5) | W(5,5) | $\sigma^A$ | $\sigma^\Omega$ |
| Strukturovaná síť, $P_1$ konformní konečné prvky     |               |        |        |        |            |                 |
| 961  | 0,1           | 6      | 8      | 3      | 2,28       | 1,62            |
| 2209   | 0,1           | 6      | 8      | 3      | 2,31       | 1,65            |
| 6241   | 0,1           | 6      | 9      | 3      | 2,35       | 1,67            |
| Strukturovaná síť, $P_1$ nekonformní konečné prvky   |               |        |        |        |            |                 |
| 1680   | 0,1           | 6      | 8      | 2      | 2,06       | 1,56            |
| 6816   | 0,1           | 6      | 11     | 2      | 2,05       | 1,55            |
| Nestrukturovaná síť, $P_1$ konformní konečné prvky   |               |        |        |        |            |                 |
| 1593   | 0.1           |        | 21     | 8      | 1,37       | 1,31            |
| 6930   | 0.1           |        | 30     | 8      | 1,39       | 1,31            |
| Nestrukturovaná síť, $P_1$ nekonformní konečné prvky |               |        |        |        |            |                 |
| 1541   | 0.1           |        | 21     | 8      | 1,62       | 1,40            |
| 4904   | 0.1           |        | 29     | 8      | 1,61       | 1,39            |

V průběhu testování se ukázalo, že na strukturované síti jsou počty iterací AMGm srovnatelné s geometrickým multigridem, při vyšším počtu uzlů je však AMGm znatelně časově náročnější díky své inicializační fázi. Na nestrukturované síti se počty iterací, alespoň v případě W(5,5)-cyklu, stabilně pohybovaly kolem hodnoty devět nezávisle na velikosti sítě a parametrech.

# Literatura

- [1] Kraus J. K., Schicho, J.: Algebraic Multigrid Based on Computational Molecules, 1: Scalar Elliptic Problems, *Computing* 77, 57–75 (2006).
- [2] Brezina, M., Cleary, A. J., Falgout, R. D., Henson, V. E., Jones, J. E., Manteuffel, T. A., McCormick, S. F., Ruge, J.W.: Algebraic multigrid based on element interpolation (AMGe). *SIAM J. Sci. Comput.* 22, 1570–1592 (2000).
- [3] Briggs, W. L., Henson, V. E., McCormick, S. F.: *A Multigrid Tutorial*, Second Edition. Philadelphia: SIAM Books 2001.
- [4] Falgout R.D.: An Introduction to Algebraic Multigrid, *Computing in Science & Engineering* 8,24-33 (2006)