Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petra Valešová

# Peanovo jádro kvadraturní formule

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Josef Kofroň, CSc.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2007

Děkuji vedoucímu své práce Doc. RNDr. Josefu Kofroňovi, CSc. za poskytnuté konzultace, zapůjčení odborné literatury a cenné podněty, které mi poskytl při psaní práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 1.8.2007 Petra Valešová

# Obsah

Název práce: Peanovo jádro kvadraturní formule
Autor: Petra Valešová
Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Josef Kofroň, CSc.
e-mail vedoucího: Josef.Kofron@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme vyjádření chyb kvadraturních formulí pomocí Peanova jádra. Nejprve je definováno Peanovo jádro kvadraturní formule, dále jsou uvedeny a dokázány některé jeho vlastnosti a na dvou příkladech je ukázán výpočet Peanových jader. Následně je využito Peanova jádra k nalezení optimální kvadraturní formule. Poté je popsána konstrukce Rombergovy kvadraturní formule a příslušného Peanova jádra. Je uvedeno a dokázáno několik vlastností Peanových jader Rombergova kvadraturního vzorce. Dále je na několika příkladech srovnán odhad chyby kvadraturních formulí. Na závěr je definováno Sardovo jádro kubaturní formule a na příkladě je ukázán výpočet Sardova jádra.

Klíčová slova: kvadraturní vzorec, Peanovo jádro, chyba kvadraturní formule

Title: Peano kernel of the quadrature formula
Author: Petra Valešová
Department: Department of Numerical Mathematics
Supervisor: Doc. RNDr. Josef Kofroň, CSc.
Supervisor's e-mail address: Josef.Kofron@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the expressing of errors of a quadrature formula by Peano kernel. Firstly the Peano kernel of a quadrature formula is defined, next there are presented and proved some of its properties and there is also shown the calculation of Peano kernel on the examples. Further the Peano kernel is used for finding the optimal quadrature formula. Then there are described Romberg´s quadrature formula and respective Peano kernel. Some properties of Peano kernels of Romberg's quadrature formula are presented and proved. Furthermore there is compared an approximation of errors of quadrature formulae on some examples. In the end there is Sard kernel of a cubature formula defined and a calculation of Sard kernel shown on an example.

Keywords: quadrature formula, Peano kernel, error of quadrature formula

# Úvod

Numerická integrace je rozsáhlým a v praxi hojně využívaným odvětvím numerické matematiky. Zabývá se aproximací určitého inegrálu pomocí kvadraturních formulí. Peanovo jádro kvadraturní formule (pokud je známo) je velmi užitečným prostředkem k vyjádření chyby kvadraturního vzorce. V práci popíšeme Peanovo jádro kvadraturních formulí, některé jeho vlastnosti a jeho využití pro odhady chyb kvadraturních vzorců. Závěrem se krátce zmíníme o Sardových jádrech kubaturních formulí.

Při psaní této práci jsme převážně čerpali z Engels [1], vzorce jednotlivých kvadraturních formulí pak z Segethová [5] a Vitásek [6].

# Kapitola 1

# Numerická kvadratura a kubatura

## 1.1 Kvadraturní formule

Numerická kvadratura je součástí numerické matematiky, jež se zabývá přibližnými výpočty hodnot určitých integrálů a odhadů chyb, vzniklých při aproximaci integrálu pomocí kvadraturního vzorce. V některých případech nejsme schopni vyjádřit hodnotu určitého integrálu v uzavřeném tvaru, jindy je výhodné určit tuto hodnotu jen přibližně.
Než přejdeme k pojmům týkajícím se numerické kvadratury a kubatury, uvedeme několik základních definic prostorů funkcí, v nichž se budeme nadále pohybovat.

**Definice 1.1.**
*Nechť $a, b$ jsou reálná čísla taková, že $a < b$. Pak prostor všech spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ označíme $C([a, b])$.*
*Nechť je dále $k$ kladné celé číslo. Pak prostor všech spojitě diferencovatelných funkcí do řádu $k$ včetně označíme $C^k([a, b])$.*

**Definice 1.2.**
*Nechť $a, b$ jsou reálná čísla taková, že platí $a < b$ a $p \in [1, \infty)$. Pak prostor všech měřitelných funkcí $f$ na intervalu $[a, b]$ takových, že $\int_a^b |f(t)|^p \, dt < \infty$, označíme $L^p([a, b])$.*

*Je-li $p = \infty$, pak prostor všech měřitelných funkcí $f$ na intervalu $[a, b]$ s vlastností ess sup $\{|f(t)|\,;\; t \in [a, b]\} < \infty$ označíme $L^\infty([a, b])$.*

Nyní zavedeme samotný pojem kvadraturní formule a její chyby.

**Definice 1.3.** [1]
*Nechť $a, b$ jsou reálná čísla taková, že platí $a < b$. Nechť funkce $f \in C([a, b])$. Pak definujeme aproximaci určitého integrálu vzorcem*

$$\int_a^b f(t)dt = Q_n f + E_n f. \tag{1.1}$$

*Lineární funkcionál $Q_n$ ze vzorce (1.1) tvaru*

$$Q_n f = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i), \tag{1.2}$$

*nazveme kvadraturním vzorcem a lineární funkcionál $E_n$ ze vzorce (1.1) chybou kadraturní formule $Q_n$.*
*Čísla $A_i$ ze vzorce (1.2) pro $i = 1, ..., n$ nazveme koeficienty (nebo též váhy) kvadraturní formule $Q_n$.*
*Body $x_i \in [a, b]$ pro $i = 1, ..., n$ nazveme uzly kvadraturní formule $Q_n$.*

**Definice 1.4.** [2]
*Nechť $E\left(x^k\right) = 0$ pro $k = 0, \ldots, m$ a $E\left(x^{m+1}\right) \neq 0$, pak říkáme, že kvadraturní vzorec má algebraický řád roven $m$.*

## 1.2 Kubaturní formule

Pojem numerická kubatura se používá pro aproximaci vícerozměrných integrálů. Na rozdíl od numerické kvadratury, kde hledáme jen vhodnou aproximaci integrálu pomocí kvadraturních formulí, v numerické kubatuře často

[1] [5], str.51
[2] [5], str.51

musíme aproximovat i oblast přes kterou integrujeme. V těchto případech pro aproximaci funkce více proměnných $f$ na oblasti $\Omega$ využijeme metody konečných prvků.
Nadále se budeme v této práci zabývat jen kubaturními vzorci aproximujícími dvojrozměrné intergály. Definici kubaturní formule zavedeme jen pro nejjednodušší případ (tedy pro aproximaci integrace přes obdélník), který budeme později využívat.

**Definice 1.5.**
*Nechť $a, b, c, d$ jsou reálná čísla taková, že platí $a < b$ a $c < d$. Položme $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ Nechť funkce $f \in C(\Omega)$. Pak definujeme aproximaci určitého integrálu*

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = C_n f + E_n f. \tag{1.3}$$

*Lineární funkcionál $C_n$ ze vzorce (1.3) tvaru*

$$C_n f = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i, y_i), \tag{1.4}$$

*nazveme kubaturním vzorcem a lineární funkcionál $E_n$ ze vzorce (1.3) chybou kubaturní formule $C_n$.*
*Čísla $A_i$ ze vzorce (1.4) pro $i = 1, ..., n$ nazveme koeficienty (nebo též váhy) kubaturní formule $C_n$.*
*Body $(x_i, y_i) \in \Omega$ pro $i = 1, ..., n$ nazveme uzly kubaturní formule $C_n$.*

# Kapitola 2

# Peanovo jádro kvadraturní formule

## 2.1 Definice Peanova jádra

Než přejdeme k samotnému odvozování vzorce pro Peanovo jádro kvadraturní formule, zavedeme pojem kladné části a bez důkazu (který můžeme nalézt v Jarník [2], str.197) vyslovíme Taylorovu větu s integrálním tvarem zbytku.

**Definice 2.1.** [1]
*Nechť $x$ je reálné číslo a $k \geq 0$, pak definujeme kladnou část $(x-t)^k$ předpisem:*

$$(x-t)_+^k = \begin{cases} 0, & t \geq x \\ (x-t)^k, & t < x. \end{cases}$$

**Věta 2.2. (Taylorova věta s integrálním tvarem zbytku)**
*Nechť $a, b$ jsou reálná čísla taková, že $a < b$, nechť funkce $f$ je třídy $C^{k+1}([a,b])$. Pak pro každé $x \in [a,b]$ platí*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + ... + \frac{1}{k!}(x-a)^k f^{(k)}(a) + \frac{1}{k!}\int\limits_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t).$$

[1] [1], str.94

Nyní máme dostatek prostředků k odvození vzorce pro Peanovo jádro, přičemž budeme postupovat jako v Engels [1], str. 94-95. Uvažujme tedy libovolnou funkci $f$ třídy $C^{k+1}$ na intervalu $[0, 1]$. Mějme dále kvadraturní vzorec $Q_n$ (algebraického) řádu přesnosti $k$. Podle Taylorovy věty s integrálním tvarem zbytku můžeme psát

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} x^i f^{(i)}(0) + \frac{1}{k!} \int_0^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t) dt.$$

Zapíšeme-li tuto rovnost pomocí kladné části $(x-t)^k$, dostaneme

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} x^i f^{(i)}(0) + \frac{1}{k!} \int_0^1 (x-t)_+^k f^{(k+1)}(t) dt.$$

Nyní na poslední rovnost aplikujeme lineární funkcionál $E_n$ a dostaneme

$$\begin{aligned} E_n f &= E_n \left\{ \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} x^i f^{(i)}(0) + \frac{1}{k!} \int_0^1 (x-t)_+^k f^{(k+1)}(t) dt \right\} = \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} E_n(x^i) f^{(i)}(0) + \frac{1}{k!} E_n \left\{ \int_0^1 (x-t)_+^k f^{(k+1)}(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Protože kvadraturní vzorec $Q_n$ má (algebraický) řád $k$, tj. $E_n(x^i) = 0$, pro $i = 0, \ldots, k$ a $E_n(x^{k+1} \neq 0)$, můžeme tuto rovnost přepsat ve tvaru

$$E_n f = \frac{1}{k!} E_n \left\{ \int_0^1 (x-t)_+^k f^{(k+1)}(t) dt \right\} = \frac{1}{k!} \int_0^1 f^{(k+1)}(t) E_n (x-t)_+^k dt.$$

**Definice 2.3.** [2]
*Nechť funkce $f$ je třídy $C^{k+1}$ na intervalu $[0, 1]$, nechť $Q_n$ je kvadraturní formule řádu $k$. Pak funkci $K_{n,k}(t) \equiv E_n^x (x-t)_+^k$ nazveme Peanovým jádrem kvadraturní formule $Q_n$ řádu $k$.*

[2] [1], str.95

Peanovo jádro můžeme definovat i v případě, že funkce $f$ je třídy $C^{m+1}$ na intervalu $[0,1]$ a kvadraturní formule $Q_n$ má (algebraický) řád přesnosti $k$, kde $m \neq k$. V případě, že $m > k$, se vzorec pro výpočet Peanova jádra nezmění. Pro $m < k$ můžeme definovat Peanovo jádro dvojím způsobem. Buď rovností

$$E_n f = \frac{1}{m!} \int_0^1 K_{n,m}(t) f^{(m+1)}(t) dt,$$

nebo

$$E_n f = \sum_{i=m+1}^{k} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} E_n(x^i) + \frac{1}{k!} \int_0^1 K_{n,k}(t) f^{(k+1)}(t) dt.$$

V této práci budeme používat první z nich (tedy $E_n f = \frac{1}{m!} \int_0^1 K_{n,m}(t) f^{(m+1)}(t) dt$).

## 2.2 Vlastnosti Peanova jádra

Následující věta ukazuje, jak můžeme pomocí Peanova jádra vyjádřit chybu kvadraturní furmule $Q_n$.

**Věta 2.4.** [3]
*Nechť $f \in C^{k+1}([-1,1])$, kde $k \geq 0$ a $Q_n$ je kvadraturní formule algebraického stupně přesnosti $m \geq k$. Pak pro chybu $E_n f = \int_{-1}^1 f(t)dt - Q_n f$ platí*

$$E_n f = \frac{1}{k!} \int_{-1}^1 K(t) f^{(k+1)}(t) dt,$$

*kde $K(t)$ je Peanovo jádro kvadraturní formule $Q_n$ řádu $k$.*

*Důkaz.* Mějme funkci $f$ třídy $C^{k+1}$ na intervalu $[-1,1]$. Použijeme větu 2.2 a dostáváme rovnost

$$f(x) = f(-1) + (x+1)f'(-1) + ... + \frac{1}{k!}(x+1)^k f^{(k)}(-1) +$$

$$+ \frac{1}{k!} \int_{-1}^{x} (x-t)^k f^{(k+1)}(t) dt.$$

[3] [1], str.95

Dále uvažujme kvadraturní formuli $Q_n$ algebraického stupně přesnosti $m \geq k$. Na funkci $f$ aplikujeme lineární funkcionál $E_n$ a využitím algebraického stupně přesnosti (tj. $E_n\left(x^i\right) = 0$ pro $i = 0, \ldots, m$) dostáváme

$$\begin{aligned} E_n f &= \frac{1}{k!} E_n \left\{ \int_{-1}^{1} (x-t)_+^k f^{(k+1)}(t) dt \right\} = \\ &= \frac{1}{k!} \int_{-1}^{1} f^{(k+1)}(t) E_n^x (x-t)_+^k dt = \frac{1}{k!} \int_{-1}^{1} K(t) f^{(k+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

□

**Věta 2.5.** [4]
*Pro daný interval $[a, b]$, funkci $f$ a kvadraturní vzorec $Q_n$ je vyjádření Peanova jádra $K_{n,k}(t)$ pro pevné $k$ jediné.*

*Důkaz.* Plyne přímo z konstrukce Peanova jádra. □

**Věta 2.6.** [5]
*Peanovovo jádro $K_{n,k}(t)$ má nulové body násobnosti nejméně $k$ pro $t = \pm 1$ a platí $(i+1)K_{n,i}(t) + K'_{n,i+1}(t) = 0$, pro $i = 0, ..., k-1$.*

*Důkaz.* Postupně dosadíme do vzorce z věty 2.4

$$E_n f = \frac{1}{k!} \int_{-1}^{1} K(t) f^{(k+1)}(t) dt$$

---
[4] [1], str.99
[5] [1], str.100

za $k = i$ a $k = i + 1$, tím získáme vyjádření chyby kvadraturní formule ve tvaru

$$\begin{aligned} E_n(f) &= \frac{1}{i!} \int_{-1}^{1} K_{n,i}(t) f^{(i+1)}(t) dt, \\ \bar{E}_n(f) &= \frac{1}{(i+1)!} \int_{-1}^{1} K_{n,i+1}(t) f^{(i+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

Integrací per partes dostáváme rovnost

$$\frac{1}{(i+1)!} \int_{-1}^{1} K_{n,i+1}(t) f^{(i+2)}(t) dt = \frac{1}{(i+1)!} \Big[ K_{n,i+1}(t) f^{(i+1)}(t) \Big]_{-1}^{1} -$$

$$-\frac{1}{(i+1)!} \int_{-1}^{1} K'_{n,i+1}(t) f^{(i+1)}(t).$$

Tato rovnost musí platit obecně, tedy i v případě, že

$$f^{(i+1)}(-1) \neq 0, \quad f^{(i+1)}(1) \neq 0.$$

Zřejmě pak musí platit rovnost $K_{n,i+1}(-1) = K_{n,i+1}(1) = 0$.
Neboť $K_{n,i+1}(-1) = K_{n,i+1}(1) = 0$ pro $i = 0, ..., k-1$, platí tedy i rovnost $K_{n,i}(t) = -\frac{1}{i+1} K'_{n,i+1}(t)$, pro každé $i = 0, \ldots, k-1$.
Násobnost nulových bodů nejméně $k$ získáme použitím matematické indukce podle $k$. □

Nyní uvedeme bez důkazu (jež je možno nalézt v Jarník [2], str.198) pomocnou větu, která nám umožní dokázat důležitou vlastnost Peanova jádra.

**Věta 2.7. (1. věta o střední hodnotě)**
*Nechť $a, b$ jsou reálná čísla taková, že $a < b$, nechť funkce $f, g$ jsou spojité na $[a, b]$, nechť funkce $g \geq 0$ na $[a, b]$ a $\int_a^b g(x)dx \neq 0$. Pak existuje bod $\xi \in [a, b]$ takový, že platí $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$.*

Nyní již můžeme vyslovit a dokázat velmi důležitou vlastnost Peanova jádra, které nemění znaménko. Následující věta ukazuje, jak můžeme pomocí Peanova jádra oddělit vlastnosti kvadraturní formule $Q_n$ a funkce $f$ samotné.

**Věta 2.8.**
*Nechť $Q_n$ je kvadraturní vzorec (algebraického) řádu $m$, nechť $f \in C^{m+1}([a,b])$ a nechť Peanovo jádro $K$ kvadraturního vzorce $Q_n$ nemění znaménko na $[a,b]$. Pak existuje $\xi \in [a,b]$ takové, že*

$$
\begin{aligned}
E_n f &= \int_a^b f(t)dt - Q_n(f) = \frac{1}{(m+1)!} f^{m+1}(\xi) \left( \int_a^b t^{m+1} dt - Q_n(t^{m+1}) \right) = \\
&= \frac{1}{(m+1)!} f^{m+1}(\xi) \left( \frac{1}{m+2} \left( b^{m+2} - a^{m+2} \right) - Q_n(t^{m+1}) \right).
\end{aligned}
$$

*Důkaz.* Z věty 2.4 víme, že chybu $E_n$ kvadraturní formule $Q_n$ pro danou funkci $f$ můžeme psát ve tvaru

$$E_n f = \int_a^b f(t)dt - Q_n(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t) K(t) dt.$$

Podle předpokladů věty Peanovo jádro $K(t)$ kvadraturní formule $Q_n$ nemění znaménko. Podle věty 2.7 tedy existuje bod $\xi \in [a,b]$ takový, že platí

$$E_n f = \int_a^b f(t)dt - Q_n f = \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(\xi) \int_a^b K(t) dt.$$

Zbývá tedy vyjádřit $\int_a^b K(t)dt$. Položme $f(t) = t^{m+1}$

$$\int_a^b t^{m+1} dt - Q_n(t^{m+1}) = \frac{1}{m!} \int_a^b (m+1)! K(t) dt.$$

Z toho už snadno dostáváme rovnosti

$$
\begin{aligned}
\int_a^b K(t) &= \frac{1}{m+1} \left( \int_a^b t^{m+1} dt - Q_n(t^{m+1}) \right) = \\
&= \frac{1}{m+1} \left( \frac{1}{m+2} \left( b^{m+2} - a^{m+2} \right) - Q_n(t^{m+1}) \right).
\end{aligned}
$$

□

## 2.3 Výpočet Peanových jader

### Radauova formule

Hledáme Peanovo jádro Radauovy kvadraturní formule, jež je dána vzorcem (uvedeným v Engels [1], str. 96)

$$Q_3 f = \frac{1}{4}[f(0) + 3f(\frac{1}{3}) + f(1)].$$

Z definice 2.3 dostáváme pro $k = 0$ rovnost

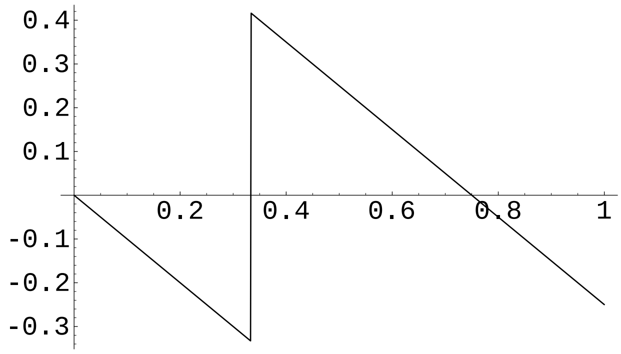
$$\begin{aligned} K_{3,0}(t) &= E_3^x (x-t)_+^0 = \\ &= \int_0^1 (x-t)_+^0 dx - \frac{1}{4}\left[(0-t)_+^0 + 3(\frac{1}{3} - t)_+^0 + (1-t)_+^0\right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ tedy platí rovnost
$\int_t^1 dx - \frac{1}{4}[3+1] = 1 - t - 1 = -t$
a na intervalu $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$
$\int_t^1 dx - \frac{1}{4} = 1 - t - \frac{1}{4} = -t + \frac{3}{4}$.

Pro Peanovo jádro $K_{3,0}(t)$ tedy platí rovnost

$$K_{3,0}(t) = \begin{cases} -t, & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ -t + \frac{3}{4}, & t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Funkce $K_{3,0}$ je zřejmě nespojitá v bodě $\frac{1}{3}$.




Obr. č.2.1, $K_{3,0}(t)$

Pro $k = 1$ dostáváme

$$\begin{aligned} K_{3,1}(t) &= E_3^x(x-t)_+^1 = \\ &= \int\limits_0^1 (x-t)_+^1 dx - \frac{1}{4}\left[(0-t)_+^1 + 3(\frac{1}{3}-t)_+^1 + (1-t)_+^1\right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ tedy řešíme rovnost
$\int\limits_t^1 (x-t)dx - \frac{1}{4}[3(\frac{1}{3}-t) + (1-t)] = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}t^2$
a na intervalu $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$
$\int\limits_t^1 (x-t)dx - \frac{1}{4}(1-t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}.$

Pro Peanovo jádro $K_{3,1}(t)$ dostáváme tedy vztah

$$K_{3,1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}, & t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

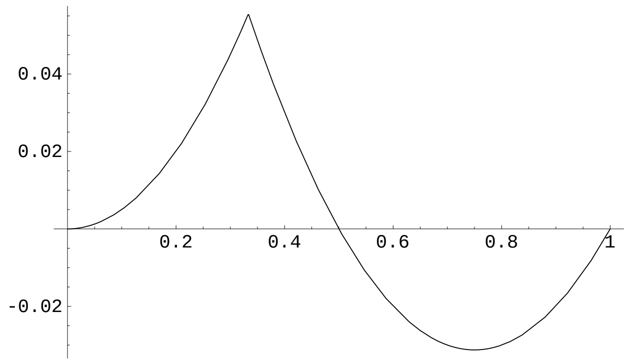
Soustřeďme se nyní na některé důležité vlastnosti funkce $K_{3,1}$. Nejprve ověříme spojitost této funkce ve všech bodech intervalu $[0, 1]$. Posléze ukážeme, že její první derivace v bodě $\frac{1}{3}$ neexistuje.
Funkce $K_{3,1}$ je na každém z intervalů $[0, \frac{1}{3})$, $[\frac{1}{3}, 1]$ polynomiální a tedy zřejmě spojitá.
Zbývá dokázat spojitost v bodě $\frac{1}{3}$.

$$\lim_{t\to\frac{1}{3}-} K_{3,1}(t) = \lim_{t\to\frac{1}{3}-} \tfrac{1}{2}t^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{1}{18}$$
$$K_{3,1}(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3})^2 - \tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{18}$$

Hodnota funkce $K_{3,1}$ v bodě $\frac{1}{3}$ a její limita zleva v témže bodě se rovnají. Funkce $K_{3,1}$ je spojitá v bodě $\frac{1}{3}$ a je tedy spojitá na celém intervalu $[0,1]$. Nyní vyšetříme diferencovatelnost funkce $K_{3,1}$. Existence a spojitost derivace prvního řádu je na každém z intervalů $[0,\frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3},1]$ zřejmá (v bodech 0 a 1 uvažujeme pouze jednostranné derivace). Spočteme podle definice hodnoty jednostranných derivací v bodě $\frac{1}{3}$.

$$\lim_{h\to 0-} \frac{K_{3,1}(\frac{1}{3}+h)-K_{3,1}(\frac{1}{3})}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+h)^2-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^2}{h} = \frac{1}{3}$$
$$\lim_{h\to 0+} \frac{K_{3,1}(\frac{1}{3}+h)-K_{3,1}(\frac{1}{3})}{h} \lim_{h\to 0+} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+h)^2-\frac{3}{4}(\frac{1}{3}+h)+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^2-\frac{3}{4}(\frac{1}{3})+\frac{1}{4}}{h} = -\frac{5}{12}.$$

Hodnoty jednostranných derivací prvního řádu v bodě $\frac{1}{3}$ se nerovnají, tudíž derivace v tomto bodě neexistuje.




Obr. č.2.2, $K_{3,1}(t)$

Pro $k=2$ dostáváme

$$\begin{aligned} K_{3,2}(t) &= E_3^x(x-t)_+^2 = \\ &= \int_0^1 (x-t)_+^2 dx - \frac{1}{4}\left[(0-t)_+^2 + 3(\frac{1}{3}-t)_+^2 + (1-t)_+^2\right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $\left[0,\frac{1}{3}\right)$ tedy dostáváme rovnost

$\int\limits_t^1 (x-t)^2 dx - \frac{1}{4}\left[3(\frac{1}{3}-t)^2 + (1-t)^2\right] = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{12} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}t^3$

a na intervalu $\left[\frac{1}{3},1\right]$

$\int\limits_t^1 (x-t)^2 dx - \frac{1}{4}(1-t)^2 = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}.$

Peanovo jádro $K_{3,2}(t)$ je tedy dáno rovností

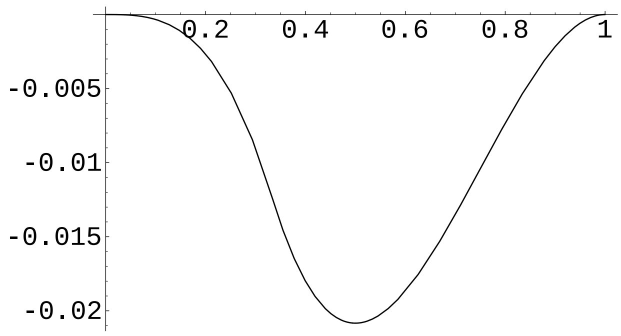
$$K_{3,2}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}t^3, & t \in \left[0,\frac{1}{3}\right) \\ \\ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}, & t \in \left[\frac{1}{3},1\right]. \end{cases}$$

Ověřme nyní spojitost funkce $K_{3,2}$ na intervalu $[0,1]$. Opět stačí omezit se na vyšetřování spojitosti funkce $K_{3,2}$ v bodě $\frac{1}{3}$ zleva.

$\lim\limits_{t\to\frac{1}{3}-} K_{3,2}(t) = \lim\limits_{t\to\frac{1}{3}-} -\frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}(\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{81}$

$K_{3,2}(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^3 + \frac{3}{4}(\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{3}) + \frac{1}{12} = -\frac{1}{81}$

Rovnost funkční hodnoty $K_{3,2}(\frac{1}{3})$ a limity $\lim\limits_{t\to\frac{1}{3}-} K_{3,2}(t)$ dává spojitost na celém intervalu $[0,1]$.




Obr. č.2.3, $K_{3,2}(t)$

Pro $k=3$ dostáváme

$$\begin{aligned} K_{3,3}(t) &= E_3^x(x-t)_+^3 = \\ &= \int\limits_0^1 (x-t)_+^3 dx - \frac{1}{4}\left[(0-t)_+^3 + 3(\frac{1}{3}-t)_+^3 + (1-t)_+^3\right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ tedy platí rovnost
$\int\limits_t^1 (x-t)^3 dx - \frac{1}{4}\left[3(\frac{1}{3}-t)^3 + (1-t)^3\right] = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{3}{2}t^2 - t + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{36} + \frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{36}$
a na intervalu $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$
$\int\limits_t^1 (x-t)^3 dx - \frac{1}{4}(1-t)^3 = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{3}{2}t^2 - t + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{4}t^3 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t.$

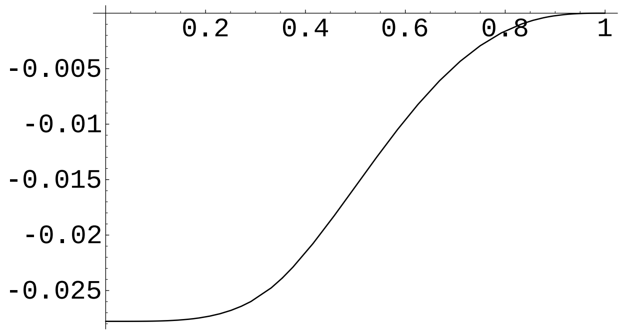
Pro Peanovo jádro $K_{3,3}(t)$ dostáváme celkovou rovnost

$$K_{3,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{36}, & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ \\ \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{4}t^3 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t, & t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Ukažme spojitost funkce $K_{3,3}$ na intervalu $[0,1]$. Následující rovnosti dokazují spojitost funkce $K_{3,3}$ v bodě $\frac{1}{3}$ a tedy i na celém intervalu $[0,1]$.

$\lim\limits_{t \to \frac{1}{3}-} K_{3,3}(t) = \lim\limits_{t \to \frac{1}{3}-} \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{36} = \frac{1}{4}(\frac{1}{3})^4 - \frac{1}{36} = -\frac{2}{81}$

$K_{3,3}(\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{3})^4 - \frac{3}{4}(\frac{1}{3})^3 + \frac{3}{4}(\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{4}(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{81}$




Obr. č.2.4, $K_{3,3}(t)$

## Simpsonovo pravidlo

Hledáme Peanovo jádro Simpsonova pravidla, které je dáno následujícím vzorcem (převzatým z Segethová [5], str.67)

$$Q_3 f = \frac{1}{6}[f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)].$$

Pro $k = 0$ dostáváme rovnost

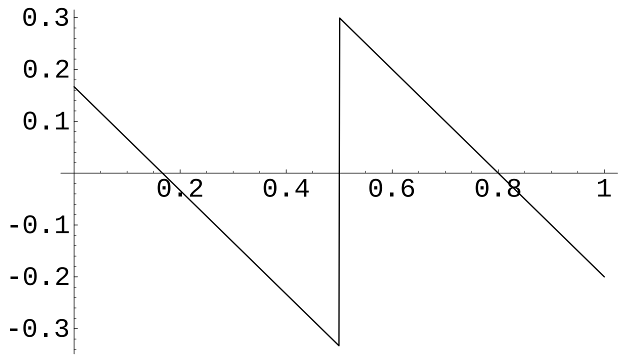
$$\begin{aligned} K_{3,0}(t) &= E_3^x (x-t)_+^0 = \\ &= \int_0^1 (x-t)_+^0 dx - \frac{1}{6}\left[(0-t)_+^0 + 4(\frac{1}{2} - t)_+^0 + (1-t)_+^0\right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ platí
$\int_t^1 dx - \frac{1}{6}[4+1] = 1 - t - \frac{5}{6} = -t + \frac{1}{6}$
a na intervalu $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
$\int_t^1 dx - \frac{1}{6} = 1 - t - \frac{1}{6} = -t + \frac{5}{6}$.

Pro Peanovo jádro $K_{3,0}(t)$ dostáváme vztah

$$K_{3,0}(t) = \begin{cases} -t + \frac{1}{6}, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \\ -t + \frac{5}{6}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Funkce $K_{3,0}$ je nespojitá v bodě $\frac{1}{2}$.




Obr. č.2.5, $K_{3,0}(t)$

Pro $k = 1$ dostáváme

$$\begin{aligned} K_{3,1}(t) &= E_3^x (x-t)_+^1 = \\ &= \int_0^1 (x-t)_+^1 dx - \frac{1}{6}\left[(0-t)_+^1 + 4(\frac{1}{2} - t)_+^1 + (1-t)_+^1\right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ platí rovnost

$\int_t^1 (x-t)dx - \frac{1}{6}[4(\frac{1}{2} - t) + (1-t)] = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}t - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t$

a na intervalu $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$\int_t^1 (x-t)dx - \frac{1}{6}(1-t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}t - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{3}.$

Pro Peanovo jádro $K_{3,1}(t)$ tedy platí rovnost

$$K_{3,1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{3}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

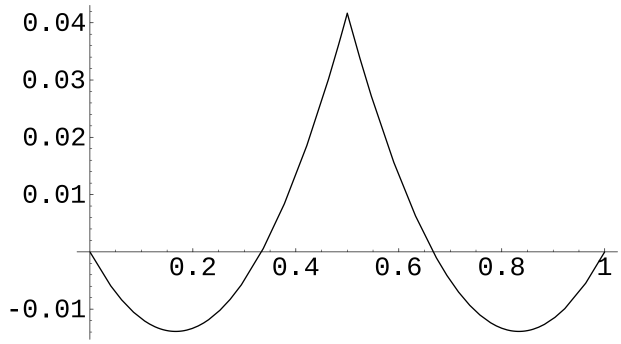
Ověřením spojitosti funkce $K_{3,1}$ v bodě $\frac{1}{2}$, získáme spojitost této funkce na celém intervalu $[0,1]$, neboť je na intervalech $[0,\frac{1}{2})$ a $[\frac{1}{2},1]$ po částech polynomiální a tedy jistě spojitá.

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}-} K_{3,1}(t) = \lim_{t\to\frac{1}{2}-} \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{6}t = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{24}$$
$$K_{3,1}(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{5}{6}(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{24}$$

Díky této rovnosti je funkce $K_{3,1}$ spojitá na celém intervalu $[0,1]$.

$$\lim_{h\to 0-} = \frac{K_{3,1}(\frac{1}{2}+h)-K_{3,1}(\frac{1}{2})}{h} \lim_{h\to 0-} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+h)^2-\frac{1}{6}(\frac{1}{2}+h)-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{6}(\frac{1}{2})}{h} = \frac{1}{3}$$
$$\lim_{h\to 0+} \frac{K_{3,1}(\frac{1}{2}+h)-K_{3,1}(\frac{1}{2})}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+h)^2-\frac{5}{6}(\frac{1}{2}+h)+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2-\frac{5}{6}(\frac{1}{2})+\frac{1}{3}}{h} = -\frac{1}{3}$$

Hodnoty jednostranných derivací v bodě $\frac{1}{2}$ jsou navzájem různé, tudíž funkce $K'_{3,1}$ není v bodě $\frac{1}{2}$ definována.




Obr. č.2.6, $K_{3,1}(t)$

Pro $k=2$ dostáváme

$$\begin{aligned} K_{3,2}(t) &= E_3^x(x-t)_+^2 = \\ &= \int_0^1 (x-t)_+^2 dx - \frac{1}{6}\left[(0-t)_+^2 + 4(\frac{1}{2}-t)_+^2 + (1-t)_+^2\right]. \end{aligned}$$

Na intervalu $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ tedy řešíme

$$\int_t^1 (x-t)^2 dx - \tfrac{1}{6}[4(\tfrac{1}{2}-t)^2+(1-t)^2] = -\tfrac{1}{3}t^3+t^2-t+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{3}t^2+\tfrac{2}{3}t-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{6}t^2+\tfrac{1}{3}t-\tfrac{1}{6} =$$

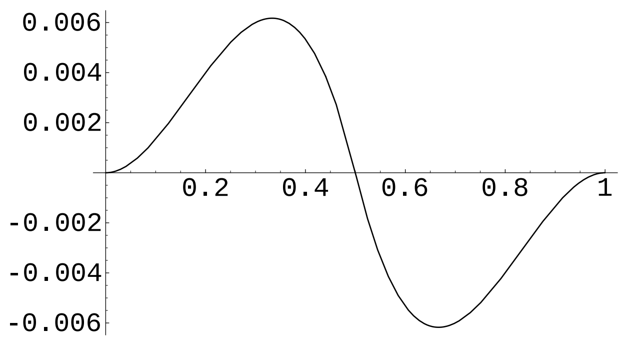
$-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^2$
a na intervalu $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
$\int\limits_t^1 (x-t)^2 dx - \frac{1}{6}(1-t)^2 = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{6}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{6}.$
Peanovo jádro $K_{3,2}(t)$ je dáno vzorcem

$$K_{3,2}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^2, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{6}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{6}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Funkce $K_{3,2}$ je spojitá na intervalu $[0,1]$, neboť je na každém z intervalů $[0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1]$ polynomiální, tedy zřejmě spojitá.

$\lim\limits_{t \to \frac{1}{2}-} K_{3,2}(t) = \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}-} -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^2 = -\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{6}(\frac{1}{2})^2 = 0$
$K_{3,2}(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3 + \frac{5}{6}(\frac{1}{2})^2 - \frac{2}{3}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6} = 0$

Díky rovnosti hodnot jednostranných limit v bodě $\frac{1}{2}$ je funkce $K_{3,2}$ spojitá na celém intervalu $[0,1]$.




Obr. č.2.7, $K_{3,2}(t)$

Pro $k = 3$ dostáváme

$$\begin{aligned} K_{3,3}(t) &= E_3^x (x-t)_+^3 = \\ &= \int\limits_0^1 (x-t)_+^3 dx - \frac{1}{6}\left[(0-t)_+^3 + 4(\frac{1}{2} - t)_+^3 + (1-t)_+^3\right]. \end{aligned}$$

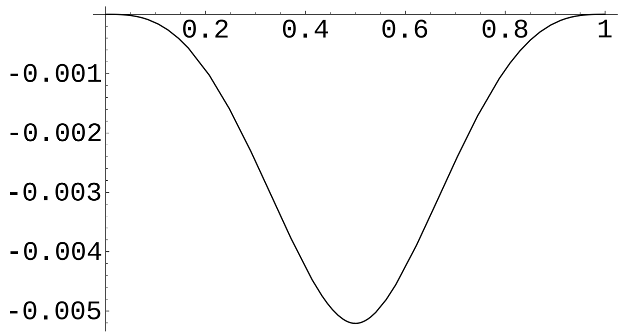
Na intervalu $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ tedy platí rovnost
$\int_t^1 (x-t)^3 dx - \frac{1}{6}[4(\frac{1}{2}-t)^3 + (1-t)^3] = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{3}{2}t^2 - t + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{12} + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3$
a na intervalu $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
$\int_t^1 (x-t)^3 dx - \frac{1}{6}(1-t)^3 = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{3}{2}t^2 - t + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{6}t^3 + t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}$.

Pro Peanovo jádro $K_{3,3}(t)$ platí

$$K_{3,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \\ \frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{6}t^3 + t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Dokažme nyní spojitost funkce $K_{3,3}$ na intervalu $[0, 1]$. Stejně jako v předchozích případech stačí ověřit spojitost funkce $K_{3,3}$ v bodě $\frac{1}{2}$.

$\lim_{t \to \frac{1}{2}-} K_{3,3}(t) = \lim_{t \to \frac{1}{2}-} \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^4 - \frac{1}{6}(\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{192}$
$K_{3,3}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^4 - \frac{5}{6}(\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{12} = -\frac{1}{192}$




Obr. č.2.8, $K_{3,3}(t)$

Pro výpočet Peanových jader vyšších řádů můžeme také použít větu 2.6, která dává vzorec

$$K_{n,i}(t) = -\frac{1}{i+1} K'_{n,i+1}(t).$$

Pak pro Peanovo jádro řádu $i+1$ získáváme rovnost

$$K_{n,i+1}(t) = -(i+1)\int_0^t K_{n,i}(\tau)d\tau.$$

# Kapitola 3

# Minimální kvadratura

## 3.1 Minimální kvadratura pro spojité funkce

Na prostoru $C([-1,1])$ všech spojitých funkcí na intervalu $[-1,1]$ definujeme normu funkce jako $\|f\| = \sup\{|f(x)|\,;\ |x| \le 1\}$. Nechť je dána funkce $f$ spojitá ve všech bodech intervalu $[-1,1]$. Mějme dále kvadraturní formuli $Q_n$ takovou, že $Q_n f = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$. Pro její chybu $E_n$ tedy platí

$$E_n f = \int\limits_{-1}^{1} f(x) - \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i). \tag{3.1}$$

Použijeme-li na vzorec (3.1) trojúhelníkovou nerovnost, získáme odhad absolutní hodnoty chyby kvadraturní formule

$$|E_n f| \le \left|\int\limits_{-1}^{1} f(x)\ dx\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)\right| \le \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\, dx + \sum_{i=1}^{n} |A_i|\, |f(x_i)| \le$$

$$\le \left(\int\limits_{-1}^{1} 1dx + \sum_{i=1}^{n} |A_i|\right) \|f\| = \left(2 + \sum_{i=1}^{n} |A_i|\right) \|f\|\,.$$

Položíme-li nyní $\sigma_n = 2 + \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i|$, získáváme nerovnost $|E_n f| \le \sigma_n \|f\|$. Konstanta $\sigma_n$ závisí pouze na kvadraturní formuli $Q_n$ (tedy na vahách $A_i$), ne však na funkci $f$, naopak norma $\|f\|$ závisí pouze na funkci $f$, nikoli však na kvadraturním vzorci $Q_n$. Vlastnosti kvadraturního vzorce $Q_n$ a funkce $f$

jsou zde odděleny.
Pro každý kvadraturní vzorec algebraického stupně přesnosti alespoň 0 platí $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = 2$. Z trojúhelníkové nerovnosti dostáváme $\sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| \geq 2$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když platí $A_i \geq 0$, pro všechna $i = 1, ..., n$. Minimální kvadraturní formule, pokud existuje, bude mít tedy zřejmě nezáporné váhy.
Budeme se tedy pro danou funkci $f$ snažit nalézt takový kvadraturní vzorec, aby konstanta $\sigma_n$ v odhadu $|E_n f|$ byla minimální. Hledáme na dané třídě funkcí optimální kvadraturní vzorec. Při tomto hledámí budeme postupovat jako v Engels [1], str. 108-112.
Existují dva způsoby, jak lze v tomto hledání postupovat. Jeden z nich využívá aproximace funkce $f$ polynomy a spliny, druhý využívá aditivity integrálu vzhledem k intervalu integrace (dále už jen aditivity integrálu).

## Odhad pomocí polynomů

Nechť $Q_n$ je kvadraturní formule, pro jejíž chybu $E_n$ platí

$$\lim_{n\to\infty} E_n g = 0,$$

kde $g$ je libovolný polynom. Pro danou funkci $f$ a libovolný polynom $g$ můžeme díky linearitě funkcionálu $E_n$ a trojúhelníkové nerovnosti psát

$$|E_n f| = |E_n(f - g + g)| \leq |E_n(f - g)| + |E_n g|,$$

kde zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} |E_n g| = 0$. Nechť má dále kvadraturní formule $Q_n$ algebraický stupeň přesnosti $k(n) > 0$ a $g$ je libovolný polynom stupně $k(n)$, pak je $E_n g = 0$ pro všechna $n \leq k(n)$. Definujme algebraickou aproximační chybu $e_m(f, x)$, pro kterou platí vzorec

$$\|e_m(f, x)\| = \min\{\|f - g\|;\ g \in P_m\}.$$

Použijeme-li nyní algebraické aproximační chyby $e_m(f, x)$, dostáváme odhad

$$|E_n f| \leq \left(2 + \sum_{i=1}^{n} |A_i|\right) \|e_m(f, x)\| + |E_n g| = \sigma_n \|e_m(f, x)\| + |E_n g|.$$

Získali jsme tedy konvergenci, pokud aproximační polynomy $g$ konvergují k $f$ pro $n \to 0$ stejnoměrně a pokud je $\sigma_n$ omezené.
Obdobným způsobem postupujeme, při aproximaci spliny nebo trigonometrickými funkcemi.

## Odhad pomocí aditivity

Využijeme-li aditivity integrálu, tedy

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{x_1} f(x)dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \int\limits_{x_n}^{1} f(x)dx,$$

dostáváme

$$E_n f = \int\limits_{-1}^{x_1} f(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \left( \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - A_i f(x_i) \right), \tag{3.2}$$

kde $x_{n+1} = 1$. Protože platí $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dx = (x_{i+1} - x_i)f(x_i)$, můžeme zapsat chybu kvadraturního vzorce ve tvaru

$$E_n f = \int\limits_{-1}^{x_1} f(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \left[ \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x) - f(x_i)\right) dx + \left(x_{i+1} - x_i - A_i\right) f(x_i) \right].$$

Definujeme konstantu

$$h_n = \sup \left\{ |x_{i+1} - x_i| \,;\; i = 1, ..., n \right\}$$

a funkcionál

$$\omega_h(f) = \sup \left\{ |f(x) - f(y)| \,;\; |x - y| \leq h \right\}.$$

Po dosazení tedy získáváme odhad

$$|E_n f| \leq \left[ |x_1 + 1| + \sum_{i=1}^{n} |x_{i+1} - x_i - A_i| \right] \|f\| + |1 - x_1| \, \omega_{h_n}(f) =$$

$$= \Big[ |x_1 + 1| + \sum_{i=1}^{n} |x_{i+1} - x_i - A_i| + |1 - x_1| \, \omega_{h_n}\Big(\frac{f}{\|f\|}\Big) \Big] \|f\|.$$

Položme nyní

$$\sigma_n = |x_1 + 1| + \sum_{i=1}^{n} |x_{i+1} - x_i - A_i| + |1 - x_1| \, \omega_{h_n}\Big(\frac{f}{\|f\|}\Big) \tag{3.3}$$

a použijme $\sigma_n$ k odhadu chyby $E_n f$. Tento odhad ale zcela neodděluje

vlastnosti funkce $f$ a kvadraturní formule $Q_n$, protože konstanta $\sigma_n$ závisí na funkci $f$.
Hledáme optimální kvadraturní vzorec $\bar{Q}_n$ pro danou funkci $f$ (tj. hledáme váhy $A_i$ a uzly $x_i$ tak , aby konstanta $\sigma_n$ byla minimální). Ze vzorce (3.3) vidíme, že $\omega$ nezávisí na hodnotách vah $A_i$. Budeme se proto snažit minimalizovat nejprve $h_n$ a toho dosáhneme právě tehdy, když dělení intervalu $[-1, 1]$ bude ekvidistantní. Získáváme tedy konstantu $h_n$ a uzly $x_i$ kvadraturního vzorce $\tilde{Q}_n$ ve tvaru $h_n = \frac{2}{n+1}$,

$$x_i = -1 + ih_n = -1 + \frac{2i}{n+1}, \quad i = 1, ..., n.$$

Chceme dále minimalizovat odhad ve vzorci (3.3). Jak jsme již zmínili, funkcionál $\omega$ nezávisí na vahách $A_i$, můžeme je tedy zvolit libovolně a to tak, aby $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_{i+1} - x_i - A_i| = 0$, tedy

$$A_i = x_{i+1} - x_i = \frac{2}{n+1}, \quad i = 1, ..., n.$$

Po dosazení do vzorce (3.3) dostáváme

$$\tilde{\sigma}_n = \frac{2}{n+1} + (2 - \frac{2}{n+1})\ \omega_{\frac{2}{n+1}}(\frac{f}{\|f\|}) = \frac{2}{n+1}\left[1 + \omega_{\frac{2}{n+1}}(\frac{f}{\|f\|})\right].$$

Díky spojitosti funkce $f$ víme, že $\lim\limits_{h\to 0} \omega_h(f) = 0$. Budeme se tedy snažit najít $\sigma_n$ ve tvaru $\sigma_n = \alpha\omega_{h_n}(\frac{f}{\|f\|})$, kde $\alpha$ je konstanta. Změníne tedy rozmístění uzlů, abychom odstranili první sčítanec $|x_1 + 1|$. Toho dosáhneme umístěním uzlů $x_i$ podle vzorce

$$x_i = -1 + (i - 1)h_n, \quad i = 1, ..., n.$$

Pro konstantu $h_n$ platí rovnost $h_n = \frac{2}{n}$. Stejně jako v předchozím případě volíme

$$A_i = x_{i+1} - x_i = \frac{2}{n}, \quad i = 1, ..., n.$$

Dostáváme tedy $\bar{\sigma}_n = 2\omega_{\frac{2}{n}}(\frac{f}{\|f\|})$.

Máme tedy vzorec pro kvadraturní formuli

$$Q_n f = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(-1 + 2\frac{i-1}{n})$$

a její chybu

$$E_n f = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx - Q_n f = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_i+\frac{2}{n}} \left(f(x) - f(x_i)\right) dx, \quad x_i = -1 + 2\frac{i-1}{n}.$$

Zbývá dokázat, že tato kvadratura je skutečně "optimální" pro danou funkci $f \in C\left([-1,1]\right)$.

**Věta 3.1.** [1]
*Nechť $f \in C\left([-1,1]\right)$. Pak konstanta $\sigma_n = 2\omega_{\frac{2}{n}}(\frac{f}{\|f\|})$ je asymptoticky nejlepší možná.*

*Důkaz.*
Hledáme spojitou funkci $\tilde{f}$ takovou, že $\left|E_n \tilde{f}\right| = \sigma_n \left\|\tilde{f}\right\|$.
Vezměme funkci $f$ takovou, že $E_n f = \sigma_n \|f\|$ a zároveň platí $\|f\| = 1$. Takovou funkcí je např. následující nespojitá funkce $f$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x = -1 \\ -1 + \frac{2(i-1)}{n}, & x \in (x_{i-1}, x_i], \quad i = 2, ..., n+1, \quad (x_{n+1} = 1). \end{cases}$$

Volme nyní libovolně (dostatečně malé) $\varepsilon > 0$ a definujme funkci $f_\varepsilon$ jako spojitou aproximaci funkce $f$

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} -1, & x = -1 \\ \frac{2}{n\varepsilon}(x - x_{i-1}) + (-1 + \frac{2(i-2)}{n}), & x \in [x_{i-1}, x_{i-1} + \varepsilon] \\ -1 + \frac{2(i-1)}{n}, & x \in [x_{i-1} + \varepsilon, x_i], \end{cases}$$

kde $i = 2, ..., n+1$ a $(x_{n+1} = 1)$. Snadno spočteme

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

[1] [1], str.111

Neboť zřejmě platí $f(x_i) = f_\varepsilon(x_i)$, pro každé $i = 1, ...n+1$, dostáváme rovnost

$$Q_n f = Q_n f_\varepsilon.$$

Využitím linearity funkcionálu $E_n$ získáváme rovnost

$$E_n f - E_n f_\varepsilon = E_n(f - f_\varepsilon) = \int_{-1}^{1} (f(x) - f_\varepsilon(x))dx = \varepsilon.$$

Konstanta $\sigma_n$ má pro funkci $f$ i pro funkci $f_\varepsilon$ stejnou hodnotu

$$\sigma_n = 2\omega_{\frac{2}{n}}(\frac{f}{\|f\|}) = 2\omega_{\frac{2}{n}}(\frac{f_\varepsilon}{\|f_\varepsilon\|}) = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\omega_{\frac{2}{n}}(\frac{f_\varepsilon}{\|f_\varepsilon\|}) = \frac{4}{n}.$$

Na druhou stranu platí

$$E_n f = E_n f_\varepsilon + \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_i + \frac{2}{n}} (f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x_i))\, dx + \varepsilon =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{4}{n^2} - \frac{\varepsilon}{n} \right) + \varepsilon = \frac{4}{n} = \sigma_n$$

Pro funkci $f_\varepsilon$ zřejmě platí $\|f_\varepsilon\| = 1$ a navíc $E_n f_\varepsilon = \sigma_n \|f\| - \varepsilon$. Tedy jistě

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_n f_\varepsilon = \sigma_n \|f\|.$$

$\square$

## 3.2 Využití Peanova jádra při hledání minimální kvadraturní formule

Nejprve uvedeme definice norem v Lebesqueových prostorech $L^p([-1,1])$ a bez důkazu (jež můžeme najít v Rudin [4], str. 80-81) vyslovíme větu o Hölderově nerovnosti.

**Definice 3.2.**
*Nechť je $p \in [1, \infty)$, pak na prostoru $L^p([-1,1])$ definujeme normu funkce $f$ jako $\|f\|_p = \left( \int_{-1}^{1} |f(t)|^p \ dt \right)^{\frac{1}{p}}$.*

**Definice 3.3.**
*Nechť je $p = \infty$, pak na prostoru $L^\infty([-1,1])$ definujeme normu funkce $f$ jako $\|f\| = ess\ sup\ \{|f(t)|\,;\ t \in [-1,1]\}$.*
*Je-li funkce $f$ navíc spojitá na intervalu $[-1,1]$, definujme normu funkce $f$ jako $\|f\| = sup\ \{|f(t)|\,;\ t \in [-1,1]\}$.*

**Věta 3.4. (Hölderova nerovnost)**
*Nechť $f, g$ jsou měřitelné funkce na intervalu $[-1,1]$, nechť $p, q \in (1,\infty)$ jsou takové, že platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Nyní můžeme přistoupit k vlastnímu odhadování chyby kvadraturní formule, přičemž budeme postupovat jako v Engels [1], str. 112-114. Mějme funkci $f$ třídy $C^k$ na intervalu $[-1,1]$ takovou, že pro její k-tou derivaci platí $f^{(k)} \in L^p([-1,1])$, pro nějaké $p \in [1,\infty]$. Dále mějme kvadraturní formuli $Q_n$. Označme její algebraický řád přesnosti $deg(Q_n)$. Z věty 2.4 víme, že chybu kvadraturního vzorce $E_n f$ můžeme pro $k < deg(Q_n)$ psát ve tvaru

$$E_n f = \frac{1}{(k-1)!} \int_{-1}^{1} K_{k,n}(t) f^{(k)}(t)\ dt.$$

Pro její odhad tedy dostáváme

$$|E_n f| \leq \frac{1}{(k-1)!} \int_{-1}^{1} |K_{k,n}(t)| \left|f^{(k)}(t)\right|\ dt. \tag{3.4}$$

Nechť $p \in (1,\infty)$. Použijeme Hölderovu nerovnost na vzorec (3.4), pro $p, q \in (1,\infty)$ takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a dostáváme

$$|E_n f| \leq \frac{1}{(k-1)!} \left( \int_{-1}^{1} |K_{k,n}(t)|^q\ dt \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{-1}^{1} \left|f^{(k)}(t)\right|^p\ dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Položíme-li $\sigma_n = \frac{1}{(k-1)!} \left( \int_{-1}^{1} |K_{k,n}(t)|^q\ dt \right)^{\frac{1}{q}}$, můžeme nerovnost psát ve tvaru

$$|E_n f| \leq \sigma_n \left\|f^{(k)}\right\|_p ,$$

kde $\sigma_n$ závisí pouze na zvolené kvadraturní formuli (tj. nezávisí na funkci $f$) a norma $\|f\|_p$ závisí pouze na dané funkci $f$ (tj. nezávisí na kvadraturním vzorci $Q_n$).
Nechť $p = \infty$. Pak použitím definice normy $\|f\|_\infty$ a vzorce (3.4) dostáváme

$$|E_n f| \leq \frac{1}{(k-1)!} \sup_{t\in[-1,1]} \left|f^{(k)}(t)\right| \int_{-1}^{1} |K_{k,n}(t)| \ dt.$$

Položíme-li $\sigma_n = \frac{1}{(k-1)!} \int_{-1}^{1} |K_{k,n}(t)| \ dt$, můžeme nerovnost psát ve tvaru

$$|E_n f| \leq \sigma_n \left\|f^{(k)}\right\|_\infty .$$

Problém hledání optimální kvadraturní formule $Q_n$ k dané funkci $f$ se tedy mění na problém hledání uzlů $x_i$ a vah $A_i$ tak, aby pro Peanovo jádro $K(t)$ bylo $\int_{-1}^{1} |K(t)|^p \, dt$, případně $\int_{-1}^{1} |K(t)| \, dt$ minimální. Samotný výpočet rozmístění uzlů $x_i$ a hodnot vah $A_i$ může být však značně obtížný.

Nyní uvažujme případ $k \geq deg(Q_n)$. Z věty 2.8 a definice Peanova jádra platí pro chybu $E_n f$ kvadraturního vzorce $Q_n$ rovnost

$$E_n f = \sum_{r=l}^{k-1} \frac{f^{(r)}(0)}{r!} E_n x^r + \frac{1}{(k-1)!} \int_{-1}^{1} K(t) f^{(k)}(t) dt.$$

Pro odhad chyby kvadraturní formule dostáváme nerovnost

$$|E_n f| \leq \sum_{r=l}^{k-1} \frac{\left|f^{(r)}(0)\right|}{r!} |E_n x^r| + \frac{1}{(k-1)!} \int_{-1}^{1} \left|K(t) \,||\, f^{(k)}(t)\right| dt.$$

Aplikujeme-li na oba sčítance Hölderovu nerovnost, získáme následující

$$|E_n f| \leq \left( \sum_{r=l}^{k-1} \left( \frac{|E_n x^r|}{r!} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{r=l}^{k-1} \left|f^{(r)}(0)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \frac{1}{(k-1)!} \left( \int_{-1}^{1} |K(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{-1}^{1} \left|f^{(k)}(t)\right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Funkce $g(x) = x^{\frac{1}{q}}$ je pro $x > 0$ a $q \geq 1$ monotónní, navíc zřejmě

$$\sum_{r=l}^{k-1} \left( \frac{|E_n x^r|}{r!} \right)^q \geq 0,$$

$$\frac{1}{((k-1)!)^q} \int_{-1}^{1} |K(t)|^q \geq 0.$$

Platí tedy nerovnosti:

$$\left( \sum_{r=l}^{k-1} \left( \frac{|E_n x^r|}{r!} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \sum_{r=l}^{k-1} \left( \frac{|E_n x^r|}{r!} \right)^q + \frac{1}{((k-1)!)^q} \int_{-1}^{1} |K(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\frac{1}{(k-1)!} \left( \int_{-1}^{1} |K(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \sum_{r=l}^{k-1} \left( \frac{|E_n x^r|}{r!} \right)^q + \frac{1}{((k-1)!)^q} \int_{-1}^{1} |K(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Tím dostáváme odhad

$$|E_n f| \leq \left( \sum_{r=l}^{k-1} \left( \frac{|E_n x^r|}{r!} \right)^q + \frac{1}{((k-1)!)^q} \int_{-1}^{1} |K(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{r=l}^{k-1} \left| f^{(r)}(0) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left( \sum_{r=l}^{k-1} \left( \frac{|E_n x^r|}{r!} \right)^q + \frac{1}{((k-1)!)^q} \int_{-1}^{1} |K(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{-1}^{1} \left| f^{(k)}(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Položíme-li nyní

$$\|f\|_* = \left( \sum_{r=l}^{k-1} \left| f^{(r)}(0) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{-1}^{1} \left| f^{(k)}(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

celkově pak pro $|E_n f|$ máme

$$|E_n f| \leq \left( \sum_{r=l}^{k-1} \left( \frac{|E_n x^r|}{r!} \right)^q + \frac{1}{((k-1)!)^q} \int_{-1}^{1} |K(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_*.$$

Tento odhad opět odděluje vlastnosti kvadraturního vzorce $Q_n$ a funkce $f$.

# Kapitola 4

# Rombergova kvadraturní formule

## 4.1 Bernoulliovy polynomy

V této kapitole se budeme věnovat vyjádření chyby Rombergovy kvadraturní formule pomocí Peanova jádra. Ukážeme některé vlastnosti Rombergova kvadraturního vzorce a porovnáme odhad chyby této kvadraturní formule se složeným lichoběžníkovým pravidlem.
Než přejdeme k samotnému vyjádření Rombergova kvadraturního vzorce, zavedeme pojmy Bernoulliho čísla a Bernoulliho polynomu.
Bernoulliova čísla budeme definovat jako v Kofroň [3], str. 185-193 pomocí vytvořující funkce

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1},$$

pro $x$ komplexní číslo.
Mějme tedy rovnost

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n, \quad |x| < 2\pi.$$

Koeficienty $B_n$ v této řadě nazveme Bernoulliova čísla.
Pro každé komplexní číslo x platí $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Získáváme tedy rovnost

$$x = (e^x - 1)\frac{x}{e^x - 1} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\Big), \quad |x| < 2\pi.$$

Roznásobením získáme $B_0 = 1$ a pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ rovnost

$$\frac{B_0}{0!n!} + \frac{B_1}{1!(n-1)!} + ... + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!1!} = 0.$$

Pro výpočet Bernoulliho čísel tedy dostáváme tento rekurentní vztah

$$B_0 = 1$$
$$B_n = \tfrac{1}{n+1} \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \left( \begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right) B_k.$$

Navíc platí $B_{2k+1} = 0$ pro $k = 1, 2, ....$

Několik prvních Bernoulliových čísel má následujíci hodnoty:

$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$.

Podobně budeme postupovat při definování Bernoulliových polynomů. Vytvořující funkcí v tomto případě bude funkce dvou proměnných

$$f(x,t) = e^{xt} \frac{t}{e^t - 1},$$

kde $t$ je komplexní a $x$ je realné číslo. Mějme tedy rovnost

$$e^{xt} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n.$$

Funkce $B_n(x)$ v této řadě budeme nazývat Bernoulliovými polynomy.

Zde uvádíme několik prvních Bernoulliových polynomů:

$B_0(x) = 1$

$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$

$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$

$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$

$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$

$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.$

Dále uvedeme bez důkazu (který je možno nalézt v Kofroň [3] str.189 a 193) některé vlastnosti Bernoulliho čísel a polynomů, které později využijeme při vyjádření Peanova jádra Rombergovy kvadraturní formule.
Derivujeme-li vytvořující funkci $f(x,t)$ podle proměnné $x$, získáváme rovnost

$$\frac{t^2 e^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k'(x)}{k!} t^k.$$

Dosazením snadno ověříme platnost vzorce $B_k(0) = B_k$, pro $k = 0, 1, ....$ Dále pro Bernoulliho polynomy platí

$$\int_0^1 B_{k-1}(x)dx = \frac{1}{k}\left(B_k(1) - B_k\right) = 0$$

$$B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x).$$

## 4.2 Richardsonova extrapolace

Než přejdeme k Rombergově kvadraturní formuli, zmíníme se krátce o Richardsonově extrapolaci, ze které Rombergův kvadraturní vzorec vychází. Při odvozování postupujeme jako v Vitásek [6], str. 93-94.
Mějme funkci $\varphi$ a takovou její aproximaci $\varphi(h)$, že pro chybu $E(h) = \varphi - \varphi(h)$ platí asymptotický vzorec pro $h \to 0$

$$E(h) = \sum_{j=k}^{\infty} \omega_j h^j,$$

kde $\omega_j$ pro $j = k, ...$ jsou konstanty a $\omega_k \neq 0$. Nyní provedeme stejný vypočet pro dvě různá $h_1$, $h_2$, získáváme tak dvě aproximace $\varphi(h_1)$, $\varphi(h_2)$ a jako novou aproximační funkci vezmeme funkci $\varphi_e$, definovanou vzorcem

$$\varphi_e = \frac{1}{h_1^k - h_2^k}\,[h_1^k \varphi(h_2) - h_2^k \varphi(h_1)].$$

Pro funkci $\varphi_e$ platí

$$\varphi - \varphi_e = \sum_{j=k+1}^{\infty} \omega_j \, \frac{h_1^k h_2^j - h_2^k h_1^j}{h_1^k - h_2^k}.$$

Položíme-li $h_1 = ah$, $h_2 = bh$, kde $a, b$ jsou vhodná reálná čísla, získáváme pro chyby jednotlivých aproximací následující vzorce:

$$\begin{aligned}
\varphi - \varphi(h_1) &= \sum_{j=k}^{\infty} \omega_j a^j h^j \\
\varphi - \varphi(h_2) &= \sum_{j=k}^{\infty} \omega_j b^j h^j \\
\varphi - \varphi_e &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \omega_j \frac{a^k b^j - a^j b^k}{a^k - b^k} h^j.
\end{aligned}$$

Nejmenší mocnina $h$ ve vyjádření chyby nové aproximační funkce $\varphi_e$ je větší než u chyb aproximací $\varphi(h_1)$ a $\varphi(h_2)$, jejichž kombinací byla aproximace $\varphi_e$ získána. Tato aproximace je tedy ve většině případů přesnější než obě aproximace použité k její konstrukci.
Volme nyní speciálně aproximační funkci $\varphi(h)$ takovou, že platí

$$E(h) = \sum_{j=k}^{\infty} \omega_j h^{2j},$$

kde $\omega_j$ pro $j = k, ...$ jsou konstanty a $\omega_k \neq 0$. Pro funkci $\varphi_e$ tedy získáváme vztah

$$\varphi_e = \frac{1}{h_1^{2k} - h_2^{2k}} \, [h_1^{2k} \varphi(h_2) - h_2^{2k} \varphi(h_1)].$$

Dosazením $h_1 = 2h$, $h_2 = h$ dostáváme rovnost

$$\varphi_e = \frac{1}{4^k - 1} \, [4^k \varphi(h) - \varphi(2h)],$$

kterou dále využijeme při konstrukci Rombergova kvadraturního vzorce.

## 4.3 Rombergova kvadraturní formule

Při výpočtu integrálu pomocí Rombergovy kvadraturní formule se využívá tzv. T-schématu[1],

$$
\begin{array}{llll}
T_{0,0} & & & \\
T_{0,1} & T_{1,0} & & \\
T_{0,2} & T_{1,1} & T_{2,0} & \\
\vdots & & & \ddots \\
T_{0,m} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & T_{m,0},
\end{array}
$$

kde prvky $T_{0,k}$ prvního sloupce spočteme pomocí složeného lichoběžníkového pravidla pro hodnoty $h = \frac{(b-a)}{2^k}$. Prvky ostatních sloupců spočteme podle vzorce

$$T_{m,k} = \frac{1}{4^m - 1}(4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}), \quad m = 1, 2, .... \tag{4.1}$$

Takto zkonstruovaná posloupnost $T_{k,0} = \frac{1}{4^k-1}(4^k T_{k-1,1} - T_{k-1,0})$ obvykle konverguje k hodnotám integrálu rychleji než původní posloupnost $T_{0,k}$ získaná pomocí lichoběžníkového pravidla.

## 4.4 Peanovo jádro Rombergovy kvadraturní formule

Nejprve odvodíme vzorce pro Peanovo jádro prvního řádu složeného lichoběžníkového pravidla (prvního sloupce T-schématu) a ukážeme některé jeho vlastnosti. Při tom budeme postupovat jako v Engels [1], str. 383-386. Připomeňme vzorce pro složené lichoběžníkové pravidlo[2] s koeficientem $h=\frac{1}{2^k}$:

$T_{0,0} = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1)$

$T_{0,1} = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}f(0) + f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f(1)]$

$\vdots$

[1] [6], str.95

[2] [5], str.66

$T_{0,k} = \frac{1}{2^k}[\frac{1}{2}f(0) + \sum_{i=1}^{2^k-1} f(\frac{i}{2^k}) + \frac{1}{2}f(1)].$

Mějme funkci $f$ třídy $C^m$ na intervalu $[0,1]$ pro vhodné $m \in N$. Pomocí věty 2.4 zapíšeme chybu $E_2^{T_{0,0}}f$ lichoběžníkového pravidla $T_{0,0}$ ve tvaru

$$E_2^{T_{0,0}}f = \int_0^1 f(t)dt - T_{0,0} = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) = \int_0^1 K_{2,1}^{T_{0,0}}(t)f''(t)dt,$$

kde funkce $K_{2,1}^{T_{0,0}}(t)$ označuje Peanovo jádro lichoběžníkového pravidla prvního řádu. Podle definice 2.3 spočteme funkci $K_{2,1}^{T_{0,0}}$ a dostáváme

$$K_{2,1}^{T_{0,0}}(t) = \int_0^1 (x-t)_+^1 dx - \frac{1}{2}[(0-t)_+^1 + (1-t)_+^1] = \int_t^1 (x-t)dx - \frac{1}{2}(1-t) = \frac{1}{2}t(t-1).$$

(viz obr. č.4.1)

Platí tedy zřejmě rovnost $K_{2,1}^{T_{0,0}}(t) = K_{2,1}^{T_{0,0}}(1-t)$, pro $t \in [0,1]$.

Pro chybu $E_3^{T_{0,1}}$ složeného lichoběžníkového pravidla $T_{0,1}$ platí rovnosti

$$E_3^{T_{0,1}}f = \int_0^1 f(t)dt - T_{0,1} = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}f(0) + f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f(1)] = \int_0^1 K_{3,1}^{T_{0,1}}(t)f''(t)dt,$$

kde Peanovo jádro $K_{3,1}^{T_{0,1}}(t)$ můžeme vyjádřit rovností

$$K_{3,1}^{T_{0,1}}(t) = \int_0^1 (x-t)_+^1 dx - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(0-t)_+^1 + (\frac{1}{2}-t)_+^1 + \frac{1}{2}(1-t)_+^1].$$

Dostáváme vzorec pro Peanovo jádro $K_{3,1}^{T_{0,1}}(t)$ složeného lichoběžníkového pravidla $T_{0,1}$

$$K_{3,1}^{T_{0,1}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}, & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

jež můžeme stručně zapsat ve tvaru

$$K_{3,1}^{T_{0,1}}(t) = \frac{1}{2}(\frac{i}{2} - t)(\frac{i+1}{2} - t),$$

pro $t \in [\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2})$, kde $i = 0, 1$.
(viz obr. č.4.2)

Všimněme si nyní dvou vlastností funkce $K_{3,1}^{T_{0,1}}(t)$. Zřejmě platí rovnosti

- $K_{3,1}^{T_{0,1}}(t) = K_{3,1}^{T_{0,1}}(1-t), \qquad t \in [0,1]$
- $K_{3,1}^{T_{0,1}}(t) = \frac{1}{4}K_{2,1}^{T_{0,0}}(2t), \qquad t \in [0, \frac{1}{2}]$

  $K_{3,1}^{T_{0,1}}(t) = \frac{1}{4}K_{2,1}^{T_{0,0}}(2t-1), \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]$,

což snadno ověříme dosazením.

Než přejdeme k obecnému vzorci pro složené lichoběžníkové pravidlo, odvodíme ještě vzorec pro Peanovo jádro kvadraturní formule $T_{0,2}$ dané vzorcem

$T_{0,2} = \frac{1}{2^2}[\frac{1}{2}f(0) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}) + \frac{1}{2}f(1)]$.

Z definice 2.3 získáváme rovnost

$K_{5,1}^{T_{0,2}}(t) = \int\limits_0^1 (x-t)_+^1 dx - \frac{1}{4}[\frac{1}{2}(0-t)_+^1 + (\frac{1}{4}-t)_+^1 + (\frac{1}{2}-t)_+^1 + (\frac{3}{4}-t)_+^1 + (1-t)_+^1]$.

Po úpravě tedy máme

$$K_{5,1}^{T_{0,2}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t, & t \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{8}t + \frac{1}{16}, & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{8}t + \frac{3}{16}, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{7}{8}t + \frac{3}{8}, & t \in [\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

což můžeme zapsat následujícím způsobem

$$K_{5,1}^{T_{0,2}}(t) = \frac{1}{2}(\frac{i}{4} - t)(\frac{i+1}{4} - t),$$

pro $t \in [\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4})$[3], kde $i = 0, 1, 2, 3$.
(viz obr. č.4.3)

[3]Pro zjednodušení zápisu nadále uvažujeme interval obsahující bod 1 jako uzavřený.

I zde platí pro funkci $K_{5,1}^{T_{0,2}}(t)$ obdobné vlastnosti jako v případě $K_{3,1}^{T_{0,1}}(t)$:

- $K_{5,1}^{T_{0,2}}(t) = K_{5,1}^{T_{0,2}}(1-t), \qquad t \in [0,1]$
- $K_{5,1}^{T_{0,2}}(t) = \frac{1}{16} K_{2,1}^{T_{0,0}}(4t-i), \quad i = 0,1,2,3$ pro $t \in [\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4})$.

Odvoďme nyní obecný vzorec pro Peanovo jádro $K_{2^k+1,1}^{T_{0,k}}(t)$ prvního sloupce $T_{0,k}$ T-schématu, tedy pro složené lichoběžníkové pravidlo s koeficientem $h = \frac{1}{2^k}$:

$$E_{2^k+1}^{T_{0,k}} f(t) = \int_0^1 f(t)dt - T_{0,k} = \int_0^1 K_{2^k+1,1}^{T_{0,k}}(t) f''(t)dt,$$

$$K_{2^k+1,1}^{T_{0,k}}(t) = \int_0^1 (x-t)_+^1 dx - \frac{1}{2^k}\Big[\frac{1}{2}(0-t)_+^1 + \sum_{i=1}^{2^k-1} (\frac{i}{2^k} - t)_+^1 + \frac{1}{2}(1-t)_+^1\Big].$$

Matematickou indukcí dostáváme pro Peanovo jádro $K_{2^k+1,1}^{T_{0,k}}(t)$ vzorec

$$K_{2^k+1,1}^{T_{0,k}}(t) = \frac{1}{2}(\frac{i}{2^k} - t)(\frac{i+1}{2^k} - t),$$

pro $t \in [\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k})$, $i = 0, ..., 2^k - 1$ a odtud využitím aditivity integrálu vzhledem k intervalu integrace získáme obecný vzorec pro chybu $E_{2^k+1}^{T_{0,k}}(t)$ složeného lichoběžníkového pravidla $T_{0,k}$

$$E_{2^k+1,1}^{T_{0,k}}(t) = \int_0^1 f(t)dt - T_{0,k} = \sum_{i=0}^{2^k-1} \int_{\frac{i}{2^k}}^{\frac{i+1}{2^k}} \frac{1}{2}(\frac{i}{2^k} - t)(\frac{i+1}{2^k} - t) f''(t)dt,$$

kde pro Peanovo jádro $K_{2^k+1,1}^{T_{0,k}}(t)$ platí

$$K_{2^k+1,1}^{T_{0,k}}(t) = \frac{1}{2}(\frac{i}{2^k} - t)(\frac{i+1}{2^k} - t) = \frac{1}{4^k} K_{2,1}^{T_{0,0}}(2^k t - i),$$

kde $i = 0, ..., 2^k - 1$ pro $t \in [\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k})$. Peanovo jádro kvadraturní formule $T_{0,k}$ je $\frac{1}{2^k}$ periodická funkce (zmenšená kopie $K_{2,1}^{T_{0,0}}(t)$). Funkce $K_{2^k+1,1}^{T_{0,k}}(t)$ je zřejmě spojitá na celém intervalu $[0,1]$, neboť je na každém z intervalů

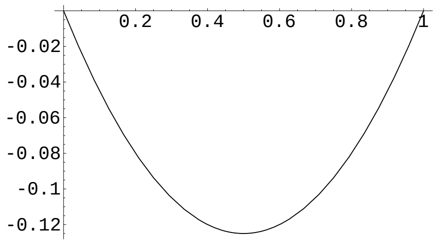
$[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k})$, pro $i = 0, ..., 2^k - 1$, polynomiální, tedy i spojitá. Současně platí rovnost

$$\lim_{t \to \frac{i}{2^k}-} K^{T_{0,k}}_{2^k+1,1}(t) = K^{T_{0,k}}_{2^k+1,1}(\frac{i}{2^k}),$$

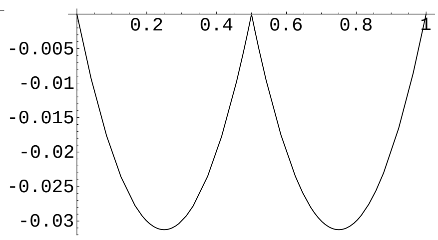
pro každé $i = 1, ..., 2^k - 1$. Snadno tedy ověříme platnost nerovnosti

$$K^{T_{0,k}}_{2^k+1,1}(t) \leq 0, \quad t \in [0, 1].$$

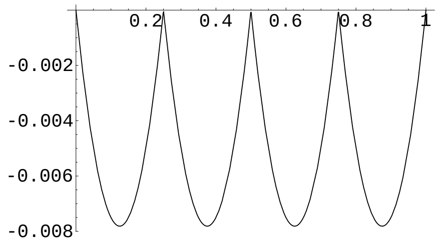
Funkce $K^{T_{0,k}}_{2^k+1,1}(t)$ tedy nemění na intervalu $[0, 1]$ znaménko.




Obr. č.4.1, $K^{T_{0,0}}_{2,1}(t)$




Obr. č.4.2, $K^{T_{0,1}}_{3,1}(t)$




Obr. č.4.3, $K^{T_{0,2}}_{5,1}(t)$

Vrátíme se nyní k druhému sloupci T-schématu a pomocí Richardsonovy extrapolace vyjádříme vzorec $T_{1,k}$. Využitím rovnosti (4.1) získáváme pro chybu kvadraturní formule $T_{1,0}$ vztah

$$E^{T_{1,0}}_2 f = \int_0^1 f(t)dt - T_{1,0} = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{3}[4T_{0,1} - T_{0,0}] = \int_0^1 K^{T_{1,0}}_{3,1}(t) f''(t)dt.$$

Zřejmě platí rovnost

$$K^{T_{1,0}}_{3,1}(t) = \frac{1}{3}[4K^{T_{0,1}}_{3,1}(t) - K^{T_{0,0}}_{2,1}(t)]. \tag{4.2}$$

Můžeme tedy chybu $E_3^{T_{1,0}}$ zapsat ve tvaru

$$E_3^{T_{1,0}} f = \int_0^1 \frac{1}{3}[4K_{3,1}^{T_{0,1}}(t) - K_{2,1}^{T_{0,0}}(t)] f''(t)dt.$$

Dosazením do vzorce (4.2) získáváme pro Peanovo jádro $K_{3,1}^{T_{1,0}}(t)$ Rombergovy kvadraturní formule $T_{1,0}$ rovnost

$$K_{3,1}^{T_{1,0}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{3}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

(viz obr. č.4.4)

Stejným způsobem konstruujeme vzorec pro Peanovo jádro $K_{5,1}^{T_{1,1}}$ kvadraturní formule $T_{1,1}$. Platí tedy následující rovnosti

$E_3^{T_{1,1}} f = \int_0^1 f(t)dt - T_{1,1} = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{3}\left[4T_{0,2} - T_{0,1}\right] = \int_0^1 K_{5,1}^{T_{1,1}}(t) f''(t)dt.$

Dosazením do rovnosti

$$K_{5,1}^{T_{1,1}}(t) = \frac{1}{3}\left[4K_{5,1}^{T_{0,2}} - K_{3,1}^{T_{0,1}}\right],$$

získáváme vzorec pro Peanovo jádro $K_{5,1}^{T_{1,1}}$ ve tvaru

$$K_{5,1}^{T_{1,1}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{12}t, & t \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{12}t + \frac{1}{12}, & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{7}{12}t + \frac{1}{6}, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{11}{12}t + \frac{5}{12}, & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

(viz obr. č.4.5)

Obecný vzorec pro druhý sloupec T-schématu

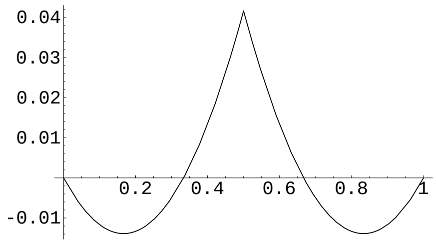
$$T_{1,k} = \frac{1}{2^{k+1}}\Big[\frac{1}{3}f(0) + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{2^k} f(\frac{2i}{2^k}) + \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{2^k-1} f(\frac{2i-1}{2^k}) + \frac{1}{3}f(1)\Big].$$

Pro chybu kvadraturní formule $T_{1,k}$ platí rovnost

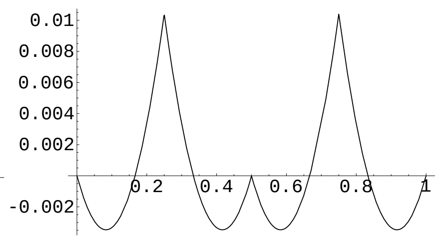
$$\int_0^1 f(t)dt - T_{1,k-1} = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{3}[4T_{0,k} - T_{0,k-1}] =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 [4K_{2^k+1,1}(t) - K_{2^{k-1}+1,1}(t)]f''(t)dt.$$

Na obrázcích č.4 a č.5 vidíme grafické znázornění Peanových jader prvního řádu kvadraturních formulí $T_{1,0}$ a $T_{1,1}$, tedy $K_{3,1}^{T_{1,0}}(t)$ a $K_{5,1}^{T_{1,1}}(t)$.




Obr. č.4.4, $K_{3,1}^{T_{1,0}}(t)$

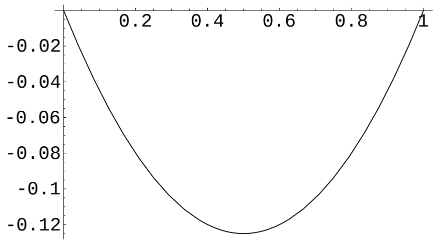



Obr. č.4.5, $K_{5,1}^{T_{1,1}}(t)$

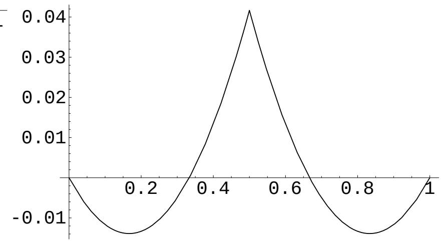
Stejným způsobem odvodíme vzorce pro další sloupce v T-schématu.
Pro ilustraci ještě uvedeme vzorec pro Peanovo jádro prvního řádu kvadraturní formule $T_{2,0}$

$$K_{5,1}^{T_{2,0}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - \frac{7}{90}t, & t \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{13}{30}t + \frac{4}{45}, & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{17}{30}t + \frac{7}{45}, & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{83}{90}t + \frac{19}{45}, & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

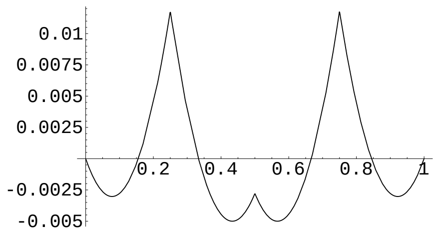
Na obrázcích č.4.6a až č.4.6d vidíme první čtyři Peanova jádra prvního řádu Rombergova kvadraturního vzorce $T_{k,0}$, pro $k = 0, 1, 2, 3$.



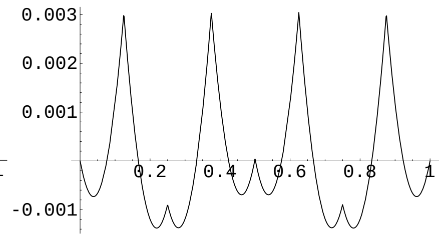

Obr. č.4.6a, $K_{2,1}^{T_{0,0}}(t)$




Obr. č.4.6b, $K_{3,1}^{T_{1,0}}(t)$




Obr. č.4.6c, $K_{5,1}^{T_{2,0}}(t)$



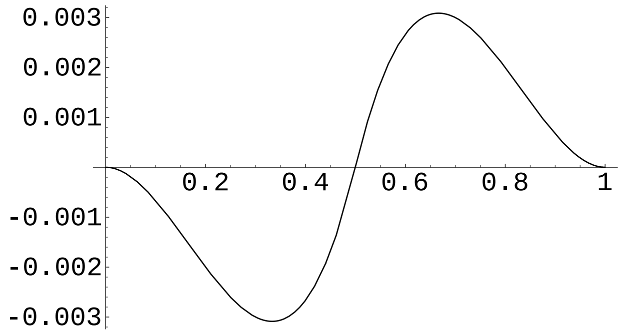

Obr. č.4.6d, $K_{9,1}^{T_{3,0}}(t)$

Jak vzápětí uvidíme, budou pro nás velmi důležitá Peanova jádra vyšších řádů. Nejprve uvedeme několik vzorců těchto Peanových jader a popíšeme jejich zajímavé vlastnosti, které posléze shrneme do věty.
Využijme nyní vzorce pro Peanovo jádro kvadraturní formule $K_{2,1}^{T_{1,0}}(t)$ a položme

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{3,1}(t) &= K_{3,1}^{T_{1,0}}(t), \\
K_{3,2}(t) &= \int_0^t \bar{K}_{3,1}(\tau)d\tau, \\
K_{3,3}(t) &= \int_0^t K_{3,2}(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Pro funkci $K_{3,2}(t)$ tedy platí vzorec

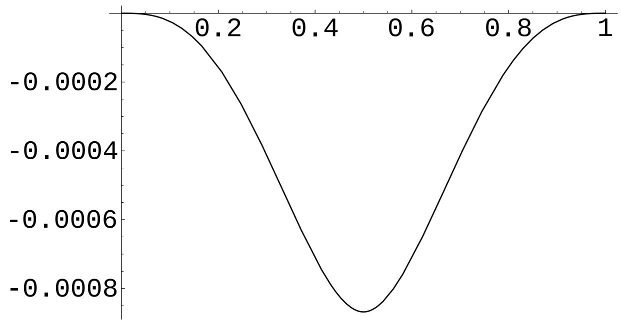
$$K_{3,2}(t) = \int_0^t \bar{K}_{3,1}(\tau)d\tau = \begin{cases} \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^2, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{12}t^2 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{12}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$




Obr. č.4.7, $K_{3,2}(t)$

a pro funkci $K_{3,3}(t)$ získáváme rovnost

$$K_{3,3}(t) = \int_0^t K_{3,2}(\tau)d\tau = \begin{cases} \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{36}t^3, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ \frac{1}{24}t^4 - \frac{5}{36}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{12}t + \frac{1}{72}, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$




Obr. č.4.8, $K_{3,3}(t)$

Dosazením snadno ověříme platnost rovnosti $K_{3,2}(\frac{1}{2}) = 0$. Pro $t \in [0, \frac{1}{2}]$ platí pro $K_{3,2}(t)$ rovnosti

$$K_{3,2}(t) = \tfrac{1}{6}t^3 - \tfrac{1}{12}t^2$$
$$-K_{3,2}(1-t) = -\left[\tfrac{1}{6}(1-t)^3 - \tfrac{5}{12}(1-t)^2 + \tfrac{1}{3}(1-t) - \tfrac{1}{12}\right] = \tfrac{1}{6}t^3 - \tfrac{1}{12}t^2.$$

Pro $K_{3,3}(t)$ dostáváme na témže intervalu

$K_{3,3}(t) = \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{36}t^3$
$K_{3,3}(1-t) = \frac{1}{24}(1-t)^4 - \frac{5}{36}(1-t)^3 + \frac{1}{4}(1-t)^2 - \frac{1}{12}(1-t) + \frac{1}{72} = \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{36}t^3.$

Tedy zřejmě

$$K_{3,2}(t) = -K_{3,2}(1-t) \quad t \in [0, \frac{1}{2}]$$

a

$$K_{3,3}(t) = K_{3,3}(1-t) \qquad t \in [0, \frac{1}{2}].$$

Nyní tento konkrétní případ zobecníme a dokážeme obecnou platnost výše uvedených vlastností.

**Věta 4.1. (Bauerova věta)**[4]
*Mějme rekurentně zadanou posloupnost vzorci:*

$$K_1(t) = -\tfrac{1}{2}t(1-t) \qquad t \in [0,1]$$
$$\bar{K}_{2j-1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{4^j-1}\left[K_{2j-1}(2t) - K_{2j-1}(t)\right], & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ \frac{1}{4^j-1}\left[K_{2j-1}(2t-1) - K_{2j-1}(t)\right], & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
$$K_{2j}(t) = \int_0^t \bar{K}_{2j-1}(\tau)d\tau, \qquad t \in [0,1]$$
$$K_{2j+1}(t) = \int_0^t K_{2j}(\tau)d\tau, \qquad t \in [0,1]$$
*pro* $j = 1, 2, \ldots.$

*Pak platí následující tvrzení:*

1. $K_j(1-t) = (-1)^{j+1}K_j(t)$, *pro* $t \in [0,1]$
2. $K_j(t) \leq 0$, *pro* $t \in [0, \frac{1}{2}]$
3. $K_j(0) = K_j(1) = K_{2j}(\frac{1}{2}) = 0$
4. $K_{2j-1}(t)$ *monotónně klesá na intervalu* $[0, \frac{1}{2}]$
   $E^{T_{j,k}}_{2^k+1} f = \int_0^1 f^{(2j)}(t)K_{2j-1}(t)dt,$
   *kde* $K_{2j-1}(t)$ *nemění na intervalu* $[0,1]$ *znaménko.*

[4] [1], str.386

*Důkaz.*
<u>Tvrzení 1:</u>
Důkaz tvrzení 1 provedeme pomocí matematické indukce podle $j$:
Pro funkci $K_1(t)$ podle definice máme vzorec

$$K_1(t) = -\frac{1}{2}t(1-t) \tag{4.3}$$

a tvrzení 1 zřejmě platí.
Pro $K_2(t)$ platí rovnost

$$K_2(t) = \int_0^t \bar{K}_1(\tau)d\tau = \begin{cases} \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^2 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{12}t^2 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{12} & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{4.4}$$

A pro funkci $K_3(t)$ máme podle definice vzorec

$$K_3(t) = \int_0^t K_2(\tau)d\tau = \begin{cases} \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{36}t^3 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{24}t^4 - \frac{5}{36}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{12}t + \frac{1}{72} & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{4.5}$$

I zde dosazením snadno ověříme platnost tvrzení 1.
Nyní předpokládejme, že rovnost z tvrzení 1 platí pro $j = 2l - 1$, kde $l = 2, 3, ....$ Dokážeme tvrzení 1 pro $j + 1$ a $j + 2$, tedy

$$\begin{aligned} K_{2l}(t) &= -K_{2l}(1-t), \\ K_{2l+1}(t) &= K_{2l+1}(1-t). \end{aligned}$$

Nechť $t \in [0, \frac{1}{2})$, pak dosazením $\bar{K}_{2j-1}(t)$ dostáváme rovnosti
$K_{2l}(t) = \frac{1}{4^l-1}\left[\int_0^t K_{2l-1}(2\tau) - K_{2l-1}(\tau)d\tau\right]$
$K_{2l}(1-t) = \frac{1}{4^l-1}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} K_{2l-1}(2\tau) - K_{2l-1}(\tau)d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^{1-t} K_{2l-1}(2\tau-1) - K_{2l-1}(\tau)d\tau\right].$
Ptáme se tedy, zda platí následující rovnost

$$K_{2l}(t) \stackrel{?}{=} -K_{2l}(1-t)$$

pro $t \in [0, \frac{1}{2})$. Substitucemi získáme

$$\int_0^t K_{2l-1}(\tau)d\tau + \int_0^{1-t} K_{2l-1}(\tau)d\tau \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\left[\int_0^1 K_{2l-1}(\tau)d\tau + \int_0^{2t} K_{2l-1}(\tau)d\tau + \int_0^{1-2t} K_{2l-1}(\tau)d\tau\right].$$

Po dalších úpravách získáme

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 K_{2l-1}(\tau)d\tau \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{2t} K_{2l-1}(\tau)d\tau + \int\limits_0^{1-2t} K_{2l-1}(\tau)d\tau\right]$$

a dále pak

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 K_{2l-1}(\tau)d\tau \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\int\limits_0^1 K_{2l-1}(\tau)d\tau.$$

Což jistě platí, tedy můžeme nahradit "$\stackrel{?}{=}$" klasickým symbolem "$=$", rovnost platí i ve všech předcházejících vztazích.
Stejným způsobem se dokáže rovnost pro $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Nyní ověříme rovnost

$$K_{2l+1}(t) = K_{2l+1}(1-t)$$

pro $t \in [0, \frac{1}{2})$. Funkce $K_{2l+1}(t)$ je definována jako

$$K_{2l+1}(t) = \int\limits_0^t K_{2l}(\tau)d\tau.$$

Stačí dokázat rovnost

$$\int\limits_0^1 K_{2l-1}(\tau)d\tau = 0.$$

Využijeme tedy právě dokázané rovnosti

$$K_{2l+1}(t) = \int\limits_0^t K_{2l}(\tau)d\tau = -\int\limits_0^t K_{2l}(1-\tau)d\tau,$$

substitucí získáváme rovnost

$$K_{2l+1}(t) = \int\limits_0^t K_{2l}(\tau)d\tau = -\int\limits_{1-t}^1 K_{2l}(\tau)d\tau.$$

Funkce $K_{2l+1}(t)$ je v každém bodě intervalu $[0, 1]$ definována jednoznačně, tedy i v bodě $t = 1$. Po dosazení získáváme

$$K_{2l+1}(1) = \int\limits_0^1 K_{2l}(\tau)d\tau = -\int\limits_0^1 K_{2l}(\tau)d\tau,$$

tedy nutně platí rovnost

$$\int_0^1 K_{2l}(\tau)d\tau = 0.$$

Tvrzení 2:
Dosazením do vzorců (4.3), (4.4) a (4.5) snadno ověříme platnost tvrzení 2 pro funkce $K_1(t)$, $K_2(t)$ a $K_3(t)$. Předpokládejme, že tvrzení 2 platí pro $j = 2l-1$, kde $l = 2, 3, \ldots$. Dokážeme platnost tvrzení 2 pro $j+1$ a $j+2$. Pro $j+1$ provedeme důkaz sporem:

$$K_{2l}(t) = \int_0^t \frac{1}{4^{2l}-1}\left[K_{2l-1}(2\tau) - K_{2l-1}(\tau)\right] d\tau,$$

pro $t \in [0, \frac{1}{2}]$, stačí tedy dokázat, že

$$\int_0^t K_{2l-1}(2\tau) - K_{2l-1}(\tau)d\tau \leq 0,$$

pro každé $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Ptáme se tedy, zda existuje aspoň jedno $t \in [0, \frac{1}{2}]$ takové, že neplatí

$$\int_0^t K_{2l-1}(2\tau) - K_{2l-1}(\tau)d\tau > 0.$$

Využitím substituce a aditivity integrálu vzhledem k intervalu integrace získáváme nerovnosti

$$\begin{aligned}
\int_0^t K_{2l-1}(2\tau)d\tau &> \int_0^t K_{2l-1}(\tau)d\tau \\
\int_0^t K_{2l-1}(\tau)d\tau + \int_t^{2t} K_{2l-1}(\tau)d\tau &> \int_0^t K_{2l-1}(\tau)d\tau \\
\int_t^{2t} K_{2l-1}(\tau)d\tau &> 0.
\end{aligned}$$

Ale pro $t = 0$ nerovnost zřejmě neplatí. Máme tedy spor. Tvrzení 2 tedy platí pro $j+1$.

Podle definice platí $K_{2j+1}(t) = \int_0^t K_{2j}(\tau)d\tau$. Z právě dokázaného víme, že $K_{2j}(\tau) \leq 0$ pro každé $\tau \in [0, \frac{1}{2}]$. Neboť integrál z nekladné funkce je jistě nekladný, máme dokázané tvrzení 2 pro $j + 2$.

<u>Tvrzení 3:</u>
Pro $j$ sudé ($j = 2l$, kde $l = 1, 2, ...$) zřejmě platí rovnost $K_{2l}(0) = 0$, neboť podle definice $K_{2l}(t)$ je v tomto případě rovno $\int_0^t \bar{K}_{2l-1}(\tau)d\tau$ a tedy pro $t = 0$ dostáváme $K_{2l}(0) = 0$. Z bodu 1 víme, že platí

$$K_{2l}(1 - t) = -K_{2l}(t).$$

Dosadíme-li $t = 0$, okamžitě získáváme i rovnost $K_{2l}(1) = 0$.

Tvrzení 3 platí pro $K_1(t) = -\frac{1}{2}t(1 - t)$, což snadno ověříme dosazením.
Je-li $j$ liché ($j = 2l + 1$, kde $l = 1, 2, ...$), definovali jsem funkci

$$K_{2l+1}(t) = \int_0^t K_{2l}(\tau)d\tau.$$

Dosazením $t = 0$ do této rovnosti dostáváme $K_{2l+1}(0) = 0$.
Podle tvrzení 1 ($K_{2l+1}(1 - t) = K_{2l+1}(t)$) máme i rovnost $K_{2l+1}(1) = 0$.

Poslední část tvrzení 3 ($K_{2j}(\frac{1}{2}) = 0$) snadno dostaneme z rovnosti ve tvrzení 1, neboť $K_{2j}(\frac{1}{2}) = -K_{2j}(\frac{1}{2})$.

<u>Tvrzení 4:</u>
Funkce $K_1(t) = -\frac{1}{2}t(1 - t)$ zřejmě monotónně klesá na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$, což snadno ověříme derivací funkce $K_1(t)$. Derivujeme-li funkci $K_{2l+1}(t)$, získáváme rovnost

$$K'_{2l+1}(t) = K_{2l}(t).$$

Z tvrzení 2 víme, že $K_{2l}(t) \leq 0$, pro $t \in [0, \frac{1}{2}]$ a pro $l = 1, 2, ....$ Funkce $K_{2l-1}(t)$ tedy monotónně klesá na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$, pro každé $l = 1, 2, ....$ Podle věty 2.6 a vzorce (4.1) tedy platí rovnost

$$(2j - 1)!K_{2j-1}(t) = K^{T_{j,k}}_{2^{k+j}+1,2j-1}(t).$$

Podle věty 2.4 zřejmě platí

$$E_{2^k+1}^{T_{j,k}} f = \frac{1}{(2j-1)!} \int_0^1 f^{(2j)}(t) K_{2^{k+j}+1,2j-1}^{T_{j,k}}(t)dt = \int_0^1 f^{(2j)}(t) K_{2j-1}(t)dt.$$

Podle tvrzení 1 platí $K_{2j-1}(1-t) = K_{2j-1}(t)$. Z tvrzení 2 snadno vidíme, že funkce $K_{2j-1}(t)$ nemění na intervalu $[0,1]$ znaménko.

□

**Věta 4.2.** [5]
*Pro chybu* $E_{2^{k+j}+1}^{T_{j,k}}$ *platí rovnost* $E_{2^{k+j}+1}^{T_{j,k}} f = f^{(2j)}(\xi) \int_0^1 K_{2j-1}(t)dt$.

*Důkaz.* Podle Bauerovy věty víme, že platí rovnost

$$E_{2^k+1}^{T_{j,k}} f = \int_0^1 f^{(2j)}(t) K_{2j-1}(t)dt.$$

Navíc funkce $K_{2j-1}(t)$ nemění na intervalu $[0,1]$ znaménko. Můžeme tedy použít větu 2.7, čímž dostaneme požadovanou rovnost.

□

## 4.5 Vyjádření Peanova jádra Rombergovy kvadraturní formule pomocí Bernoulliho polynomů

Funkce $K_j(t)$, pro $j = 1, 2, ...,$ definované ve větě 4.1 vyjádříme pomocí Bernoulliových polynomů a čísel jako v Engels [1], str. 387-389.

Pomocí Bernoulliho čísel a polynomů snadno získáme ze vzorců (4.3), (4.4) a (4.5) rovnosti

$K_1(t) = \frac{1}{2}\left(B_2(t) - B_2\right)$

[5] [1], str.386

$K_2(t) = \frac{1}{36}\left[(B_3(2t) - B_3) - 2\,(B_3(t) - B_3)\right]$

$K_3(t) = \frac{1}{288}\left[(B_4(2t) - B_4) - 4\,(B_4(t) - B_4)\right].$

Položíme-li

$$b_k^{(0)}(t) = \frac{1}{k!}\left(B_k(t) - B_k\right),$$

$$b_{2k+j}^{(2n)}(t) = \frac{1}{2^{jn}}\left[b_{2k+j}^{(2n-2)}(2t) - 2^{jn} b_{2k+j}^{(2n-2)}(t)\right],$$

dosazením do vzorců získáme následující posloupnost

$K_1(t) = b_2^{(0)}(t)$

$K_2(t) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[b_3^{(0)}(2t) - 2b_3^{(0)}(t)\right]$

$K_3(t) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left[b_4^{(0)}(2t) - 4b_4^{(0)}(t)\right]$

$K_4(t) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{4}\left[b_5^{(2)}(2t) - 4b_5^{(2)}(t)\right]$

$K_5(t) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{16}\left[b_6^{(2)}(2t) - 16b_6^{(2)}(t)\right].$

Po úpravě získáme posloupnost $K_j(t)$, pro $j = 1, 2, ...$, ve tvaru

$K_1(t) = b_2^{(0)}(t)$

$K_2(t) = \frac{1}{3} b_3^{(2)}(t)$

$K_3(t) = \frac{1}{3} b_4^{(2)}(t)$

$K_4(t) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15} b_5^{(4)}(t)$

$K_5(t) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15} b_6^{(4)}(2t).$

Nyní uvedeme bez důkazu (jehož náznak můžeme najít v Engels [1], str. 388) větu, která popisuje vyjádření chyby Rombergovy kvadraturní formule pomocí Bernoulliových čísel.

**Věta 4.3.**
*Nechť $T_{j,k}$ je Rombergův kvadraturní vzorec, pak pro jeho chybu platí rovnost*

$$\int_0^1 f(t)dt - T_{j,k} = (-1)^{j+1}\frac{1}{(2j+2)!}\cdot\frac{1}{4^{(j+1)k}}\cdot\frac{1}{2^{(j+1)j}}B_{2j+2}f^{(2j+2)}(t), \quad t\in(0,1).$$

Můžeme tedy zapsat chybu Rombergovy kvadraturní formule ve tvaru

$$\int_0^1 f(t)dt - T_{j,k} = (-1)^{j+1}\sigma_{j,k}f^{(2j+2)}(t),$$

kde platí

$$\sigma_{j,k} = \frac{1}{(2j+2)!}\cdot\frac{1}{4^{(j+1)k}}\cdot\frac{1}{2^{(j+1)j}}B_{2j+2}.$$

## 4.6 Srovnání odhadů chyb kvadraturních formulí

Porovnejme odhad chyby kvadraturní formule $T_{0,1}$ a $T_{1,0}$ získaný užitím Peanova jádra řádu 3.
Pro lichoběžníkové pravidlo $T_{0,1}$ dostáváme Peanovo jádro ve tvaru

$$K_{3,3}^{T_{0,1}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{8}t - \frac{1}{16} & t\in[0,\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{4}t^3 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t & t\in[\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Peanovo jádro nemění na intervalu $[0,1]$ znaménko, můžeme tedy použít větu 2.8 a získáváme odhad chyby složeného lichoběžníkového pravidla $T_{0,1}$

$$\left|E_3^{T_{0,1}}f\right| \le \frac{1}{3!}\sup_{t\in[0,1]}\left|f^{(4)}(t)\right|\int_0^1 K_{3,3}^{T_{0,1}}(t)dt \doteq 3.38*10^{-3}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty.$$

Peanovo jádro Rombergovy kvadraturní formule $T_{1,0}$ můžeme psát ve tvaru

$$K_{3,3}^{T_{1,0}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3 & t\in[0,\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{6}t^3 + t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12} & t\in[\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Peanovo jádro $K_{3,3}^{T_{0,1}}(t)$ na intervalu $[0,1]$ nemění znaménko, tedy můžeme použít větu 2.8 a psát odhad chyby $E_3^{T_{1,0}}f$ kvadraturní formul ve tvaru

$$\left|E_3^{T_{1,0}}f\right| \leq \frac{1}{3!}\sup_{t\in[0,1]}\left|f^{(4)}(t)\right|\int\limits_0^1 K_{3,3}^{T_{1,0}}(t)dt \doteq 3.47 * 10^{-4}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty.$$

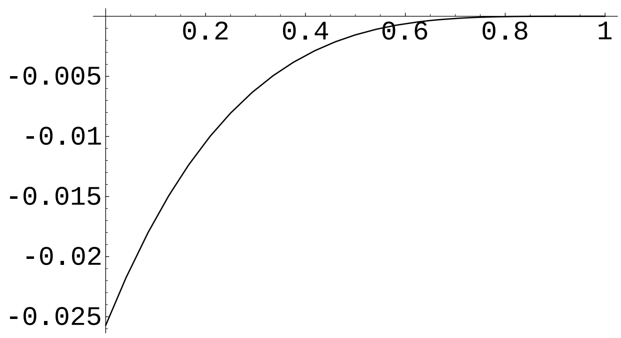
Porovnejme nyní odhad chyby kvadraturní formule $T_{0,2}$ a $T_{2,0}$ získaný užitím Peanova jádra řádu 5.
Pro složené lichoběžníkové pravidlo $T_{0,2}$ dostáváme Peanovo jádro ve tvaru

$$K_{5,5}^{T_{0,2}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{8}t^5 + \frac{5}{48}t^3 - \frac{5}{32}t^2 + \frac{53}{512}t - \frac{79}{3072} & t \in [0,\frac{1}{4}) \\ \frac{1}{6}t^6 - \frac{3}{8}t^5 + \frac{5}{16}t^4 - \frac{5}{96}t^3 - \frac{15}{128}t^2 + \frac{101}{1024}t - \frac{313}{12288} & t \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{6}t^6 - \frac{5}{8}t^5 + \frac{15}{16}t^4 - \frac{65}{96}t^3 + \frac{25}{128}t^2 + \frac{21}{1024}t - \frac{217}{12288} & t \in [\frac{1}{2},\frac{3}{4}) \\ \frac{1}{6}t^6 - \frac{7}{8}t^5 + \frac{15}{8}t^4 - \frac{25}{12}t^3 + \frac{5}{4}t^2 - \frac{3}{8}t + \frac{1}{24} & t \in [\frac{3}{4},1]. \end{cases}$$

Funkce $K_{5,5}^{T_{0,2}}(t)$ je na každém z intervalů $[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k})$ spojitá. Dosazením snadno ověříme spojitost i v bodech $\frac{i}{2^k}$ zleva, neboť platí rovnost

$$\lim_{t\to\frac{i}{2^k}-} K_{5,5}^{T_{0,2}}(t) = K_{5,5}^{T_{0,2}}(\frac{i}{2^k}),$$

pro každé $i = 0,1,2,3$ .




Obr. č.4.9, $K_{5,5}^{T_{0,2}}(t)$

Peanovo jádro nemění na intervalu $[0,1]$ znaménko, můžeme tedy použít větu 2.8 a získáváme odhad chyby složeného lichoběžníkového pravidla $T_{0,2}$

$$\left|E_5^{T_{0,2}} f\right| \leq \frac{1}{5!} \sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(6)}(t)\right| \int\limits_0^1 K_{5,5}^{T_{0,2}}(t)dt \doteq 2.58 * 10^{-4} \left\|f^{(6)}\right\|_\infty .$$

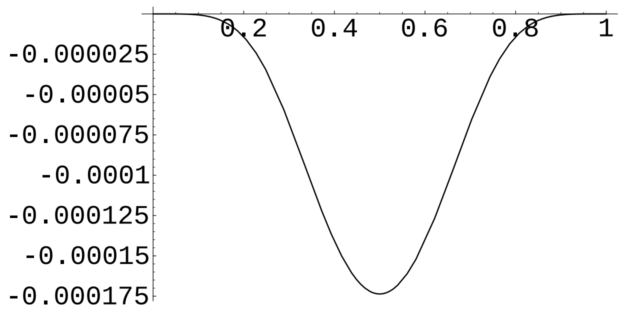
Pro Peanovo jádro Rombergovy kvadraturní formule $T_{2,0}$ platí rovnost

$$K_{5,5}^{T_{2,0}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}t^6 - \frac{7}{90}t^5 & t \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{6}t^6 - \frac{13}{30}t^5 + \frac{4}{9}t^4 - \frac{2}{9}t^3 + \frac{1}{18}t^2 - \frac{1}{144}t + \frac{1}{2880} & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{6}t^6 - \frac{17}{30}t^5 + \frac{7}{9}t^4 - \frac{5}{9}t^3 + \frac{2}{9}t^2 - \frac{7}{144}t + \frac{13}{2880} & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \frac{1}{6}t^6 - \frac{83}{90}t^5 + \frac{19}{9}t^4 - \frac{23}{9}t^3 + \frac{31}{18}t^2 - \frac{11}{18}t + \frac{4}{45} & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

I zde se jedná o spojitou funkci, neboť

$$\lim_{t \to \frac{i}{2^k}-} K_{5,5}^{T_{2,0}}(t) = K_{5,5}^{T_{2,0}}(\frac{i}{2^k}),$$

pro každé $i = 0, 1, 2, 3$ .




Obr. č.4.10, $K_{5,5}^{T_{2,0}}(t)$

Peanovo jádro kvadraturního vzorce $T_{2,0}$ nemění na intervalu $[0,1]$ znaménko. Použitím věty 2.8 dostáváme odhad chyby Rombergovy kvadraturní formule $T_{2,0}$ ve tvaru

$$\left|E_5^{T_{2,0}} f\right| \leq \frac{1}{5!} \sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(6)}(t)\right| \int\limits_0^1 K_{5,5}^{T_{2,0}}(t)dt \doteq 5.17 * 10^{-7} \left\|f^{(6)}\right\|_\infty .$$

Porovnáme-li přesnost uvedených kvadraturních vzorců, zjistíme, že Rombergova kvadraturní formule dává o tři řády větší přesnost než lichoběžníkové pravidlo při stejném počtu a rozmístění uzlů.

# Kapitola 5

# Sardovo jádro kubaturní formule

## 5.1 Definice Sardova jádra

Sardovo jádro je obdoba Peanova jádra pro kubaturní formule. Kvůli přehlednosti odvodíme Sardovo jádro (obdobně jako v Engels [1], str. 100-105) jen pro dvojrozměrný případ.

**Poznámka 5.1.**
*Nechť funkce dvou proměnných $f$ je třídy $C^k[0,1]$ pro $k > 0$, nechť $i, j$ jsou nezáporná celá čísla, pro něž platí $i + j \leq k$. Pak označme*

$$f_{i,j}(x,y) = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x,y), \ \forall (x,y) \in [0,1].$$

Nechť $f \in C^{k+1}([0,1]^2)$, pak platí

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,0) + \int\limits_0^y f_{0,1}(x,t)dt = \\ &= f(0,0) + \int\limits_0^x f_{1,0}(u,0)du + \int\limits_0^y f_{0,1}(x,t)dt = \\ &= f(0,0) + xf_{1,0}(0,0) + yf_{0,1}(0,0) + \int\limits_0^x (x-u) f_{2,0}(u,0)du + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \int_0^y (y-t) f_{0,2}(0,t)dt + \int_0^x \int_0^y f_{1,1}(u,t)dtdu = \\
&= \quad f(0,0) + x f_{1,0}(0,0) + y f_{0,1}(0,0) + \frac{x^2}{2!} f_{2,0}(0,0) + \frac{y^2}{2!} f_{0,2}(0,0) + \\
&+ \quad \int_0^x \frac{(x-u)^2}{2!} f_{3,0}(u,0)du + \int_0^y \frac{(y-t)^2}{2!} f_{0,3}(0,t)dt + xy f_{1,1}(0,0) + \\
&+ \quad \frac{y}{2} \int_0^x f_{2,1}(u,0)du + \frac{x}{2} \int_0^y f_{1,2}(0,t)dt + \\
&+ \quad \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y [(x-u) f_{2,1}(u,t) + (y-t) f_{1,2}(u,t)]dtdu.
\end{aligned}
$$

Pro lichá $k$ ($k = 2\kappa + 1$) tedy platí

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{i!} \binom{i}{j} x^{i-j} y^j f_{i-j,j}(0,0) + \\
&+ \quad \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{k}{j} \Big\{ y^j \int_0^x (x-u)^{k-j} f_{k+1-j,j}(u,0)du + \\
&+ \quad x^j \int_0^y (y-t)^{k-j} f_{j,k+1-j}(0,t)dt \Big\} + \\
&+ \quad \frac{1}{(\kappa!)^2} \int_0^x \int_0^y (x-u)^{\kappa} (y-t)^{\kappa} f_{\kappa+1,\kappa+1}(u,t)dtdu
\end{aligned}
$$

a pro sudá $k$ ($k = 2\kappa$) platí

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{i!} \binom{i}{j} x^{i-j} y^j f_{i-j,j}(0,0) + \\
&+ \quad \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\kappa-1} \binom{k}{j} \Big\{ y^j \int_0^x (x-u)^{k-j} f_{k+1-j,j}(u,0)du + \\
&+ \quad x^j \int_0^y (y-t)^{k-j} f_{j,k+1-j}(0,t)dt \Big\} +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{1}{k!}\frac{1}{2}\binom{k}{\kappa}\Big\{y^{\kappa}\int\limits_0^x (x-u)^{\kappa} f_{\kappa+1,\kappa}(u,0)du + x^{\kappa}\int\limits_0^y (y-t)^{\kappa} f_{\kappa,\kappa+1}(0,t)dt\Big\} + \\
&+ \quad \frac{1}{2(\kappa-1)!\kappa!}\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-u)^{\kappa-1}(y-t)^{\kappa-1}\Big\{(x-u)f_{\kappa+1,\kappa}(u,t) + \\
&+ \quad (y-t)f_{\kappa,\kappa+1}(u,t)\Big\}dtdu.
\end{aligned}
$$

Nyní na poslední rovnosti aplikujeme lineární funkcionál $E_n$ a dostaneme:

Pro lichá $k$ ($k = 2\kappa + 1$)

$$
\begin{aligned}
E_n f(x,y) &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{i!}\binom{i}{j}E_n^{x,y}\left\{x^{i-j}y^j f_{i-j,j}(0,0)\right\} + \\
&+ \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{\kappa}\binom{k}{j}E_n^{x,y}\Big\{y^j\int\limits_0^x (x-u)^{k-j} f_{k+1-j,j}(u,0)du \; + \\
&+ x^j\int\limits_0^y (y-t)^{k-j} f_{j,k+1-j}(0,t)dt\Big\} + \\
&+ \frac{1}{(k!)^2}E_n^{x,y}\Big\{\int\limits_0^x\int\limits_0^y (x-u)^{\kappa}(y-t)^{\kappa} f_{\kappa+1,\kappa+1}(u,t)dtdu = \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{\kappa}\binom{k}{j}\Big\{\int\limits_0^1 E_n^{x,y}[y^j(x-u)_+^{k-j}]f_{k+1-j,j}(u,0)du + \\
&+ \int\limits_0^1 E_n^{x,y}[x^j(y-t)_+^{k-j}]f_{j,k+1-j}(0,t)dt\Big\} + \\
&+ \frac{1}{(k!)^2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 E_n^{x,y}[(x-u)_+^{\kappa}(y-t)_+^{\kappa}]f_{\kappa+1,\kappa+1}(u,t)dtdu
\end{aligned}
$$

a pro sudá $k$ $(k = 2\kappa)$ platí

$$\begin{aligned}
E_n f(x,y) &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{i!}\binom{i}{j}E_n^{x,y}\Big\{x^{i-j}y^j f_{i-j,j}(0,0)\Big\} + \\
&+ \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{\kappa-1}\binom{k}{j}E_n^{x,y}\Big\{y^j\int\limits_0^x (x-u)^{k-j} f_{k+1-j,j}(u,0)du \ + \\
&+ x^j\int\limits_0^y (y-t) f_{j,k+1-j}(0,t)dt\Big\} + \\
&+ \frac{1}{k!}\frac{1}{2}\binom{k}{\kappa}E_n^{x,y}\Big\{y^\kappa\int\limits_0^x (x-u)^\kappa f_{\kappa+1,\kappa}(u,0)du \ + \\
&+ x^\kappa\int\limits_0^y (y-t) f_{\kappa,\kappa+1}(0,t)dt\Big\} + \\
&+ \frac{1}{2(\kappa-1)!\kappa!}E_n^{x,y}\int\limits_0^x\int\limits_0^y \{(x-u)^{\kappa-1}(y-t)^{\kappa-1}(x-u)f_{\kappa+1,\kappa}(u,t) + \\
&+ (x-u)^{\kappa-1}(y-t)^{\kappa-1}(y-t)f_{\kappa,\kappa+1}(u,t)\}dtdu = \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{\kappa-1}\binom{k}{j}\Big\{\int\limits_0^1 E_n^{x,y}[y^j(x-u)_+^{k-j}]f_{k+1-j,j}(u,0)du \ + \\
&+ \int\limits_0^1 E_n^{x,y}[x^j(y-t)_+^{k-j}]f_{j,k+1-j}(0,t)dt\Big\} + \\
&+ \frac{1}{k!}\frac{1}{2}\binom{k}{\kappa}\Big\{\int\limits_0^1 E_n^{x,y}[y^\kappa(x-u)_+^\kappa]f_{\kappa+1,\kappa}(u,0)du \ + \\
&+ \int\limits_0^1 E_n^{x,y}[x^\kappa(y-t)_+^\kappa]f_{\kappa,\kappa+1}(0,t)dt\Big\} + \\
&+ \frac{1}{2(\kappa-1)!\kappa!}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \{E_n^{x,y}[(x-u)_+^\kappa(y-t)_+^{\kappa-1}]f_{\kappa+1,\kappa}(u,t) + \\
&+ E_n^{x,y}[(x-u)_+^{\kappa-1}(y-t)_+^\kappa]f_{\kappa,\kappa+1}(u,t)\}dtdu.
\end{aligned}$$

Nyní můžeme definovat Sardova jádra kubaturní formule.

**Definice 5.2.** [1]
*Nechť $k > 0$ a platí:*

$$\begin{array}{lll}
K_1^j(u) \equiv E_n^{x,y}[y^j(x-u)_+^{k-j}], & j = 0, ..., \kappa, & (xy) \in \Omega \\
K_2^j(v) \equiv E_n^{x,y}[x^\kappa(y-v)_+^{k-j}], & j = 0, ..., \kappa, & (x,y) \in \Omega \\
K_{\kappa,\kappa}(u,v) \equiv E_n^{x,y}[(x-u)^\kappa(y-v)_+^\kappa], & k = 2\kappa+1, & (x,y) \in \Omega \\
K_{\kappa,\kappa-1}(u,v) \equiv E_n^{x,y}[(x-u)^\kappa(y-v)_+^{\kappa-1}], & k = 2\kappa, & (x,y) \in \Omega
\end{array}$$

*Pak funkce $K_1^j(u)$,$K^j(v)$, $K_{\kappa,\lambda}(u,v)$ nazveme Sardvými jádry kubaturní formule $C_n f$.*

## 5.2 Výpočet Sardových jader

Mějme funkci $f$ třídy $C^2([0,1]^2)$. Mějme dále kubaturní vzorec

$$C_4 f = \frac{1}{4}[f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1)].$$

Hledáme Sardova jádra kubaturní formule $C_4 f$. Pro chybu $E_4 f$ platí rovnost

$$E_4 f = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy - \frac{1}{4}[f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1)]$$

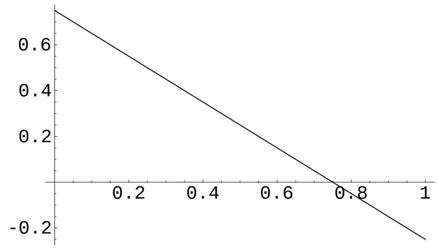
Nejprve spočteme jednorozměrná Sardova jádra $K_1^j(u)$, $K_2^j(v)$, pro $j = 0, 1$. Podle definice 5.2 pro $j = 0$ dostáváme

$$K_1^0(u) = \int_0^1\int_0^1 (x-u)_+^0 dxdy - \tfrac{1}{4}[(0-u)_+^0 + (1-u)_+^0] = \int_u^1 dx - \tfrac{1}{4} = -u + \tfrac{3}{4}$$

$$K_2^0(v) = \int_0^1\int_0^1 (y-v)_+^0 dxdy - \tfrac{1}{4}[(0-v)_+^0 + (1-v)_+^0] = \int_v^1 dy - \tfrac{1}{4} = -v + \tfrac{3}{4}.$$

Tyto funkce můžeme graficky znázornit následujícím způsobem.

[1] [1], str.105



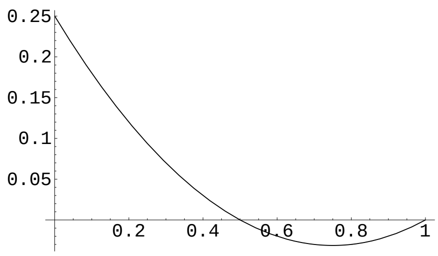

Obr. č.5.1, $K_1^0(u)$, $K_2^0(v)$

Obdobně získáme vzorce $K_1^1(u)$ a $K_2^1(v)$ ve tvaru

$$K_1^1(u) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (x-u)_+^1 dxdy - \tfrac{1}{4}[(0-u)_+^1 + (1-u)_+^1] = \int\limits_u^1 (x-u)dx - \tfrac{1}{4}(1-u) = \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{3}{4}u + \tfrac{1}{4}$$

$$K_2^1(v) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (y-v)_+^1 dxdy - \tfrac{1}{4}[(0-v)_+^1 + (1-v)_+^1] = \int\limits_v^1 (y-v)dy - \tfrac{1}{4}(1-v) = \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{3}{4}v + \tfrac{1}{4}$$

a jejich grafické znázornění:

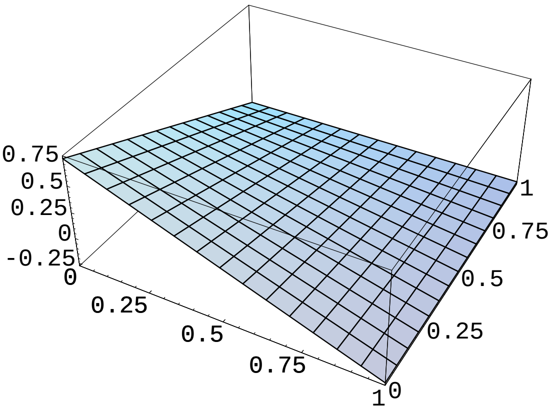



Obr. č.5.2, $K_1^1(u)$, $K_2^1(v)$

Nyní spočteme dvourozměrná Sardova jádra $K_{\kappa,\lambda}(u,v)$, pro $\kappa = 0,1$ a $\lambda = 0,1$.

Pro $\kappa = 0$ a $\lambda = 0$ dostáváme vzorec pro Sardovo jádro $K_{0,0}(u,v)$ ve tvaru

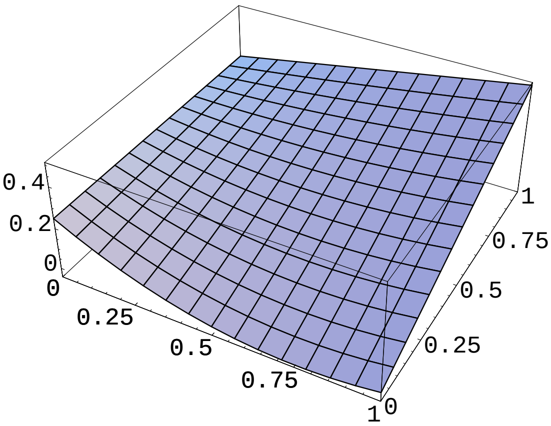
$$K_{0,0}(u,v) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (x-u)_+^0 (y-v)_+^0 dxdy - \tfrac{1}{4}[(0-u)_+^0(0-v)_+^0 +$$
$$+ (0-u)_+^0(1-v)_+^0 + (1-u)_+^0(0-v)_+^0 + (1-u)_+^0(1-v)_+^0] =$$
$$= \int\limits_v^1 \int\limits_u^1 dxdy - \tfrac{1}{4} = uv - u - v + \tfrac{3}{4}.$$




Obr. č.5.3, $K_{0,0}(u,v)$

Pro $\kappa = 1$ a $\lambda = 0$ dostáváme vzorec pro Sardovo jádro $K_{1,0}(u,v)$ ve tvaru

$$K_{1,0}(u,v) = \int_0^1 \int_0^1 (x-u)_0^1 (y-v)_+^0 - \tfrac{1}{4}[(0-u)_+^1(0-v)_+^0 + (0-u)_+^1(1-v)_+^0 + \\ + (1-u)_+^1(0-v)_+^0 + (1-u)_+^1(1-v)_+^0] = \int_v^1 \int_u^1 (x-u)dxdy - \tfrac{1}{4}(1-u) = \\ = -\tfrac{1}{2}u^2v + \tfrac{1}{2}u^2 + uv - \tfrac{3}{4}u + \tfrac{1}{4}.$$

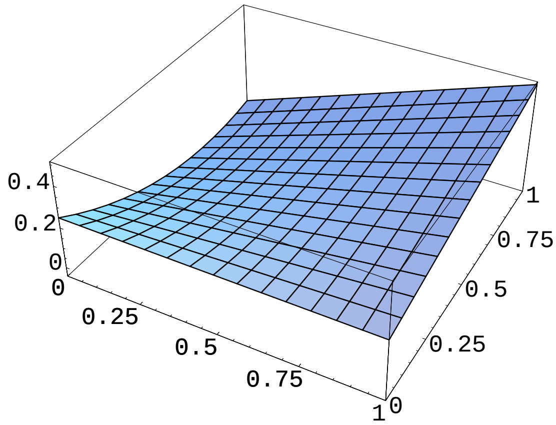



Obr. č.5.4, $K_{1,0}(u,v)$

Pro $\kappa = 0$ a $\lambda = 1$ dostáváme vzorec pro Sardovo jádro $K_{0,1}(u,v)$ ve tvaru

$$K_{0,1}(u,v) = \int_0^1 \int_0^1 (x-u)_0^0 (y-v)_+^1 - \tfrac{1}{4}[(0-u)_+^0(0-v)_+^1 + (0-u)_+^0(1-v)_+^1 +$$

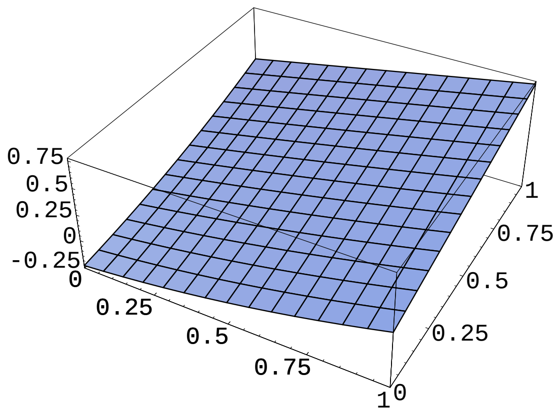
$+ (1-u)_+^0(0-v)_+^1 + (1-u)_+^0(1-v)_+^1] = \int\limits_v^1\int\limits_u^1 (y-v)dxdy - \frac{1}{4}(1-v) =$
$= -\frac{1}{2}v^2u + \frac{1}{2}v^2 + uv - \frac{3}{4}v + \frac{1}{4}.$




Obr. č.5.5, $K_{0,1}(u,v)$

Pro $\kappa = 1$ a $\lambda = 1$ dostáváme vzorec pro Sardovo jádro $K_{1,1}(u,v)$ ve tvaru

$K_{1,1}(u,v) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 (x-u)_+^1(y-v)_+^1 dxdy - \frac{1}{4}[(0-u)_+^1(0-v)_+^1 + (0-u)_+^1(1-v)_+^1 +$
$+ (1-u)_+^1(0-v)_+^1 + (1-u)_+^1(1-v)_+^1] = \int\limits_v^1\int\limits_u^1 (x-u)(y-v)dxdy - \frac{1}{4}(1-u)(1-v) =$
$= \frac{1}{4}u^2v^2 - \frac{1}{2}u^2v - \frac{1}{2}uv^2 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{4}v^2 + \frac{3}{4}uv + \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v - \frac{1}{4}.$




Obr. č.5.6, $K_{1,1}(u,v)$

# Závěr

V práci jsme definovali Peanovo jádro kvadraturní formule a dokázali některé jeho vlastnosti. Ukázali jsme, že je výhodné vyjádřit chybu kvadraturní formule pomocí Peanova jadra v případě, že Peanovo jádro nemění na celém intervalu integrace své znaménko. Potom jsou vlastnosti funkce a kvadraturní formule odděleny a je tedy snadné chybu v tomto tvaru odhadnout. Máme-li více takových kvadraturních formulí, jejichž Peanovo jádro nemění znaménko, můžeme porovnávat přesnost, s jakou uvažované kvadraturní formule aproximují hodnotu určitého integrálu.

# Literatura


[1] Engels H.: *Numerical quadrature and cubature*, Academic Press, London, 1980.

[2] Jarník V.: *Integrální počet (I)*, Academia, Praha, 1984.

[3] Kofroň J.: *Kvadraturní formule*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1977.

[4] Rudin W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, ACADEMIA, Praha, 2003.

[5] Segethová J.: *Základy numerické matematiky*, Karolinum, Praha, 2002.

[6] Vitásek E.: *Numerické metody*, SNTL-Nakladatelství technické literatury, Praha, 1987.

# Obsah priloženého CD

bc_praca.pdf