Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Zuzana Valášková

Nespravedlivá losování

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Studijný program: Matematika
Studijný obor: Finanční matematika

2007

Na tomto místě bych chtěla poděkovat všem, kteří mi pomohli při vypracování mé práce. V prvním řade moje děkuji patří vedoucímu mé bakalářské práce RNDr. Danielovi Hlubinkovi, Ph.D., který mi vždy ochotně pomohl. Děkuji Knihovně Václava Hlavatého, rodině a všem, kteří mi či už přímo nebo nepřímo pomáhali.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 6.8.2007 Zuzana Valášková

Obsah

Názov práce: Nespravodlivé losovanie
Autor: Zuzana Valášková
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedúci bakalárskej práce: RNDr.Daniel Hlubinka, Ph.D.
e-mail vedúceho práce: hlubinka@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt:
V predloženej práci študujem otázku nespravodlivého losovania, ktorú som skúmala prostredníctvom silného nástroja, testovania hypotéz. Na začiatku som sa zaoberala nájdením vhodnej náhodnej veličiny, ktorá by nám umožnila jednoduchým spôsobom rozriešiť pôvodnú otázku spravodlivosti losovania. Zaoberala som sa otázkou randomizovaných a nerandomizovaných testov. V práci sú okrem iného uvedené tri vzorové príklady s podrobným riešením. Vo všetkých je uvedená aplikácia randomizovaného i nerandomizovaného testu. Prvý ilustruje práve také losovanie, u ktorého nemáme dostatočné dôvody na pochybovanie o spravodlivosti celého losovania, v druhom príklade je uvedený typický prípad nespravodlivého losovania a v treťom je uvedený prípad, kedy testy nedávajú rovnaké výsledky. Prílohu tvorí zdrojový text numerických výpočtov v Mathematice.

Kľúčové slová: losovanie, spravodlivosť,test

Title: Unfair Ballots
Author: Zuzana Valášková
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr.Daniel Hlubinka, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: hlubinka@karlin.mff.cuni.cz

Abstract:
In the present work I study the question of unfair ballots, which I have researched through the powerful instrument, testing hypotheses. At the beginning I tried to find useful random quantity, that could help me to solve the first question of unfair ballots. In addition, I deal with randomized and nonrandomized tests. In the work there are three examples with detailed solutions. In all cases there are applied randomized and nonrandomized tests. The first example illustrates the ballot, in which we do not have enough reasons to doubt of justice of the ballots, the second is typical example of unfair ballots and in the third example illustrates different answers of the tests. In appendix there is the source file of numerical calculation in Mathematica.

Keywords: ballot, justice, test

KAPITOLA 1

Odvodenie rozdelenia a základné vlastnosti

1. Rozdelenie pravdepodobnosti

Uvažujeme osudie, v ktorom máme n rôznych lístkov očíslovaných 1..n. Budeme vyberať z osudia po m lístkov (rôznych lístkov) bez vracania. Výber zopakujeme k-krát.
Označíme si M_j množinu lístkov vytiahnutých v j-tom ťahu. Otázka, ktorou sa budeme zaoberať je, koľko rôznych lístkov vytiahneme počas celého losovania. Ich množinu si označíme M.

Pre M platí:

$$M = \bigcup_{j=1}^{k} M_j \tag{1}$$

Mohutnosť množiny M si označíme písmenom R, čo bude pre nás náhodná veličina vyjadrujúca počet rôznych lístkov vytiahnutých počas celého losovania.
V nasledujúcich riadkoch odvodíme rozdelenie náhodnej veličiny R, teda:

$$P[R = r] \qquad r = m, m + 1...min(n, mk) \tag{2}$$

I_i označíme indikátor množiny M. To znamená:

$$I_i = \begin{cases} 1 & i \in M \\ 0 & i \notin M \end{cases} \tag{3}$$

Teda bude platiť, že

$$R = \sum_{i=1}^{n} I_i \tag{4}$$

Na odvodenie rozdelenia náhodnej veličiny R použijeme Jordanovu identitu.
Nech $A_1...A_n$ sú náhodné javy na tom istom pravdepodobnostnom priestore. $W_{n,r}$ označíme pravdepodobnosť, že práve r udalostí z $A_1 \ldots A_n$ nastane.
Potom platí:

$$W_{n,r} = \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{r+j}{j} S_{r+j} \tag{5}$$

kde

$$S_j = \sum_{1 \le i1 < i2 \ldots \le n} P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ij}) \qquad j = 1 \ldots n \tag{6}$$

$$S_0 = 1 \tag{7}$$

Teda pre naše potreby budeme uvažovať, že náhodný jav A_i bude totožný s $I_i = 1$, teda to, že nastane znamená, že sme vytiahli i-ty prvok aspoň v jednom losovaní. V našom prípade platí, že $R = r$, ak práve r prvkov z $I_1, ...I_n$ nadobúda hodnotu 1.
Vyjadríme:

$$P\left(A_{i1} \cap A_{i2} \dots A_{ij}\right) = 1 - P\left(A_{i1}^c \cup A_{i2}^c \dots A_{ij}^c\right) \tag{8}$$

Použijeme princíp inklúzie a exklúzie:

$$P\left(A_{i1}^c \cup A_{i2}^c \cup ...A_{ij}^c\right) = \sum_{l=1}^{j} P(A_{il}^c) - \sum_{l<m} P\left(A_{il}^c \cap A_{im}^c\right) ...(-1)^{j+1} P\left(A_{i1}^c \cap A_{i2}^c ... A_{ij}^c\right) \tag{9}$$

Na presné vyjadrenie pravdepodobnosti použijeme nasledujúce vzťahy:

$$P\left(A_{il}^c \cap A_{im}^c\right) = \left(\frac{\binom{n-2}{m}}{\binom{n}{m}}\right)^k \tag{10}$$

$$P\left(A_{i1}^c \cap A_{i2}^c ....A_{ij}^c\right) = \left(\frac{\binom{n-j}{m}}{\binom{n}{m}}\right)^k \tag{11}$$

S využitím (6),(10) a (11) dostaneme nasledovné:

$$S_j = \begin{cases} \binom{n}{j}\left(1 - j\left(\frac{\binom{n-1}{m}}{\binom{n}{m}}\right)^k + \binom{j}{2}\left(\frac{\binom{n-2}{m}}{\binom{n}{m}}\right)^k ..(-1)^j\left(\frac{\binom{n-j}{m}}{\binom{m}{n}}\right)^k\right) & \text{ak } j = m \dots min(mk, n) \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Pre $j = m \dots min(mk, n)$ môžeme S_j zjednodušene zapísať ako:

$$S_j = 1 - \sum_{l=1}^{j} (-1)^{l+1} \binom{j}{l} \left(\frac{\binom{n-l}{m}}{\binom{n}{m}}\right)^k \tag{13}$$

Z Jordanovej identity (5) a predchádzajúceho plynie:

$$P(R = r) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{r+j}{j} \binom{n}{r+j} \left(1 - \sum_{l=1}^{r+j} (-1)^{l+1} \binom{r+j}{l} \left(\frac{\binom{n-l}{m}}{\binom{n}{m}}\right)^k\right) \\ \text{ak } r = m \dots min(mk, n) \\ \\ 0 \\ \text{inak} \end{cases}$$

Použijeme identitu:

$$\binom{r+j}{j}\binom{n}{r+j} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{j} \tag{15}$$

Konečne výsledok:

$$P(R=r) = \begin{cases} \binom{n}{r}\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}\left(1-\sum_{l=1}^{r+j}(-1)^{l+1}\binom{r+j}{l}\left(\frac{\binom{n-l}{m}}{\binom{n}{m}}\right)^k\right) \\ \text{ak } r = m \ldots min(mk,n) \\ \\ 0 \\ \text{inak} \end{cases}$$

2. Základné vlastnosti

V nasledujúcich riadkoch odvodíme strednú hodnotu a rozptyl náhodnej veličiny R, ktorej rozdelenie sme odvodili v predchádzajúcej kapitole.

$$EI_i = 1 \cdot P(I_i = 1) + 0 \cdot P(I_i = 0) \tag{17}$$

Označíme

$$q_j = (\frac{n-m-j}{n-j})^k \tag{18}$$

Z (11) a (18) plynie:

$$EI_i = 1 - \left(\frac{\binom{n-1}{m}}{\binom{n}{m}}\right)^k = 1 - \left(\frac{\frac{(n-1)!}{(n-m-1)!m!}}{\frac{n!}{(n-m)!m!}}\right)^k = 1 - \left(\frac{n-m}{n}\right)^k = 1 - q_0 \tag{19}$$

$$\begin{gathered} EI_iI_j = 1 \cdot P(I_i = 1, I_j = 1) = P(A_i \cap A_j) = 1 - P(A_i^c \cup A_j^c) = \\ 1 - P(A_i^c) - P(A_j^c) + P(A_i^c \cap A_j^c) = \\ 1 - 2\left(\frac{\binom{n-1}{m}}{\binom{n}{m}}\right)^k + \left(\frac{\binom{n-2}{m}}{\binom{n}{m}}\right)^k = 1 - 2q_0 + q_0q_1 \end{gathered} \tag{20}$$

Teda z predchádzajúceho vyplýva

$$ER = E\sum_{i=1}^{n} I_i = n \cdot EI_i = n \cdot (1 - q_0) \tag{21}$$

$$\begin{gathered} ER^2 = E\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} EI_i^2 + \sum_{i \neq j} EI_iI_j = n(1-q_0) + (n^2-n)(1-2q_0+q_0q_1) = \\ n(n + q_0 - 2nq_0 + q_0q_1(n-1)) \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} varR = ER^2 - (ER)^2 = n(n + q_0 - 2nq_0 + q_0q_1(n-1)) - n^2(1-q_0)^2 = \\ n(q_0 + q_0q_1(n-1) - nq_0^2) \end{gathered} \tag{23}$$

KAPITOLA 2

Testovanie hypotézy

1. Pár pojmov na začiatok

Ide o jednoduchý rozhodovací postup, na základe ktorého hypotézu zamietneme alebo nezamietneme. Označíme $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3...X_n)$ náhodný vektor (nejaké namerané hodnoty). $X_1, X_2, X_3...X_n$ sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny. Budeme predpokladať, že rozdelenie náhodného vektora $\mathbf{X}$ závisí na parametre θ, o ktorom vieme, že patrí do množiny parametrov Ω.
Pravdepodobnosť, že $\mathbf{X}$ padne do množiny $B \in B_n$ za podmienky, že skutočná hodnota parametru je θ označíme P_θ(B)
Označíme si dve disjunktné neprázdne podmnožiny parametrov Ω_1 a Ω_2. Na základe pozorovaní budeme chcieť zistiť či náš neznámy parameter bude patriť do Ω_1 alebo Ω_2. Keďže si nie sme tým istý, tak otestujeme hypotézu $H_0 : \theta \in \Omega_1$ proti alternatíve $H_1 : \theta \in \Omega_2$.
Ak je množina Ω_1 jednobodová, tak hovoríme o *jednoduchej hypotéze*. V prípade, že je viacbodová, tak hovoríme o *zloženej hypotéze*. Analogicky máme aj jednoduchú a zloženú alternatívu.
O platnosti hypotézy H_0 rozhodujeme na základe pozorovaní reprezentovanými vektorom $\mathbf{X}$. Označíme S všetky hodnoty, ktoré môže vektor $\mathbf{X}$ nadobúdať.
Testovanie obvykle prebieha tak, že si stanovíme vhodne nejakú podmnožinu S_1, pre ktorú bude platiť, že v prípade ak $\mathbf{X} \in S_1$, tak hypotézu zamietame. Túto množinu nazývame *kritickým oborom*. V opačnom prípade nezamietame. Doplnok S_1 označíme S_2
Pri rozhodovaní sa samozrejme môžu vyskytnúť aj chyby. V prípade, že zamietneme hypotézu, aj napriek tomu, že je pravdivá, tak hovoríme o *chybe 1.druhu*. V prípade, že nezamietneme hypotézu a hypotéza neplatí, tak hovoríme o *chybe 2.druhu*. Je žiaduce, aby sme pri testovaní minimalizovali obe chyby.
Ďalšia vec, ktorá nás bude zaujímať pri testovaní a ktorú pred prevedením testu budeme musieť vyriešiť je vhodná voľba kritického oboru S_1. Pri testovaní hypotézy sa stanovuje tento obor tak, aby sme minimalizovali chybu prvého druhu na požadovanú hranicu. V praxi si teda chybu prvého druhu obmedzí tak, že dopredu stanovíme pevnú hodnotu α, čo bude číslo medzi 0 a 1 a bude platiť:

$$P_{\theta \in \Omega_1}(\mathbf{X} \in S_1) \leq \alpha \tag{24}$$

Hladinou testu nazývame také α, pre ktoré platí:

$$\alpha = sup_{\theta \in \Omega_1} P_\theta(\mathbf{X} \in S_1) \tag{25}$$

Najlepšia voľba kritického oboru je taká, ak pri dodržaní tejto podmienky je pravdepodobnosť chyby 2. druhu minimálna.

Najviac používané hodnoty hladiny testu sú hodnoty 0.05 a 0.01. Na základe voľby hladiny testu si stanovíme kritický obor S_1 ako funkciu α. Pre kritický obor platí, že: $S_1(\alpha^{'}) \subset S_1(\alpha)$ ak $\alpha^{'} < \alpha$.
Ďalším dôležitým pojmom je *sila testu*.
Hodnotu $\beta(\theta) = P_{\theta \in \Omega_2}(\mathbf{X} \in S_1)$ nazývame silou testu v bode θ
Funkciu

$$\beta : \Omega \to [0,1] \qquad \beta(\theta) = P_\theta(\mathbf{X} \in S_1) \tag{26}$$

(t.j. pravdepodobnosť zamietnutia hypotézy, ak skutočná hodnota parametru je θ) nazývame silofunkciou testu.
Najmenšia hladina testu, pri ktorej by sme hypotézu zamietli na príslušnej hladine testu sa nazýva *p-hodnota* (p-value,significant probability). Je to teda:

$$min\{\alpha : x \in S_1(\alpha)\} \tag{27}$$

P-hodnota je pravdepodobnosť, že za platnosti H_0 pozorujeme také dáta, ktoré budú svedčiť proti nulovej hypotéze viac než moje napozorované dáta.
H_0 zamietam na hladine testu α, ak p-hodnota je menšia ako hladina testu α.

Pri testovaní hypotéz je praktickejšie použiť *testovú štatistiku*. Je to funkcia pozorovaní, ktorú si označíme $T(\mathbf{X})$, nezávislá na parametre θ, ktorý testuje. Testovú štatistiku volíme tak, aby jej rozdelenie bolo za platnosti hypotézy známe.
Test teda založíme na testovacej štatistike $T(\mathbf{X})$ a kritickom obore, stanovenom práve pre túto štatistiku.

2. Náš test

V nasledujúcich riadkoch sa budeme zaoberať problémom nespravodlivého losovania a to prostredníctvom testovania hypotéz.
Nech r_0 je skutočný počet rôznych lístkov po k kolách.
Náš test ma nasledujúci tvar:
H_0:V osudí je skutočne n lístkov.
H_1:V osudí je menej než n lístkov
V prípade že H_0 zamietneme, tak budeme považovať losovanie za nespravodlivé.
V opačnom prípade nebudeme mať na pochybovanie o spravodlivosti losovania dostatok dôkazov.
Nech α je hladina testu.
Test na hladine α zamietame, ak:

$$\sum_{i=m}^{r_0} P[R = i|n, k, m] \leq \alpha \tag{28}$$

Z predchádzajúceho vieme, že výraz na ľavej strane sa nazýva p-hodnota.

Teraz nájdeme najväčšie r také, pre ktoré budeme hypotézu zamietať. To znamená, že nájdeme:

$$\max\left\{ r; \sum_{i=m}^{r} P(R=i|n,k,m) \leq \alpha \right\} \tag{29}$$

Toto r označíme r_k. Pomocou r_k určíme kritický obor.
Platí:
Ak $R \leq r_k$ tak hypotézu zamietame na príslušnej hladine testu.
Ak $R > r_k$ tak hypotézu nezamietame na príslušnej hladine testu.
Ďalšia otázka, ktorou sa môžeme zaoberať je sila testu.
Silu testu oproti alternatíve vypočítame ako:

$$\sum_{i=1}^{r_k} P(i|n,m,k) \tag{30}$$

Môžeme sa pozrieť aj na to, ako sa bude správať sila testu, pokiaľ budeme počet rôznych lístkov v osudí meniť. Ak počet rôznych lístkov v osudí označíme l, tak potom si definujeme silofunkciu:

$$f[l] = \sum_{i=1}^{r_k} P(i|l,m,k) \tag{31}$$

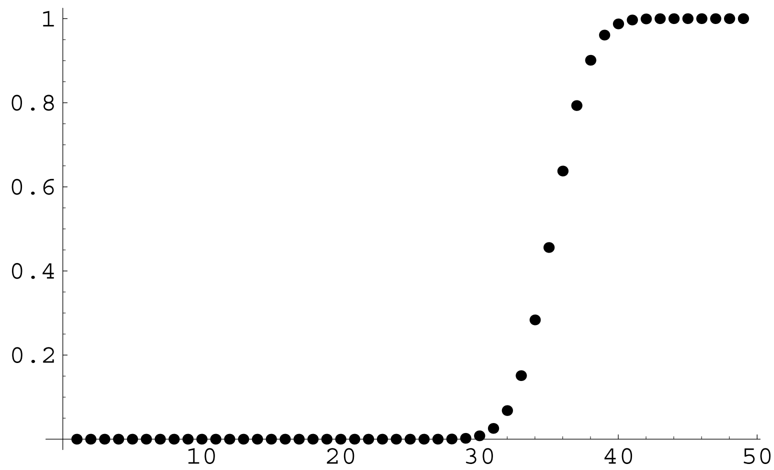
$f[l]$ bude teda udávať silu testu oproti alternatíve pokiaľ počet rôznych lístkov v osudí je l.
Teraz si ilustrujeme predchádzajúce poznatky na troch príkladoch.

Príklad 1. [1]
Za vstupné údaje použijeme výsledky žrebovania čísel stále populárnej hry Športka, ktorá je založená na výbere 6tich čísel zo 49tich. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené výsledky z prvých desiatich losovaní v roku 2007.
V tomto prípade vieme, že v osudí sa skutočne nachádza 49 lístkov. To musí byť notársky overené. Preto alternatívu v tomto teste formulujeme tak, že niektoré hodnoty nemôžu byť vytiahnuté.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	16	19	20	3	22	43
2	17	36	19	13	9	30
3	32	33	17	14	40	37
4	3	38	43	14	15	47
5	37	44	31	22	40	3
6	4	28	33	35	10	12
7	16	19	26	28	27	2
8	44	28	10	7	38	20
9	32	25	13	39	44	3
10	7	11	32	9	1	18

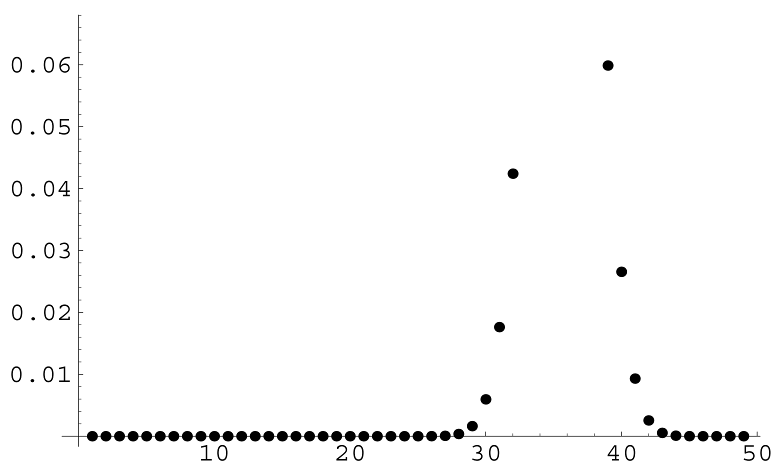
[1] Zdrojový text k výpočtom a grafom je uvedený na konci textu v prílohe.

V každom riadku tabuľky máme uvedených 6 čísel príslušného žrebovania.
Vidíme, že je to teda prípad, kedy máme 49 rôznych čísel, z ktorých v každom losovaní vyberieme 6 a celé to zopakujeme desaťkrát.
Nás teda bude zaujímať počet rôznych lístkov vytiahnutých počas losovania. Na začiatku textu tejto práce bol odvodený vzťah vyjadrujúci toto rozdelenie. Graficky ho môžeme znázorniť nasledovne



Obr. 1. Rozdelenie náhodnej veličiny R

Grafické znázornenie rozdelenia veličiny R nám je dôkazom toho, že vzťah odvodený v (16) je skutočne rozdelenie náhodnej veličiny.
Graficky si ešte vyjadríme pravdepodobnosti jednotlivých hodnôt.



Obr. 2. Jednotlivé pravdepodobnosti náhodnej veličiny

Vidíme, že pravdepodobnosť je najmenšia v krajných bodoch, čo sú vlastne extrémne situácie. Prvých päť hodnôt je nulových, lebo losujeme po šiestich lístkoch a:

$$P(R \leq 5) = 0 \tag{32}$$

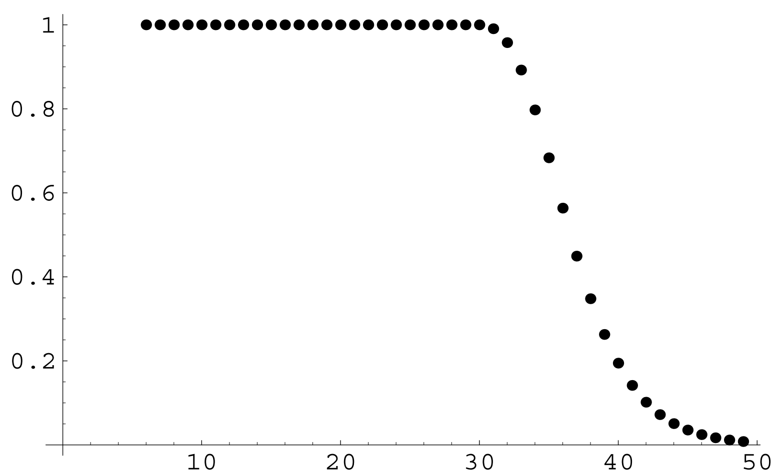
Taktiež je málo pravdepodobné, že v každom ťahu vytiahneme rovnaké čísla, tak ako je málo pravdepodobné, že počas losovanie vytiahneme všetky čísla. Najväčšiu pravdepodobnosť má situácia, kedy vytiahneme 39 rôznych čísel.

Z tabuľky vieme ľahko vyčítať, že počet rôznych lístkov vytiahnutých po desiatich žrebovaniach je 35. Táto hodnota je vlastne to r_0, teda skutočná hodnota v predchádzajúcom odstavci. Teraz použijeme nástroj testovania hypotéz, ktorému sme sa venovali v predchádzajúcej kapitole. Zvolíme si hladinu testu 0.01.

Podľa (28) vypočítame teraz p-hodnotu, pričom uvažujeme hladinu testu 0.01.
Tá nám dá výsledok **0.45580962986094170017967275**.
Tak v dôsledku toho, že p-hodnota je väčšia ako hladina testu, hypotézu nezamietame na hladine 0.01.

Nájdeme si také najväčšie r, pre ktoré budeme hypotézu na danej hladine zamietať. Použijeme vzťah (29).
Po výpočte zistíme, že v tomto prípade za hodnotu r_k budeme uvažovať hodnotu 30 na hladine 0.01. To znamená, že v prípade, ak po desiatich žrebovaniach vytiahneme nie viac ako 30 rôznych lístkov budeme hypotézu zamietať na hladine 0.01, lebo p-hodnota bude menšia ako hladina nášho testu.

Teraz si zakreslíme silofunkciu $f[j]$, ktorú sme si definovali v predchádzajúcom odstavci, konkrétne vzťahom (31). Spomenieme si, že sa jedná o funkciu, ktorou vyjadríme silu testu oproti alternatíve pri meniacom sa počte rôznych lístkov v osudí.



Obr. 3. Silofunkcia

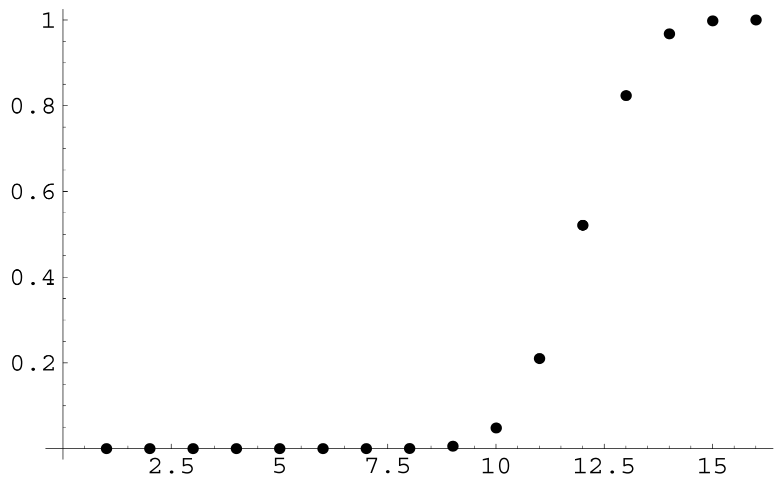
V grafe si môžeme všimnúť, že pre hodnoty l v rozmedzí od 6 do 30 má funkcia $f[l]$ hodnotu rovnú 1. Je to preto, lebo ak je v osudí najviac 30 rôznych lístkov, potom pravdepodobnosť vytiahnutia najviac 30-tich rôznych lístkov je 1.

Vidíme, že s rastúcim l táto pravdepodobnosť klesá.
Pre $l = 49$, je pravdepodobnosť, že $r \leq r_k$ rovná 0.0080202, čo je pravdepodobnosť zamietnutia hypotézy na hladine 0.01 pre $l = 49$.

Príklad 2.
Ďalší príklad, ktorý uvedieme je tiež situácia, s ktorou sa verejnosť mala možnosť stretnúť.
Nemenovaná firma vypísala konkurz na jednu zákazku.
Na základe inzerátu sa prihlásilo 16 firiem. Zadávajúca firma mala teraz za úlohu vybrať štyri pätice firiem, ktoré sa budú na celom projekte podieľať.
O tom, ktoré firmy to budú sa rozhodlo na základe losovania. Teda losovalo sa štyrikrát po piatich firmách, pričom firiem je 16. Opäť bolo overené notárom, že v osudí sa nachádza 16 lístkov, takže zase formulujeme alternatívu v tom zmysle, že niektoré lístky nemohli byť vytiahnuté.
Losovanie dopadlo nasledovne:

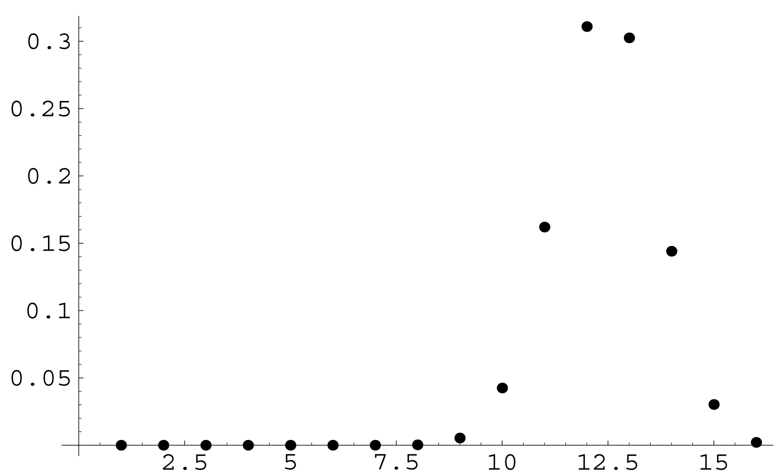
	LOKALITA	**1**	**2**	**3**	**4**
1	**STEAG, s.r.o.**	0	0	0	0
2	**ASP služby, s.r.o.**	0	0	0	0
3	**AVE CZ odpad. hosp., s.r.o**	1	0	1	1
4	**PARK, v.o.s**	1	1	0	1
5	**Ing. M. Krčál**	0	1	1	0
6	**TS Hustopeče, s.r.o.**	1	0	1	1
7	**PET group, a.s.**	0	0	0	0
8	**DVOŘÁK comte, a.s.**	0	0	0	0
9	**FALCON, s.r.o.**	1	1	1	1
10	**TS Brno, s.r.o.**	0	0	0	0
11	**A.S.A. Žabrovřesky, s.r.o.**	0	0	0	0
12	**A.S.A., s.r.o.**	0	0	0	0
13	**A.S.A. EKO Znojmo, s.r.o.**	0	0	0	0
14	**TS A.S.A., s.r.o.**	0	0	0	0
15	**INGE BRNO, s.r.o.**	0	1	0	0
16	**ŠIMEK 96, s.r.o.**	1	1	1	1

V tabuľke 1 znamená, že firma bola v danom losovaní vytiahnutá a 0 znamená opak.
Opäť si pre začiatok zakreslíme rozdelenie pravdepodobnosti.



Obr. 4. Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny R

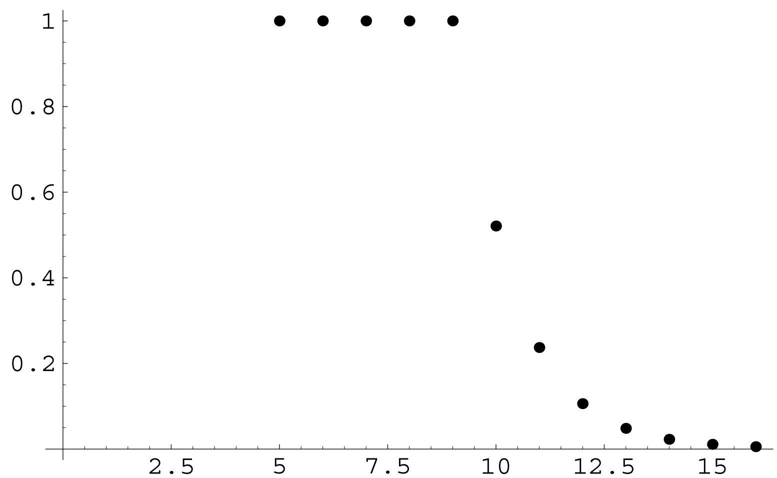
Na nasledujúcom obrázku sú zakreslené jednotlivé pravdepodobnosti. Prvé štyri hodnoty sú 0. Najväčšiu pravdepodobnosť má situácia, keď rôznych firiem bude 12.



Obr. 5. Jednotlivé pravdepodobnosti hodnôt veličiny R

Už na prvý pohľad je zrejmé, že v tomto prípade asi nepôjde o spravodlivé losovanie. Stačí si všimnúť už iba faktu, že 9 zo 16 firiem nebolo vylosovaných ani jedenkrát, jedna firma bola vylosovaná raz, jedna firma sa objavila počas losovania dvakrát, tri trikrát a dve firmy boli dokonca vylosované počas každého jedného losovania.
Opäť budeme testovať hypotézu H_0 na hladine 0.01.
Program Mathematica a vzťahy uvedené v predchádzajúcom texte nám dali nasledovné výsledky.

Z tabuľky vidíme, že skutočný počet vylosovaných rôznych firiem je 7. V prechádzajúcom obrázku, prípadne v prílohe si môžeme všimnúť, že pravdepodobnosť, že pri losovaní bude vybratých práve 7 rôznych firiem zo 16 je iba **0.000005827409**.
P-hodnota vypočítaná pre tento prípad nám dáva hodnotu **0.000005855787144703** ak hladina testu je 0.01. Z teórie testovania hypotéz využitím p-hodnoty nám to jasne hovorí, že na hladine $\alpha = 0.01$ hypotézu zamietame, teda losovanie považujeme za nespravodlivé.
Opäť si nájdeme hodnotu r_k pomocou vzťahu (29), pričom uvažujeme hladinu testu 0.01. V tomto prípade nám r_k vyšlo rovné 9. To znamená, že ak nám vyjde pri losovaní tohto typu počet rôznych lístkov väčší ako 9, tak hypotézu nezamietame na hladine 0.01, inak budeme losovanie považovať za nespravodlivé.



Obr. 6. Silofunkcia

Podobne ako v predchádzajúcom príklade si môžme do grafu zakresliť, ako sa bude správať sila testu proti už dobre známej alternatíve r_k, ak sa bude meniť hodnota počtu rôznych firiem, z ktorých si vyberáme. Podobné úvahy ako sme použili v predchádzajúcom môžeme použiť i v tomto príklade. Pokiaľ budeme mať v osudí 6 až 9 lístkov, tak nám vyjde sila testu rovná 1. Opäť s rastúcim l nám sila testu klesá.

Otázka, ktorá sa nám ponúka je, aká je pravdepodobnosť, že v tomto losovaní firiem vylosujem práve dve firmy v každom losovaní.
Na jej zodpovedanie využijeme hypergeometrické rozdelenie, ktoré máme definované nasledovne.

Definícia 1. Nech N, A a n sú prirodzené čísla, pričom $A < N, n < N$. Nech X je náhodná veličina, ktorá nadobúda iba celočíselných hodnôt s pravdepodobnosťami:

$$P(X = k) = \frac{\binom{A}{k}\binom{N-A}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad max(0, A + n - N) \leq k \leq min(A, n) \tag{33}$$

potom hovoríme, že náhodná veličina X má **hypergeometrické rozdelenie**.

V našom prípade bude $A = 2, n = 5, N = 16, k = 2$. Aby sme dostali požadovaný výsledok, tak (33) umocníme na štvrtú, lebo losovanie opakujem štyrikrát, pričom vzorec (33) nám dáva pravdepodobnosť, že dve konkrétne firmy budú v jednom losovaní určite vybraté.
Výsledná pravdepodobnosť je iba

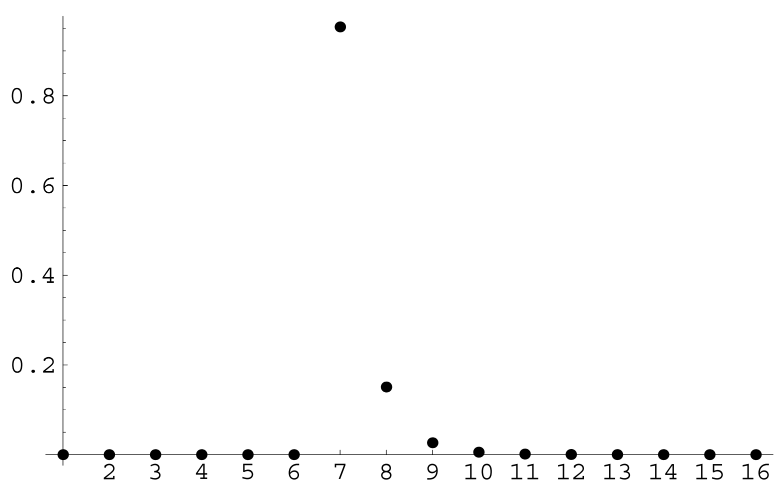
$$\left(\frac{\binom{14}{3}}{\binom{16}{5}}\right)^4 = \mathbf{0.0000482253} \tag{34}$$

Podozrivé sú aj firmy, ktoré boli vytiahnuté v troch losovaniach. Na výpočet pravdepodobnosti takejto situácie použijeme taktiež hypergeometrické rozdelenie. Túto pravdepodobnosť vypočítame nasledovne:

$$\frac{\binom{13}{3}^3 \binom{13}{5}}{\binom{16}{5}^4} = \mathbf{0.0000827077} \tag{35}$$

Vidíme, že posledné dve čísla sú naozaj malé. Môžeme si všimnúť, že obe hodnoty sú menšie ako pravdepodobnosť, že vylosujeme každú firmu aspoň jedenkrát. Túto pravdepodobnosť zistíme z druhého obrázka v tomto príklade. Kde pravdepodobnosť, že náhodná veličina R nadobudne hodnotu 16 je 0.00210259.

Vieme, že skutočný počet rôznych firiem, ktoré boli vylosované podľa tabuľky je 7. Teraz si môžeme položiť otázku, aká bude pravdepodobnosť, že vyberieme sedem rôznych firiem, pokiaľ budeme vyberať z 7,8,9…16 firiem.
Odpoveďou je nasledujúci graf.



Obr. 7. Pravdepodobnosť, že vyberieme práve sedem firiem pri rôznom počte firiem

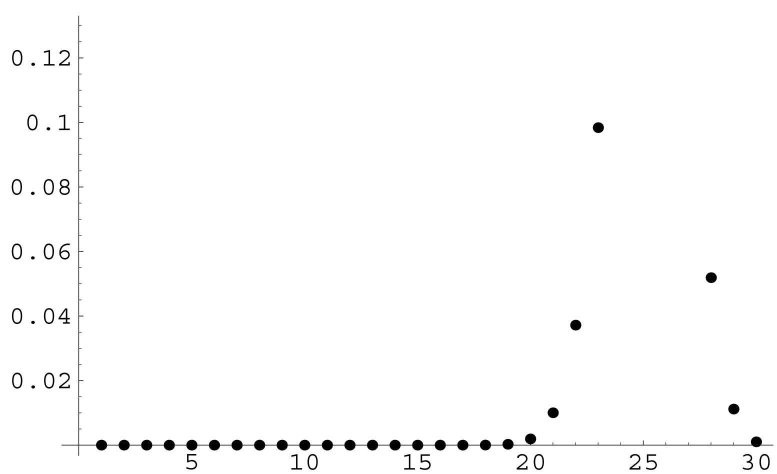
Podobne ako v predchádzajúcom máme na základe grafu opäť pochybnosti o spravodlivosti celého losovania. Vidíme, že pravdepodobnosť, že zo 16 firiem vyberieme rôznych len 7 je naozaj veľmi malá. Najväčšia pravdepodobnosť, že vyberieme 7 rôznych firiem je vtedy, ak vyberáme zo siedmich firiem.

Príklad 3.

Teraz si uvedieme príklad, v ktorom ukážeme tretiu situáciu s ktorou sa môžeme stretnúť. Pôjde o prípad, kedy sa už výsledky randomizovaného a nerandomizovaného testu nebudú tak zhodovať. Problematika randomizovaného testu je spracovaná v nasledujúcej kapitole.
Budeme uvažovať losovanie piatich čísel z tridsiatich čísel. Losovanie budeme opakovať desaťkrát.
A ako to dopadlo?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	13	28	10	23	7
2	4	10	3	29	20
3	28	7	6	30	3
4	15	12	3	28	26
5	14	1	6	10	4
6	7	3	13	28	16
7	1	12	30	10	22
8	28	4	3	5	12
9	27	13	7	15	10
10	28	11	6	4	1

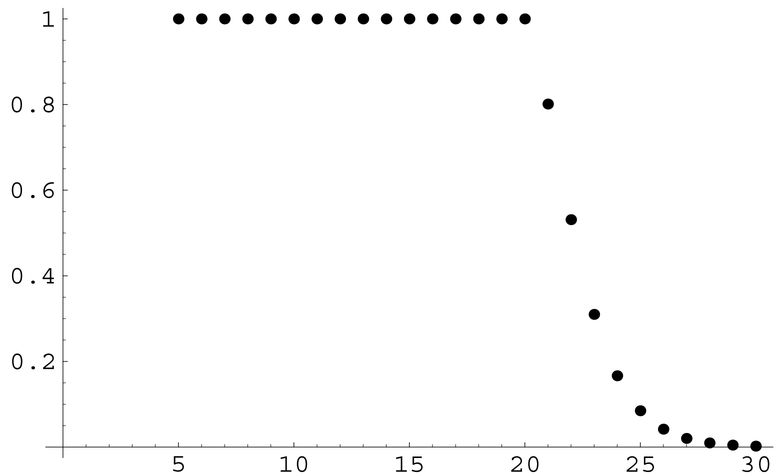
Najskôr si vykreslíme jednotlivé pravdepodobnosti.



Obr. 8. Jednotlivé pravdepodobnosti náhodnej veličiny R

Z grafu je jasné, že najpravdepodobnejšia je situácia, keď vylosujeme 23 rôznych čísel.
Vidíme, že sme vylosovali 21 rôznych čísiel. Pravdepodobnosť, že vylosujeme práve 21 čísel je 0.0100261. Vypočítame si teraz p-hodnotu pomocou vzorca (28), ak uvažujeme hladinu testu 0.01. Výsledok je **0.012238799813469**. Na hladine $\alpha = 0.01$ teda hypotézu nezamietame.

Teraz si vypočítame také najväčšie r, pre ktoré hypotézu zamietame na príslušnej hladine.
Mathematica nám dá výsledok 20, čo je teda to naše r_k. Z toho nám plynie, že ak nám pri losovaní vychádza počet rôznych čísel nie menší ako 20, tak hypotézu nezamietame na hladine 0.01, inak hypotézu zamietame na hladine 0.01, teda máme pochybnosti o spravodlivosti celého losovania.
Pre úplnosť si ešte zakreslíme silofunkciu.



Obr. 9. Silofunkcia

Otázka randomizovaného testu je spracovaná pre toto losovanie v príklade číslo 6.

KAPITOLA 3

Randomizovaný test

1. Randomizácia

Nech P_0 a P_1 sú diskrétne rozdelenia náhodnej veličiny X. Označíme $P_i(X = x) = P_i(x)$ pre i=0,1.
Budeme sa snažiť nájsť optimálny test na testovanie hypotézy $H_0 : P_0$ proti $H_1 : P_1$. Ten definujeme prostredníctvom kritického oboru S_1, ktorý by mal spĺňať:

$$\sum_{x \in S_1} P_0(x) \leq \alpha \tag{36}$$

a

$$\sum_{x \in S_1} P_1(x) = maximum \tag{37}$$

Môžeme ľahko zistiť, ktoré hodnoty budú patriť do S_1.
Ku každému bodu x môžme priradiť dve hodnoty a to P_0 a P_1. Vybrané body musia mať hodnotu menšiu nanajvýš rovnú α pre rozdelenie P_0 a čo najväčšiu hodnotu pre rozdelenie P_1.
Pre takéto body teda musí platiť, že hodnota:

$$r(x) = \frac{P_1(x)}{P_0(x)} \tag{38}$$

je, čo najväčšia.
Body teda zoradíme podľa veľkosti $r(x)$ a potom vyberieme podľa veľkosti, ktoré budú zaradené do kritického oboru S_1. Budeme ich vyberať toľko, aby boli splnené podmienky (36) a (37).
Formálne zapísané to znamená, že S_1 bude taká množina bodov, pre ktoré $r(x) > c$, kde c je odvodené zo vzťahu :

$$P_0(x \in S_1) = \sum_{x:r(x)>c} P_0(x) = \alpha \tag{39}$$

Môže sa však stať, že keď zahrnieme bod do S_1, tak hodnota α nebude ešte dosiahnutá, ale keby sme zahrnuli ďalší bod v poradí, tak by už bola táto hodnota prekročená.
Teda buď táto hodnota nebude dosiahnutá alebo porušíme pravidlo priority podľa $r(x)$. V takomto prípade výsledok optimalizačného problému nebude mať jasné riešenie.
Problému môžme zabrániť modifikáciou, pri ktorej bude dodržaná priorita podľa $r(x)$, a ktorá bude viesť k jednoduchému a jednoznačnému riešeniu. Tento postup sa nazýva randomizácia (znáhodnenie). Predvedieme test, ktorý sa nazýva randomizovaný(znáhodnený) test.

Tento postup nám umožní rozštiepenie ďalšieho bodu, tak aby sme jeho pripojením do S_1 dosiahli presnú hodnotu α.
Randomizovaný test sa od klasického testu hypotézy líši tým, že musíme definovať meriteľnú funkciu $\Phi(X)$, ktorú nazývame kritická funkcia a v prípade, že testujeme hodnotu náhodnej veličiny X, tak hypotézu zamietame s pravdepodobnosťou $\Phi(X)$ a nezamietam s pravdepodobnosťou $1-\Phi(X)$. Všeobecne teda musíme pri randomizovaných testoch previesť ešte jeden test navyše a preto sa tento postup používa zriedka.
V prípade, že by sme za kritickú funkciu $\Phi(X)$ zvolili indikátor kritického oboru, tak dostaneme klasický postup testovania hypotéz.

Celú problematiku sformulujeme v nasledujúcich dvoch vetách.

Veta 1.1.
(1)EXISTENCIA
Nech P_0 a P_1 sú rozdelenia pravdepodobností veličín s hustotami p_0 a p_1 vzhľadom k miere μ.
Pre test hypotézy $H_0 : p_0$ proti $H_1 : p_1$ existuje test charakterizovaný funkciou Φ a konštantou k taký, že platí:

$$E_0\Phi(X) = \alpha \tag{40}$$

a

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & kde\ p_1(x) > kp_0(x) \\ 0 & kde\ p_1(x) < kp_0(x) \end{cases} \tag{41}$$

(2)POSTAČUJÚCE VLASTNOSTI NAJSILNEJŠIEHO TESTU
Ak test spĺňa podmienky (40) a (41) pre nejaké k, potom je najsilnejším testom pre testovanie $H_0 : p_0$ proti $H_1 : p_1$ na hladine α.

Dôkaz
(1) Nech $\alpha(c) = P(p_1(x) > cp_0(x))$. Ak túto pravdepodobnosť počítame vzhľadom k P_0, potom uvažujeme iba kladné hodnoty p_0 tak, že $\alpha(c)$ je pravdepodobnosť, že náhodná veličina $p_1(x)/p_0(x)$ prevyšuje c. Preto $1-\alpha(c)$ je rastúca distribučná funkcia a $\alpha(c)$ je nerastúca a spojitá sprava: $\alpha(c-0)-\alpha(c) = P_0(p_1(x)/p_0(x) = c), \alpha(-\infty) = 1, \alpha(\infty) = 0$.
Uvažujeme $0 < \alpha < 1$, pre ktoré určíme také c_0, že platí $\alpha(c_0) \leq \alpha \leq \alpha(c_0 - 0)$ a uvažujeme test definovaný funkciou Φ:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } p_1(x) > c_0p_0(x) \\ \alpha - \alpha(c_0)\frac{}{\alpha(c_0-0)-\alpha(c_0)} & \text{ak } p_1(x) = c_0p_0(x) \\ 0 & \text{ak } p_1(x) < c_0p_0(x) \end{cases} \tag{42}$$

Vidíme, že druhá časť funkcie Φ nemá význam pre $\alpha(c_0-0) = \alpha(c_0)$.
Potom $P_0(p_1(x) = c_0p_0(x)) = 0$.
Hladina testu s kritickou funkciou Φ je:

$$E_0(\Phi(X)) = P_0(\frac{p_1(x)}{p_0(x)} > c_0) + \frac{\alpha-\alpha(c_0)}{\alpha(c_0-0)-\alpha(c_0)}P_0(\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = c_0) = \alpha \tag{43}$$

Z toho vidíme, že c_0 je naša hľadaná konštanta k.
(2) Nech teda $\Phi(x)$ spĺňa (40) a (41) v (1) a nech $\Phi^*(x)$ charakterizuje nejaký test s $E_0\Phi^*(X) \leq \alpha$. Označíme si S_+ a S_- množiny v priestore kde $\Phi(x) - \Phi^*(x) > 0$ a < 0 naopak.
Ak x patrí do S_+, to znamená, že je väčší ako 0 a $p_1(x) \geq kp_0(x)$. Podobne aj pri prvkoch množiny S_- platí $p_1(x) \leq kp_0(x)$.
Teda platí nasledujúce:

$$\int (\Phi(x)-\Phi^*(x))(p_1-kp_0)d\mu(x) = \int\limits_{S_+\cup S_-} (\Phi(x)-\Phi^*(x))(p_1-kp_0)d\mu(x) \geq 0 \quad (44)$$

Rozdiel síl teda spĺňa vzťah:

$$\int (\Phi(x) - \Phi^*(x))p_1 d\mu(x) \geq k \int (\Phi(x) - \Phi^*(x))p_0 d\mu(x) \geq 0 \qquad (45)$$

Dôsledok 1.2.
Nech β je sila najsilnejšieho testu na hladine α, ktorý testuje hypotézu $H_0 : P_0$ proti $H_1 : P_1$. Potom $\alpha < \beta$ ak neplatí, že $P_0 = P_1$.

Poznámka 1. $E_0(\Phi(X))$ je hladina testu.

V praxi sa však viac stretávame s prípadom, kedy rozdelenie náhodnej veličiny závisí na viac než jednom parametre a taktiež hypotézu a alternatívu máme zloženú.
Budeme uvažovať zjednodušenú situáciu, kedy rozdelenie závisí na jednom reálnom parametre a máme zloženú hypotézu i alternatívu.

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \qquad H_1 : \theta > \theta_0 \qquad (46)$$

Definícia 2.
Nech testujeme hypotézu z (46). Predpokladáme, že pre každé $\theta > \theta_0$ máme test $H_0 : \theta \leq \theta_0 \qquad H_1^{'} : \theta = \theta_0$, ktorý maximalizuje hodnotu funkcie $\beta(\theta)$ a pritom má hladinu α. Ak tento test ma kritickú funkciu nezávislú na θ potom nazývame tento test hypotézy z (46) rovnomerne najsilnejším testom.

Pre každú pevnú jednoduchú hypotézu a pevnú jednoduchú alternatívu nájdeme najsilnejší test. Ten však nemusí byť najsilnejší pre iné alternatívy.
Za prítomnosti nejakých doplnkových predpokladov však vieme zaistiť existenciu rovnomerne najsilnejšieho testu.

Definícia 3.
Hodnotu $\frac{p_{\theta'}}{p_\theta}$ (kde p_θ je hustota vzhľadom k miere μ)pre $\theta^{'}, \theta \subset \Omega$ nazývame podielom vierohodností
Povieme, že trieda parametrov má monotónny podiel vierohodností $\frac{p_{\theta'}}{p_\theta}$ (monotone likelihood ratio) ak existuje taká reálna funkcia $T(x)$, že pre každé $\theta < \theta^{‘}$ sú P_θ a $P_{\theta^{‘}}$ (P_θ je rozdelenie absolútne spojité vzhľadom k miere μ) rôzne a $p_{\theta^{‘}}/p_\theta$ je nerastúca funkcia $T(x)$.

VETA 1.3.
Nech θ je reálny parameter a nech X je náhodná veličina s hustotou pravdepodobnosti $p_\theta(x)$ s monotónnym podielom vierohodností v $T(x)$.
Potom pre test v tvare:

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \qquad proti \qquad H_1 : \theta > \theta_0 \tag{47}$$

existuje rovnomerne najsilnejší test, ktorý je daný nasledujúcou funkciou:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & ak\ T(x) > C \\ \gamma & ak\ T(x) = C \\ 0 & ak\ T(x) < C \end{cases} \tag{48}$$

kde C a γ sú určené tak , aby platilo:

$$E_{\theta_0}\Phi(X) = \alpha \tag{49}$$

(2) Silofunkcia testu

$$\beta(\theta) = E_\theta(\Phi(X)) \tag{50}$$

je rýdzo rastúca funkcia vo všetkých bodoch θ pre ktoré $0 < \beta(\theta) < 1$.

Dôkaz
(1) a (2) Uvažujeme hypotézu $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1 : \theta = \theta_1$, kde $\theta_1 > \theta_0$. Najvhodnejšie body pre zamietnutie sú tie, pre ktoré hodnota $r(x) = p_{\theta_1}(x)/p_{\theta_0}(x) = g[T(x)]$ je dostatočne veľké. Z predpokladov plynie: ak $T[x] \leq T[x^‘]$ potom i $r(x) \leq r(x^‘)$ ak $x^‘$ je aspoň tak vhodné ako x. Preto test, ktorý zamieta hypotézu pri veľkých hodnotách $T(x)$ je najsilnejší. Ako v dôkaze v predchádzajúcej vete vieme, že existujú také C a γ, aby podmienky (1) a (2) boli splnené.
Z vety prvej bodu (2) vyplýva, že ide o najsilnejší test pre testovanie $P_{\theta'}$ proti $P_{\theta''}$ na hladine $\alpha' = \beta(\theta')$ pre $\theta' < \theta''$. Druhý bod našej vety vychádza z dôsledku uvedenom za vetou 1.
Ak $\beta(\theta)$ je neklesajúca, potom test spĺňa

$$E_\theta\Phi(X) \leq \alpha \qquad \theta \leq \theta_0 \tag{51}$$

Trieda testov, ktoré toto spĺňajú spĺňa i vzťah $E_{\theta_0}\Phi(X) \leq \alpha$. Ak test maximalizuje hodnotu $\beta(\theta_1)$ v tejto širšej triede, tak tiež maximalizuje $\beta(\theta_1)$ za podmienky (51).
Ak ide o test nezávislý na alternatíve θ_1, ktorá je väčšia ako θ_0, tak ide o rovnomerne najsilnejší test.
Zámenou nerovností v predchádzajúcom dostaneme riešenie pre duálnu úlohu

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \qquad proti \qquad H_1 : \theta > \theta_0 \tag{52}$$

2. Náš randomizovaný test

Už vieme, že pri diskrétnych rozdeleniach sa často stretávame s tým, že hladina testu α_0 je menšia než pravdepodobnosť chyby prvého druhu α. Naša náhodná veličina je taktiež veličina s diskrétnym rozdelením a teda na ňu môžme uplatniť teóriu randomizovaných testov, ktorá bola zmienená v predchádzajúcej kapitole.
Základom znáhodnených testov je definícia merateľnej funkcie na R^n, ktorú nazývame kritickou funkciou a v prechádzajúcom teste bola označená ako Φ. Je to funkcia pre ktorú platí: $0 \leq \Phi(r) \leq 1$.
V prípade, že funkcia $\Phi(r)$ nadobúda hodnoty 0 alebo 1, tak hovoríme o nerandomizovanom teste, kde platí pre $R = r$, že hypotézu zamietame s pravdepodobnosťou $\Phi(r)$ a nezamietame s pravdepodobnosťou $1 - \Phi(r)$.
Pri nerandomizovanim teste s kritickým oborom S_1 je $\Phi(r)$ práve indikátor oboru S_1.

Randomizovaný test je tiež definovaný meriteľnou funkciou $\Phi(r)$, ale tá v tomto prípade nenadobúda iba hodnoty 0 a 1. Tento test uvažuje i hranicu kritického oboru S_1.
V odstavci o testovaní hypotéz sme nástojili problém či je v našom osudí n alebo menej než n lístkov. Vidíme, že v našom teste máme jednoduchú hypotézu a zloženú alternatívu.
Podľa (29) sme určili r_k, také, že ak $r > r_k$, tak hypotézu nezamietame na hladine α, inak zamietame.
I v našom prípade bude teda platiť, že veličina $\Phi(r)$ (čo je pravdepodobnosť, že hypotézu zamietneme H_0 ak veličina R nadobúda hodnotu r) bude mať vlastnosti.

$$\Phi(r) = 1 \qquad r < r_{k+1} \qquad \Phi(r) = p \qquad r = r_{k+1} \tag{53}$$

Teda podľa (43) platí:

$$\alpha = 1P[R < r_{k+1}] + pP[R = r_{k+1}] + 0 \tag{54}$$

Z toho môžme vypočítať p.

$$p = \frac{\alpha - P[R < r_{k+1}]}{P[R = r_{k+1}]} \tag{55}$$

Silofunkciu si vyjadríme nasledovne:

$$\beta(l) = \sum_{i=1}^{r_k} P(R = i|l, m, k) + pP(R = r_k + 1|l, m, k) \tag{56}$$

Teraz si ukážeme tento test v príkladoch. Môžeme si vziať príklady uvedené v kapitole 2.2. Z tejto kapitoly vieme, že kritický obor je určený hodnotou r_k. Použijem predchádzajúcu vetu.

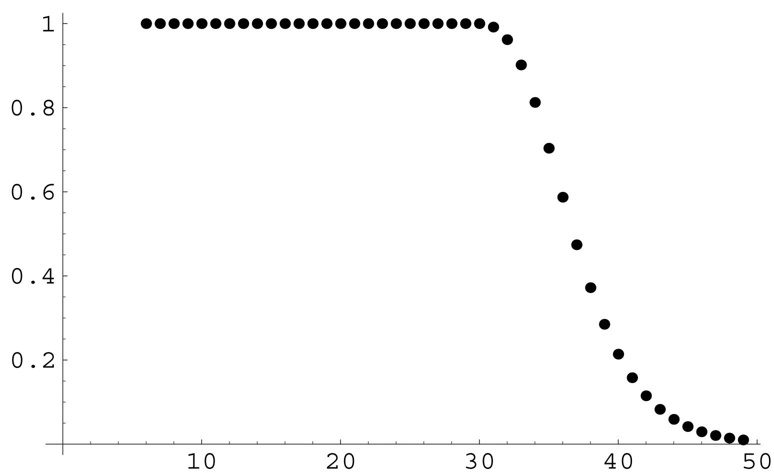
Príklad 4. -pokračovanie príkladu 1[1]
V prvom príklade sme riešili otázku Športky. Teraz sa pozrieme na spravodlivosť tejto hry prostredníctvom randomizovaných testov. Predvedieme randomizovaný test na hladine $\alpha = 0.01$.
Vieme z príkladu (1), že $r_k = 30$. Za hranicu kritického oboru považujeme 31.
Podľa (53) platí:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 1 & \text{ak } r < 31 \\ p & r = 31 \\ 0 & r > 31 \end{cases}$$

Našou úlohou bude teraz vypočítať p. Máme všetko potrebné k tomu, aby sme mohli na výpočet použiť vzorec (55).
Výsledok je **0.112326**. To znamená, že hypotézu zamietame na hladine 0.01 pre $r < 31$ s pravdepodobnosťou 1, pre $r = 31$ s pravdepodobnosťou 0.112326 a pre $r > 31$ s pravdepodobnosťou 0. Keďže skutočný počet v našej hre bol 35, tak podľa nášho testu hypotézu zamietame na hladine 0.01 s pravdepodobnosťou 0, teda nezamietame na hladine 0.01, lebo nemáme dostatok dôvodov na pochybovanie o spravodlivosti tohto losovania.
Silofunkciu vypočítame pre všetky $l \in 6, ..49$ nasledovne:

$$\beta(l) = \sum_{i=1}^{30} P(R = i|l, 6, 10) + 0.112326 P(R = 31|l, 6, 10) \tag{57}$$

Vykreslíme



Obr. 1. Silofunkcia

Príklad 5. -pokračovanie príkladu 2
Teraz sa pozrieme na problém losovania firiem uvedený v príklade 2. Opäť si

[1]Zdrojový text k výpočtom a grafom je uvedený na konci textu v prílohe.

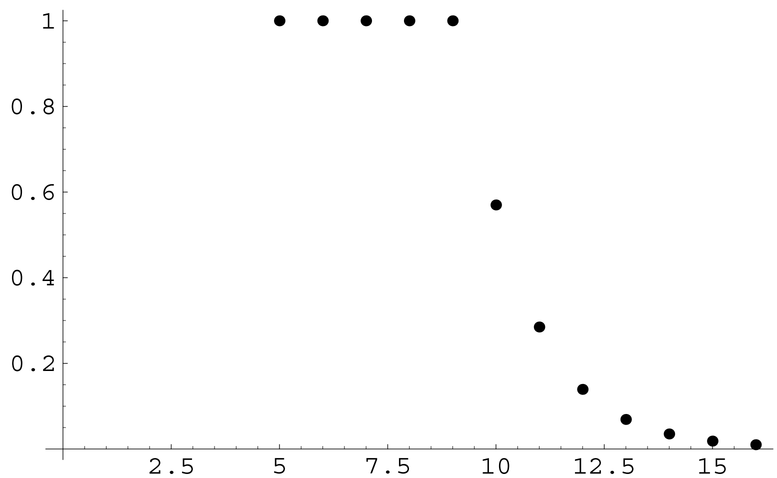
zostrojíme funkciu $\Phi(r)$. Vieme, že sme vypočítali $r_k = 9$.

$$\Phi(r) = \begin{cases} 1 & \text{ak } r < 10 \\ p & r = 10 \\ 0 & r > 10 \end{cases}$$

Opäť použijeme vzťah (55). Výsledok je **0.102225**, čo znamená, že pre $r = 10$ zamietame hypotézu s pravdepodobnosťou 0.102225. Ostatné platí ako v predchádzajúcom.

Z tabuľky sme zistili, že v celom losovaní bolo vytiahnutých 7 rôznych firiem, čo znamená že hypotézu zamietame na hladine 0.01 s pravdepodobnosťou 1. Losovanie ani na základe randomizovaného testu nepovažujeme za spravodlivé na hladine 0.01.

Nakoniec si môžeme zakresliť silofunkciu testu:



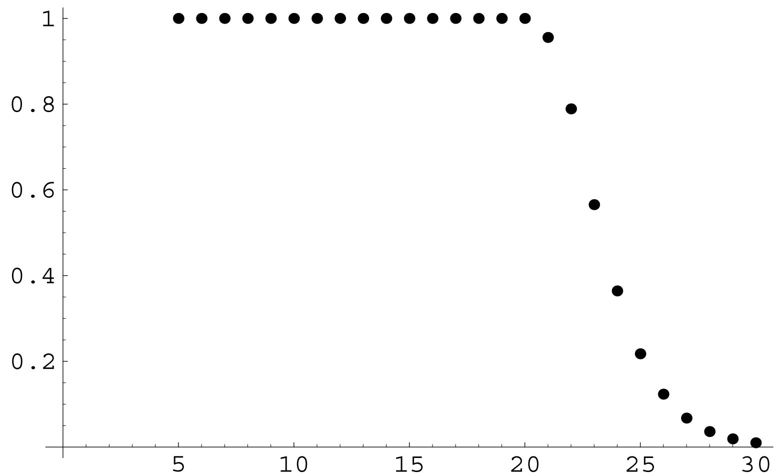
Obr. 2. Silofunkcia

Príklad 6. -pokračovanie príkladu 3

Teraz budeme pokračovať otázkou randomizovaného testu v príklade 3. Spomenieme si, že skutočná hodnota, teda r_0 bola 21, pričom hodnota r_k bola 20, opäť na hladine 0.01. Podľa vzťahu (55) dopočítame hodnotu p. Výsledkom je číslo **0.776703**. Zostavíme si funkciu podľa (53):

$$\Phi(r) = \begin{cases} 1 & \text{ak } r < 21 \\ 0.776703 & r = 21 \\ 0 & r > 21 \end{cases}$$

Na rozdiel od výsledku nerandomizovaného testu, kde sme hypotézu nezamietli na hladine 0.01, nám v tomto prípade vychádza, že hypotézu zamietame na hladine 0.01 s pravdepodobnosťou 0.776703. Na záver si zakreslíme silofunkciu:



Obr. 3. Silofunkcia

Literatúra

[1] Anděl,J.: *Základy matematické statistiky*, Matfyzpress, 2005
[2] Lehmann,E.L.: *Testing Statistical Hypotheses*, 2. vydanie, 1997
[3] Hurt, J.; Machek, J.;Štěpán, J.;Vorlíčková, D.: *The intersections of random finite sets*, Mathematica Slovaca 32, str. 229-237, 1982