



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Václav Miřátský

**Wittenova smyčka v jednoduchých rozšířeních
Standardního modelu částicových interakcí**

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Ing. Michal Malinský, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Teoretická Fyzika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Tímto bych chtěl poděkovat svému vedoucímu práce Ing. Ing. Michalu Malinskému, Ph.D. za poskytnutí tématu a vstřícnou pomoc při vypracování.

Název práce: Wittenova smyčka v jednoduchých rozšířeních Standardního modelu částicových interakcí

Autor: Václav Miřátský

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Ing. Michal Malinský, Ph.D., Ústav částicové a jaderné fyziky

Abstrakt: Cílem diplomové práce je demonstrovat Wittenův mechanismus v některých rozšířeních Standardního modelu založených na Pati-Salamově kalibrační grupě. Smyslem tohoto mechanismu je získat extrémně velkou majoranovskou hmotnost pravotočivých neutrin jako dvousmyčkovou korekci a následně získat nízké fyzikální hmotnosti neutrin skrz seesaw mechanismus I. typu. Ukáže se, že příslušné Feynmanovy diagramy lze zkonstruovat bez jakýchkoli interakcí vektorových bosonů. Zatímco v minimálním $SO(10)$ či $SU(5) \times U(1)$ modelu tento typ korekcí neexistuje, v Pati-Salamově modelu mohou být dokonce dominantní. Následně jsou uváženy důsledky případného částečného sjednocení kalibračních vazeb nebo vnoření Pati-Salamovy grupy do kalibrační grupy „Teorie Velkého Sjednocení“. Na závěr je zkontrolováno, zdali nedochází k nepřipustně rychlému rozpadu protonu. Diskutované modely lze prohlásit za potenciálně realistické, avšak pouze na úkor prediktivity, neboť v řadě klíčových vztahů vystupují zcela neznámé yukawovské vazbové konstanty.

Klíčová slova: Standardní model, Pati-Salamova symetrie, Wittenova smyčka, seesaw mechanismus, hmotnosti neutrin

Title: Witten's loop in simple extensions of the Standard Model of particle interactions

Author: Václav Miřátský

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Ing. Michal Malinský, Ph.D., Institute of Particle and Nuclear Physics

Abstract: The goal of this Master thesis is to demonstrate Witten's mechanism in selected extensions of the Standard model based on the Pati-Salam gauge group. The purpose of this mechanism is to obtain an extremely large Majorana mass term for right-handed neutrinos at the two-loop level and consequently light physical masses of neutrinos using the type I seesaw mechanism. The existence of corresponding Feynman diagrams without any interactions of vector bosons is presented. While it is impossible to construct this type of corrections in minimal $SO(10)$ or $SU(5) \times U(1)$ model in Pati-Salam model they may be even dominant. Subsequently, implications of possible partial gauge coupling unification or even embedding of the Pati-Salam group into a gauge group of "Great Unifi Theory" are considered. At the end the possibility of unacceptably fast proton decay is inspected. The discussed models are concluded to be potentially realistic but only at the cost of predictivity, since completely unknown Yukawa couplings appear in numerous key relations.

Keywords: Standard model, Pati-Salam symmetry, Witten's loop, seesaw mechanism, neutrino masses

Obsah

Úvod	3
1 Standardní model	5
1.1 Fermiony ve Standardním modelu	5
1.2 Vektorové bosony	7
1.3 Spontánní narušení symetrie	9
1.4 Yukawovské interakce	10
1.5 Fixace kalibrace	12
2 Motivace k rozšíření Standardního modelu	14
2.1 Hmotná neutrina a jejich oscilace	14
2.2 Běh kalibračních vazeb	16
2.3 Modely s rozšířenou kalibrační symetrií	18
3 Seesaw mechanismus	22
3.1 Majoranovské pole	22
3.2 Seesaw mechanismus I. typu	24
3.3 Seesaw mechanismus II. a III. typu	25
3.4 Wittenův mechanismus	26
4 Minimální Pati-Salamův model	28
4.1 Multiplety fermionů	28
4.2 Skalární sektor	28
4.2.1 Spontánní narušení symetrie	29
4.2.2 Diracovské hmotnosti fermionů	29
4.2.3 Majoranovská hmotnost neutrin	31
4.3 Pole vektorových bosonů	32
4.4 Lagrangián modelu	33
4.4.1 Interakce polí s vektorovými bosony	33
4.4.2 Hmotnostní lagrangián vektorových bosonů	34
4.4.3 Yukawovské interakce	37
4.4.4 Skalární potenciál	37
4.5 Běh kalibračních vazeb	44
5 Wittenův mechanismus v Pati-Salamově modelu	45
5.1 Dvousmyčkové korekce k majoranovské hmotnosti neutrin	45
5.2 Minimální Pati-Salamův model	47
5.2.1 Příspěvky generované vektorovými bosony	47
5.2.2 Příspěvky generované výhradně skalárními bosony	53
5.2.3 Celková korekce k majoranovské hmotnosti neutrin	60
5.3 Minimální Pati-Salamův model s levo-pravou symetrií	62
5.4 Nemimální varianty Pati-Salamova modelu	63
5.5 Pati-Salamův model s maximálním narušením parity	64
5.5.1 Příspěvky generované vektorovými bosony	65
5.5.2 Příspěvky generované výhradně skalárními bosony	65

6 Rozpad protonu v Pati-Salamově modelu	67
6.1 Minimální Pati-Salamův model	67
6.2 Modifikace a neminimální varianty Pati-Salamova modelu	69
Závěr	72
Seznam použité literatury	74
A Spinory, bispinory a Diracovy γ matice	78
B Propagátory majoranovských polí	80
B.1 Volný lagrangián	82
B.2 Obecný interakční lagrangián	84
B.3 Póly propagátorů majoranovských polí	85
B.4 Radiační seesaw mechanismus	86
C Výpočet dvousmyčkových integrálů s nulovou vnější hybností	88
C.1 Korekce k majoranovské hmotnosti generované vektorovými bosony	90
C.2 Korekce k majoranovské hmotnosti pouze se skalárními propagátory	93

Úvod

Yang-Millsův formalismus kalibračních teorií [1–3] patří v současnosti mezi základní stavební kameny kvantových teorií pole, které slouží k popisu částic a jejich interakcí. Popis fyziky elementárních částic pomocí kalibračně invariantní teorie často umožňuje jednotným způsobem popsat zcela odlišné typy interakcí a zároveň si zachovat velkou prediktivitu.

Kalibrační polní teorií je i takzvaný Standardní model částicových interakcí, popisující silnou a elektroslabou interakci elementárních částic. Tento model se dočkal mnoha experimentálních potvrzení, posledním z velkých úspěchů pak byl objev Higgsova bosonu [4], jehož existenci tato teorie předpovídala.

Nicméně i přes velkou přesnost, se kterou Standardní model popisuje celou řadu dějů v přírodě, máme náznaky a pozorovatelné důkazy, že se nejedná o zcela kompletní teorii fyziky elementárních částic. Kromě akademicky atraktivních myšlenek, jako například sjednocení všech elementárních sil do jedné, zde máme závažné problémy, jež je potřeba vyřešit. Jedním z nich je pozorování oscilací neutrin. Standardní model totiž ve své minimální podobě vyžaduje, aby hmotnost neutrin byla nulová, zatímco existence těchto oscilací naopak implikuje, že se jedná o hmotné částice [5–8]. O hmotnostech neutrin navíc víme, že musí být oproti ostatním částicím Standardního modelu nezvykle malé. O tom se můžeme přesvědčit analýzou kinematiky β rozpadu [9] nebo porovnáním kosmologických modelů s realitou [10].

Nastává tedy otázka, jak Standardní model vhodně rozšířit. Lákavým způsobem je opět použít kalibračně invariantní kvantovou teorii pole, avšak s bohatší symetrií. Taková teorie by mohla popisovat fundamentální interakce Standardního modelu jako jednu jedinou, nebo například sjednotit kvarky s leptony a chápat je pouze jako jeden typ částic.

V některých z těchto modelů můžeme extrémně malou hmotnost neutrin chápat jako důsledek existence nové fyziky, respektive symetrie, na extrémně vysokých energetických škálách. Tato vysoká energetická škála se může v nízkoenergetické fyzice projevit různým způsobem. Jedna možnost je, že se v teorii kromě diracovského hmotnostního členu neutrin objeví i velká majoranovská hmotnost pro pravotočivé komponenty polí neutrin. Pomocí takzvaného seesaw mechanismu [11, 12] se pak extrémně malá hmotnost neutrin vysvětlí jako důsledek přítomnosti této extrémně velké majoranovské hmotnosti. Wittenův mechanismus [13] spočívá v tom, že majoranovskou hmotnost nezískáme v lagrangiánu teorie přímo, nýbrž jako příspěvek vyššího řádu poruchového rozvoje teorie.

V původní Wittenově publikaci [13] byl tento mechanismus diskutován v kontextu takzvané $SO(10)$ teorie, zatímco publikace [14, 15] poskytují detailní diskusi realistické aplikace v rámci $SU(5) \times U(1)$ modelu. V [16] lze nalézt zmínku o možnosti tento mechanismus použít pro určitou supersymetrickou verzi Pati-Salamova modelu, který je založen na rozšíření barevné $SU(3)$ grupy na $SU(4)$ a následném chápání leptonů jako čtvrté barvy kvarků [17]. Cílem této práce je diskutovat tento mechanismus v různých nesupersymetrických variantách Pati-Salamova modelu.

Práce je členěna následujícím způsobem. Nejprve si stručně připomeneme strukturu Standardního modelu. Následně shrneme základní experimentální vý-

sledky pro hmotnosti neutrin, jakožto motivaci pro rozšíření Standardního modelu. Zároveň si popíšeme tzv. běh kalibračních vazeb Standardního modelu a uvedeme stručnou motivaci pro rozšíření kalibrační grupy. V třetí kapitole si ukážeme tři odlišné varianty seesaw mechanismu a představíme si Wittenův mechanismus, jakožto „radiační“ verzi seesaw mechanismu I. typu. Ve čtvrté kapitole budeme detailně diskutovat lagrangián minimálního Pati-Salamova modelu. Pátá kapitola obsahuje hlavní výsledky této práce. Ukážeme si, jak Wittenův mechanismus aplikovat v minimální verzi modelu a jaké důsledky přináší pro řádovou velikost energetické škály spontánního narušení Pati-Salamovy symetrie. Následně ukážeme, jak se výsledky změní v různých modifikacích tohoto modelu a neminimálních variantách. V poslední kapitole stručně shrneme známé výsledky pro poločas rozpadu protonu v těchto modelech. Uvidíme, že lze získat realistické hmotnosti neutrin a realistický poločas rozpadu protonu zároveň. Prediktivita teorie je však v nesrovnatelně horším stavu v porovnání například se zmíněným $SU(5) \times U(1)$ modelem.

V celé práci budeme užívat *přirozenou soustavu jednotek*

$$c = h/(2\pi) = \epsilon_0 = 1,$$

kde c je rychlost světla ve vakuu, h Planckova konstanta a ϵ_0 permitivita vakua.

1. Standardní model

V této kapitole stručně zrekapitulujeme konstrukci lagrangiánu Standardního modelu a připomeneme některé základní vlastnosti této teorie. Primárním účelem této kapitoly je zavést potřebné značení a připomenout určité aspekty kalibračních teorií, které později využijeme při diskuzi Pati-Salamova modelu.

Základem kalibrační teorie je nejprve specifikovat kalibrační grupu, ta je v případě Standardního modelu rovna

$$G_{SM} := SU(3)_{col} \times SU(2)_L \times U(1)_Y. \quad (1.1)$$

Pro informace o $SU(n)$ grupách a jejich reprezentacích můžeme nahlédnout do [18–20], zatímco technické podrobnosti ohledně konstrukce kalibračních teorií lze nalézt v [2, 3]. Barevná $SU(3)_{col}$ grupa je zodpovědná za silnou interakci kvarků, zatímco $SU(2)_L \times U(1)_Y$ zprostředkovává elektroslabé interakce. Kvantové číslo Y nazýváme slabým hypernábojem.

Následně je třeba jednotlivá pole vhodně uspořádat do multipletů, respektive určit, jak se pole transformují vůči kalibrační grupě. Připomeneme si, jaká pole fermionů a vektorových bosonů se ve Standardním modelu vyskytují, jaké mají transformační vlastnosti a jak spolu navzájem interagují. Poté si připomeneme roli Higgsova skalárního multipletu a kalibračně invariantních interakcí fermionů s těmito skaláry.

Učínme předem malou poznámku ke značení. V kvantové polní teorii běžně popisujeme fermiony pomocí takzvaného diracovského bispinoru. Jedná se o objekt se čtyřmi komponentami, který se transformuje konkrétním způsobem vůči Lorentzově transformaci. Vůči kalibrační grupě se však různé komponenty mohou transformovat odlišně, proto pro nás bude vhodnější popis pomocí dvoukomponentních spinorů ve Weylově realizaci. Definici spinorů, společně s použitým značením a konvencemi, uvádíme v příloze A.

1.1 Fermiony ve Standardním modelu

Jako elementární fermiony do Standardního modelu vstupují kvarky a leptony, a to ve třech generacích. V jedné generaci kvarků máme pole pro horní kvark u , s elektrickým nábojem $+2/3$, a dolní kvark d , s nábojem $-1/3$. Jelikož pracujeme s dvoukomponentními spinory, máme ještě pole antikvarků u_c a d_c s opačnými náboji. Tyto pole máme navíc ve třech různých variantách. Kvantové číslo, které je odlišuje, se nazývá barva. Celkem tím pádem máme pole kvarků $(u_{1,2,3}; u_c^{1,2,3}; d_{1,2,3}; d_c^{1,2,3})$, tedy 12 nezávislých polí spinorů v jedné generaci.

Co se leptonů týče, v jedné generaci máme pouze elektronová pole e, e_c s nábojem ∓ 1 a nenabitě levotočivé neutrino ν . V principu bychom mohli uvažovat i pole ν_c , nicméně pravotočivé neutrino, jehož existence by odpovídala přítomnosti tohoto pole, nebylo doposud detekováno.

Již známe kalibrační grupu a spinorová pole, která v teorii vystupují. Dalším krokem je těchto 15(+1) polí uspořádat do reprezentací kalibrační grupy G_{SM} . Podívejme se nejprve na $SU(3)_{col}$ část grupy G_{SM} . Vůči této grupě se trojice kvarků $(u_{1,2,3}; d_{1,2,3})$ transformují jako triplet, zatímco $(u_c^{1,2,3}; d_c^{1,2,3})$ jako antitriplet. Leptony se vůči této grupě netransformují. Právě toto odlišné chování jedné

z fundamentálních sil vůči různým typům fermionů slouží v Pati-Salamově modelu jako motivace pro rozšíření barevné symetrie i na leptony. K této diskuzi se vrátíme později v části 2.3.

Zbývá část grupy G_{SM} , tedy $SU(2)_L \times U(1)_Y$, udává tvar elektromagnetických a slabých interakcí. Dvojice (ν, e) a (u_i, d_i) tvoří $SU(2)_L$ dublety, zatímco ostatní pole vůči této grupě tvoří singlety. Kvantové číslo Y polí nalezneme podle vzorce

$$Q_{e.m} = T_L^3 + Y, \quad (1.2)$$

kde $Q_{e.m}$ je náboj daného pole a $T_L^3 = \sigma^3/2 = \text{diag}(1/2, -1/2)$ je diagonální generátor $SU(2)_L$ grupy. Zatímco grupa $SU(3)_{col}$ má odlišné působení na kvarky a leptony, grupa $SU(2)_L$ nakládá zcela odlišně s poli částic a antičástic. V původním Pati-Salamově článku [17] se tato asymetrie odstraní rozšířením kalibrační grupy o $SU(2)_R$, vůči které se naopak pole antičástic chovají jako dublety, zatímco pole částic jako singlety.

Transformační vlastnosti vůči grupě G_{SM} můžeme shrnout následovně:

$$\begin{aligned} Q &:= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = (3, 2, 1/6), \\ U &:= \begin{pmatrix} u_c^1 & u_c^2 & u_c^3 \end{pmatrix} = (\bar{3}, 1, -2/3), \\ D &:= \begin{pmatrix} d_c^1 & d_c^2 & d_c^3 \end{pmatrix} = (\bar{3}, 1, 1/3), \\ L &:= \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} = (1, 2, -1/2), \\ e_c &= (1, 1, 1), \quad (\nu_c = (1, 1, 0)), \end{aligned} \quad (1.3)$$

kde čísla v závorkách udávají, jak se daný multiplet polí transformuje postupně vůči $SU(3)_{col}$, $SU(2)_L$ a $U(1)_Y$ grupě. Pro část $SU(3)_{col} \times SU(2)_L$ tedy platí transformační vztahy

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow U_{2L} \cdot Q \cdot U_3^T, \\ L &\rightarrow U_{2L} \cdot L, \\ U &\rightarrow U \cdot U_3^\dagger, \\ D &\rightarrow D \cdot U_3^\dagger, \end{aligned} \quad (1.4)$$

kde U_3 je unitární matice 3×3 , totiž prvek grupy $SU(3)_{col}$ a U_{2L} je analogicky unitární matice 2×2 . Vůči $U(1)_Y$ se veškerá pole transformují pouhým násobením faktorem $\exp(-igY)$, kde Y je slabý hypernáboj daného pole a g je kalibrační vazba $U(1)_Y$ grupy, viz následující část.

Často může být užitečné u multipletů explicitně vypisovat maticové indexy. Indexy odpovídající $SU(2)_L$ grupě budeme značit řeckými písmeny, zatímco barevný index pomocí běžné latinky. Poloha indexu odlišuje, zdali se multiplet transformuje pomocí dané unitární matice nebo matice k ní komplexně sdružené. Multiplety (1.3) mají indexy

$$Q_{\alpha i}, L_\alpha, U^i, D^i. \quad (1.5)$$

Multiplety U, D mají horní index, neboť se jedná o antitriplety. Komplexním sdružením multipletů by indexy přirozeně změnily polohu. Transformační rovnice

(1.4) můžeme vypsáním indexů přepsat na

$$\begin{aligned}
Q &\rightarrow (U_{2L})_\alpha^\beta (U_3)_i^j Q_{\beta j}, \\
L &\rightarrow (U_{2L})_\alpha^\beta L_\beta, \\
U &\rightarrow (U_3^*)_j^i U^j, \\
D &\rightarrow (U_3^*)_j^i D^j.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Jakmile máme pole uspořádaná v multipletech, můžeme začít zkoumat interakce s vektorovými bosony.

1.2 Vektorové bosony

Platí, že na každý generátor kalibrační grupy teorie připadá jeden reálný vektorový boson. Ve Standardním modelu máme osm vektorových bosonů díky $SU(3)_{col}$ grupě a čtyři díky $SU(2)_L \times U(1)_Y$ grupě. Volný lagrangian a vzájemné interakce těchto vektorových bosonů jsou dány Yang-Millsovým členem, zatímco interakce s ostatními částicemi se získají záměnou parciální derivace v kinetických členech za derivaci kovariantní. Pro detailní popis této procedury připomínáme literaturu [2, 3].

Podívejme se nejprve na $SU(3)_{col}$ část grupy G_{SM} . Osm odpovídajících vektorových bosonů nazýváme gluony. S gluony interagují pouze kvarky, neboť pole leptonů tvoří vůči této grupě singlet. Detailní fyzikou kvarků se zabývat nebudeme, v našem kontextu je důležité především to, že kvarky tvoří barevný triplet, zatímco leptony se barevné interakce nezúčastňují. Podrobnosti o interakcích kvarků a gluonů je možno nalézt v [21, 22].

Na grupu $SU(2)_L \times U(1)_Y$ připadají čtyři vektorové bosony, které zprostředkovávají elektroslabou interakci částic. Tato vektorová pole lze zvolit tak, aby jedno odpovídalo fotonu, zatímco zbylé tři jednomu nabitému bosonu a jednomu neutrálnímu. Pro diskuzi základní fenomenologie těchto interakcí odkazujeme na [23–25].

Označme pole gluonů $G_\mu^{1,\dots,8}$, pole vektorových bosonů odpovídajících $SU(2)_L$ grupě $W_\mu^{1,2,3}$ a $U(1)_Y$ boson označme B_μ . Definujme

$$G_\mu := \frac{1}{2} G_\mu^a \lambda^a, \tag{1.7}$$

$$W_\mu := \frac{1}{2} W_\mu^a \sigma^a, \tag{1.8}$$

kde $\sigma^{1,2,3}$ jsou Pauliho matice a $\lambda^{1,\dots,8}$ tzv. Gell-Mannovy matice [18] normalizované na $\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}$. Vektorové bosony vůči globální kalibrační transformaci tvoří přidruženou reprezentaci, můžeme jim tedy přiřadit indexy $(G_\mu)_i^j$ a $(W_\mu)_\alpha^\beta$. Matici W_μ je běžné parametrizovat pomocí jednoho reálného a jednoho komplexního vektorového pole, konkrétně

$$W_\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}W_\mu^0 & \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^- & -\frac{1}{2}W_\mu^0 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Dle (1.2) si můžeme ověřit, že pole W^+ má náboj $+1$. Pomocí kovariantní derivace dostaneme pro interakci těchto bosonů s fermiony

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ni & \text{Tr} \left(\bar{Q}^T \gamma^\mu \left(g_w W_\mu Q + g_s Q G_\mu^T + \frac{g}{6} B_\mu Q \right) \right) + \\ & + \bar{U} \gamma^\mu \left(-g_s G_\mu^T - \frac{2g}{3} B_\mu I \right) U^T + \\ & + \bar{D} \gamma^\mu \left(-g_s G_\mu^T + \frac{g}{3} B_\mu I \right) D^T + \\ & + \bar{L}^T \gamma^\mu \left(g_w W_\mu - \frac{g}{2} B_\mu I \right) L + \\ & + \bar{e}_c \gamma^\mu g B_\mu e_c, \end{aligned} \quad (1.10)$$

ekvivalentně vypsáním indexů

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ni & \bar{Q}^{\alpha i} \gamma \cdot \left(g_w W_\alpha^\beta Q_{\beta i} + g_s G_i^j Q_{\alpha j} + \frac{g}{6} B Q_{\alpha i} \right) + \\ & + \bar{U}_i \gamma \cdot \left(-g_s G_j^i U^j - \frac{2g}{3} B U^i \right) + \\ & + \bar{D}_i \gamma \cdot \left(-g_s G_j^i D^j + \frac{g}{3} B D^i \right) + \\ & + \bar{L}^\alpha \gamma \cdot \left(g_w W_\alpha^\beta L_\beta - \frac{g}{2} B L_\alpha \right) + \\ & + \bar{e}_c \gamma \cdot g B e_c, \end{aligned} \quad (1.11)$$

kde jsme pro přehlednost potlačili lorentzovský index, který by se mohl plést s $SU(2)_L$ indexy. V této notaci lépe vidíme, jak jednotlivé členy získáváme - za každý index multipletu násobíme příslušnou maticí vektorových bosonů, přičemž za horní index přidáváme znaménko mínus.

Pole fotonu lze získat vhodnou kombinací neutrálních polí W_μ^0 a B_μ . Přejdeme k novým neutrálním polím ortogonální transformací

$$\begin{aligned} W_\mu^0 &= \cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu, \\ B_\mu^0 &= -\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Úhel θ_W nazýváme slabým směšovacím úhlem. Pokud tento úhel zvolíme tak, aby platilo

$$g \cos \theta_W = g_w \sin \theta_W =: e, \quad (1.13)$$

pole A_μ odpovídá fotonu. O tom se můžeme snadno přesvědčit rozpisem interakcí (1.10) a dosazením rovnice pro náboj (1.2). Pak lze interakci s polem A_μ psát ve tvaru

$$\mathcal{L}_{A_\mu} = \sum_f e Q_f \bar{f} \gamma^\mu f A_\mu, \quad (1.14)$$

kde sčítáme přes všechna spinorová pole f a Q_f značí náboj daného pole. To ale není nic jiného než interakční lagrangián kvantové elektrodynamiky. Bosony W_μ^\pm, Z_μ budeme nazývat *intermediálními bosony*. Pro jejich interakce můžeme psát

$$\mathcal{L}_{Z_\mu} = \sum_f \frac{g_w}{\cos \theta_W} \left(T_{L_f}^3 - Q_f \sin^2 \theta_W \right) \bar{f} \gamma^\mu f Z_\mu, \quad (1.15)$$

$$\mathcal{L}_{W_\mu^\pm} = \frac{g_w}{\sqrt{2}} \bar{e}^I \gamma^\mu \nu_I W_\mu^- + \frac{g_w}{\sqrt{2}} \bar{d}^i \gamma^\mu u_{Ii} W_\mu^- + h.c. \quad (1.16)$$

Za zmínku stojí fakt, že ve Standardním modelu máme tři různé kalibrační vazby g_s, g_w, g . To si můžeme dovolit jenom díky tomu, že grupa G_{SM} je dána direktním součinem tří různých grup. Jiná vazba odpovídá interakci s gluony, jiná interakci s bosony odpovídající $SU(2)_L$ a $U(1)_Y$ grupě. Kdybychom měli kalibrační teorii založenou na jediné jednoduché grupě, např. $SU(5)$ nebo $SO(10)$, měli bychom k dispozici pouze jednu vazbu. To je koneckonců jedna z motivací k hledání *Teorie Velkého Sjednocení*, která by všechny tři uvedené interakce popisovala právě pomocí takové kalibrační grupy.

1.3 Spontánní narušení symetrie

Kalibrační invariance nám zakazuje přidat do lagrangiánu hmotnostní člen pro vektorové bosony. Dokonce nám i zakazuje přidat hmotnostní členy pro fermiony. Způsob, jak tento problém obejít a stále mít renormalizovatelnou kalibračně invariantní teorii, je symetrii *spontánně narušit*. V modelech založených na větší kalibrační grupě než G_{SM} nám navíc spontánní narušení symetrie umožňuje získat zpět pouze invarianci vůči G_{SM} , což je klíčové pro zreprodukování výsledků Standardního modelu.

Spontánní narušení symetrie je běžnou součástí kalibračních teorií a podrobnosti můžeme nalézt v [3]. Zde celou proceduru a její důsledky shrneme pouze krátce. Za účelem spontánního narušení symetrie přidáme do Standardního modelu skalární dublet

$$h := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \end{pmatrix} = (1, 2, 1/2). \quad (1.17)$$

Nazývat ho budeme *Higgsův* dublet. Do lagrangiánu tak musíme zahrnout i obecný renormalizovatelný kalibračně invariantní člen sestavený pomocí tohoto dubletu

$$\mathcal{L}_h = -\frac{\lambda^2}{4} (2h^\dagger h - v^2)^2, \quad (1.18)$$

kde v a λ jsou konstanty. Lze ukázat, že vakuová střední hodnota skalárního pole je, až na kvantové korekce [26], rovna minimu skalárního potenciálu, pokud pole budeme vnímat jako proměnné. Může se tedy stát, že vakuová střední hodnota skalárního pole není rovna nule. Abychom ale měli dobře definovanou poruchovou teorii, musíme k takovému poli přičíst vhodnou konstantu, případně proměnné vhodně reparametrizovat tak, aby vakuová střední hodnota těchto předefinovaných polí již byla rovna nule. Lagrangiánu vyjádřenému v těchto nových skalárních proměnných budeme říkat narušený lagrangián. Toto posunuté pole již „nepatří“ do původního multipletu, neboť se transformuje jiným, netriviálním způsobem. Zachovány tak zůstanou pouze ty symetrie, vůči kterým je „vakuum“ (souhrn všech vakuových středních hodnot polí) invariantní.

Pro spontánní narušení symetrie Standardního modelu uvažujme v^2 kladné. Z rovnice (1.2) vidíme, že pole h_0 je neutrální, zatímco pole h_1 má náboj rovný $+1$. Vidíme, že skalární potenciál nabývá svého minima i v bodě $h_1 = 0, h_0 = v/\sqrt{2}$. Poli h_0 tedy můžeme přiřadit vakuovou střední hodnotu rovnou $v/\sqrt{2}$. Posunutím pole h_0 se spontánně naruší $SU(2)_L \times U(1)_Y$ symetrie a zůstane zachována pouze $U(1)_Q$ symetrie. Barevná $SU(3)_{col}$ symetrie zůstane zřejmě zachována taktéž. Kdybychom uvažovali, že i h_1 má nenulovou vakuovou střední hodnotu, narušili bychom jistě $U(1)_Q$ symetrii, čemuž se pochopitelně chceme vyhnout.

V důsledku spontánního narušení symetrie získají některé vektorové bosony hmotnost [27, 28]. Hmotnost získají právě ty, které odpovídají některému z narušených generátorů symetrie [29]. Ve Standardním modelu tak foton a gluony zůstanou nehmotné, zatímco intermediální bosony W a Z získají nenulové hmotnosti, konkrétně [30]

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{1}{2}v g_w, \\ M_Z &= \frac{1}{2}v \sqrt{g_w^2 + g^2}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Tento fakt můžeme snadno pochopit intuitivně. Skalární dublet h interaguje s vektorovými bosony skrz kovariantní derivaci. Není těžké si rozmyslet, že se v nenarušeném lagrangiánu objeví interakční členy obsahující dvě vektorová pole a dvě skalární. V narušeném lagrangiánu se tak objeví člen obsahující pouze dvě vektorová pole. To ale není nic jiného, než hmotnostní člen pro daná vektorová pole. Navíc platí takzvaný Goldstoneův teorém [31], který nám říká, že za každý narušený generátor symetrie se ve spektru objeví reálný nehmotný skalární boson. Tyto *Goldstoneovy* bosony je možné z teorie kompletně odstranit vhodnou volbou kalibrace. Tím nám z teorie zmizí určitý počet stupňů volnosti, který se ale vykompenzuje tím, že stejný počet vektorových bosonů získá hmotnost. Volné hmotné vektorové pole má totiž tři stupně volnosti, na rozdíl od vektorového nehmotného pole, které má pouze dva. Jelikož hmotnostní členy vektorových bosonů narušují lokální kalibrační symetrii explicitně, mohou hmotnost získat pouze ty, které odpovídají narušeným generátorům.

1.4 Yukawovské interakce

Přidáním skalárního multipletu do teorie získáme nové kalibračně invariantní členy, které musíme uvážit. Kromě již zmíněné interakce mezi skaláry získáváme i kalibračně invariantní kombinaci dvou fermionových a jednoho skalárního multipletu. V narušeném lagrangiánu se tak objeví hmotnostní člen pro fermiony.

Podívejme se, jaké invarianty jsme schopni vytvořit pomocí fermionů a Higgs-ova dubletu (1.17). Jedinými $SU(n)$ invariantními tenzory jsou Kroneckerův delta symbol δ_j^i (tentokrát indexem i, j máme na mysli index libovolné $SU(n)$ grupy) a totálně antisymetrický Levi-Civitův tenzor $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$, resp. $\epsilon^{i_1 \dots i_n}$ [18, 19]. Pokud indexy jednotlivých multipletů zúžíme pomocí těchto invariantních tenzorů, získáme $SU(3)_{col} \times SU(2)_L$ invariant, zatímco invarianci vůči $U(1)_Y$ musíme zkontrolovat dodatečně. Na tuto proceduru se ekvivalentně můžeme dívat následovně - provedeme tenzorový součin příslušných reprezentací („vypíšeme“ vedle sebe příslušné multiplety) a následně z tohoto součinu vybereme singlet (zúžíme indexy vhodným způsobem).

Snadno zjistíme, že nejobecnější invariantní yukawovský lagrangián je tím pádem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{yuk.} &= -Y_{IJ}^u \epsilon^{\alpha\beta} Q_{\alpha i}^I U^{Ji} h_\beta - Y_{IJ}^d Q_{\alpha i}^I D^{Ji} h^{*\alpha} - Y_{IJ}^e L_\alpha^I e_c^J h^{*\alpha} + h.c. \\ &\quad \left(-Y_{IJ}^\nu \epsilon^{\alpha\beta} L_\alpha^I \nu_c^J h_\beta + h.c. \right) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Indexy I, J odlišují různé generace. Matice yukawovských konstant Y_{IJ} mohou být zcela obecné. Poslední člen uvádíme v závorce, neboť k jeho konstrukci je

nutná přítomnost singletu ν_c , které, jak jsme již zmiňovali, se v minimální verzi Standardního modelu nevyskytuje.

V narušeném lagrangiánu získáme členy

$$\mathcal{L}_m^{ferm.} = -\frac{vY_{IJ}^u}{\sqrt{2}}u_{iI}u_{cJ}^i - \frac{vY_{IJ}^d}{\sqrt{2}}d_{iI}d_{cJ}^i - \frac{vY_{IJ}^e}{\sqrt{2}}e_I e_{cJ} + h.c. \quad (1.21)$$

$$\left(-\frac{vY_{IJ}^\nu}{\sqrt{2}}\nu_I\nu_{cJ} + h.c. \right)$$

Vidíme, že případná existence singletu ν_c nám umožňuje získat diracovský hmotnostní člen neutrin. Jelikož jsme předpokládali, že matice Y_{IJ} jsou libovolné, nejsou uvedena pole vlastními stavy hmotnosti. To napravíme přechodem k vhodné bázi, co se prostoru daném indexy I, J týče. V lagrangiánu pak dostaneme běžné diracovské hmotností členy. Přechodem k takové bázi se ale změní struktura interakčního členu s nabitými vektorovými bosony W_μ^\pm .

Vidíme, že jediná z interakcí (1.14),(1.15),(1.16) obsahující členy s různými poli fermionů je právě interakce s bosony W_μ^\pm . Podívejme se, jaké důsledky má pro tuto interakci diagonalizace yukawovských matic Y_{IJ} kvarků. Tyto matice diagonalizujeme bi-unitární transformací. Pišme

$$Y^u = U_u Y_D^u U_{u_c},$$

$$u'_K = u_I (U_u)^I{}_K,$$

$$u'_{cL} = (U_{u_c})^J{}_L u_{cJ},$$
(1.22)

pro matici Y^d a pole d, d_c analogicky. Matice U_u, U_{u_c} jsou unitární, zatímco Y_D^u je reálná, diagonální a pozitivně definitní matice. Dosazením do (1.16) získáme

$$\mathcal{L}_{Wud} = \frac{g_w}{\sqrt{2}} \bar{d}^I \gamma^\mu (U_d^T U_u^*)^K{}_I u'_K W_\mu^- . \quad (1.23)$$

Pokud tedy přejdeme k polím s definovanou hmotností, ztratíme zároveň diagonalitu interakcí fermionů s vektorovým polem W^\pm . Může se tak stát, že kvark z jedné generace se přemění na kvark generace jiné. Tyto přeměny jsou charakterizovány takzvanou *CKM* (*Cabbibo-Kobayashi-Maskawa*) maticí

$$V_{CKM} := U_d^T U_u^* . \quad (1.24)$$

Zároveň z rovnice (1.15) vidíme, proč se pro ostatní interakční členy nic nezmění. V lagrangiánu se totiž potkají matice U^T a U^* odpovídající stejnému poli a díky jejich unitaritě se navzájem vyruší. Pro podrobnější diskuzi *CKM* matice a důsledků její přítomnosti v teorii odkazujeme na [24, 25].

Pro leptony je situace složitější. Pokud ve Standardním modelu skutečně nemáme pole ν_c , lze přechod $e_I := e'_J (U_e^I)^J{}_I$ vykompenzovat změnou báze pro neutrina $\bar{\nu}^I = U_{eK}^I \bar{\nu}'^K$. Interakce (1.16) tak opět nemíchá jednotlivé generace mezi sebou a neutrino se nemůže samovolně změnit na neutrino z generace jiné. Kdybychom ale v teorii měli i pole ν_c , tato kompenzace by již nebyla možná, neboť bychom zároveň chtěli diagonalizovat i matici Y_{IJ}^ν . Tím se dostaneme do zcela stejné situace jako v kvarkovém sektoru. Matici analogickou *CKM* matici nazýváme *PMNS* (*Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata*) maticí.

1.5 Fixace kalibrace

Pro kvantování kalibračně invariantní teorie a následného využití poruchového počtu je stěžejní upřesnit, v jaké kalibraci pracujeme. My budeme využívat takzvanou *unitární* kalibraci. Cílem této kalibrace je z teorie odstranit všechny Goldstoneovy bosony.

Zatímco v klasické teorii nenarazíme na žádný problém, situace v kvantové polní teorii si žádá poněkud větší pozornost. Z požadavku unitarity rozptylové S matice, případně z kvantování kalibračně invariantní teorie pomocí dráhového integrálu, plyne, že za účelem fixování kalibrace musíme do teorie přidat nefyzikální pole - takzvané *duchy* [2, 3]. Otázka je, jak tyto nefyzikální pole ovlivní teorii, pokud zafixujeme kalibraci položením polí odpovídajících Goldstoneovým bosonům nule. Lze ukázat, že v takovém případě v teorii *duchy* ve skutečnosti uvažovat nemusíme, nicméně v efektivním lagrangiánu, respektive ve vytvářejícím funkciónálu Greenových funkcí, získáme divergentní nepolynomiální vzájemnou interakci skalárních polí [32]. V řeči Feynmanových grafů tedy máme nekonečně typů vertexů s různým počtem vnějších skalárních linek, které jsou navíc úměrné divergentní konstantě. Poznamenejme, že se během celé práce nedostaneme do situace, kdy bychom tyto divergentní interakce skalárních polí skutečně museli uvažovat.

Zvolením unitární kalibrace z teorie odstraníme veškeré nefyzikální stupně volnosti, ale pouze za cenu přítomnosti nekonečně mnoha skalárních vertexů. Přirozeně se navíc nabízí otázka, zdali je taková teorie vůbec renormalizovatelná. Odpověď je ano, neboť lze ukázat, že se jedná o limitní případ $\xi \rightarrow \infty$ širší třídy takzvaných R_ξ kalibrací [33]. Pro tuto třídu kalibrací lze dokázat jak renormalizovatelnost, tak nezávislost rozptylové S matice na parametru ξ [34].

Pracovat budeme s narušeným lagrangiánem v unitární kalibraci, s veškerými hmotnostními členy zahrnutými do volné části lagrangiánu. Přejděme navíc k takovým polím, pro která jsou příslušné matice hmotností diagonální. Poté máme pro nabitě hmotné vektorové pole, například W_μ^\pm , volný propagátor ve tvaru

$$\langle 0 | T W_\mu^- W_\nu^+ | 0 \rangle_{F.T} = i \frac{g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M_W^2}{p^2 - M_W^2} \quad (1.25)$$

a pro nenabitě hmotné vektorové pole, například Z_μ , obdobně

$$\langle 0 | T Z_\mu Z_\nu | 0 \rangle_{F.T} = i \frac{g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M_Z^2}{p^2 - M_Z^2}. \quad (1.26)$$

I po odkalibrování Goldstoneových bosonů máme stále v teorii nenarušenou lokální symetrii, které odpovídají nehmotné vektorové bosony. Tuto kalibrační symetrii je třeba fixovat dodatečně, například $U(1)_Q$ symetrii můžeme fixovat přidáním členu

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (1.27)$$

pro pole fotonu A_μ , s tím že propagátor tohoto pole je pak rovný

$$\langle 0 | T A_\mu A_\nu | 0 \rangle_{F.T} = -i \frac{g_{\mu\nu}}{p^2}. \quad (1.28)$$

Duchy odpovídající této fixaci kalibrace nemají žádný společný vertex s ostatními poli, tj. *decouplují* se a není potřeba je v poruchovém rozvoji uvažovat.

Na závěr uvedme, že v R_ξ kalibraci mají Goldstoneovy bosony ϕ_G propagátor rovný [3]

$$\langle 0|T\phi_G\phi_G|0\rangle_{F.T} = i\frac{1}{p^2 - \xi M}, \quad (1.29)$$

kde M je hmotnost příslušného vektorového bosonu, který v unitární kalibraci získá hmotnostní člen díky odkalibrování tohoto Goldstoneova módu.

2. Motivace k rozšíření Standardního modelu

V předchozí kapitole jsme viděli, že bez polí ν_c nejsme ve Standardním modelu schopni získat hmotnostní člen pro neutrino a popsat jejich oscilace, tj. přeměnu neutrino z jedné generace na neutrino z jiné. Jelikož tento jev v přírodě pozorujeme, Standardní model zřejmě nutně potřebuje rozšířit.

Tato kapitola slouží právě jako velmi stručná motivace pro rozšíření Standardního modelu. Provést tuto diskuzi v plném rozsahu přesahuje naše možnosti, omezíme se tak pouze na témata, která pro nás budou relevantní při diskuzi Pati-Salamova modelu, kterým se chceme v této práci zabývat.

Konkrétně nejprve okomentujeme oscilace neutrin a uvedeme základní experimentální důsledky pro jejich hmotnosti. Uvidíme, že alespoň dvě neutrino musí mít nenulovou extrémně nízkou hmotnost. Následně stručně popíšeme běh kalibračních vazeb a možnost jejich sjednocení na vysoké energetické škále. Díky tomu budeme schopni získat určitou představu, na jaké energetické škále by se mohla objevit nová, dosud neznámá fyzika. Poslední část věnujeme modelům s rozšířenou kalibrační grupou. Tyto modely jsou totiž schopné popsat sjednocení kalibračních vazeb Standardního modelu a navíc i přirozeně vysvětlit velmi malou hmotnost neutrin, jakožto důsledek spontánního narušení symetrie na vysoké energetické škále.

2.1 Hmotná neutrino a jejich oscilace

Již víme, že oscilace neutrin úzce souvisí s existencí jejich nenulové hmotnosti. Vztah hmotnosti neutrin a oscilací můžeme navíc demonstrovat na jednoduchém kvantově mechanickém modelu [24]. Pro jednoduchost uvažujme pouze dvě generace, respektive přesněji „vůně“, neutrin, kterým odpovídají ortonormální stavy $|\nu_{I=1,2}\rangle$. Vlastní stavy hmotnosti značíme $|\nu_{i=1,2}\rangle$. Tyto dvě ortonormální báze jsou spojeny unitární transformací

$$|\nu_I\rangle = U_{Ii} |\nu_i\rangle. \quad (2.1)$$

Při vhodné volbě fází uvedených stavů můžeme dokonce matici U uvažovat reálnou a psát

$$U := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Vlastní stavy hmotnosti se propagují dle rovnice

$$|\nu_i(t)\rangle = \exp(-iE_i t + ipx) |\nu_i(0)\rangle. \quad (2.3)$$

V ultra-relativistické limitě můžeme pro energie vlastních stavů hmotnosti psát

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx E + \frac{m_i^2}{2E}, \quad (2.4)$$

kde E je celková energie neutrina. Pokud budeme detekovat neutrina v $x = L$ a v čase $t = L$, můžeme psát

$$|\nu_i(L)\rangle \approx \exp\left(-i\frac{m_i^2}{2E}\right) |\nu_i(0)\rangle. \quad (2.5)$$

Pravděpodobnost změny vůně neutrina z $I = 1$ na $J = 2$ při energii E je dána

$$|\langle\nu_I(L) | \nu_J(0)\rangle|^2 = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{L\Delta m^2}{4E}\right), \quad (2.6)$$

kde jsme využili ortonormalitu obou zavedených bází a jejich vztah (2.1). Navíc jsme označili $\Delta m^2 := m_1^2 - m_2^2$. Měření oscilací neutrin tedy může poskytnout informaci o rozdílu kvadrátů jednotlivých hmotností. O absolutních velikostech jednotlivých hmotností oscilace neříkají nic.

Uveďme, jaké rozdíly kvadrátů hmotností neutrin díky oscilacím pozorujeme. Tyto oscilace jsme schopni pozorovat více nezávislými způsoby. Z historického hlediska sehrálo důležitou roli pozorování solárních neutrin. Při procesech probíhajících ve Slunci vzniká značné množství elektronových neutrin, které bychom v principu měli být schopni detekovat na Zemi. Díky oscilacím ale pozorujeme výrazný deficit těchto neutrin. Analýzou úbytku elektronových neutrin byla SNO observatoř schopna získat odhad rozdílu kvadrátů hmotností dvou vlastních stavů hmotnosti [6]

$$\Delta m_{21}^2 \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2. \quad (2.7)$$

Dále jsme například schopni detekovat neutrina, která vznikají v jaderných reaktorech. KamLAND detektor je sestaven tak, aby mohl detekovat elektronová neutrina. I v tomto experimentu byl pozorován úbytek elektronových neutrin oproti očekávání. Analýza dat dává výsledky konzistentní s pozorováním solárních neutrin [7].

Odlíšným pozorováním je detekce atmosferických neutrin. Atmosférická neutrina vznikají při rozpadech hadronů, pocházejících z kosmického záření, ve vyšších vrstvách atmosféry. Standardní model velmi přesně předpovídá, které typy reakcí, respektive rozpadů, by měly být dominantní. V důsledku můžeme předpovědět poměr jednotlivých typů neutrin, které detekujeme na Zemi. Pokud bychom uvažovali neoscilující neutrina, získáme spor mezi teorií a experimentem. Výsledky pořízené detektorem SuperKamiokande [5] jsou však konzistentní s oscilacemi mezi muonovým a tauonovým neutrinem. Stejným detektorem se podařilo sledovat úbytek muonových neutrin generovaných protonovým synchrotronem. V tomto experimentálním uspořádání máme zdroj neutrin zcela pod kontrolou, na rozdíl od předchozí metody. Výsledky měření byly použity odhadu rozdílu kvadrátů hmotností dalších dvou vlastních stavů hmotností [8]

$$|\Delta m_{31}^2| \approx 2.8 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2. \quad (2.8)$$

Všimněme si, že tato data stále neposkytují kompletní informaci o hierarchii hmotností $m_{1,2,3}$. Situaci $m_1 < m_2 < m_3$ nazýváme *normální hierarchií*, zatímco případ $m_2 < m_1 < m_3$ *invertovanou hierarchií*.

Tímto výčet metod a experimentů potvrzujících oscilaci neutrin zdaleka nekončí, pouze chceme poukázat na to, že máme k dispozici více odlíšných metod a uvést, v jakých řádech se pohybují rozdíly kvadrátů hmotností.

Pozorování oscilací nám stále nic neříká o absolutní škále, na které by se hmotnosti neutrin měly pohybovat. Tuto chybějící informaci může poskytnout pozorování kinematiky β rozpadu. Nejnovější výsledky experimentu KATRIN hlásí *efektivní hmotnostní škále* elektronového neutrina [9]

$$m_{\nu_e} < 1.1 \text{ eV}. \quad (2.9)$$

Jedná se, zjednodušeně řečeno, o vážený součet všech tří hmotností neutrin. Jednotlivé váhy jsou dané konkrétními prvky $PMNS$ matice, o které jsme se zmiňovali v 1.4. Přesnou definici této veličiny lze nalézt ve výše uvedené publikaci.

Úvahy založené na kosmologických modelech nám dávají dokonce výrazně přísnější omezení na velikosti hmotností. Například interpretace dat pocházejících z teleskopu Planck dokonce dává omezení na součet hmotností neutrin [35]

$$\sum m_i < 0.24 \text{ eV}. \quad (2.10)$$

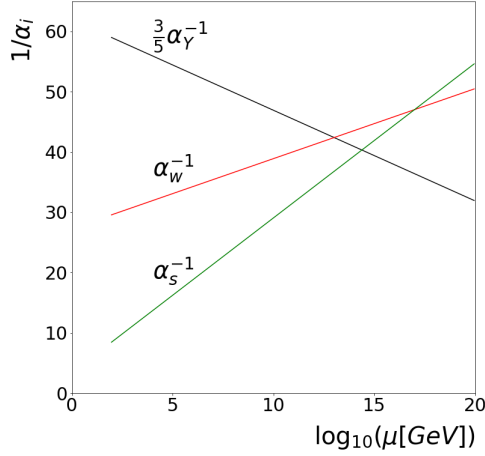
Přehled různých modelů a odpovídajících omezení na hmotnosti neutrin lze nalézt v [10]. Nevýhodou těchto odhadů je právě jejich závislost na konkrétním kosmologickém modelu, zatímco výsledky pocházející z β rozpadu využívají pouze kinematické úvahy.

Hmotnost neutrin by se tedy měla pohybovat maximálně v řádech desetin elektronvltu. To v kontextu Standardního modelu působí poněkud nepřírodně. Nejtěžší částicí Standardního modelu je *top* kvark s hmotností $m_t \approx 170 \text{ GeV}$, zatímco nejlehčí, kromě neutrin, je elektron s hmotností $m_e \approx 0.510 \text{ MeV}$ [36]. Hmotnosti všech známých hmotných částic se pohybují v rozmezí šesti řádů, zatímco hmotnosti neutrin by měly být alespoň o dalších šest řádů nižší než hmotnost elektronu. V principu to nepředstavuje žádný problém, pokud bychom detekovali pravotočivé neutrino, mohli bychom do Standardního modelu přidat hmotnostní člen (1.21) s tím, že by yukawovská matice Y'_{IJ} nabývala výrazně nižších hodnot než pro ostatní fermiony. Zároveň se ale můžeme pokusit najít takové rozšíření Standardního modelu, ve kterém by se malá hmotnost neutrin vysvětlila přirozenějším způsobem.

2.2 Běh kalibračních vazeb

Nenulová hmotnost neutrin je přímý důkaz, že minimální Standardní model potřebuje rozšíření. Můžeme předpokládat, že efekty tohoto rozšíření se výrazně projeví až na určité vysoké energetické škále. Běh kalibračních vazeb může sloužit jako nápověda, jak vysoká by tato škála mohla být. Zároveň slouží jako jedna z motivací k rozšíření kalibrační grupy, čemuž budeme věnovat část následující po této.

Parametry lagrangiánu renormalizovatelné poruchové kvantové teorie pole nejsou přímo pozorovatelné veličiny. Jejich hodnota závisí na volbě renormalizačního schématu, pro nalezení vztahu k fyzikálně měřitelným veličinám se běžně využívá tzv. Greenových funkcí [3, 37]. Součástí renormalizačního schématu je i volba určité energetické škály. Pokud požadujeme, aby poruchový rozvoj měl vhodné vlastnosti z hlediska konvergence, je běžné v řadě renormalizačních schémat tuto energetickou škálu volit přibližně na té hodnotě, na které uvažujeme



Obrázek 2.1: Běh kalibračních vazeb ve Standardním modelu.

konkrétní procesy. V důsledku pak i kalibrační vazby v lagrangiánu závisují na škále, na které teorii uvažujeme. Této závislosti se říká běh vazeb.

Pro závislost kalibrační vazby g_i , odpovídající grupě G_i , na škále μ lze odvodit rovnici [38],[39]

$$\begin{aligned} \mu \frac{dg_i}{d\mu} &= \frac{1}{16\pi^2} \left(-\frac{11}{3} T_2(Ad)(G_i) + \frac{2}{3} \sum_f T_2(R_f) + \frac{1}{3} \sum_s T_2(R_s) \right) g_i^3 + o(g^3) := \\ &:= \frac{1}{16\pi^2} b_i g_i^3 + o(g^3). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sčítáme přes multiplety spinorů f a multiplety komplexních skalárních polí s . $T_2(R)$ je index reprezentace R grupy G_i daný rovnicí

$$T_2(R)\delta^{ab} = \text{Tr} \left(T^a T^b \right), \quad (2.12)$$

kde T^a jsou generátory grupy v dané reprezentaci, s tím že $T_2(Ad)$ je tento index vyčíslený pro přidruženou reprezentaci grupy G_i . Toto přiblížení je navíc platné pouze tehdy, pokud sčítáme pouze přes ta pole, která mají hmotnost výrazně nižší než škála μ . Přejdeme k proměnným $t = \frac{1}{2\pi} \ln(\mu/\mu_0)$ a $\alpha_i^{-1} = (4\pi)/g_i^2$. Pak získáme rovnici

$$\frac{d}{dt} \alpha_i^{-1} = -b_i, \quad (2.13)$$

jejímž řešením je zřejmě přímka.

Ve Standardním modelu máme tři různé kalibrační vazby odpovídající grupám $SU(3)_{col}$, $SU(2)_L$ a $U(1)_Y$. Podívejme se na řešení (2.13) pro tyto vazby. Normalizaci $SU(n)$ grup volíme tak, aby pro fundamentální reprezentaci platilo $T_2(fun) = 1/2$. Pro přidruženou reprezentaci pak platí $T_2(Ad) = n$. Abelovská grupa $U(1)_Y$ je v tomto ohledu poněkud problematická, neboť není vůbec zřejmé, jaká je „přirozená“ normalizace jejího generátoru Y . Pokud jako generátor $U(1)_Y$

volíme právě Y , dostaneme

$$\begin{aligned} b_s &= -\frac{11}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 6 = -7, \\ b_w &= -\frac{11}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{19}{6}, \\ b_Y &= \frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{41}{6}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Označme navíc $\alpha_e^{-1} = (4\pi)/e^2$. S využitím (1.13) dostáváme

$$\begin{aligned} \alpha_s^{-1}(t) &= \alpha_s^{-1}(t_0) + 7(t - t_0), \\ \alpha_w^{-1}(t) &= \left(\sin^2 \theta_W \alpha_e^{-1}\right)(t_0) + \frac{19}{6}(t - t_0), \\ \alpha_Y^{-1}(t) &= \left((1 - \sin^2 \theta_W) \alpha_e^{-1}\right)(t_0) - \frac{41}{6}(t - t_0). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Počáteční podmínky určené experimentem jsou v renormalizačním schématu \overline{MS} rovny [36]

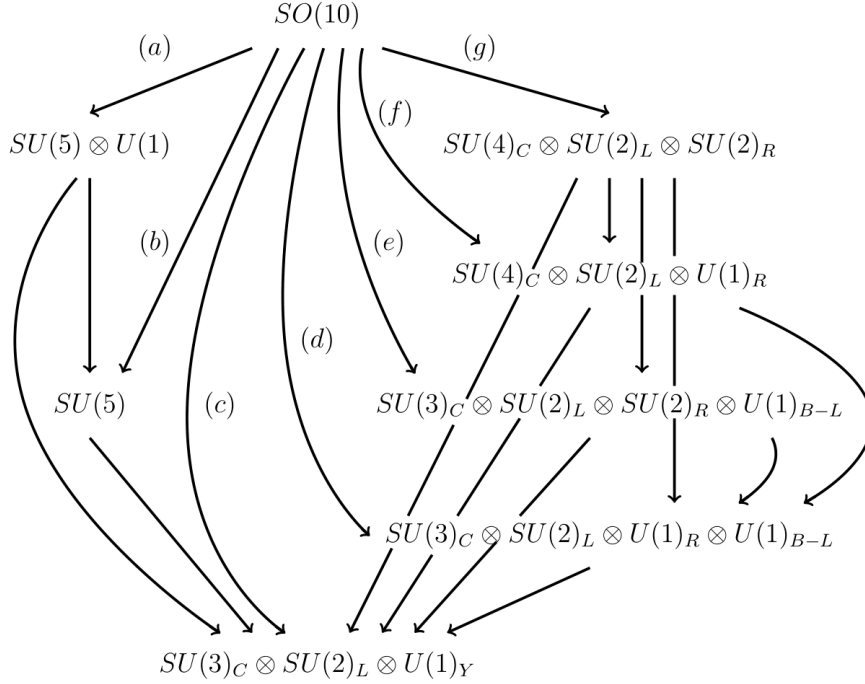
$$\begin{aligned} M_Z &\approx 91 \text{ GeV}, \\ \alpha_{g_s}(\mu = M_Z) &\approx 0.1184, \\ \alpha_e^{-1}(\mu = M_Z) &\approx 127.9, \\ \sin^2 \theta_W(\mu = M_Z) &\approx 0.2312. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Z hlediska některých rozšíření Standardního modelu je přirozené zvolit odlišnou normalizaci hypernáboje, a to $Y \rightarrow \sqrt{\frac{3}{5}}Y$ (všimněme si, že příspěvek fermionů do b je pak stejný pro všechny tři vazby). Na obrázku 2.1 můžeme vidět běh těchto tří vazeb.

Vidíme, že všechny tři přímky se sbíhají do oblasti okolo $10^{13} - 10^{16} \text{ GeV}$. To samo o sobě přirozeně nemusí znamenat vůbec nic. Nabízí se ale možnost sjednotit všechny tři kalibrační interakce do jedné. Rovnice (2.11) je totiž pouze přibližná, navíc do ní vstupují pouze pole s hmotností menší než škála μ . V úvahu tak přichází následující, byť čistě hypotetický, scénář. Běh vazeb se řídí dle rovnice (2.11) do chvíle, kdy se začnou uplatňovat vlivy hypotetických velmi těžkých polí, které jsme dosud neuvažovali. V důsledku se pak kalibrační vazby skutečně protnou v jednom bodě a následně se vyvíjejí jako jedna jediná. Odlišnost silné, slabé a elektromagnetické interakce by pak bylo možné chápat jako nízkoenergetický efekt na energiích nižších než přibližně 10^{16} GeV . Tento scénář by bylo možné přirozeně realizovat v kalibrační teorii s jednou jednoduchou grupou, která by obsahovala G_{SM} jako svojí podgrupu. Velmi těžká pole by se v této teorii objevily důsledkem spontánního narušení symetrie na vysoké energetické škále. Nad touto škálou bychom ale měli už jen pouze jednu kalibrační vazbu, jejíž běh by se opět řídil rovnicí (2.11).

2.3 Modely s rozšířenou kalibrační symetrií

Kdybychom uvažovali teorii s jednoduchou kalibrační grupou $G \supset G_{SM}$, měli bychom místo tří nezávislých kalibračních vazeb pouze jednu. Zároveň bychom se mohli na všechny tři fundamentální interakce (silná, slabá, elektromagnetická)



Obrázek 2.2: Řetězce spontánního narušení $SO(10)$ symetrie, převzato z [40].

Standardního modelu dívat jako na jednu jedinou. Mezi volnými parametry Standardního modelu bychom tak mohli nalézt netriviální vztahy. Například minimální $SU(5)$ model, jakožto nejjednodušší teorie založená na jednoduché kalibrační grupě [41], předpovídá na vysokých škálách (byť v rozporu s experimentem) hodnotu $\sin^2 \theta_W = 3/8$, zatímco ve Standardním modelu se jedná o volný parametr. Zobecněním teorie tedy naopak můžeme získat vazby na dosud nezávislé parametry a následně se pokusit takové předpovědi experimentálně ověřit.

Sjednocení kalibračních interakcí pomocí jedné jednoduché grupy nemusí být jediná motivace k rozšíření symetrie G_{SM} . Můžeme se například zaměřit na fakt, že Standardní model pracuje s levotočivými a pravotočivými komponentami bispinorů nesymetrickým způsobem, interakce s bosony W^\pm (1.9) dokonce paritu narušují maximálně. Stejně tak chování kvarků a leptonů je velmi odlišné. I v $SU(5)$ teorii máme určitou asymetrii mezi jednotlivými poli, některá se transformují podle pětirozměrné reprezentace, zatímco ostatní podle deseterozměrné. K rozšiřování kalibrační grupy Standardního modelu tak můžeme přistoupit zcela odlišným způsobem. Místo abychom se pokoušeli sjednotit jednotlivé fundamentální síly pomocí jednoduché kalibrační grupy, můžeme se pokoušet sjednotit popis jednotlivých částic, respektive hledat takové grupy, které by nám umožnily vložit pole fermionů do reprezentací symetrickým způsobem. Ideální variantou by bylo všech $15(+1)$ polí uspořádat do jedné jediné ireducibilní reprezentace.

Zkusme se vydat právě touto cestou. Vůči elektroslabé interakci se kvarky a leptony chovají téměř stejným způsobem - levotočivá pole (ve smyslu chiraloty, viz příloha A) fermionů tvoří $SU(2)_L$ dublet, zatímco pravotočivá (resp. levotočivá pole antifermionů) $SU(2)_L$ singlet. Rozdíl máme pouze v hodnotách slabého hypernáboje Y pro kvarky a leptony. Naopak z hlediska barevné interakce je situ-

ace značně odlišná, neboť leptony se vůči grupě $SU(3)_{col}$ netransformují. Jelikož máme stejně rodin kvarků i leptonů, nabízí se varianta rozšířit barevnou kalibrační grupu $SU(3)_{col}$, známou ze Standardního modelu, na $SU(4)$ a leptony chápat jako čtvrtou barvu kvarků. V tomto smyslu bychom měli sjednocené kvarky s leptony. Všimněme si, že v tomto modelu musíme nutně uvažovat přítomnost pole ν_c . Bez něj bychom totiž nebyli schopni rozšířit $SU(3)_{col}$ symetrii polí antikvarků na $SU(4)$ symetrii. Nápad chápat leptony jakožto čtvrtou barvu kvarků se poprvé objevil v [17], podle autorů třídu těchto modelů nazýváme Pati-Salamovy.

V tomto původním článku se navíc kromě $SU(2)_L$ grupy, kterou známe ze Standardního modelu, uvažuje kalibrační grupa obohacená o analogickou interakci polí antičástic. Kompletní kalibrační grupa je potom

$$G_{PS} := SU(4)_{col} \times SU(2)_R \times SU(2)_L. \quad (2.17)$$

Nejenom že získáme sjednocení kvarků s leptony, ale zároveň i získáme shodný popis pravotočivých a levotočivých komponent bispinorových polí. Pozorované narušení parity v přírodě takový model vysvětluje spontánním narušením symetrie.

Kalibrační teorie založená na $SO(10)$ grupě je sjednocením obou přístupů. Jedná se o jednoduchou grupu a všech šestnáct spinorových polí je uspořádáno v jediné šestnácti-rozměrné reprezentaci [42]. Zmíněné grupy $SU(5)$ a G_{PS} obsahuje $SO(10)$ jako svoje podgrupy. Teoreticky by se tedy $SO(10)$ symetrie mohla na vysoké energetické škále spontánně narušit na G_{PS} . Druhý krok narušení symetrie na G_{SM} by následně mohl probíhat na nižší škále. Řetězce spontánního narušení $SO(10)$ symetrie na symetrii Standardního modelu uvádíme pro ilustraci prostřednictvím diagramu 2.2.

V následující kapitole si ukážeme, že spontánním narušením symetrie na vysoké energetické škále dokážeme přirozeně získat velmi malou hmotnost neutrin. Výhod modelů s rozšířenou kalibrační symetrií je hned několik. Zmínili jsme možnost omezení volných parametrů Standardního modelu, vysvětlení různých asymetrií v přírodě pomocí spontánního narušení a přirozený popis malých hmotností neutrin. Nicméně tím výčet kladů těchto teorií nekončí. Na druhou stranu vše přichází za cenu předpokladu velmi těžkých skalárních částic zaručující narušení symetrie. Počet těchto částic navíc může být velmi velký.

Dále se musíme ptát, jaké nové procesy tyto teorie předpovídají a jestli je skutečně v přírodě pozorujeme. Typickou předpovědí těchto rozšíření Standardního modelu je rozpad protonu. Zatímco Standardní model zvláště zachovává baryonové a leptonové číslo, v případě $SO(10)$ a $SU(5)$ modelů tomu tak není. Současné experimentální limity na poločas rozpadu protonu pak mohou sloužit k omezení povolených hodnot konstant lagrangiánu. V těchto modelech dochází k narušení baryonového čísla skrz interakci s vektorovými a skalárními bosony. Jak uvidíme později, i v Pati-Salamově modelu může dojít k rozpadu protonu, avšak nikoli prostřednictvím vektorových bosonů, nýbrž skrz interakci s některými skalárními bosony.

Na závěr učiníme poznámku o tom, v jakém smyslu takovéto teorie s větší kalibrační grupou $G \supset G_{SM}$ reprodukuje výsledky Standardního modelu. Klíčem k odpovědi na tuto otázku je spontánní narušení symetrie. Předpokládejme, že teorie obsahuje vhodné skalární multiplety s nenulovou vakuovou střední hodnotou, pomocí kterých se symetrie G naruší na G_{SM} . Dále předpokládejme, že vakuová

střední hodnota těchto multipletů je velmi velká, pro jednoduchou grupu například právě 10^{16} GeV . Pokud si připomeneme, jakým způsobem vektorové bosony získávají hmotnost (viz 1.3), můžeme uvážit, že vektorové bosony odpovídající narušeným generátorům grupy G získají hmotnost úměrnou této velké vakuově střední hodnotě, stejně jako tomu je ve Standardním modelu s hmotnostmi bosonů (1.19). *Decoupling* teorém [43] nám pak ve své podstatě říká (velmi zjednodušeně řečeno), že vliv těchto velmi těžkých částic je možné pro účely studia fyziky na nízkých energetických škálách zanedbat. Jejich přítomnost pouze odpovídá změně hodnot parametrů v lagrangiánu, o kterých stejně víme, že nejsou fyzikální veličiny. Pokud tedy máme v teorii velmi těžké částice, je vhodnou nízkoenergetickou aproximací tyto částice zcela ignorovat. Nízkoenergetickou limitou kalibrační teorie s grupou G , která se na vysoké energetické škále spontánně narušuje na G_{SM} , je tím pádem skutečně Standardní model.

3. Seesaw mechanismus

Od potenciálního zobecnění Standardního modelu bychom chtěli, aby bylo schopné popsat malou hmotnost neutrin co nejpřirozenějším způsobem. Již několikrát jsme zmínili, že existuje možnost chápat nízkou hmotnost neutrin jako důsledek spontánního narušení kalibrační symetrie na vysokých energiích. V této kapitole si ukážeme některé způsoby, kterými lze tohoto dosáhnout.

Jedním z možných způsobů, jak popisovat neutrina, je pomocí majoranovských spinorových polí. Majoranovské pole slouží k popisu fermionů, které jsou zároveň svými antičásticemi. Zatímco pro diracovský hmotnostní člen je potřeba existence dvou různých dvoukomponentních spinorových polí, pro hmotnostní člen majoranovského pole si vystačíme pouze s jedním spinorem. Pokud by vlastními stavy hmotnosti neutrin byla skutečně majoranovská pole, nabízí se hned několik jednoduchých variant, jak přirozeně popsat jejich nízkou hmotnost - takzvané seesaw mechanismy.

Pro naši práci je nejzajímavější seesaw mechanismus I. typu. Jeho pointa spočívá v tom, že kromě pole ν uvažujeme i pole ν_c , což nám umožní zkonstruovat kromě diracovského hmotnostního členu i majoranovský člen pro pole ν_c . Pokud by tento majoranovský hmotnostní člen byl výrazně větší než člen diracovský, získáme přechodem k vlastním stavům hmotnosti tři velmi lehká neutrina a tři velmi těžká.

V této kapitole si podrobně zavedeme majoranovská pole a detailně rozebereme seesaw mechanismus I. typu. Pro úplnost krátce zmíníme i zbylé dva typy tohoto mechanismu. Na závěr si ukážeme Wittenův mechanismus. Ve své podstatě se jedná o seesaw mechanismus I. typu s tím rozdílem, že majoranovskou hmotnost nezískáme v lagrangiánu teorie přímo, nýbrž jako smyčkovou korekci.

3.1 Majoranovské pole

V této části budeme využívat značení a konvence shrnuté v příloze A. Majoranovské pole popisujeme pomocí spinorů, volným lagrangiánem majoranovského pole ξ je

$$\mathcal{L}_{maj}^{free} := \frac{1}{2} (\bar{\xi} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + \xi i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\xi}) - \frac{1}{2} M (\xi \xi + \bar{\xi} \bar{\xi}). \quad (3.1)$$

Z tohoto lagrangiánu můžeme nalézt pohybové rovnice

$$\begin{aligned} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi - M \bar{\xi} &= 0, \\ i \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\xi} - M \xi &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pokud označíme $E(\vec{p}) := \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$, lze řešení těchto volných pohybových rovnic psát ve tvaru

$$\xi = \sum_{s=\pm 1/2} \int \frac{d^3 p}{2E(\vec{p})^2 (2\pi)^4} \left(u_{p,s}^{maj} a_{p,s} e^{-ipx} + v_{p,s}^{maj} a_{p,s}^\dagger e^{ipx} \right), \quad (3.3)$$

kde a, a^\dagger jsou standardní anihilační a kreační fermionické operátory splňující antikomutační relace

$$\begin{aligned} \{a_{p,s}, a_{p',s'}^\dagger\} &= 2E(\vec{p}) (2\pi)^4 \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \\ \{a_{p,s}, a_{p',s'}\} &= \{a_{p,s}^\dagger, a_{p',s'}^\dagger\} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

a u^{maj}, v^{maj} jsou komutující dvoukomponentní spinory řešící algebraické rovnice

$$\begin{aligned} p_\mu \bar{\sigma}^\mu u_{p,s}^{maj} - M \bar{v}_{p,s}^{maj} &= 0, \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu v_{p,s}^{maj} + M \bar{u}_{p,s}^{maj} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Všimněme si, že hmotnostní člen jsme vytvořili pomocí jediného spinoru.

Porovnejme situaci s běžným diracovským bispinorem ψ . Ten můžeme rozepsat pomocí dvou spinorů jako

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

a následně psát pro volný lagrangián

$$\mathcal{L}_{dir}^{free} = \bar{\psi}_D i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_D - m \bar{\psi}_D \psi_D = \bar{\chi} i\sigma^\mu \partial_\mu \eta + \bar{\eta} i\sigma^\mu \partial_\mu \chi - m(\chi\eta + \bar{\chi}\bar{\eta}). \quad (3.7)$$

Řešení pohybových rovnic

$$\begin{aligned} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta - m\bar{\chi} &= 0, \\ i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\chi} - m\eta &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

respektive

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_D - m\psi_D = 0, \quad (3.9)$$

vyžaduje zavést dvě sady kreačních a anihilačních operátorů. Dostáváme

$$\psi_D = \sum_{s=\pm 1/2} \int \frac{d^3p}{2E(\vec{p})^2 (2\pi)^4} \left(u_{p,s}^{dir} a_{p,s} e^{-ipx} + v_{p,s}^{dir} b_{p,s}^\dagger e^{ipx} \right), \quad (3.10)$$

kde u^{dir}, v^{dir} jsou komutující bispinory řešící

$$\begin{aligned} (p_\mu \gamma^\mu - m) u_{p,s}^{dir} &= 0, \\ (p_\mu \gamma^\mu + m) v_{p,s}^{dir} &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Zatímco lagrangián (3.7) je $U(1)$ invariantní pro libovolný náboj pole ψ , v případě pole ξ v (3.1) tomu tak není. Majoranovské pole tak může popisovat pouze neutrální fermion. Lagrangián (3.7) sice můžeme vhodnou transformací převést na součet dvou majoranovských lagrangiánů, konkrétně

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left(\bar{\phi} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \phi + \phi i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\phi} \right) - \frac{1}{2} m \left(\phi\phi + \bar{\phi}\bar{\phi} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\bar{\theta} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \theta + \theta i\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\theta} \right) + \frac{1}{2} m \left(\theta\theta + \bar{\theta}\bar{\theta} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

kde spinory ϕ, θ jsou rovny

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi + \eta), \\ \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi - \eta), \end{aligned} \quad (3.13)$$

nicméně tato pole již nemají definovaný $U(1)$ náboj, vůči této grupě se transformují netriviálně. Pokud ale pracujeme s neutrálními spinory, není problém uvažovat obecný lagrangián ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\chi\eta} = & \begin{pmatrix} \bar{\chi} & \bar{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & 0 \\ 0 & i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} - \\ & -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \chi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_L & m \\ m & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} + h.c. \end{aligned} \quad (3.14)$$

K majoranovským polím s pevně danou hmotností přejdeme diagonalizací matice hmotností

$$\begin{pmatrix} M_L & m \\ m & M_R \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

3.2 Seesaw mechanismus I. typu

Nyní již víme, co máme na mysli majoranovským polem a jak vypadá majoranovský hmotnostní člen. Přejdeme tedy k diskusi seesaw mechanismu prvního typu [11, 12].

Předpokládejme, že do Standardního modelu skutečně přidáme i singlet ν_c . Nejenže jsme pak pomocí yukawovské interakce (1.20) schopni získat diracovský hmotnostní člen, ale zároveň můžeme přidat i majoranovský člen pro spinor ν_c , neboť se jistě jedná o kalibrační invariant. Pro volný lagrangián neutrin získáme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu^{free} = & \mathcal{L}_\nu^{kin.} - m_{IJ} (\bar{\nu}_c^I \bar{\nu}^J + \nu^I \nu_c^J) - \frac{M_{IJ}}{2} (\bar{\nu}_c^I \bar{\nu}_c^J + \nu_c^I \nu_c^J) = \\ = & \mathcal{L}_\nu^{kin.} - \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu^I & \nu_c^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_{IJ} \\ m_{JI} & M_{IJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu^J \\ \nu_c^J \end{pmatrix} + h.c. \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

kde jsme označili

$$m_{IJ} := \frac{v Y_{IJ}^\nu}{\sqrt{2}}. \quad (3.17)$$

K majoranovským polím přejdeme diagonalizací matice hmotností. Podívejme se, co by se stalo, kdyby matice hmotností M_{IJ} byla řádově mnohem větší než matice m_{IJ} . Pokusme se převést matici hmotností na blokově diagonální tvar. Potlačme indexy generací, označme

$$\mathcal{M} := \begin{pmatrix} 0 & m \\ m^T & M \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

a definujme matici

$$V := \begin{pmatrix} 1 & -mM^{-1} \\ M^{-\dagger}m^\dagger & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Nejen že od matice M chceme, aby byla výrazně větší než m , ale zároveň chceme, aby její inverze naopak byla velmi „malá“. Přesněji tedy můžeme požadovat, aby vlastní čísla matice M byly výrazně větší než vlastní čísla matice m . V tomto smyslu pak píšeme $M \gg m$.

Pro matici V platí

$$VV^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + O\left(\left\|\frac{m}{M}\right\|^2\right), \quad (3.20)$$

tudíž jí můžeme pro $M \gg m$ považovat za unitární. Použijme jí ke změně báze neutrin

$$V^* \begin{pmatrix} \nu \\ \nu_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu - (mM^{-1})^* \nu_c \\ \nu_c + (mM^{-1})^T \nu \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

čímž zároveň přejdeme k matici hmotností

$$\begin{aligned} V\mathcal{M}V^T &= \begin{pmatrix} -mM^{-1}m^T + m \cdot O\left(\left\|\frac{m}{M}\right\|^2\right) & 0 \\ 0 & M + m \cdot O\left(\left\|\frac{m}{M}\right\|\right) \end{pmatrix} \approx \\ &\approx \begin{pmatrix} -mM^{-1}m^T & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dokončením diagonalizace získáme tři velmi lehká majoranovská pole, která jsou dominována příspěvkem od ν , a tři velmi těžká pole s dominantním příspěvkem od ν_c . To ale vysvětluje, proč pozorujeme velmi lehká levotočivá neutrina. Tato konstrukce se nazývá seesaw mechanismem I. typu.

Ve Standardním modelu můžeme přidat majoranovský hmotnostní člen do lagrangiánu přímo, neboť pole ν_c je vůči G_{SM} singlet. V některých modelech s větší kalibrační grupou, než je G_{SM} , již ν_c singlet být nemusí. Tak tomu je například v tzv. flipované $SU(5) \times U(1)$ teorii a i v Pati-Salamově modelu. Majoranovský hmotnostní člen ale stále můžeme získat spontánním narušením symetrie. Zároveň tak můžeme odůvodnit, proč je matice M výrazně větší než matice m . Matice m vznikne spontánním narušením symetrie $G_{SM} \rightarrow SU(3)_{col} \times U(1)_Q$, její „přirozená“ velikost se tedy pohybuje okolo elektroslabé škály $v \approx 250 \text{ GeV}$ [36]. Naopak majoranovský hmotnostní člen vznikne spontánním narušením rozšířené kalibrační symetrie na symetrii Standardního modelu. Zároveň víme, že charakteristická škála takového spontánního narušení musí být výrazně větší než elektroslabá škála, jinak by model nezreprodukoval výsledky Standardního modelu dostatečně přesně 2.3. V modelech s jednoduchou kalibrační grupou, jako například $SO(10)$, dokonce očekáváme, že se tato škála bude pohybovat okolo 10^{16} GeV 2.2.

3.3 Seesaw mechanismus II. a III. typu

Pro úplnost si ukažme další dvě varianty seesaw mechanismu. Cílem je opět získat velmi malou majoranovskou hmotnost. Rozdíl spočívá v tom, že do teorie místo ν_c přidáme jiná pole.

Seesaw mechanismus II. typu [44] předpokládá existenci nového Higgsova skalárního $SU(2)_L$ tripletu $(1,3,1) = \Delta_\alpha^\beta$. Ten nám umožňuje získat novou yukawovskou interakci

$$\mathcal{L}_\Delta^{yuk} = y_{IJ}^\Delta L_\alpha^I \epsilon^{\alpha\beta} \Delta_\beta^\delta L_\delta^J + h.c. \quad (3.23)$$

Pole Δ_2^1 je nenabitě, tudíž může mít nenulovou vakuovou střední hodnotu v_Δ . V narušeném lagrangiánu získáme majoranovský hmotnostní člen

$$\mathcal{L}_{\nu\Delta} = y_{IJ}^\Delta v_\Delta \nu^I \nu^J. \quad (3.24)$$

Pokud by v_Δ bylo velmi malé, obdrželi bychom velmi malou hmotnost levotočivých neutrin ν . Zkusme využít spontánního narušení symetrie. Předpokládejme

obecný kalibračně invariantní skalární potenciál

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{h,\Delta} = & \frac{\lambda^2}{4} (h^\dagger h - v^2)^2 + M_\Delta^2 \text{Tr} (\Delta^\dagger \Delta) + \lambda_2 (\text{Tr} (\Delta^\dagger \Delta))^2 + \\ & + \lambda_3 \text{Tr} (\Delta^\dagger \Delta \Delta^\dagger \Delta) + (\mu h_\alpha \epsilon^{\alpha\beta} \Delta_\beta^\dagger{}^\gamma h_\gamma + h.c.). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Vakuové střední hodnoty $\langle \Delta_2^1 \rangle = v_\Delta$ a $\langle h_0 \rangle = v_H$ jsou dány minimem tohoto potenciálu. Zjistíme, že platí

$$v_\Delta \approx \frac{\mu v_H^2}{M_\Delta^2}. \quad (3.26)$$

Pokud je $M_\Delta^2 \gg \mu v_H$, dostáváme hmotnost neutrin na výrazně nižší škále než v_H , tedy na nižší škále než hmotnosti ostatních částic Standardního modelu.

V seesaw mechanismu I. typu jsme získali malé hmotnosti neutrin jako důsledek velké majoranovské hmotnosti ν_c . Velikost této hmotnosti jsme odůvodnili tím, že se jedná o důsledek spontánního narušení větší symetrie než G_{SM} na velké energetické škále. V seesaw mechanismu II. typu jsme místo velké majoranovské hmotnosti přidali do teorie těžký skalární $SU(2)_L$ triplet. Tento typ seesaw je v [44] diskutovaný v rámci kalibrační teorie s grupou $SU(3)_{col} \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$. V takové teorii obsahuje skalární potenciál oproti (3.25) větší množství multipletů, díky čemuž lze ukázat, že v_Δ je nepřímo úměrné škále μ_R , na které se spontánně naruší $SU(2)_R$. Malou hmotnost neutrin lze tedy v tomto kontextu interpretovat jako přímý důsledek spontánního narušení parity v přírodě.

Seesaw mechanismus III. typu spočívá v přidání dalších fermionů do teorie. Místo singletu ν_c , jak tomu bylo v seesaw I. typu, uvažujeme nový $SU(2)_L$ triplet se slabým hypernábojem rovným nule [45]. Značme jej například $T_\alpha{}^\beta = (1,3,0)$. V lagrangiánu se objeví nové členy

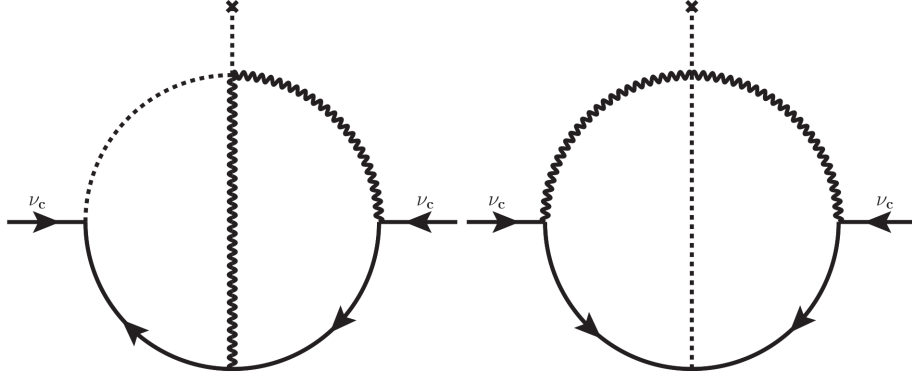
$$\mathcal{L}_{\nu,T} = y_T^{IJ} L_{I\alpha} \epsilon^{\alpha\beta} T_{J\beta}{}^\gamma h_\gamma + M_T^{IJ} T_{I\alpha}{}^\beta T_{J\beta}{}^\alpha + h.c. \quad (3.27)$$

Pro neutrina se tak v narušené fázi dostaneme do situace zcela analogické jako v (3.16), akorát roli pole ν_c přebírá neutrální komponenta tripletu T . Pro velmi vysoké M_T tak opět získáme velmi lehká neutrina, dominována příspěvkem pole ν .

3.4 Wittenův mechanismus

Některé modely s rozšířenou kalibrační symetrií vyžadují přítomnost pole ν_c . V tu chvíli bychom rádi lehká neutrina získali seesaw mechanismem I. typu. Pokud ν_c není vůči kompletní kalibrační grupě singlet, nemůžeme majoranovský hmotnostní člen přidat do lagrangiánu přímočaře, musíme využít spontánní narušení symetrie. Takový způsob typicky vyžaduje zavést do teorie další skalární multiplety, které by umožnily vytvořit vhodný kalibračně invariantní člen, jehož narušením by vznikla majoranovská hmotnost.

Nicméně ukazuje se, že získat majoranovský hmotnostní člen v lagrangiánu explicitně není zcela nutné. Víme přeci, že fyzikální hmota není rovna hmotnostním parametrům v lagrangiánu, nýbrž pólu v propagátoru příslušného pole. Póly propagátorů jsou v poruchové teorii ovlivněny Feynmanovými grafy obsahujícími



Obrázek 3.1: Typický Feynmannův graf generující majoranovskou hmotnost. Vnější skalární linie značí vakuové střední hodnoty v narušeném lagrangiánu.

smyčky. Můžeme se tedy pokusit do teorie přidat takový skalární multiplet, který by nám umožnil získat majoranovskou hmotnost jako smyčkovou korekci. Tento přístup je obzvláště zajímavý v případě, kdy je takový multiplet menší než multiplet nutný k získání majoranovské hmotnosti na stromové úrovni, neboť typicky chceme přednostně zkoumat *minimální* rozšíření současného modelu.

V [13] lze nalézt rozbor takové situace pro $SO(10)$ teorii, dle autora nazýváme tento mechanismus Wittenův. Otázka je, jestli je možné tento mechanismus využít i v jiných teoriích. Navíc nás přirozeně zajímá nejen samotná možnost sestavit příslušné smyčkové grafy, ale i jestli by taková teorie mohla být realistická.

Ihned se nabízejí kalibrační teorie, jejichž kalibrační symetrie je některá z podgrup $SO(10)$. Jednou z podgrup je $SU(5) \times U(1)$. Pro tuto teorii lze diskuzi Wittenova mechanismu nalézt v [14, 15]. Podgrupou $SO(10)$ je i grupa Pati-Salamova modelu $SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$. V [16] můžeme najít stručnou diskuzi Wittenova mechanismu pro supersymetrickou verzi tohoto modelu.

Diagramy 3.1 slouží jako ukázka dvousmyčkových korekcí k majoranovské hmotnosti neutrin. K jejich sestrojení potřebujeme yukawovskou interakci schopnou otočit směr fermionické linky. Příslušný skalární multiplet má nulovou vakuovou střední hodnotu, jinak bychom majoranovskou hmotnost mohli získat na stromové úrovni. Skalární multiplet s nenulovou vakuovou střední hodnotou potřebujeme k tomu, abychom byli schopni získat interakci dvou vektorových polí s jedním skalárním. Tyto dva skalární multiplety navíc musí mít nenulový vzájemný propagátor. Ten vznikne rozepsáním jejich vzájemných interakčních členů v narušené fázi, respektive následným přechodem k vlastním stavům hmotnosti. Interakční člen skaláru s vektorovými bosony by měl být úměrný škále spontánního narušení, je tedy šance, že takový smyčkový příspěvek k majoranovské hmotě bude velmi velký a to i přesto, že na stromové úrovni majoranovskou hmotnost nemáme.

V následující kapitole si podrobně rozebereme minimální Pati-Salamův model. Ukážeme jak zvolit co nejmenší skalární sektor, který by umožňoval správně popsat hmotnost kvarků a nabitých leptonů a zároveň umožňoval získat majoranovskou hmotnost neutrin jako smyčkovou korekci. V příloze B je pro úplnost podrobně ukázáno, jak vypadá propagátor majoranovského pole při započtení smyčkových korekcí a jak z něj získat hmotnosti lehkých neutrin.

4. Minimální Pati-Salamův model

Hlavním cílem této práce je diskutovat Wittenův mechanismus v některých variantách Pati-Salamova modelu. Za tímto účelem nejprve detailně probereme lagrangián teorie s kalibrační grupou

$$G_{PS} = SU(4)_{col} \times SU(2)_R \times SU(2)_L. \quad (4.1)$$

Ukážeme, jaké skalární multiplety je třeba v takové teorii uvažovat, abychom byli schopni popsat nízké hmotnosti neutrin. Konkrétně se pokusíme uvažovat co nejmenší možný počet skalárních částic, v tomto smyslu tedy tuto variantu nazýváme *minimální*. Předem poznamenejme, že detailní diskuze lagrangiánu minimální verze tohoto typu rozšíření Standardního modelu nám umožní snadno analyzovat Wittenův mechanismus i v některých odlišných variantách Pati-Salamova modelu.

4.1 Multiplety fermionů

Fermiony uspořádáme do multipletů obdobným způsobem jako v [17]. Jak jsme připomněli v 1.2, pole u_i a d_i tvoří ve Standardním modelu barevné triplety. V 2.3 jsme již zmiňovali, že Pati-Salamův model chápe leptony jako čtvrtou barvu kvarků a že pole antičástic se transformují vůči $SU(2)_R$ jako dublety. Fermiony tedy můžeme uspořádat do dvou multipletů

$$F := \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \nu \\ d_1 & d_2 & d_3 & e \end{pmatrix} = (4, 1, 2) = F_{\alpha i}, \quad (4.2)$$

$$F_c := \begin{pmatrix} u_c^1 & u_c^2 & u_c^3 & \nu_c \\ d_c^1 & d_c^2 & d_c^3 & e_c \end{pmatrix} = (\bar{4}, \bar{2}, 1) = F_c^{\bar{\alpha} i}, \quad (4.3)$$

kde čísla v závorkách udávají transformační vlastnosti vůči grupě G_{PS} . Maticové indexy α a i jsou $SU(2)_L$ a $SU(4)_{col}$ indexy. Pruhem odlišujeme $SU(2)_R$ index od $SU(2)_L$ indexu.

Zbylé dvě generace fermionů uspořádáme do multipletů naprosto shodným způsobem.

4.2 Skalární sektor

Připomeňme, co od minimálního skalárního sektoru očekáváme. V první řadě musí multiplety umožňovat spontánní narušení symetrie

$$G_{PS} \rightarrow G_{SM} \rightarrow SU(3)_{col} \times U(1)_Q.$$

Za druhé musíme v narušeném lagrangiánu získat takové hmotnostní členy kvarků a nabitých leptonů, které jsou konzistentní se Standardním modelem. To obnáší správné hodnoty hmotnostní a parametrů CKM matice (1.24). Posledním požadavkem je existence yukawovské interakce, která narušuje fermionové číslo. Pokud tato interakce nedokáže generovat majoranovský hmotnostní člen pole ν_c na stro-mové úrovni, využijeme jí alespoň ke konstrukci smyčkové korekce typu 3.1.

4.2.1 Spontánní narušení symetrie

Nejprve identifikujeme generátor slabého hypernáboje Y a elektromagnetického náboje Q . Všimněme si, že matice

$$T_{B-L} := \text{diag}(1/3, 1/3, 1/3, -1) \quad (4.4)$$

je jeden z generátorů $SU(4)_{col}$ grupy. Působením na multiplety (4.2),(4.3) zjistíme, že jedná o číslo $B - L$, kde B je baryonové číslo a L leptonové. Generátory Y a Q následně můžeme vyjádřit jako

$$Q = T_L^3 + T_R^3 + \frac{B - L}{2}, \quad (4.5)$$

$$Y = T_R^3 + \frac{B - L}{2}. \quad (4.6)$$

V prvním kroku chceme narušit jak $SU(4)_{col}$, tak $SU(2)_R$ invarianci. K tomu potřebujeme multiplet, který se vůči těmto dvěma grupám nechová jako singlet. Dvojice multipletů $(4, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ nepřichází v úvahu, neboť dle (4.5) tyto varianty neobsahují žádné neutrální pole. Druhou nejmenší variantou je

$$H = (4, 2, 1) := \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & \phi_0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & \phi_1 \end{pmatrix} = H_{\bar{\alpha}i}. \quad (4.7)$$

Z předchozích rovnic (4.5),(4.6) vidíme, že jediné pole s nenulovou vakuovou střední hodnotou může být ϕ_0 . V takovém případě zůstane z původní $SU(4) \times SU(2)_R$ invariance zachována pouze podgrupa $SU(3) \times U(1)_Y$, což je přesně naším cílem.

Ve druhém kroku chceme symetrii $SU(2)_L \times U(1)_Y$ narušit na $U(1)_Q$. Multiplet, který toto narušení zaručí, zřejmě nemůže být singlet vůči $SU(2)_L$. Nejmenší varianta $(1, 1, 2)$ nepřichází v úvahu, neboť oba prvky takového dubletu jsou dle rovnice (4.5) elektricky nabitě. Mohli bychom zkoumat variantu $(1, 1, 3)$, nicméně rozhodněme se raději pro multiplet

$$h = (1, 2, \bar{2}) := \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ h_{-1} & \tilde{h}_0 \end{pmatrix} = h_{\bar{\alpha}}^{\alpha}, \quad (4.8)$$

neboť jej budeme potřebovat pro získání diracovských hmotnostních členů, jak uvidíme v další sekci. Působením generátorem (4.5) zjistíme, že nenulovou střední hodnotu mohou mít pouze diagonální prvky. Tím skutečně narušíme $SU(2)_L$ symetrii, zatímco $U(1)_Q$ symetrie zůstane zachována.

Vakuové střední hodnoty polí označme například

$$\begin{aligned} \langle \phi_0 \rangle &:= V, \\ \langle h_0 \rangle &:= v_{1h}, \\ \langle \tilde{h}_0 \rangle &:= v_{2h}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.2.2 Diracovské hmotnosti fermionů

Ze Standardního modelu jsme již poučeni, že účelem skalárních multipletů není pouze spontánně narušit symetrii, ale především v důsledku generovat hmotnostní členy fermionů. Ty se v lagrangiánu objeví prostřednictvím yukawovské

interakce se skaláry, které mají nenulovou vakuovou střední hodnotu. Předběh-
něme tedy o kousek dopředu a zaměříme se na yukawovské interakce fermionů,
které mohou mít za následek diracovský hmotnostní člen.

Takový člen musí obsahovat jak multiplet $F_c^{\bar{\alpha}i}$, tak multiplet $F_{\alpha i}$. Z hlediska
grup tím pádem přicházejí v úvahu pouze skalární reprezentace

$$(\bar{4}, 1, \bar{2}) \otimes (4, 2, 1) = (\bar{4} \otimes 4, 2, \bar{2}) = (1, 2, \bar{2}) \oplus (15, 2, \bar{2}). \quad (4.10)$$

Multiplet $(1, 2, \bar{2})$ již uvažujeme za účelem spontánního narušení symetrie. Podí-
vejme se, jaké generuje hmotnostní členy fermionů.

Jedinými způsoby, jak indexy reprezentací zúžit do invariantu jsou

$$y_{1h}^{IJ} F_I F_{Jc} h = y_{1h}^{IJ} F_{I\alpha i} F_{Jc}^{\bar{\alpha}i} h_{\bar{\alpha}}^{\alpha}, \quad (4.11)$$

$$y_{2h}^{IJ} F_I F_{Jc} h^* = y_{2h}^{IJ} F_{I\alpha i} F_{Jc}^{\bar{\alpha}i} h^{*\bar{\beta}}_{\beta} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}, \quad (4.12)$$

kde I, J jsou indexy odlišující jednotlivé generace a $y_{1,2h}^{IJ}$ jsou obecné komplexní
matice yukawovských konstant. Rozepsáním do složek získáme v narušeném la-
grangiánu diracovské hmotnostní členy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass}^{ferm.} = & \left(y_{1h}^{IJ} v_{1h} + y_{2h}^{IJ} v_{2h} \right) \left(u_{Ii} u_{cJ}^i + \nu_I \nu_{cJ} \right) + \\ & + \left(y_{1h}^{IJ} v_{2h} + y_{2h}^{IJ} v_{1h} \right) \left(d_{Ii} d_{cJ}^i + e_I e_{cJ} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

To by ovšem znamenalo rovnost pro diracovské hmotnosti

$$m_e^{IJ} = m_d^{IJ}, \quad (4.14)$$

$$m_\nu^{IJ} = m_u^{IJ}. \quad (4.15)$$

Druhá z těchto rovnic nám ve skutečnosti nevádí, neboť malou hmotnost neutrin
chceme získat až pomocí Wittenova mechanismu. První z těchto rovnic se ale
chceme v realistickém modelu vyvarovat.

Do Higgsova sektoru tak přidáme i druhý přípustný multiplet

$$\Phi = (15, 2, \bar{2}) = \Phi^{\alpha i}_{\bar{\alpha} j}, \quad (4.16)$$

který nám umožní do lagrangiánu přidat interakce

$$y_{1\Phi}^{IJ} F_I F_{Jc} \Phi = y_{1\Phi}^{IJ} F_{I\alpha i} F_{Jc}^{\bar{\alpha} j} \Phi^{\alpha i}_{\bar{\alpha} j}, \quad (4.17)$$

$$y_{2\Phi}^{IJ} F_I F_{Jc} \Phi^* = y_{2\Phi}^{IJ} F_{I\alpha i} F_{Jc}^{\bar{\alpha} j} \Phi^{*\bar{\beta} i}_{\beta j} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}, \quad (4.18)$$

Patnáctidimenzionální reprezentaci $SU(4)_{col}$ můžeme chápat jako matici 4×4
s nulovou stopou, multiplet Φ pak jako čtyři takovéto matice. Nenulovou střední
hodnotu mohou mít pouze prvky, pro které platí $\alpha = \bar{\alpha}$ a zároveň $i = j$. O tom se
opět můžeme přesvědčit zapůsobením generátorem elektromagnetického náboje
(4.5). Vakuové střední hodnoty navíc nesmí narušit $SU(3)_{col}$ symetrii. Označme

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{1i}_{\bar{1}i} \rangle & := v_{1\Phi}, \\ \langle \Phi^{2i}_{\bar{2}i} \rangle & := v_{2\Phi}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Index i běží od 1 do 3 a nesčítáme přes něj. Nulovost stopy implikuje

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{14}_{\bar{1}4} \rangle & = -3v_{1\Phi}, \\ \langle \Phi^{24}_{\bar{2}4} \rangle & = -3v_{2\Phi}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Právě rovnost vakuových středních hodnot pro $i = 1,2,3$ nám zaručí zachování $SU(3)_{col}$ symetrie.

Pokud tedy kromě interakcí (4.11),(4.12) uvážíme i (4.17),(4.18), získáme diracovské hmotnostní členy

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (y_{1h}v_{1h} + y_{2h}v_{2h} + y_{1\Phi}v_{1\Phi} + y_{2\Phi}v_{2\Phi}) uu_c + \\ & + (y_{1h}v_{1h} + y_{2h}v_{2h} - 3y_{1\Phi}v_{1\Phi} - 3y_{2\Phi}v_{2\Phi}) \nu\nu_c + \\ & + (y_{1h}v_{2h} + y_{2h}v_{1h} + y_{1\Phi}v_{2\Phi} + y_{2\Phi}v_{1\Phi}) dd_c + \\ & + (y_{1h}v_{2h} + y_{2h}v_{1h} - 3y_{1\Phi}v_{2\Phi} - 3y_{2\Phi}v_{1\Phi}) ee_c, \end{aligned} \quad (4.21)$$

respektive

$$m_e = y_{1h}v_{2h} + y_{2h}v_{1h} - 3y_{1\Phi}v_{2\Phi} - 3y_{2\Phi}v_{1\Phi}, \quad (4.22)$$

$$m_d = y_{1h}v_{2h} + y_{2h}v_{1h} + y_{1\Phi}v_{2\Phi} + y_{2\Phi}v_{1\Phi}, \quad (4.23)$$

$$m_u = y_{1h}v_{1h} + y_{2h}v_{2h} + y_{1\Phi}v_{1\Phi} + y_{2\Phi}v_{2\Phi}, \quad (4.24)$$

$$m_\nu = y_{1h}v_{1h} + y_{2h}v_{2h} - 3y_{1\Phi}v_{1\Phi} - 3y_{2\Phi}v_{2\Phi}. \quad (4.25)$$

Pro získání správných hmotnostní nabitých fermionů máme k dispozici čtyři nezávislé yukawovské matice. Další volnost navíc máme ve vakuových středních hodnotách. Teoreticky máme dostatečně volných parametrů, abychom dokonce obdrželi dostatečně nízkou diracovskou hmotnostní matici pro neutrina a považovali je za diracovské částice namísto majoranovských. Jelikož ale můžeme psát

$$m_u = m_a + m_b, \quad (4.26)$$

$$m_\nu = m_a - 3m_b, \quad (4.27)$$

kde $m_a = y_{1h}v_{2h} + y_{2h}v_{1h}$ a $m_b = y_{1\Phi}v_{2\Phi} + y_{2\Phi}v_{1\Phi}$, přirozená škála diracovské hmotnostní matice je stejná jako škála hmotnostní matice horních kvarků. Pokud se chceme vyhnout extrémně jemnému ladění jednotlivých volných parametrů (tzv. *fine-tuning*), nejsme schopni získat matici neutrin na správné energetické škále. Z tohoto důvodu stále chceme do teorie zakomponovat seesaw mechanismus, který nám zaručí malé hmotnosti neutrin přirozeným způsobem.

4.2.3 Majoranovská hmotnost neutrin

V předchozí části se nám podařilo získat správné hmotnosti kvarků a nabitých leptonů. Diracovská hmotnost neutrin se stále pohybuje okolo elektroslabé škály. Rádi bychom aplikovali seesaw mechanismus I. typu, abychom získali lehká neutrina. Do teorie chceme přirozeně přidat co nejméně dalších částic. Pokud bychom chtěli majoranovský hmotnostní člen polí ν_c obdržet pomocí spontánního narušení kalibrační symetrie, museli bychom sestrojít yukawovskou kalibračně invariantní interakci skalárního multipletu s dvěma kopiemi multipletu F_c . V úvahu by tím pádem přicházely pouze skalární multiplety

$$(4,2,1) \otimes (4,2,1) = (6 \oplus 10, 1 \oplus 3, 1). \quad (4.28)$$

Nejmenší z těchto reprezentací je

$$D = (6,1,1) = D_{ij} = -D_{ji} \quad (4.29)$$

s tím, že můžeme sestrojít dvě různé yukawovské interakce s dvojicí multiplétů F_c , konkrétně

$$y_1^{IJ} F_{cI} F_{cJ} D = y_1^{IJ} \epsilon_{\bar{\beta}\alpha} F_{cI}^{\bar{\alpha}i} F_{cJ}^{\bar{\beta}j} D_{ij}, \quad (4.30)$$

$$y_2^{IJ} F_{cI} F_{cJ} D^* = y_2^{IJ} \epsilon_{ijkl} \epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} F_{cI}^{\bar{\alpha}i} F_{cJ}^{\bar{\beta}j} D^{*kl}. \quad (4.31)$$

Ze symetrie indexů vidíme, že matice $y_{1,2}$ jsou symetrické.

Nicméně vakuová střední hodnota prvků multiplétu D musí být nulová, neboť všechny mají dle rovnice (4.5) nenulový náboj. V tuto chvíli vstupuje do hry Wittenův mechanismus. Pokud totiž multiplét D nestačí na to, abychom získali majoranovský hmotnostní člen na stromové úrovni, můžeme se ho alespoň pokusit získat jako radiační korekci. Interakce (4.30) jsou ty, které v grafu 3.1 zaručí změnu směru fermionové linie. Navíc jistě není problém sestrojít kalibračně invariantní interakci D a H , která nám v 3.1 zaručuje nenulovost skalárního propagátoru. Pochopitelně není zřejmé, jestli jsme tímto postupem schopni získat realistické hmotnosti neutrin. Tomu se budeme věnovat v příští kapitole.

4.3 Pole vektorových bosonů

V této sekci zavedeme značení pro vektorové bosony, určíme které z nich získají hmotnost a zjistíme, jak se transformují vůči určitým podgrupám G_{PS} .

Bosony odpovídající grupám $SU(2)_{L/R}$ označíme nápodobně jako ve Standardním modelu (1.9). Pišme

$$W_{L/R\mu} = \frac{1}{2} W_{L/R\mu}^a \sigma^a := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} W_{L/R\mu}^0 & \frac{1}{\sqrt{2}} W_{L/R\mu}^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} W_{L/R\mu}^- & -\frac{1}{2} W_{L/R\mu}^0 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Patnáct generátorů grupy $SU(4)_{col}$ označíme T_4^a , odpovídající bosony V^a . Normalizaci opět volíme $\text{Tr}(T_4^a T_4^b) = \delta^{ab}/2$. Generátory podgrupy $SU(3)_{col}$ zvolme tak, aby platilo

$$V_\mu = V_\mu^a T_4^a = \begin{pmatrix} G_\mu + I_3 \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8}} B_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{X}_\mu^+ \right)^T \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{X}_\mu^- \right) & -\sqrt{\frac{3}{8}} B_\mu \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

kde G_μ je matice gluonů (1.7), I_3 je jednotková 3×3 matice, B_μ je vektorové pole odpovídající (správně normalizovanému) generátoru (4.4) a nabitá vektorová pole X_μ odpovídají ostatním generátorům $SU(4)_{col}$ grupy.

Pole $G_\mu, W_{L\mu}$ známe ze Standardního modelu. Transformují se vůči přidružené reprezentaci $SU(3)_{col}$, resp. $SU(2)_L$, nenesou baryonové ani leptonové číslo a jedinými nabitými poli jsou $W_{L\mu}^\pm$. Pole $W_{R\mu}$ mají naprosto stejné vlastnosti jako $W_{L\mu}$, jediným rozdílem je, že se transformují vůči $SU(2)_R$.

Snadno nahlédneme, že pole B_μ se vůči grupě Standardního modelu G_{SM} netransformuje. V tomto ohledu jsou bosony X_μ podstatně zajímavější. V první řadě si můžeme všimnout, že trojice $X_{i\mu}^+$ tvoří $SU(3)_{col}$ triplet. Zvláštností těchto bosonů je, že mají nenulové baryonové i leptonové číslo. Konkrétně mají

$$B(X) = 1/3, \quad L(X) = -1, \quad (4.34)$$

tím pádem mají v souladu s relací (4.5) náboj rovný

$$Q(X) = 2/3. \quad (4.35)$$

Trojici polí X_{μ}^{i-} získáme pouhým hermitovským sdružením.

V prvním kroku spontánního narušení se grupa symetrií $SU(4)_{col} \times SU(2)_R$ zmenší na $SU(3)_{col} \times U(1)_Y$. Z těchto $15 + 3 = 18$ bosonů musí, v souladu s diskuzí 1.3, 9 získat hmotnost a 9 zůstat nehmotných. Jelikož $SU(3)_{col}$ symetrie zůstává nenarušená, všech osm gluonů musí získat nehmotných. Zároveň zůstává zachována $U(1)_Y$ symetrie, dle rovnice (4.6) tak kombinací neutrálních polí $B_{\mu}, W_{R\mu}^0$ získáme jedno pole nehmotné a jedno hmotné. Triplet nabitých polí X též musí získat hmotnost. Při spontánním narušení $G_{PS} \rightarrow G_{SM}$ zůstane $21 - 12 = 9$ bosonů nehmotných. Osm těchto bosonů tvoří gluony, poslední nehmotné pole musí být dáno kombinací B, W_R^0 a W_L^0 .

Shrňme tedy transformační vlastnosti bosonů V_{μ} . Platí

$$\vec{X}^+ = (3, 1, 2/3)_{SM} = (1/3, -1, 2/3)_{B, L, Q}, \quad (4.36)$$

$$\vec{X}^- = (\bar{3}, 1, -2/3)_{SM} = (-1/3, 1, -2/3)_{B, L, Q}, \quad (4.37)$$

$$G = (8, 1, 0)_{SM} = (0, 0, 0)_{B, L, Q}, \quad (4.38)$$

$$B = (1, 1, 0)_{SM} = (0, 0, 0)_{B, L, Q}. \quad (4.39)$$

Očekáváme, že pole X^{\pm}, W_R^{\pm} získají hmotnost úměrnou škále V , zatímco W_L^{\pm} získají hmotnost úměrnou elektroslabé škále. Ve spektru trojice neutrálních polí B, W_R^0, W_L^0 se objeví dva hmotné bosony a jeden nehmotný. Nehmotným bosonem je foton, zatímco jeden z hmotných bosonů lze identifikovat jako intermediální boson Z , známý ze Standardního modelu. Druhý hmotný boson má hmotnost úměrnou škále V . K hmotnostnímu spektru vektorových bosonů se vrátíme v následující sekci, konkrétně v části 4.4.2.

4.4 Lagrangián modelu

V tuto chvíli máme kompletně specifikováno, jaká pole teorie obsahuje a jak se transformují vůči kalibrační grupě. Lagrangián teorie získáme tak, že ve volném lagrangiánu těchto polí zaměníme parciální derivaci za kovariantní a následně přidáme obecný kalibračně invariantní skalární potenciál a yukawovské interakce.

Tato procedura je ve své podstatě přímočará. V této sekci si tak ukážeme pouze ty interakce, které budeme přímo potřebovat v této práci. Zároveň si i ukážeme, jak vypadají hmotnosti vektorových bosonů a některých skalárních částic.

4.4.1 Interakce polí s vektorovými bosony

Interakce polí s vektorovými bosony je určena kovariantní derivací. Naším cílem bude identifikovat interakce vstupující do smyčkových grafů Wittenova mechanismu a určit hmotnostní spektrum vektorových bosonů.

Kalibrační vazba odpovídající $SU(4)_{col}$ grupě musí být shodná s vazbou odpovídající $SU(3)_{col}$ grupě ve Standardním modelu, jinak bychom zřejmě nezískali správné interakce gluonů s kvarky. Značme jí tedy g_s . Vazby odpovídající grupám $SU(2)_{L/R}$ budeme značit $g_{L/R}$.

Pro interakci s fermiony obdržíme

$$\mathcal{L} \ni \bar{F}^{\alpha i} \gamma^\mu \left(g_L W_{L\alpha}{}^\beta \delta_i^j + g_s V_i^j \delta_\alpha^\beta \right) F_{\beta j} - \bar{F}_{c\bar{\alpha}i} \gamma^\mu \left(g_R W_{R\bar{\beta}}{}^{\bar{\alpha}} \delta_j^i + g_s V_j^i \delta_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \right) F_c^{\bar{\beta}j}. \quad (4.40)$$

Hmotnostní členy vektorových polí získáme z interakcí typu *skalár-skalár-vektor-vektor* záměnou skalárních polí za jejich vakuovou střední hodnotu, tedy narušením interakčních členů

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ni & -\text{Tr} \left(g_R W_{R\bar{\alpha}}{}^{\bar{\beta}} H_{\bar{\beta}i} + g_s V_i^j H_{\bar{\alpha}j} \right)^2 - \\ & -\text{Tr} \left(g_R W_{R\bar{\alpha}}{}^{\bar{\beta}} h_{\bar{\beta}}{}^\alpha - g_L W_{L\beta}{}^\alpha h_{\bar{\alpha}}{}^\beta \right)^2 - \\ & -\text{Tr} \left(g_R W_{R\bar{\alpha}}{}^{\bar{\beta}} \Phi^{\beta i}{}_{\bar{\beta}j} - g_L W_{L\beta}{}^\alpha \Phi^{\beta i}{}_{\bar{\alpha}j} + g_s V_j^k \Phi^{\alpha i}{}_{\bar{\alpha}k} - g_s V_k^i \Phi^{\alpha k}{}_{\bar{\alpha}j} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Pro zkrácení zápisu myslíme stopou a umocněním na druhou násobení komplexně sdruženým výrazem a následné sčítání přes všechny indexy, například $\text{Tr}(H_{\bar{\alpha}i})^2 = H_{\bar{\alpha}i} H^{*\bar{\alpha}i}$ a podobně. Zároveň se jedná o interakce vstupující do Wittenova mechanismu. Rozdíl je pouze v tom, že záměnu skalárního multipletu za jeho vakuovou hodnotu provedeme pouze jednou, nikoli dvakrát. Interakce polí D_{ij} s vektorovými bosony neuvádíme, neboť pro ně nebudeme mít využití.

4.4.2 Hmotnostní lagrangián vektorových bosonů

Hmotnostní členy vektorových polí nalezneme rozepsáním interakčních členů (4.41) v narušené fázi. Začneme nejdříve první fází spontánního narušení, totiž členem obsahujícím H . Připomeňme, že v tomto multipletu je jediné pole s nenulovou vakuovou střední hodnotou ϕ_0 (4.7) a značíme jí V (4.9). Dostáváme hmotnostní členy

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ni & -\frac{g_R^2 V^2}{2} W_R^+ W_R^- - \frac{g_s^2 V^2}{2} X_i^- X^{i+} - \\ & -V^2 \begin{pmatrix} B & W_R^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{8} g_s^2 & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8}} g_R g_s \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8}} g_R g_s & \frac{1}{4} g_R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ W_R^0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Dle očekávání gluony zůstanou v tomto kroku nehmotné, zatímco jistou lineární kombinací B a W_R^0 získáme další nehmotné pole. Pole W_R^\pm a X_μ získávají hmotnostní členy úměrné V^2 . Jelikož tyto částice ve Standardním modelu nepozorujeme, musí dle decoupling teorému [43] být V skutečně výrazně větší než elektroslabá škála.

Diagonalizujme matici v (4.42). Konkrétně provedme přechod

$$B = \frac{1}{\sqrt{2g_R^2 + 3g_s^2}} \left(\sqrt{3g_s^2} B_H + \sqrt{2g_R^2} B_Y \right), \quad (4.43)$$

$$W_R^0 = \frac{1}{\sqrt{2g_R^2 + 3g_s^2}} \left(\sqrt{3g_s^2} B_H - \sqrt{2g_R^2} B_Y \right), \quad (4.44)$$

čímž lagrangián (4.42) přejde na

$$\mathcal{L}_H^{mass} = -\frac{g_R^2 V^2}{2} W_R^+ W_R^- - \frac{g_s^2 V^2}{2} X_i^- X^{i+} - \frac{1}{2} V^2 \frac{3g_s^2 + 2g_R^2}{4} B_H B_H. \quad (4.45)$$

Z interakcí (4.40) zjistíme, že interakci bosonu B_Y můžeme psát ve tvaru

$$\mathcal{L}_{B_Y} = \sum_f \sqrt{\frac{3g_s^2 g_R^2}{2g_R^2 + 3g_s^2}} Y_f \bar{f} \gamma f B_Y, \quad (4.46)$$

kde sčítáme přes všechna pole spinorů. Porovnáním s (1.10) dojdeme k rovnici

$$g^2 = \frac{3g_s^2 g_R^2}{3g_s^2 + 2g_R^2}. \quad (4.47)$$

Vazbu g_R tak dokážeme vyjádřit pomocí kalibračních vazeb Standardního modelu.

Pole W_L^\pm získají hmotnostní členy v narušené fázi rozpisem interakcí s multiplety h a Φ . Odsud plyne, že konstanty $v_{h,\Phi}$ se musí pohybovat na elektroslabé škále, neboť hmotnosti W_L^\pm jim jsou úměrné, a potřebujeme zreprodukovat vztahy (1.19). To nám velmi zjednoduší výpočty. Pro ilustraci se nejprve zaměříme na členy generované interakcí s h . Pro hmotnostní členy dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ni & -\frac{1}{4} (v_{1h}^2 + v_{2h}^2) \begin{pmatrix} W_R^0 & W_L^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_R^2 & -g_R g_L \\ -g_R g_L & g_L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_R^0 \\ W_L^0 \end{pmatrix} - \\ & -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_R^- & W_L^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_R^2 (v_{1h}^2 + v_{2h}^2) & -g_L g_R v_{1h} v_{2h} \\ -g_L g_R v_{1h} v_{2h} & g_L^2 (v_{1h}^2 + v_{2h}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_R^+ \\ W_L^+ \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Máme tedy příspěvek do matice hmotností nabitých polí $W_{L/R}$

$$M_{L/R}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_R^2 (V^2 + v_{1h}^2 + v_{2h}^2) & -g_L g_R v_{1h} v_{2h} \\ -g_L g_R v_{1h} v_{2h} & g_L^2 (v_{1h}^2 + v_{2h}^2) \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Členy řádu $O(v/V)$ ale musí být velmi malé, rozhodně se je tedy zanedbat. Všimněme si, že se prakticky jedná o stejnou situaci jako v seesaw mechanismu I. typu (viz 3.2) - vrchní blok matice je dominantní vůči ostatním prvkům. Zde je navíc situace jednodušší v tom, že se jedná pouze o matici 2×2 . Diagonalizací této matice snadno nalezneme

$$\begin{aligned} (M_{L/R}^2)_D & \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_R^2 (V^2 + v_{1h}^2 + v_{2h}^2) & 0 \\ 0 & g_L^2 (v_{1h}^2 + v_{2h}^2) - g_L^2 \frac{(v_{1h} v_{2h})^2}{V^2 + v_{1h}^2 + v_{2h}^2} \end{pmatrix} \approx \\ & \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_R^2 V^2 & 0 \\ 0 & g_L^2 (v_{1h}^2 + v_{2h}^2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

což efektivně znamená zanedbat jakékoli členy obsahující W_R^\pm , které nejsou úměrné zároveň V^2 .

V příspěvcích od multipletu Φ tak ze stejného důvodu vůbec nemusíme členy s W_R^\pm uvažovat. Kombinace s W_L totiž můžeme zanedbat (viz předchozí odstavec), zatímco kombinace s jinými poli nám dokonce zakazuje zachování $U(1)_Q$ symetrie. Stejně tak nemusíme uvažovat členy s X^\pm , neboť ty jsou jistě zanedbatelné vůči členům (4.42). Příspěvky k hmotnostem W_L^\pm jsou rovny

$$\mathcal{L} \ni -6g_L^2 (v_{1h}^2 + v_{2h}^2) W_L^- W_L^+, \quad (4.51)$$

zatímco hmotnostní členy neutrálních polí jsou

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ni & -3g_L^2 (v_{1\Phi}^2 + v_{2\Phi}^2) W_L^0 W_L^0 - 3g_R^2 (v_{1\Phi}^2 + v_{2\Phi}^2) W_R^0 W_R^0 - \\ & + 6g_L g_R (v_{1\Phi}^2 + v_{2\Phi}^2) W_L^0 W_R^0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Přejdeme od polí (W_R^0, B) k (B_H, B_Y) a opět zanedbáme členy řádu $O(v/V)$, respektive vliv pole B_H na hmotnosti ostatních bosonů. S využitím (4.47) můžeme psát

$$\mathcal{L}_{W_L^0 B_Y}^{mass} \approx -\frac{12(v_{1\Phi}^2 + v_{2\Phi}^2) + v_{1h}^2 + v_{2h}^2}{4} \begin{pmatrix} W_L^0 & B_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_L^2 & -g_L g \\ -g_L g & g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_L^0 \\ B_Y \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Od polí (B_Y, W_L^0) přejdeme k polím (A, Z) jako ve Standardním modelu (1.12), čímž zároveň zreprodukuje rovnici (1.13).

Celkově pro hmotnostní lagrangian vektorových bosonů můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass} \ni & -\frac{g_R^2 V^2}{2} W_R^+ W_R^- - \frac{g_s^2 V^2}{2} X_i^- X^{i+} - \frac{1}{2} V^2 \frac{3g_s^2 + 2g_R^2}{4} B_H B_H - \\ & - \left(g_L^2 W_L^- W_L^+ + \frac{1}{2} (g_L^2 + g^2) Z Z \right) \frac{12(v_{1\Phi}^2 + v_{2\Phi}^2) + v_{1h}^2 + v_{2h}^2}{2} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Pro kvadráty hmotnosti těžkých částic platí

$$\begin{aligned} M_X^2 &= \frac{g_s^2}{2} V^2, \\ M_{W_R}^2 &= \frac{g_R^2}{2} V^2, \\ M_{B_H}^2 &= \frac{3g_s^2 + 2g_R^2}{4} V^2. \end{aligned} \quad (4.55)$$

zatímco pro bosony Standardního modelu máme

$$\begin{aligned} m_A^2 &= 0, \\ m_Z^2 &= (g_L^2 + g^2) \frac{v_{1h}^2 + v_{2h}^2 + 12(v_{1\Phi}^2 + v_{2\Phi}^2)}{2}, \\ m_{W_L}^2 &= g^2 \frac{v_{1h}^2 + v_{2h}^2 + 12(v_{1\Phi}^2 + v_{2\Phi}^2)}{2}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Z rovnic (1.19) dostáváme

$$v^2 = v_{1h}^2 + v_{2h}^2 + 12(v_{1\Phi}^2 + v_{2\Phi}^2). \quad (4.57)$$

Kalibrační vazba g_s je shodná s vazbou g_s ve Standardním modelu. Pro g_L a g_R máme vztahy

$$g = \sqrt{\frac{3g_s^2 g_R^2}{3g_s^2 + 2g_R^2}}, \quad (4.58)$$

$$g_w = g_L, \quad (4.59)$$

$$(4.60)$$

Vše platí v aproximaci kdy zanedbáváme členy řádu $O(v/V)$. Připomeňme, že pole W_L^\pm jsou vlastními stavy hmotnosti pouze v rámci této aproximace, jak je patrné z matice (4.49). Nabité intermediální bosony Standardního modelu tím pádem v Pati-Salamově modelu nenarušují paritu maximálně, neboť velmi slabě interagují i s poli antičástic, nicméně odchylka od Standardního modelu je zanedbatelná.

4.4.3 Yukawovské interakce

Yukawovské interakce fermionů se skaláry můžeme rozdělit na tři typy, konkrétně na interakce obsahující kombinaci FF , F_cF_c nebo FF_c .

S poslední variantou jsme se již v této kapitole seznámili, jedná se o interakce (4.11),(4.12),(4.17) a (4.18). S variantou F_cF_c jsme se taktéž potkali, neboť právě ta nás motivovala k přidání multipletu D . Získali jsme členy (4.30). Invarianty obsahující FF najdeme zcela analogicky jako předešlé. Celkově máme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{yuk.} = & y_{1h}^{IJ} F_I F_{cJ} h + y_{2h}^{IJ} F_I F_{cJ} h^* + y_{1\Phi}^{IJ} F_I F_{cJ} \Phi + y_{2\Phi}^{IJ} F_I F_{cJ} \Phi^* + \\ & + \frac{1}{2} y_1^{IJ} F_{cI} F_{cJ} D + \frac{1}{4} y_2^{IJ} F_{cI} F_{cJ} D^* + \\ & + \frac{1}{4} y_3^{IJ} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{ijkl} F_{\alpha i I} F_{\beta j J} D_{kl} + \frac{1}{2} y_4^{IJ} \epsilon^{\alpha\beta} F_{\alpha i I} F_{\beta j J} D^{*ij} + h.c \end{aligned} \quad (4.61)$$

Ze symetrie indexů je patrné, že zatímco matice $y_{h,\Phi}$ mohou být zcela libovolné, matice $y_{1..4}$ stačí uvažovat symetrické.

4.4.4 Skalární potenciál

Skalární potenciál obsahuje veškeré renormalizovatelné kalibračně invariantní kombinace skalárních multipletů teorie. Je zřejmé, že z multipletů h, Φ, H, D jsme schopni vytvořit poněkud velké množství takovýchto členů. Naštěstí tyto členy nepotřebujeme znát všechny.

Rádi bychom věděli, jakou přibližnou strukturu má skalární spektrum teorie, přičemž spektrum multipletů H a D bychom rádi znali přesně, neboť přímo vystupuje ve Wittenově mechanismu a souvisí s poločasem rozpadu protonu v tomto modelu. Z ostatních skalárních interakcí nás bude v této práci zajímat pouze určitá skupina, kterou specifikujeme později.

Hmotnostní spektrum multipletů H a D

Začneme odvozením hmotnostní polí z multipletů H a D . Od těchto multipletů očekáváme, že budou velmi těžké, zanedbávejme tedy příspěvky řádu $O(v/V)$.

Připomeňme značení (4.7). Vůči grupě Standardního modelu nalezneme transformační pravidla

$$H_1 := (H_{11}, H_{12}, H_{13}) = (3, 1, 2/3)_{SM}, \quad (4.62)$$

$$H_2 := (H_{21}, H_{22}, H_{23}) = (3, 1, -1/3)_{SM}, \quad (4.63)$$

$$\phi_0 = (1, 1, 0)_{SM}, \quad (4.64)$$

$$\phi_1 = (1, 1, -1)_{SM}. \quad (4.65)$$

Podívejme se, jak se rozkládá multiplet D vůči grupě Standardního modelu. Působením této podgrupy nalezneme

$$T := D_{i4} = (3, 1, -1/3)_{SM}, \quad (4.66)$$

$$A := \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} D_{jk} = (\bar{3}, 1, 1/3)_{SM}. \quad (4.67)$$

Pro triplet H_1 a pole ϕ_1 bychom měli získat jednoduché hmotnostní členy, zatímco pro triplet H_2, T, A^* netriviální hmotnostní matici 3×3 . Zároveň by se dle Goldstoneova teorému mělo ve spektru objevit 9 nehmotných reálných bosonů.

Začneme postupně konstruovat relevantní členy skalárního potenciálu.

Invariantní členy dimenze $d = 2$ jsou pouze

$$HH^* = H_{\bar{\alpha}i} H^{*\bar{\alpha}i}, \quad (4.68)$$

$$DD^* = D_{ij} D^{*ij}, \quad (4.69)$$

$$DD = \epsilon^{ijkl} D_{ij} D_{kl}. \quad (4.70)$$

Pišme

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \ni & \mu_H^2 HH^* + \frac{1}{2} \mu_{DD^*}^2 DD^* + \\ & + \left(\frac{1}{8} \mu_{DD}^2 DD + h.c. \right) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Účel numerických faktorů je čistě estetický a bude zjevný později.

Invariantní členy dimenze $d = 3$ nemohou obsahovat multiplet Φ ani h . Kvůli $SU(2)$ invarianci by z této dvojice musely být právě dva ze tří multipletů. Poslední multiplet by nemohl být D ani H , neboť by se nejednalo o $SU(4)$ invariant. Jediné možnosti jsou

$$H^* H^* D = \epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} H^{*\bar{\alpha}i} H^{*\bar{\beta}j} D_{ij}, \quad (4.72)$$

$$HHD = \epsilon^{ijkl} \epsilon^{\bar{\beta}\bar{\alpha}} H_{\bar{\alpha}i} H_{\bar{\beta}j} D_{kl} \quad (4.73)$$

a jejich komplexní sdružení. Pro tuto část lagrangiánu máme

$$\mathcal{V} \ni \frac{1}{2} \mu_1 H^* H^* D + \frac{1}{4} \mu_2 HHD + h.c. \quad (4.74)$$

Konkrétní numerické faktory opět volíme pouze z estetických důvodů. Právě tyto interakce jsou stěžejní pro funkčnost Wittenova mechanismu, neboť v narušeném lagrangiánu generují člen typu HD , který zaručuje nenulovost skalárního propagaátoru vyskytujícího se v grafech typu 3.1.

Z členů dimenze $d = 4$ uvedeme pouze ty, které generují hmotnostní členy. Nebudeme tak například uvádět invarianty sestavené pouze pomocí multipletu D .

Pokud invariant obsahuje lichý počet D , nemůžeme získat $SU(4)$ invariant, neboť lichý počet $SU(4)$ indexů se nám nepodaří zúžit do invariantního výrazu. Nejprve nalezneme všechny invarianty sestavené pouze z multipletu H . Pokud takový invariant neobsahuje žádné komplexní sdružení, získáme pouze možnost

$$HHHH = \epsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \epsilon^{\bar{\gamma}\bar{\delta}} \epsilon^{ijkl} H_{\bar{\alpha}i} H_{\bar{\beta}j} H_{\bar{\gamma}k} H_{\bar{\delta}l}. \quad (4.75)$$

Její příspěvek k hmotnostem je nulový. Invariant obsahující jedno (nebo tři) komplexní sdružení opět neexistuje díky požadované $SU(4)$ invarianci. Zbývá tedy varianta obsahující dvě komplexní sdružení. Takové invarianty existují dva, a to

$$(HH^*)^2 = \text{Tr} \left(H^\dagger H \right)^2, \quad (4.76)$$

$$HH^* HH^* = \text{Tr} \left(H^\dagger H H^\dagger H \right). \quad (4.77)$$

Invariant obsahující dva multiplety D musí obsahovat jeden komplexně sdružený multiplet H . Celkem dostáváme čtyři možnosti zúžení indexů a to

$$(DD)(HH^*) = \epsilon^{ijkl} D_{ij} D_{kl} H^{*\bar{\alpha}m} H_{\bar{\alpha}m}, \quad (4.78)$$

$$HDDH^* = \epsilon^{ijkl} D_{mj} D_{kl} H^{*\bar{\alpha}m} H_{\bar{\alpha}i}, \quad (4.79)$$

$$(DD^*)(HH^*) = D^{*ij} D_{ij} H^{*\bar{\alpha}m} H_{\bar{\alpha}m}, \quad (4.80)$$

$$HD^*DH^* = D^{*ij} D_{mj} H^{*\bar{\alpha}m} H_{\bar{\alpha}i}. \quad (4.81)$$

Můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \ni & \lambda_1 (HH^*HH^*) + \lambda_2 (HH^*)^2 + \\ & + \left(\lambda_3 HHHH + \frac{1}{8} a_1 (DD)(HH^*) + \frac{1}{2} a_2 HDDH^* + h.c \right) + \\ & + \frac{1}{2} a_3 (DD^*)(HH^*) + a_4 HD^*DH^*. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Hmotnostní spektrum polí z multipletů H a D je tedy dáno částí skalárního potenciálu

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{HD} = & \mu_H^2 HH^* + \frac{1}{2} \mu_{DD^*}^2 DD^* + \lambda_1 (HH^*HH^*) + \lambda_2 (HH^*)^2 + \\ & + \frac{1}{2} a_3 (DD^*)(HH^*) + a_4 HD^*DH^* + \\ & + \left(\lambda_3 HHHH + \frac{1}{8} \mu_{DD}^2 DD + \frac{1}{2} \mu_1 H^* H^* D + \frac{1}{4} \mu_2 HHD + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} a_1 (DD)(HH^*) + \frac{1}{2} a_2 HDDH^* + h.c \right). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Pro přehlednost se nejprve omezíme pouze na hmotnostní členy tripletů T, A^* a H_2 . Zápisem výše uvedeného skalárního potenciálu v asymetrické fázi dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{HAT^*}^{mass} = & \left(\mu_H^2 + 2\lambda_2 V^2 \right) H_2 H_2^* + \left(\mu_{DD^*}^2 + a_3 V^2 \right) (TT^* + A^* A) + \\ & + \left(\mu_{DD}^2 + (a_1 + a_2) V^2 \right) TA + \left(\mu_{DD}^2 + (a_1^* + a_2^*) V^2 \right) T^* A^* + \\ & + \mu_1 V H_2^* T + \mu_1^* V H_2 T^* + \mu_2 V H_2 A + \mu_2^* V H_2^* A^* + a_4 V^2 TT^* = \\ & = \begin{pmatrix} H_2 & & \\ H_2^* & T^* & A \end{pmatrix} \cdot M_{HTA}^2 \cdot \begin{pmatrix} H_2 \\ T \\ A^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Matice hmotností M_{HTA}^2 těchto tripletů je rovna

$$M_{HTA}^2 = \begin{pmatrix} \mu_H^2 + 2\lambda_2 V^2 & \mu_1 V & \mu_2^* V \\ \mu_1^* V & \mu_{DD^*}^2 + (a_3 + a_4) V^2 & \mu_{DD}^2 + (a_1^* + a_2^*) V^2 \\ \mu_2 V & \mu_{DD}^2 + (a_1 + a_2) V^2 & \mu_{DD^*}^2 + a_3 V^2 \end{pmatrix}. \quad (4.85)$$

Pro ostatní pole, tedy pro barevný triplet H_1 a pole $\phi_{0,1}$ máme

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{H_1\phi} = & \mu_H^2 (H_1^* H_1 + \phi_0^* \phi_0 + \phi_1^* \phi_1) + \\ & + \lambda_1 V^2 (2H_1^* H_1 + 4\phi_0^* \phi_0 + 2\phi_1^* \phi_1 + \phi_0 \phi_0 + \phi_0^* \phi_0^*) + \\ & + \lambda_2 V^2 (2H_1^* H_1 + 4\phi_0^* \phi_0 + 2\phi_1^* \phi_1 + \phi_0 \phi_0 + \phi_0^* \phi_0^*) = \\ & = \left(\mu_H^2 + 2(\lambda_1 + \lambda_2) V^2 \right) (\phi_1^* \phi_1 + H_1^* H_1) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\mu_H^2 + 6(\lambda_1 + \lambda_2) \right) S_0^2 + \frac{1}{2} \left(\mu_H^2 + 2(\lambda_1 + \lambda_2) \right) P_0^2 \end{aligned} \quad (4.86)$$

kde jsme označili

$$\phi_0 := \frac{1}{\sqrt{2}} (S_0 + iP_0). \quad (4.87)$$

Ihned vidíme

$$m_{H_1}^2 = m_{P_0}^2 = m_{\phi_1}^2 = \mu_H^2 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)V^2, \quad (4.88)$$

$$m_{S_0}^2 = \mu_H^2 + 6(\lambda_1 + \lambda_2)V^2. \quad (4.89)$$

Nezapomeňme, že jsme doposud nevyužili podmínky, že vakuové střední hodnoty multipletů musí skalární potenciál minimalizovat. Provedme variaci (4.83) podle H a dosadme za pole jejich vakuové střední hodnoty. Dostáváme

$$\delta\mathcal{V}_{H,D}|_{\phi_0=V,D=0} = \left(\mu_H^2 V + 2(\lambda_1 + \lambda_2)V^3 \right) \delta\phi_0, \quad (4.90)$$

což vede na podmínku

$$\mu_H^2 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)V^2 = 0. \quad (4.91)$$

V důsledku jsou pole H_1, ϕ_1, P_0 nehmotná. To je ale v naprosté shodě s Goldstoneovým teorémem. Pro pole S_0 získáme

$$m_{S_0}^2 = 4(\lambda_1 + \lambda_2)V^2 \quad (4.92)$$

a pro matici hmotností M_{HTA}^2

$$M_{HTA}^2 = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 V^2 & \mu_1 V & \mu_2^* V \\ \mu_1^* V & \mu_{DD^*}^2 + (a_3 + a_4)V^2 & \mu_{DD}^{2*} + (a_1^* + a_2^*)V^2 \\ \mu_2 V & \mu_{DD}^2 + (a_1 + a_2)V^2 & \mu_{DD^*}^2 + a_3 V^2 \end{pmatrix}. \quad (4.93)$$

Vlastní stavy hmotnosti nalezneme diagonalizací této matice, značme je například $T_{1,2,3}$. Příslušnou unitární transformaci zapišme jako

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1H} & U_{1T} & U_{1A^*} \\ U_{2H} & U_{2T} & U_{1A^*} \\ U_{3H} & U_{3T} & U_{1A^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_2 \\ T \\ A^* \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

Nezápornost hmotnostního spektra implikuje určitá omezení na parametry skalárního potenciálu. Z (4.92) jistě plyne

$$(\lambda_1 + \lambda_2) > 0. \quad (4.95)$$

Z požadavku semi-definitnosti matice (4.93) dostáváme tři dvojice nerovností

$$\lambda_1 \leq 0, \quad (4.96)$$

$$\left(\mu_{DD^*}^2 + (a_3 + a_4)V^2 \right) \left(\mu_{DD^*}^2 + a_3 V^2 \right) - \left| \mu_{DD}^{2*} + (a_1^* + a_2^*)V^2 \right|^2 \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \mu_{DD^*}^2 + (a_3 + a_4)V^2 &\geq 0, \\ -2\lambda_1 \left(\mu_{DD^*}^2 + a_3 V^2 \right) - |\mu_2|^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \mu_{DD^*}^2 + a_3 V^2 &\geq 0, \\ -2\lambda_1 \left(\mu_{DD^*}^2 + (a_3 + a_4)V^2 \right) - |\mu_1|^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.98)$$

a v neposlední řadě

$$\det M_{HTA}^2 \geq 0. \quad (4.99)$$

Ve skutečnosti v kombinaci s nezáporností determinantu matice hmotností je pouze jedna ze sad podmínek (4.96),(4.97),(4.98) nezávislá.

Pro pozdější účely uvažme situaci, kdy je hmotností škála multipletu D výrazně větší než škála spontánního narušení symetrie V , tedy

$$\mu_{DD}^2 \gg V^2. \quad (4.100)$$

V takovém případě se dostáváme do velmi podobné situace jako v seesaw mechanismu I. typu 3.2 - diagonalizujeme matici, jejíž spodní blok je dominantní oproti ostatním prvkům. Pro přehlednost označme

$$\mu^\dagger := \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2^* \end{pmatrix} \quad (4.101)$$

a

$$M_D^2 := \begin{pmatrix} \mu_{DD}^2 + (a_3 + a_4)V^2 & \mu_{DD}^{2*} + (a_1^* + a_2^*)V^2 \\ \mu_{DD}^2 + (a_1 + a_2)V^2 & \mu_{DD}^2 + a_3V^2 \end{pmatrix}. \quad (4.102)$$

Snadno se přesvědčíme, že pokud platí (4.100), můžeme pro matici U (4.94) psát

$$\begin{pmatrix} U_{1H} & U_{1T} & U_{1A^*} \\ U_{2H} & U_{2T} & U_{1A^*} \\ U_{3H} & U_{3T} & U_{1A^*} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_{M_D^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -V\mu^\dagger(M_D^2)^{-1} \\ V(M_D^2)^{-1}\mu & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.103)$$

kde $U_{M_D^2}$ je unitární matice diagonalizující matici M_D^2 (4.102).

Hmotnostní spektrum multipletů h a Φ

Nyní se zaměříme na spektrum polí z multipletů h a Φ . V tomto spektru se musí objevit Higgsov dublet ze Standardního modelu. Tento dublet by měl obsahovat tři Goldstoneovy bosony a reálné pole s hmotností na elektroslabé škále.

Ukažme ale, že „přirozená“ škála hmotností všech částic z těchto multipletů je rovna V . Abychom získali správnou hmotnost Higgsova bosonu známého ze Standardního modelu, musí některé z parametrů skalárního potenciálu mít až nepřirozeně přesné hodnoty, tj. musíme provést takzvaný *fine-tuning*.

Toto tvrzení demonstrujeme na zjednodušeném případě našeho modelu. Konkrétně se omezme pouze na situaci, kdy v modelu není přítomný multiplet Φ . Navíc uvažujme přiblížení, kdy vakuová střední hodnota multipletu h jde limitně do nuly, resp. $v/V \approx 0$. Následně okomentujeme, jak se situace změní v obecném případě.

Hmotnostní členy polí h nalezneme zápisem potenciálu

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{hH} = & \left(\mu_{hh}^2 h_{\bar{\alpha}}^\alpha h_{\bar{\beta}}^\beta \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + h.c \right) + \mu_{hh^*}^2 h_{\bar{\alpha}}^\alpha h^*{}_{\bar{\alpha}}^\alpha + \\ & + \left(b_1 h_{\bar{\alpha}}^\alpha h_{\bar{\beta}}^\beta \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} H_{i\bar{\gamma}} H^{*i\bar{\gamma}} + h.c \right) + b_2 h_{\bar{\alpha}}^\alpha h^*{}_{\bar{\alpha}}^\alpha H_{i\bar{\gamma}} H^{*i\bar{\gamma}} + \\ & + \left(b_3 H^{*i\bar{\alpha}} h_{\bar{\alpha}}^\alpha h_{\bar{\beta}}^\beta H_{i\bar{\gamma}} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\bar{\beta}\bar{\gamma}} + h.c \right) + b_4 h_{\bar{\alpha}}^\alpha h^*{}_{\bar{\beta}}^\beta H_{i\bar{\beta}} H^{*i\bar{\alpha}} + \\ & + b_5 h_{\bar{\alpha}}^\alpha h^*{}_{\bar{\beta}}^\beta H_{i\bar{\delta}} H^{*i\bar{\gamma}} \epsilon_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \epsilon^{\bar{\alpha}\bar{\delta}} \end{aligned} \quad (4.104)$$

v asymetrické fázi. Konkrétně dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_h^m &= \left[\left(2\mu_{hh}^2 + (2b_1 - b_3) V^2 \right) h_{\bar{1}}^\alpha h_{\bar{2}}^\beta \epsilon_{\alpha\beta} + h.c. \right] + \\
&\quad + \left(\mu_{hh^*}^2 + (b_2 + b_4) V^2 \right) h_{\bar{1}}^\alpha h_{\alpha}^{*\bar{1}} + \\
&\quad + \left(\mu_{hh^*}^2 + (b_2 - b_5) V^2 \right) h_{\bar{2}}^\alpha h_{\alpha}^{*\bar{2}} = \\
&= \begin{pmatrix} h_{\bar{1}}^\alpha & h_{\bar{2}}^{*\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu_{hh^*}^2 + (b_2 + b_4) V^2) & (2\mu_{hh}^2 + (2b_1 - b_3) V^2) \\ (2\mu_{hh}^2 + (2b_1 - b_3) V^2)^* & (\mu_{hh^*}^2 + (b_2 - b_5) V^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{\bar{1}\alpha}^* \\ h_{\bar{2}\alpha} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.105}$$

V posledním kroku jsme zvýšili/snížili index pomocí matice ϵ .

Získáváme tak dva $SU(2)$ dublety s hmotnostmi

$$\begin{aligned}
m_\pm^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(2\mu_{hh^*}^2 + (2b_2 + b_4 - b_5) V^2 \right) \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{4 |2\mu_{hh}^2 + (2b_1 - b_3) V^2|^2 + (b_4 + b_5)^2 V^4} \right].
\end{aligned} \tag{4.106}$$

„Přirozená“ škála obou hmotností je tím pádem zřejmě V^2 . My ale požadujeme, aby jeden z dubletů byl v limitě nulové elektroslabé škály dokonce nehmotný. Právě z tohoto důvodu se musíme uchýlit k *fine tuningu*, abychom kompenzovali úměru škály V^2 . Snadno si rozmyslíme, že přítomnost multipletů Φ, D na tomto faktu nic nezmění. Nutnost volit určité parametry skalárního potenciálu s přesností v/V působí poněkud nepřirozeně, takovýchto jemných ladění parametrů chceme provést co nejméně.

Kdybychom naopak měli pouze multiplety Φ, H , opět bychom zjistili, že „přirozená“ škála hmotností částic z multipletu Φ je též V . Tento fakt můžeme snadno nahlédnout následujícím způsobem. Víme, že 15-ti rozměrná reprezentace $SU(4)_{col}$ grupy obsahuje barevný reálný oktet, singlet a komplexní triplet. Nyní se podívejme na část potenciálu (4.104) obsahující h i h^* a provedme záměnu

$$h_{\bar{\alpha}}^\alpha h_{\beta}^{*\bar{\beta}} \rightarrow \Phi_{\bar{\alpha}j}^{\alpha i} \Phi_{\beta i}^{*\bar{\beta} j} \tag{4.107}$$

Tato část skalárního potenciálu generuje hmotnostní členy pro všechny výše zmíněné komponenty z Φ . Tyto členy jsou analogické diagonální části matice (4.105). Pochopitelně se nejedná o jediné příspěvky do příslušných hmotnostních maticích, nicméně závislost na škále V je již v tento okamžik zřejmá. Uvážením všech příspěvků se v maticích hmotnosti pouze objeví další nezávislé parametry, k žádnému vyrušení příspěvků velikosti V^2 dojít nemůže. Přítomnost obou multipletů h, Φ zároveň taktéž závislost na této škále kompenzovat nedokáže.

Pokud se tedy chceme vyhnout jakémukoli nevynucenému *fine-tuningu* parametrů skalárního potenciálu, jediné přirozeně lehké skalární částice jsou nehmotné Goldstoneovy bosony a Higgsův boson Standardního modelu, které dohromady tvoří $SU(2)_L$ dublet známý ze Standardního modelu. Ostatní skalární částice z multipletů h, Φ mají přirozenou škálu hmotností V .

Shrňme si, na jakých škálách se pohybují hmotnosti skalárních částic v námi zkoumaném modelu.

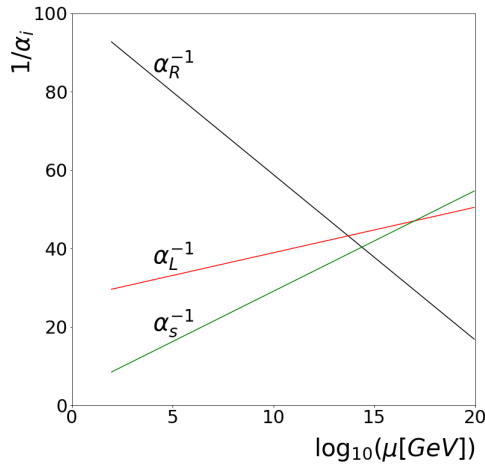
- Ve spektru h a Φ se objeví jeden dublet $(1, 2, 1/2)_{SM}$ obsahující tři nehmotné Goldstoneovy bosony a jeden neutrální skalár s hmotností na elektroslabé škále. Musíme však připustit *fine-tuning* parametrů skalárního potenciálu. Ostatní částice mají hmotnosti úměrné škále V .

- Ve spektru H objevíme nehmotný barevný triplet $H_{\bar{1}i} = (3,1,2/3)_{SM}$, reálné pole $P_0 = (1,1,0)_{SM}$ a komplexní pole $\phi_1 = (1,1,-1)_{SM}$. Jedná se o Goldstoneovy bosony odpovídající narušení symetrie $SU(4) \times SU(2)_R \rightarrow SU(3) \times U(1)_Y$. Dále obdržíme reálné pole S_0 s hmotností na škále V .
- Částice z D se míchají s tripletem $H_{\bar{2}i}$ z multipletu H . Spektrum je dáno maticí (4.93). Očekáváme, že získáme jeden barevný triplet s hmotností na škále V a dva triplety na neurčené škále závislé na velikosti μ_{DD^*} .

Všimněme si, že tyto výsledky odpovídají pravidlům uvedených v [46]. Stručně řečeno - při minimálním *fine-tuningu* submultiplet narušující symetrii získává hmotnost úměrnou škále narušení, zatímco ostatní pole z daného multipletu získávají hmotnost úměrné škále narušení o stupeň vyšší symetrie. Dublet Standardního modelu je tedy lehký, neboť je zodpovědný za narušení symetrie $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$, ostatní prvky multipletů h a Φ získávají hmotnosti úměrné škále narušení symetrie $SU(4) \times SU(2)_R \rightarrow SU(3) \times U(1)_Y$. Za tuto fázi narušení je zodpovědný multiplet H , tudíž jeho prvky získávají hmotnosti na škále tohoto narušení. Zůstává nám neurčená škála μ_{DD^*} , neboť pole z multipletu D nejsou zodpovědné za žádný krok spontánního narušení symetrie.

Výše uvedené pravidlo nám ale říká, co očekávat od škály μ_{DD^*} , kdyby uvažovaný Pati-Salamův model byl pouze efektivní teorií odpovídající spontánnímu narušení určité větší symetrie (např. $SO(10) \rightarrow G_{GUT} \rightarrow G_{PS}$). V takovém případě by škála μ_{DD^*} odpovídala škále této fáze spontánního narušení.

Alternativně lze říci, že na dané škále „přežijí“ pouze ty multiplety, které jsou nutné k narušení symetrie na některé nižší škále. Tento princip se též v literatuře nazývá *extended survival hypothesis* [47, 48].



Obrázek 4.1: Běh kalibračních vazeb v minimálním Pati-Salamově modelu pod škálou V

4.5 Běh kalibračních vazeb

Podívejme se, jaké hodnoty přibližně očekáváme od vazby g_R . Rovnici (4.47) můžeme přepsat na

$$\alpha_R^{-1} = \alpha_Y^{-1} - \frac{2}{3}\alpha_S^{-1}, \quad (4.108)$$

což nám umožňuje zkoumat běh této vazby po škálou V pomocí rovnice (2.11). Z diskuze skalárního potenciálu víme, že od veškerých skalárních částic, vyjma nefyzikálních Goldstoneových bosonů a Higgsova dubletu Standardního modelu, očekáváme, že budou velmi těžké, tudíž do běhu vazeb pod škálou V nepřispívají. Goldstoneovy bosony odpovídající narušení $G_{PS} \rightarrow G_{SM}$ běh taktéž neovlivňují. To plyne z odvození rovnice (2.11) a faktu, že v R_ξ kalibraci mají tyto bosony běžný skalární propagátor s hmotností ξM , kde M je hmotnost odpovídajícího (těžkého) vektorového bosonu (1.29). Pro běh vazeb pod škálou V tak přispívají stejná pole jako ve Standardním modelu. Rovnice (2.14), odvozené v 2.2 pro Standardní model, můžeme v důsledku použít i pro Pati-Salamův model. Běh kalibračních vazeb Pati-Salamova modelu pod neznámou škálou V můžeme vidět na obrázku 4.1.

5. Wittenův mechanismus v Pati-Salamově modelu

V předchozí kapitole jsme se podrobně seznámili s lagrangianem minimálního Pati-Salamova modelu. Viděli jsme, že diracovské hmotnosti neutrin by se měly pohybovat přibližně na škále hmotnosti horních kvarků 4.2.2. Zároveň víme, že fyzikální hmotnosti neutrin musí být výrazně menší 2.1. Toho se pokusíme dosáhnout prostřednictvím Wittenova mechanismu 3.4.

V této kapitole přistoupíme k hlavním výsledkům práce. Nejprve si ukážeme, jak Wittenův mechanismus aplikovat v minimálním Pati-Salamově modelu. Následně pak pomocí získaných výsledků rozebereme hmotnosti neutrin i v některých modifikacích tohoto modelu. Konkrétně okomentujeme, jak by se situace změnila v některých neminimálních variantách, v modelu s diskretní levo-pravou symetrií a v modelu s kalibrační grupou $SU(4)_{col.} \times SU(2)_L \times U(1)$.

5.1 Dvousmyčkové korekce k majoranovské hmotnosti neutrin

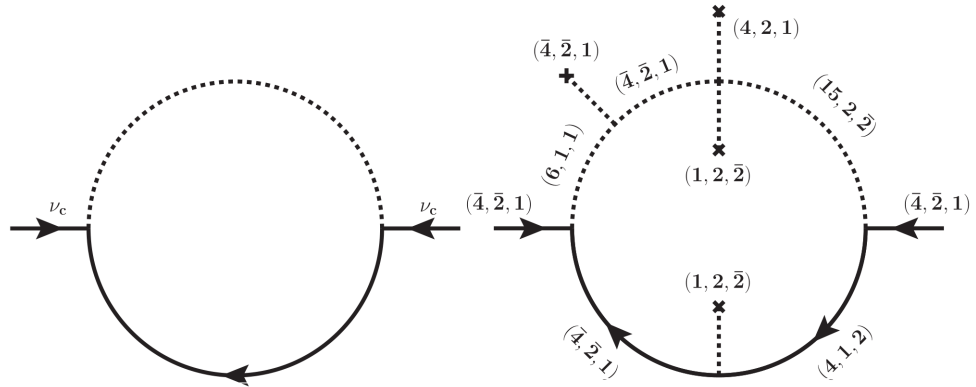
Podívejme se na smyčkové korekce k majoranovské hmotnosti neutrin. Připomínáme, že poznámky k dvoubodovým 1PI funkcím a jejich výpočtu uvádíme v příloze B.

V našem kontextu jsou zajímavé pouze ty korekce, které mohou být potenciálně výrazně větší než elektroslabá škála. Tyto příspěvky následně vedou k malým fyzikálním hmotnostem neutrin. Z tohoto důvodu se nemusíme starat o jednosmyčkové korekce. Snadno si rozmyslíme, že diagram 5.1 je jediný možný příspěvek. Tato korekce je ale díky propagátoru mezi multiplety F a F_c přímo úměrná hmotnosti některého z fermionů a můžeme jí zanedbat.

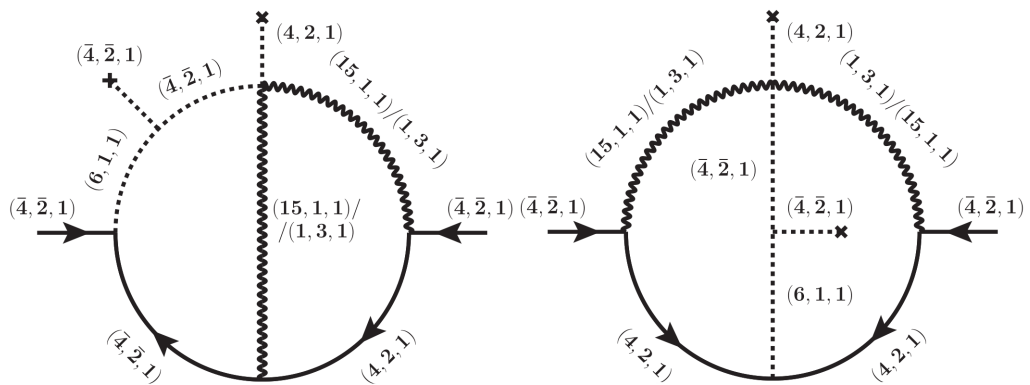
Uvedme poznámku k použitému značení ve Feynmanových diagramech. Vnějšími skalárními liniemi značíme vakuové střední hodnoty daných multipletů. Toto explicitní značení vakuových středních hodnot využíváme čistě pro ilustraci, zejména pokud se jedná o linie vedoucí ze skalárního propagátoru - veškeré hmotnostní členy máme zahrnuté ve volném lagrangianu, jedná se pouze o ukázkou konkrétní interakce, která v narušené fázi lagrangianu zaručuje nenulovost daného propagátoru.

Na úrovni dvou smyček jsme již skutečně schopni najít korekce, které by teoreticky mohly být dostatečně veliké. V první řadě jistě máme diagramy 3.1 diskutované v původním článku [13] v kontextu $SO(10)$ grupy. Jelikož tato grupa obsahuje G_{PS} jako svojí podgrupu, tyto grafy snadno sestrojíme i v minimálním Pati-Salamově modelu 5.2. Potenciálně však máme i další nenulové příspěvky pohybující se na žádoucí škále. Stačí pouze nahradit vektorové linie skalárními 5.3. Uvidíme, že tyto příspěvky mohou být dokonce dominantní.

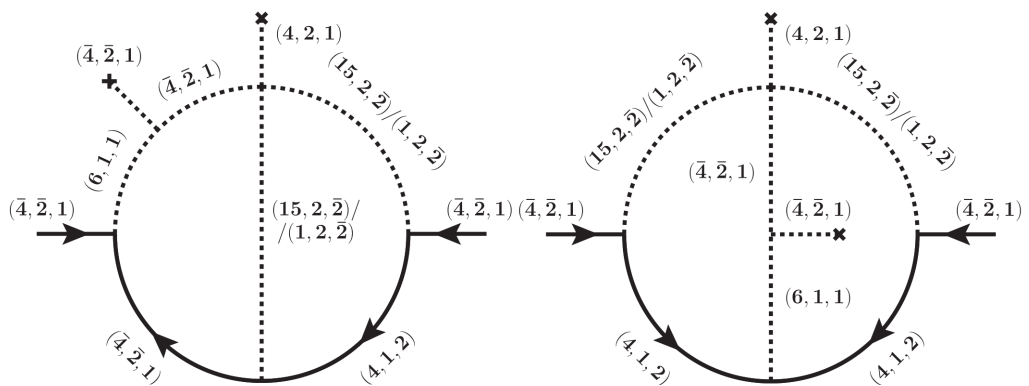
Odovídající dvousmyčkové integrály jsou logaritmicky divergentní. K jejich výpočtu budeme využívat dimenzionální regularizaci. Jelikož ve volném lagrangianu nemáme majoranovský hmotnostní člen, nemáme k dispozici ani divergentní *kontrčlen*, kterým bychom případné divergence grafů mohli kompenzovat. Renor-



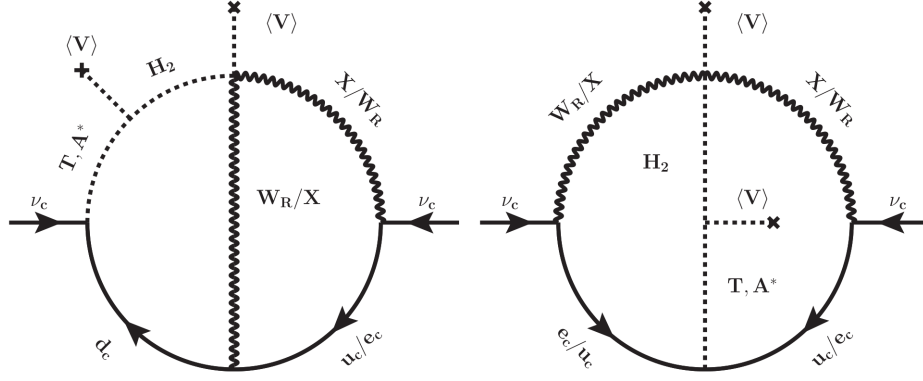
Obrázek 5.1: Jednosmyčková korekce k majoranovské hmotnosti polí neutrin ν_c - nalevo vidíme obecnou strukturu diagramu, napravo pak ukázkou konkrétního příspěvku v minimálním Pati-Salamově modelu. Vnější skalární linie značí vakuové střední hodnoty.



Obrázek 5.2: Dvousmyčkové korekce k majoranovské hmotnosti polí neutrin ν_c v minimálním Pati-Salamově modelu - příspěvky generované vektorovými bosony.



Obrázek 5.3: Dvousmyčkové korekce k majoranovské hmotnosti polí neutrin ν_c v minimálním Pati-Salamově modelu - příspěvky generované výhradně skalárními bosony.



Obrázek 5.4: Dvousmyčkové korekce k majoranovské hmotnosti polí neutrin ν_c v minimálním Pati-Salamově modelu - příspěvky generované vektorovými bosony v řeči konkrétních polí.

malizovatelnost teorie tak vyžaduje, aby součet radiálních korekcí k majoranovské hmotnosti byl konečný.

5.2 Minimální Pati-Salamův model

Podívejme se na výše uvedené korekce v minimálním Pati-Salamově modelu. Nejdříve budeme uvažovat pouze grafy s vektorovými liniemi, poté se zaměříme na příspěvky generované pouze interakcemi skalárních bosonů.

5.2.1 Příspěvky generované vektorovými bosony

Na obrázku 5.2 můžeme vidět patřičné diagramy s popsányými G_{PS} multiplety. Z interakcí fermionů s vektorovými bosony je patrné, že v obou grafech figurují buď pouze spinorová pole antičástic anebo pouze částic. Směr fermionové linie obrátíme pomocí interakce s multipletem D , vertex *skalár-skalár-vektor* obdržíme díky multipletu H . Z něj se uplatní pouze triplet H_2 , neboť ostatní komponenty mají nulový vzájemný propagátor s poli z D , tedy s T a A^* . Tyto triplety mají náboj $\pm 1/3$. Z vektorových bosonů se tak uplatní pouze interakce obsahující W_R^\pm a X^\pm . Pole W_L^\pm totiž s multipletem H neinteragují, zatímco využití neutrálních polí nám neumožňuje zachování elektrického náboje. Na obrázku 5.4 můžeme vidět, jak dané Feynmanovy diagramy vypadají v řeči konkrétních polí.

Potřebné interakce vektorových bosonů získáme z rovnic (4.41) a (4.40). Pro interakci s fermiony máme

$$\mathcal{L} \ni \frac{g_s}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_c \gamma^\mu u_c^i + \bar{e}_c \gamma^\mu d_c^i) X_{i\mu}^+ - \frac{g_R}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{ci} \gamma^\mu d_c^j + \bar{\nu}_c \gamma^\mu e_c) W_{R\mu}^- + h.c., \quad (5.1)$$

pro interakci s tripletem H_2

$$\mathcal{L} \ni -g_s g_R W_R^+ X^{i-} H_{2i} + h.c. \quad (5.2)$$

Poslední potřebnou interakcí je yukawovská interakce multipletu F_c a D . Roze-psáním lagrangiánu (4.61) obdržíme

$$\mathcal{L} \ni (e_{cI} u_{cJ}^i - \nu_{cI} d_{cJ}^i) (y_1^{IJ} T_i + y_2^{IJ} A_i^*) + \epsilon_{ijk} u_{cI}^i d_{cJ}^j (y_1^{IJ} A^k + y_2^{IJ} T^{*k}) + h.c. \quad (5.3)$$

Pokud navíc využijeme toho, že pracujeme s dvoukomponentními spinory, můžeme z γ matic vypsát pouze relevantní blok a psát pro tuto část lagrangiánu modelu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Witt.} = & \left(e_{cI} u_{cJ}^i - \nu_{cI} d_{cJ}^i \right) \left(y_1^{IJ} T_i + y_2^{IJ} A_i^* \right) - \\
& - \bar{d}_{cIi} \bar{\sigma}^\mu \left(\frac{g_R}{\sqrt{2}} u_{cI}^i W_{R\mu}^+ + \frac{g_s}{\sqrt{2}} e_{cI} X_\mu^{i-} \right) - \\
& - \left(\frac{g_R}{\sqrt{2}} W_{R\mu}^+ \bar{e}_{cI} + \frac{g_s}{\sqrt{2}} X_\mu^{i-} \bar{u}_{cIi} \right) \bar{\sigma}^\mu \nu_{cI} - \\
& - g_s g_R V W_R^- X_i^+ H_2^{*i} + \\
& + h.c.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Zatímco sčítací konvence nám umožňuje explicitně nevypisovat matici nábojového sdružení C (A.14), zápis pomocí σ matic namísto γ matic nás navíc osvobozuje od nutnosti psát v některých výrazech transpozici γ matic. Platí totiž výrazy typu

$$\bar{u}_{cIi} \bar{\sigma}^\mu \nu_{cI} = -\nu_{cI} \sigma^\mu \bar{u}_{cIi}. \tag{5.5}$$

Přejdeme k samotnému vyčíslení smyčkových korekcí.

Topologie 1.

Začněme nejdříve topologií s vektorovou linií vedoucí středem grafu. Hodnotu tohoto grafu značme

$$\langle \nu_{cI} \nu_{cJ} \rangle_{1PI}^2.$$

Index 2 pro tento příspěvek volíme pouze pro to, abychom pro přehlednost měli co nejpodobnější značení s [15], kde je tento příspěvek uvažován až jako druhý.

Každý vertex odpovídá jednomu řádku v lagrangiánu (5.4), efektivně tak musíme provést všechny kontrakce ve výrazu

$$\begin{aligned}
& \frac{i^4 K_2}{4!} \int d^4 x_{1\dots 4} \left(-\nu_{cI} d_{cJ}^i \left(y_1^{IJ} T_i + y_2^{IJ} A_i^* \right) \right)_{(x_1)} \\
& \left(-\bar{d}_{cIi} \bar{\sigma}^\mu \left(\frac{g_R}{\sqrt{2}} u_{cI}^i W_{R\mu}^+ + \frac{g_s}{\sqrt{2}} e_{cI} X_\mu^{i-} \right) \right)_{(x_2)} \\
& \left(- \left(\frac{g_R}{\sqrt{2}} W_{R\mu}^+ \bar{e}_{cI} + \frac{g_s}{\sqrt{2}} X_\mu^{i-} \bar{u}_{cIi} \right) \bar{\sigma}^\mu \nu_{cI} \right)_{(x_3)} \\
& \left(-g_s g_R V W_R^- X_i^+ H_2^{*i} \right)_{(x_4)}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

a provést Fourierovu transformaci. Faktor $i^4/4!$ pochází z Dysonova rozvoje a do číselného faktoru K_2 zahrnujeme kombinatorický faktor. Jelikož z interakčního lagrangiánu používáme každý vertex právě jednou, máme 4! možností, jak permutovat argumenty x_i , což nám dle očekávání zkrátí faktor 4! ve jmenovateli. Nesmíme ale zapomenout na dodatečný faktor 2. Pro $I = J$ plyne z toho, že máme dva způsoby, jak vnější propagátory připojit na daný graf (viz diskuze B). Pro $I \neq J$ plyne ze symetrie matic $y_{1,2}^{IJ}$. Kdybychom například konkrétně hledali příspěvek do 1PI funkce $\langle \nu_{c1} \nu_{c2} \rangle_{1PI}^2$, z výrazu (5.6) by se uplatnil jak příspěvek $I = 1, J = 2$ tak i $I = 2, J = 1$. Díky symetrii matic $y_{1,2}^{IJ}$ ale oba tyto příspěvky dávají stejnou hodnotu. Obdrželi jsme tedy

$$K_2 = 2 \cdot 4!. \tag{5.7}$$

Jak v tomto výrazu kontrahovat pole je zřejmé. Z dodatku B víme, že se můžeme omezit na nulový vnější impuls. Můžeme psát

$$\begin{aligned} \langle \nu_{cI} \nu_{cJ} \rangle_{1PI}^2 &= \frac{i^4 (2 \cdot 4!) g_s^2 g_R^2}{4! \cdot 2} V \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^8} \langle d_{cK}^k \bar{d}_{cLl} \rangle_{(-q)} \bar{\sigma}_\rho \\ &\quad \left(\langle u_{cL}^l \bar{u}_{cJj} \rangle_{(p)} \bar{\sigma}^\mu \langle X_\mu^{j-} X_i^{+\nu} \rangle_{(p)} \langle W_{R\nu}^- W_R^{+\rho} \rangle_{(p+q)} + \right. \\ &\quad \left. + \langle e_{cL} \bar{e}_{cJ} \rangle_{(p)} \bar{\sigma}^\mu \langle X^{l-\rho} X_i^{+\nu} \rangle_{(p+q)} \langle W_{R\nu}^- W_{R\rho}^+ \rangle_{(p)} \right) S_{k(q)}^{iIK}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

přičemž jsme označili

$$S_{k(q)}^{iIK} := y_1^{iIK} \langle H^{*i} T_k \rangle_{(q)} + y_2^{iIK} \langle H^{*i} A_k^* \rangle_{(q)}. \quad (5.9)$$

Přechodem k vlastním stavům hmotnosti (4.94) získáme

$$S_{k(q)}^{iIK} = \sum_j \delta_k^i \left(y_1^{iIK} U_{jT} + y_2^{iIK} U_{jA^*} \right) U_{jH}^* \frac{i}{q^2 - m_j^2}. \quad (5.10)$$

Veškeré hmotnosti bosonů vystupující v tomto integrálu jsou extrémně velké. Pokud bychom se v celkovém integrálu, o kterém víme, že musí být konečný a nezávislý na renormalizační škále, rozhodli provést substituci $p, q \rightarrow Vp, Vq$, kde V je vakuová střední hodnota multipletu H (4.9), ihned bychom uviděli, že můžeme zanedbat hmotnosti fermionů. V této aproximaci pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \langle \nu_{cI} \nu_{cJ} \rangle_{1PI}^2 &= i g_s^2 g_R^2 V \delta_i^k \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^8} \left(\frac{-\not{q}}{q^2} \gamma_\rho \frac{\not{p}}{p^2} \gamma_\mu \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{g^{\nu\mu} - \frac{p^\mu p^\nu}{M_X^2}}{p^2 - M_X^2} \frac{g_\nu^\rho - \frac{(p+q)_\nu (p+q)^\rho}{M_{WR}^2}}{(p+q)^2 - M_{WR}^2} + \frac{g^{\nu\mu} - \frac{p^\mu p^\nu}{M_{WR}^2}}{p^2 - M_{WR}^2} \frac{g_\nu^\rho - \frac{(p+q)_\nu (p+q)^\rho}{M_X^2}}{(p+q)^2 - M_X^2} \right) S_{k(q)}^{iIJ} \right) \frac{1 - \gamma_5}{2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Topologie 2.

V případě druhé topologie postupujeme naprosto stejným způsobem. Tentokrát musíme provést veškeré kontrakce ve výrazu

$$\begin{aligned} \frac{i^4 K_1}{4!} \int d^4 x_{1\dots 4} &\left(- \left(\frac{g_R}{\sqrt{2}} W_{R\mu}^+ \bar{e}_{cI} + \frac{g_s}{\sqrt{2}} X_\mu^{i-} \bar{u}_{cIi} \right) \bar{\sigma}^\mu \nu_{cI} \right)_{(x_1)} \\ &\quad \left(e_{cI} u_{cJ}^i \left(y_1^{IJ} T_i + y_2^{IJ} A_i^* \right) \right)_{(x_2)} \\ &\quad \left(- \left(\frac{g_R}{\sqrt{2}} W_{R\mu}^+ \bar{e}_{cI} + \frac{g_s}{\sqrt{2}} X_\mu^{i-} \bar{u}_{cIi} \right) \bar{\sigma}^\mu \nu_{cI} \right)_{(x_3)} \\ &\quad \left(-g_s g_R V W_R^- X_i^+ H_2^{*i} \right)_{(x_4)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

S využitím (5.5) snadno nalezneme

$$\begin{aligned} \langle \nu_{cI} \nu_{cJ} \rangle_{1PI}^1 &= \frac{i^9 K_1 g_s^2 g_R^2}{4! \cdot 2} V \delta_i^k \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^8} \left(\gamma_\rho \frac{-\not{q}}{q^2} \frac{\not{p}}{p^2} \gamma_\mu \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{g^{\nu\mu} - \frac{p^\mu p^\nu}{M_X^2}}{p^2 - M_X^2} \frac{g_\nu^\rho - \frac{q_\nu q^\rho}{M_{WR}^2}}{q^2 - M_{WR}^2} + \frac{g^{\nu\mu} - \frac{p^\mu p^\nu}{M_{WR}^2}}{p^2 - M_{WR}^2} \frac{g_\nu^\rho - \frac{q_\nu q^\rho}{M_X^2}}{q^2 - M_X^2} \right) S_{k(p+q)}^{iIJ} \right) \frac{1 - \gamma_5}{2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Zbývá určit kombinatorický faktor K_1 . Při špatném vyčíslení tohoto faktoru by se divergentní části příspěvků (5.8) a (5.13) neodečetly a dostali bychom divergentní výraz, mějme se tedy na pozoru. Jistě i v tomto případě musíme uvážit faktor 2 plynoucí se symetrie yukawovských matic $y_{1,2}$ a možnosti permutovat vnější linie pro $I = J$. Podívejme se ale na původní výraz (5.12), ve kterém jsme prováděli kontrakce. Tentokrát jsme jeden z řádků lagrangiánu (5.4) využili dvakrát. Díky tomu nemáme 4! odlišných způsobů, jak permutovat argumenty x_i , ale pouze 4!/2. Tím pádem

$$K_1 = 4! \quad (5.14)$$

a

$$\begin{aligned} \langle \nu_{cI} \nu_{cJ} \rangle_{1PI}^1 &= i \frac{g_s^2 g_R^2}{2} V \delta_i^k \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^8} \left(\gamma_\rho \frac{-\not{q} \not{p}}{q^2 p^2} \gamma_\mu \right. \\ &\left. \left(\frac{g^{\nu\mu} - \frac{p^\mu p^\nu}{M_X^2}}{p^2 - M_X^2} \frac{g_\nu^\rho - \frac{q_\nu q^\rho}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2} + \frac{g^{\nu\mu} - \frac{p^\mu p^\nu}{M_W^2}}{p^2 - M_W^2} \frac{g_\nu^\rho - \frac{q_\nu q^\rho}{M_X^2}}{q^2 - M_X^2} \right) S_{k(p+q)}^{iIJ} \right) \frac{1 - \gamma_5}{2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Celkový příspěvek

Označme

$$I_1(M_X, M_R, m) := \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^8} \gamma_\rho \frac{-\not{q} \not{p}}{q^2 p^2} \gamma_\mu \frac{g^{\nu\mu} - \frac{p^\mu p^\nu}{M_X^2}}{p^2 - M_X^2} \frac{g_\nu^\rho - \frac{q_\nu q^\rho}{M_R^2}}{q^2 - M_R^2} \frac{1}{(p+q)^2 - m^2}, \quad (5.16)$$

$$I_2(M_X, M_R, m) := \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^8} \frac{-\not{q} \not{p}}{q^2} \gamma_\rho \frac{g^{\nu\mu} - \frac{p^\mu p^\nu}{M_X^2}}{p^2 - M_X^2} \frac{g_\nu^\rho - \frac{(p+q)_\nu (p+q)^\rho}{M_R^2}}{(p+q)^2 - M_R^2} \frac{1}{q^2 - m^2}, \quad (5.17)$$

$$\Sigma_1 := I_1(M_X, M_R, m) + I_1(M_R, M_X, m), \quad (5.18)$$

$$\Sigma_2 := I_2(M_X, M_R, m) + I_2(M_R, M_X, m), \quad (5.19)$$

definujeme proměnné

$$s := \frac{m^2}{M_X^2}, \quad (5.20)$$

$$k := \frac{M_X^2}{M_R^2} \quad (5.21)$$

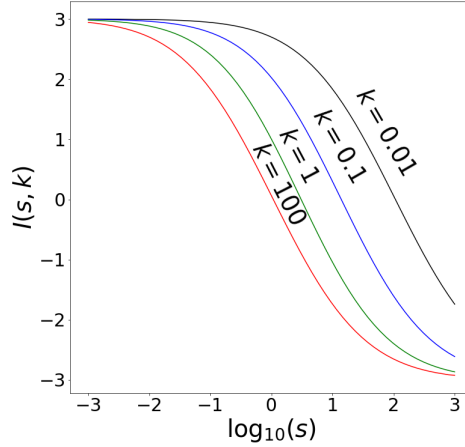
a zavedme

$$I(s, k) := -\frac{(4\pi)^4}{2} (\Sigma_1 + 2\Sigma_2). \quad (5.22)$$

V případě $M_R = M_X$, respektive $k = 1$, je tato funkce I zřejmě totožná s funkcí $I(s)$ figurující v analogické dvousmyčkové korekci v $SU(5) \times U(1)$ modelu [15].

Pro dvousmyčkovou korekci k majoranovské hmotnosti polí ν_c od grafů s vektorovými propagátory celkově dostáváme (B.28)

$$\begin{aligned} M_{\nu_c} &:= i \left(\langle \nu_{cI} \nu_{cJ} \rangle_{1PI}^1 + \langle \nu_{cI} \nu_{cJ} \rangle_{1PI}^2 \right) = \\ &= \frac{3g_s^2 g_R^2}{(4\pi)^4} V \sum_j \left(y_1^{IK} U_{jT} + y_2^{IK} U_{jA^*} \right) U_{jH}^* I(s_j, k). \end{aligned} \quad (5.23)$$



Obrázek 5.5: Funkce odpovídající součtu dvousmyčkových integrálů odpovídajících diagramům 5.2

Funkci $I(s_j, k)$ lze nalézt explicitně vypočítanou v dodatku C. Poznamenejme, že skutečně dojde k odečtení divergentních částí jednotlivých příspěvků. Tato funkce je dokonce omezená i v obou argumentech, konkrétně

$$-3 < I(s, k) < 3. \quad (5.24)$$

Chování této funkce můžeme vidět na grafu 5.5.

Provedme stručné porovnání se situací v $SU(5) \times U(1)$ modelu [15]. V minimální verzi tohoto modelu bychom místo matic y_1, y_2 dostali ve výrazu (5.23) yukawovskou matici Y^d udávající hmotnosti d-kvarků. O této matici víme, že se pohybuje v řádech až 10^{-2} , což má za důsledek další potlačení smyčkové korekce. Jako důsledek je tato smyčková korekce příliš nízká, aby mohla popisovat realistické hmotnosti neutrin. V Pati-Salamově modelu jsou pro nás matice y_1, y_2 zcela neznámé, nemáme žádnou informaci o jejich velikostech. Můžeme pouze požadovat, aby teorie byl poruchová, což vede k odhadu

$$|y_i| < y_{max} \sim 4\pi. \quad (5.25)$$

Tento rozdíl je dán tím, že zatímco v $SU(5) \times U(1)$ teorii jsou v reprezentacích fermionů přítomny pole částic a antičástic zároveň, v Pati-Salamově modelu jsou uspořádány zvlášť. Pro získání yukawovské interakce narušující fermionové číslo tak musíme přidat další skalární multiplet a tedy i další neznámou matici yukawovských konstant.

Z matematického hlediska je ale výraz (5.23) velmi podobný korekci v $SU(5) \times U(1)$ modelu s dvěma Higgsovými multiplety. Můžeme tak provést analogické odhady na velikost této korekce.

Nejprve se pokusme se odhadnout výraz

$$\left| \sum_i (y_1 U_{iT} U_{iH}^* + y_2 U_{iA} U_{iH}^*) I(s_i, k) \right|. \quad (5.26)$$

Jistě platí

$$\begin{aligned} & \left| \sum_i (y_1 U_{iT} U_{iH}^* + y_2 U_{iA} U_{iH}^*) I(s_i, k) \right| \leq \\ & \leq y_{max} \sum_i (|U_{iT} U_{iH}^* I(s_i, k)| + |U_{iA} U_{iH}^* I(s_i, k)|), \end{aligned} \quad (5.27)$$

tudíž se zaměříme právě na

$$C := \sum_i (|U_{iT} U_{iH}^* I(s_i, k)| + |U_{iA} U_{iH}^* I(s_i, k)|). \quad (5.28)$$

Ukažme, že za účelem maximalizace tohoto výrazu musí být dvě z tří hodnot $I_i := I(s_i, k)$ stejné. Bez újmy na obecnosti uvažujme situaci $I_3 \leq I_2 \leq I_1$. Využijme unitárnosti matice U , konkrétně podmínky

$$\sum_i U_{iT} U_{iH}^* = \sum_i U_{iA} U_{iH}^* = 0 \quad (5.29)$$

a píšme

$$\begin{aligned} C &= |U_{1T} U_{1H}^* (I_1 - I_3) + U_{2T} U_{2H}^* (I_2 - I_3)| + (T \leftrightarrow A) = \\ &= (I_1 - I_3) \left| U_{1T} U_{1H}^* + U_{2T} U_{2H}^* \frac{(I_2 - I_3)}{(I_1 - I_3)} \right| + (T \leftrightarrow A) := \\ &:= (I_1 - I_3) |U_{1T} U_{1H}^* + U_{2T} U_{2H}^* \cdot X| + (T \leftrightarrow A). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Z trojúhelníkové nerovnice

$$\begin{aligned} & |U_{1T} U_{1H}^* + U_{2T} U_{2H}^* \cdot X| + (T \leftrightarrow A) \leq \\ & \leq |U_{1T} U_{1H}^*| \cdot (1 - X) + |U_{1T} U_{1H}^* + U_{2T} U_{2H}^*| \cdot X + (T \leftrightarrow A) \end{aligned} \quad (5.31)$$

vidíme, že v proměnné X je výraz C konvexní, tudíž maxima nabývá v jedné z krajních hodnot. Maxima tedy dosáhneme buď pro $I_2 = I_3$ nebo $I_2 = I_1$.

Zbytek diskuze se opírá právě o fakt, že dvě I_i jsou si rovny. Opět bez újmy na obecnosti předpokládejme $I_1 = I_2$, neboť diskuze $I_2 = I_3$ by probíhala stejně. V takové případě se můžeme vrátit zpět k (5.28), využít (5.29) a získat

$$C = (|U_{3T} U_{3H}^*| + |U_{3A} U_{3H}^*|) (I_1 - I_3) \leq (|U_{3T} U_{3H}^*| + |U_{3A} U_{3H}^*|) (I_{max} - I_{min}). \quad (5.32)$$

Naším cílem je najít extrém výrazu

$$(|U_{3T} U_{3H}^*| + |U_{3A} U_{3H}^*|) \quad (5.33)$$

na množině

$$U_{3T} U_{3T}^* + U_{3A} U_{3A}^* + U_{3H} U_{3H}^* = 1. \quad (5.34)$$

Fáze těchto komplexních koeficientů jsou zřejmě irelevantní a můžeme se omezit pouze na reálné matice U . Standardními metodami, například parametrizací pomocí sférických souřadnic, nalezneme maximum

$$(|U_{3T} U_{3H}^*| + |U_{3A} U_{3H}^*|) \rightarrow |\sin \phi \cos \phi| \cdot \left| |\sin \theta| + |\cos \theta| \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (5.35)$$

přičemž rovnost lze dosáhnout například pro $(U_{3T}, U_{3A}, U_{3H}) = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$. Celkově dostáváme

$$\begin{aligned} & \left| \sum_i (U_{iT} U_{iH}^* + U_{iA} U_{iH}^*) I(s_i, k) \right| \leq \\ & \leq \sum_i (|U_{iT} U_{iH}^* I(s_i, k)| + |U_{iA} U_{iH}^* I(s_i, k)|) \leq \sqrt{2} \frac{I_{max} - I_{min}}{2} = \sqrt{2} \cdot 3 \end{aligned} \quad (5.36)$$

a tím pádem

$$|M_{\nu}^{IJ}| < \frac{9\sqrt{2}}{(4\pi)^4} g_s^2 g_R^2 V |y_{max}^{IJ}|. \quad (5.37)$$

Hodnoty vazeb g_R, g_s můžeme odhadnout z jejich běhu (viz 4.5). Jako hrubý odhad můžeme použít například $g_R \approx 0.6$, $g_s \approx 0.5$ (což v závislostech 4.1 odpovídá bodu $\sim 10^{16} GeV$). Následně dostáváme

$$|M_{\nu}^{IJ}| \lesssim 10^{-3.2} V. \quad (5.38)$$

Ve variantách $SU(5) \times U(1)$ modelu diskutovaných v [14, 15] jsou obdobné grafy jedinými příspěvky k majoranovské hmotnosti. V těchto modelech tedy požadujeme, aby $M_{\nu} > M_{min} \approx 10^{13} GeV$, což je minimální potenciálně realistická hodnota majoranovské hmotnosti slučitelná s experimentálními limity na hmotnosti lehkých neutrin při diracovské hmotnosti $m_{\nu} \sim m_u \sim 10^2 GeV$. Kdybychom toto požadovali i v námi zkoumaném modelu, získali bychom z (5.38)

$$V \gtrsim 10^{16.2} GeV, \quad (5.39)$$

což zpětně potvrzuje konzistenci volby hodnot vazeb g_R, g_s odpovídající škále $\sim 10^{16} GeV$.

Nyní si ale ukážeme, že příspěvky generované interakcemi skalárních bosonů, které jsme schopni v tomto modelu sestojit, nám umožňují, aby se spontánní narušení symetrie $G_{PS} \rightarrow G_{SM}$ potenciálně odehrávalo na výrazně nižší škále.

5.2.2 Příspěvky generované výhradně skalárními bosony

Díky multipletu $\Phi = (15, 2, \bar{2})$ máme dostatečně bohatý skalární sektor na to, abychom byli schopni zkonstruovat smyčkové korekce k majoranovské hmotnosti bez vektorových bosonů. To je ale podstatný rozdíl oproti minimálnímu $SO(10)$ modelu [13], minimálním variantám $SU(5) \times U(1)$ modelu [15], či některým dalším minimálním modelům s odlišnou kalibrační grupou [16]. Jak uvidíme, tyto příspěvky mohou být dokonce dominantní. V principu jsme tak schopni „snáze“ popsat lehká neutrina, nicméně za cenu nižší prediktivity, neboť do výrazů pro majoranovskou hmotnost neutrin vstupují další neznámé nezávislé parametry.

Na obrázku 5.3 můžeme vidět, jak odpovídající diagramy vypadají v řeči G_{PS} multipletů, zatímco na 5.6 můžeme vidět, jak se patřičné multiplety musí transformovat vůči G_{SM} . Uvědomme si, že platí

$$\Phi = (15, 2, \bar{2}) = (8, \bar{2}, 1/2)_{SM} \oplus (8, \bar{2}, -1/2)_{SM} \oplus \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} & \oplus (3, \bar{2}, 7/6)_{SM} \oplus (3, \bar{2}, 1/6)_{SM} \oplus \\ & \oplus (\bar{3}, \bar{2}, -7/6)_{SM} \oplus (\bar{3}, \bar{2}, -1/6)_{SM} \oplus \\ & \oplus (1, \bar{2}, 1/2)_{SM} \oplus (1, \bar{2}, -1/2)_{SM} \end{aligned}$$

$$h = (1, 2, \bar{2}) = (1, \bar{2}, 1/2) \oplus (1, \bar{2}, -1/2) \quad (5.41)$$

a rovnou identifikujme jednotlivé komponenty

$$\Phi^{\alpha i}_{\bar{1}4} := \frac{1}{\sqrt{2}} B_1^{\alpha i} = (\bar{3}, \bar{2}, -1/6)_{SM}, \quad (5.42)$$

$$\Phi^{\alpha 4}_{\bar{2}i} := \frac{1}{\sqrt{2}} B_2^{\alpha i} = (3, \bar{2}, 1/6)_{SM}, \quad (5.43)$$

$$\Phi^{\alpha j}_{\bar{1}k} := O_1^{\alpha j} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8}} \delta_k^j h_{\Phi 1}^{\alpha} = (8, \bar{2}, 1/2)_{SM} + (1, \bar{2}, 1/2)_{SM}, \quad (5.44)$$

$$\Phi^{\alpha j}_{\bar{2}k} := O_2^{\alpha j} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8}} \delta_k^j h_{\Phi 2}^{\alpha} = (8, \bar{2}, -1/2)_{SM} + (1, \bar{2}, -1/2)_{SM}, \quad (5.45)$$

$$h_{\bar{1}}^{\alpha} := h_1^{\alpha} = (1, \bar{2}, 1/2)_{SM}, \quad (5.46)$$

$$h_{\bar{2}}^{\alpha} := h_2^{\alpha} = (1, \bar{2}, 1/2)_{SM}, \quad (5.47)$$

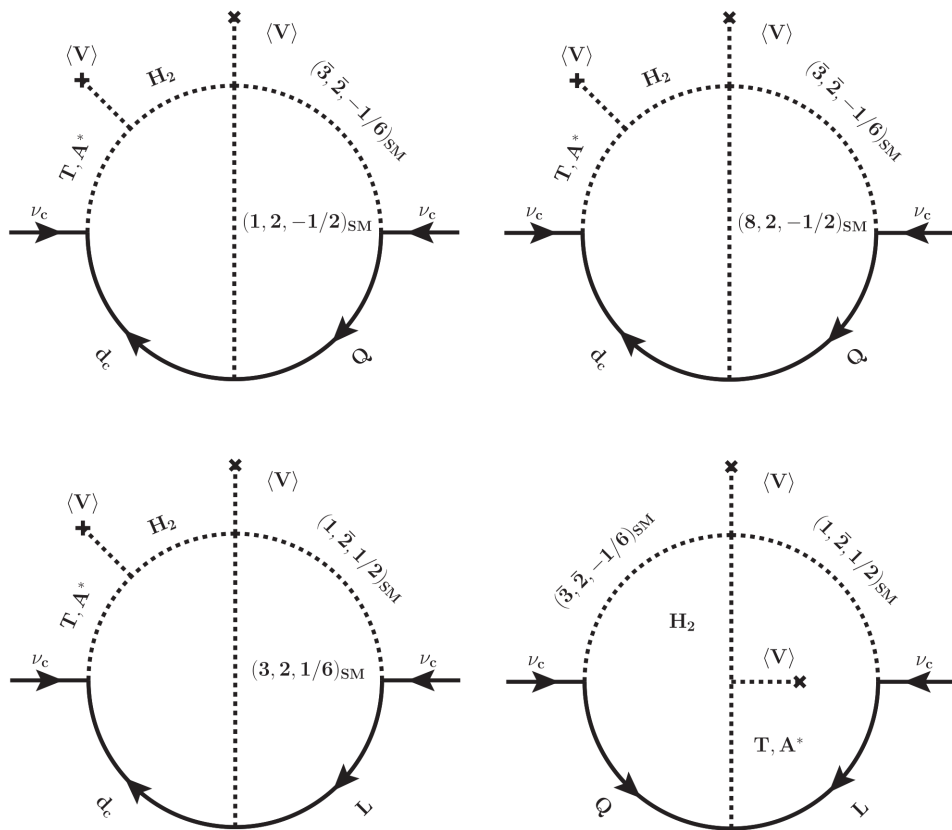
$$\Phi^{\alpha 4}_{\bar{1}4} = -\sqrt{\frac{3}{8}} h_{\Phi 1}^{\alpha} = (1, \bar{2}, 1/2)_{SM}, \quad (5.48)$$

$$\Phi^{\alpha 4}_{\bar{2}4} = -\sqrt{\frac{3}{8}} h_{\Phi 2}^{\alpha} = (1, \bar{2}, -1/2)_{SM} \quad (5.49)$$

s tím, že indexy $i, j, \dots = 1, 2, 3$. Vidíme, že bez multipletu $\Phi = (15, 2, \bar{2})$ bychom potřebné diagramy nebyli schopni zkonstruovat. To je patrné z diagramů 5.6, neboť veškeré varianty obsahují barevný triplet nebo oktet, který multiplet h neobsahuje.

Ukažme, že se v narušeném lagrangiánu skutečně objeví potřebné interakce vhodné trojice skalárních polí. Získáme je zápisem lagrangiánu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ni & \left(c_1 H^{*\bar{\alpha}i} H_{\bar{\beta}j} \Phi^{\alpha k}_{\bar{\alpha}i} \Phi^{\beta j}_{\bar{\delta}k} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\bar{\delta}\bar{\beta}} + c_2 H^{*\bar{\alpha}i} H_{\bar{\beta}j} \Phi^{\alpha j}_{\bar{\alpha}l} \Phi^{\beta l}_{\bar{\delta}i} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\bar{\beta}\bar{\delta}} + \right. \\ & + c_3 H^{*\bar{\alpha}i} H_{\bar{\beta}j} \Phi^{\alpha j}_{\bar{\alpha}i} h_{\bar{\delta}}^{\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\bar{\beta}\bar{\delta}} + c_4 H^{*\bar{\alpha}i} H_{\bar{\beta}j} \Phi^{\alpha j}_{\bar{\gamma}i} h_{\bar{\alpha}}^{\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\bar{\beta}\bar{\gamma}} + \\ & + c_5 H^{*\bar{\alpha}i} H_{\bar{\beta}j} \Phi^{\alpha j}_{\bar{\alpha}i} h_{\alpha}^{*\bar{\beta}} + c_6 H^{*\bar{\alpha}i} H_{\bar{\beta}j} \Phi^{\alpha j}_{\bar{\gamma}i} h_{\alpha}^{*\bar{\delta}} \epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\delta}} \epsilon^{\bar{\beta}\bar{\gamma}} + h.c \left. \right) + \\ & + c_7 H^{*\bar{\alpha}i} H_{\bar{\beta}j} \Phi_{\alpha i}^{*\bar{\beta}l} \Phi_{\bar{\alpha}l}^{\alpha j} + c_8 H^{*\bar{\alpha}i} H_{\bar{\beta}j} \Phi_{\alpha i}^{*\bar{\gamma}l} \Phi_{\bar{\delta}l}^{\alpha j} \epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \epsilon^{\bar{\beta}\bar{\delta}} + \\ & + c_9 H^{*\bar{\alpha}i} H_{\bar{\beta}j} \Phi_{\alpha l}^{*\bar{\beta}j} \Phi_{\bar{\alpha}i}^{\alpha l} + c_{10} H^{*\bar{\alpha}i} H_{\bar{\beta}j} \Phi_{\alpha l}^{*\bar{\gamma}j} \Phi_{\bar{\delta}i}^{\alpha l} \epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \epsilon^{\bar{\beta}\bar{\delta}} \end{aligned} \quad (5.50)$$



Obrázek 5.6: Dvousmyčkové korekce k majoranovské hmotnosti polí neutrin ν_c v minimálním Pati-Salamově modelu - příspěvky generované výhradně skalárními bosony v řeči multipletů Standardního modelu.

v asymetrické fázi. Konkrétně obdržíme

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \ni & \frac{1}{\sqrt{2}} V (c_1 + c_2) \cdot \\
& \cdot \left(H_{2j} O_{1\ k}^{\beta j} B_1^{\alpha k} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{8}} H_{2j} B_1^{\beta j} h_{\Phi 1}^{\alpha} - \right. \\
& \left. - H_2^{*i} O_{2\ i}^{\alpha k} B_2^{\beta k} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{8}} H_2^{*i} B_2^{\alpha i} h_{\Phi 2}^{\beta} \right) \epsilon_{\alpha\beta} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} V (c_3 + c_4) \left(-H_{2j} B_1^{\alpha j} h_1^{\beta} + H_2^{*i} B_2^{\alpha i} h_2^{\beta} \right) \epsilon_{\alpha\beta} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} V (c_5 + c_6) \left(H_{2j} B_1^{\alpha j} h_{2\alpha}^* + H_2^{*i} B_2^{\alpha i} h_{1\alpha}^* \right) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} V (c_7 + c_8) \left(-\frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{8}} H_{2j} B_1^{\alpha j} h_{\Phi 2\alpha}^* + H_{2j} O_{1\ l}^{\alpha j} B_{2\alpha}^{*l} \right) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} V (c_9 + c_{10}) \left(-\frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{8}} H_{2j} B_{2\alpha}^{*j} h_{\Phi 1}^{\alpha} + H_{2j} O_{2\alpha l}^{*j} B_1^{\alpha l} \right) + h.c.,
\end{aligned} \tag{5.51}$$

respektive

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \ni & -\frac{1}{\sqrt{2}} V (c_1^* + c_2^*) H_2^{*j} O_{1\beta j}^* B_{1\alpha k}^* \epsilon^{\alpha\beta} - \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} V (c_1 + c_2) H_2^{*i} O_{2\ i}^{\alpha k} B_2^{\beta k} \epsilon_{\alpha\beta} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} V (c_7 + c_8) H_2^{*j} O_{1\alpha j}^* B_{2\ l}^{\alpha l} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} V (c_9 + c_{10}) H_2^{*j} O_{2\ j}^{\alpha l} B_{1\alpha l}^*
\end{aligned} \tag{5.52}$$

a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \ni & \frac{1}{2\sqrt{3}} V (c_1^* + c_2^*) H_2^{*j} B_{1\beta j}^* h_{\Phi 1\alpha}^* \epsilon^{\alpha\beta} + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{3}} V (c_1 + c_2) H_2^{*i} B_2^{\alpha i} h_{\Phi 2}^{\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} V (c_3^* + c_4^*) H_2^{*j} B_{1\alpha j}^* h_{1\beta}^* \epsilon^{\alpha\beta} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} V (c_3 + c_4) H_2^{*i} B_2^{\alpha i} h_2^{\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} V (c_5^* + c_6^*) H_2^{*j} B_{1\alpha j}^* h_2^{\alpha} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} V (c_5 + c_6) H_2^{*i} B_2^{\alpha i} h_{1\alpha}^* - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{3}} V (c_7 + c_8) H_2^{*j} B_{1\alpha j}^* h_{\Phi 2}^{\alpha} - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{3}} V (c_9 + c_{10}) H_2^{*j} B_{2\ j}^{\alpha} h_{\Phi 1\alpha}^*.
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Abychom sladili polohy indexů jednotlivých multipletů, označme

$$O^*_{(m)j}{}^{\alpha k} := (\epsilon^{\alpha\beta} O^*_{1\beta j}{}^k, O^*_{2i}{}^{\alpha k}), \quad (5.54)$$

$$B^*_{(m)\alpha k} := (B^*_{1\alpha k}, \epsilon_{\alpha\beta} B^*_{2k}{}^\beta), \quad (5.55)$$

$$h^*_{(m)\alpha} := (\epsilon^{\alpha\beta} h^*_{1\beta}, h^*_{2\alpha}, \epsilon^{\alpha\beta} h^*_{\Phi 1\beta}, h^*_{\Phi 2\alpha}). \quad (5.56)$$

Kompaktně tak můžeme předešlé interakce zapsat například jako

$$\mathcal{L} \ni \frac{1}{\sqrt{2}} V H_2^{*j} \sum_{m,n} c_{mn}^{OB} O^*_{(m)j}{}^{\alpha k} B^*_{(n)\alpha k} + \frac{1}{\sqrt{2}} V H_2^{*j} \sum_{m,n} c_{mn}^{Bh} B^*_{(n)\alpha k} h^*_{(m)\alpha}. \quad (5.57)$$

Vidíme tak, že grafů typu 5.6 dokážeme sestrojit celou řadu. Každý z příspěvků je úměrný škále spontánního narušení V , yukawovské matici y_i a dvojici yukawovských matic $z_{y_{1,2h}, y_{1,2\Phi}}$. Dále je patrné, že z matematického hlediska jsou všechny příspěvky úměrné stejnému typu dvousmyčkového integrálu.

Kvůli velikému počtu odlišných příspěvků prakticky nejsme schopni diskutovat velikost celkové korekce v plné obecnosti. Všechny tyto příspěvky ale mají řadu společných rysů, zkusme se tak zaměřit pouze na jeden konkrétní. Vezměme v úvahu například pouze příspěvek, který je úměrný maticím $y_{1h}, y_{1\Phi}$ a matici $y_{1/2}$ zároveň. Jediný takový příspěvek je daný lagrangianem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1h1\Phi} = & -\nu_{cI} d_{cK}^i (y_1^{IK} T_i + y_2^{IK} A_i^*) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} y_{1\Phi}^{*IJ} \epsilon_{\beta\alpha} \bar{d}_{cJi} \bar{l}_I^\alpha B_{(2)}^{\beta i} + \\ & + y_{1h}^{IJ} \epsilon^{\beta\alpha} h_{(1)\beta} l_{I\alpha} \nu_{cJ} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} V H_2^{*j} \sum_{m,n} c_{mn}^{Bh} B^*_{(n)\alpha k} h^*_{(m)\alpha}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Na tomto příspěvku demonstrujeme, jakým mechanismem dojde k odečtení divergencí smyčkových grafů a ukážeme, jak velké mohou v principu být odpovídající radiační korekce k majoranovské hmotnosti neutrin.

Rozhodněme se ještě přeznačit

$$T_{(m)i} := (T_i, A_i^*, H_{2i}). \quad (5.59)$$

Smyčkovou korekci k majoranovské hmotnosti generovanou lagrangianem (5.58) poté můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} M_s := i \langle \nu_{cI} \nu_{cJ} \rangle_{1PI}^{\mathcal{L}_{1h1\Phi}} = & \frac{3V}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{mn} (y_l^{IK} y_{j\Phi NK}^* y_{1h}^{NJ} + y_l^{JK} y_{j\Phi NK}^* y_{1h}^{NI}) c_{mn}^{Bh} \\ & \sum_{abc} \sum_{\lambda} U_{a(l)}^{(T)} U_{a(3)}^{*(T)} U_{b(1)}^{(h\lambda)} U_{b(m)}^{*(h\lambda)} U_{c(2)}^{(B\lambda)} U_{c(n)}^{*(B\lambda)} \\ & \left\{ m_a^{(T)}, 0; m_b^{(h\lambda)}, 0; m_c^{(B\lambda)} \right\} |(\not{p}\not{q})|. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Odůvodněme jednotlivé faktory. Faktor 3 plyne z tří odlišných barevných variant příslušného grafu, resp. z úžení $SU(3)$ indexů. Zbytek prvního řádku tvoří pouze příslušné interakční konstanty daných vertexů. Symetrizaci součinu yukawovských

matic jsme obdrželi ze stejného důvodu, jako jsme u příspěvků generovaných vektorovými bosony obdrželi faktor 2 (příspěvky byly úměrné symetrické yukawovské matici). Druhý řádek tvoří unitární matice diagonalizující hmotnostní matice příslušných skalárních polí. Matice $U^{(T)}$ diagonalizuje spektrum tripletů $T_{(m)}$, ve skutečnosti se tedy jedná o přeznačení matice (4.94). Analogicky $U^{(h\lambda)}$ diagonalizuje spektrum polí (5.56), konkrétně λ -komponenty těchto dubletů, atd. Obdobně značíme příslušné hmotnosti, které vystupují v posledním řádku. Takzvaná *Van der Bijova závorka* značí příslušný smyčkový integrál, tedy

$$\begin{aligned} & \left\{ m_a^{(T)}, 0; m_b^{(h\lambda)}, 0; m_c^{(B\lambda)} \right\} |(\not{p}\not{q})| = \\ &= \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^8} \frac{\not{p}}{p^2} \frac{\not{q}}{q^2} \frac{1}{p^2 - (m_a^{(T)})^2} \frac{1}{q^2 - (m_b^{(h\lambda)})^2} \frac{1}{(p+q)^2 - (m_c^{(B\lambda)})^2}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Tento způsob značení detailně zavádíme v příloze C. V téže příloze lze nalézt integrál (5.61) explicitně vypočítaný.

Důležitým pozorováním je, že rozvojem v regularizačním parametru získáme

$$2(4\pi)^4 \left\{ m_a^{(T)}, 0; m_b^{(h\lambda)}, 0; m_c^{(B\lambda)} \right\} |(\not{p}\not{q})| = \frac{1}{\epsilon} + O(1). \quad (5.62)$$

Divergentní část tedy vůbec nezávisí na konkrétních hmotnostech. Díky tomu je ale výraz (5.60) skutečně konečný, což ihned vidíme z podmínky unitárnosti

$$\sum_a U_{a(l)}^{(T)} U_{a(3)}^{*(T)} = \delta_{l3} \quad (5.63)$$

Stejným argumentem lze dokázat, že výraz je nezávislý na renormalizační škále. Díky tomu můžeme psát

$$\begin{aligned} M_s &= \frac{3V}{4(4\pi)^4} \sum_{l=1}^2 \sum_{mn} (y_l^{IK} y_{j\Phi NK}^* y^{NJ} + y_l^{JK} y_{j\Phi NK}^* y^{NI})_{c_{mn}}^{Bh} \\ & \sum_{abc} \sum_{\lambda} U_{a(l)}^{(T)} U_{a(3)}^{*(T)} U_{b(1)}^{(h\lambda)} U_{b(m)}^{*(h\lambda)} U_{c(2)}^{(B\lambda)} U_{c(n)}^{*(B\lambda)} I_{sk.}(x_{ac}^{\lambda}, y_{bc}^{\lambda}), \end{aligned} \quad (5.64)$$

kde

$$x_{ac}^{\lambda} := \left(\frac{m_a^{(T)}}{m_c^{(B\lambda)}} \right)^2, \quad (5.65)$$

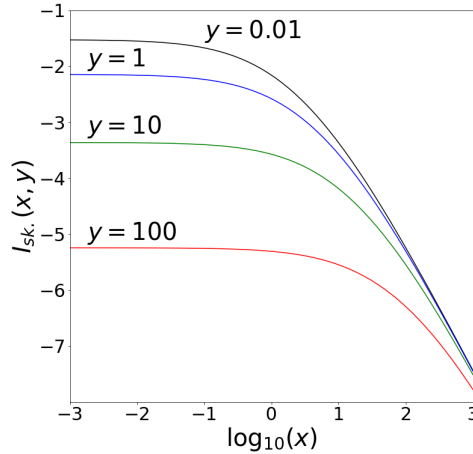
$$y_{bc}^{\lambda} := \left(\frac{m_b^{(h\lambda)}}{m_c^{(B\lambda)}} \right)^2, \quad (5.66)$$

$$(5.67)$$

a funkce $I_{sk.}$ je dána rovnicí (C.39). Představu o chování této funkce si můžeme udělat na základě grafu 5.7.

Jelikož je integrál $I_{sk.}$ v principu neomezený a zároveň se ve výrazu (5.64) vyskytuje velké množství neznámých parametrů v netriviálních kombinacích, nejsme schopni najít přesný horní limit, jako tomu bylo u korekce z předešlé části (5.37). Pokusme se alespoň učinit řádové odhady, abychom získali představu, jak velká může korekce M_s být. Na základě podmínky poruchovosti (5.25) můžeme odhadnout

$$\left| y_l^{IK} y_{j\Phi NK}^* y_{1h}^{NJ} + y_l^{JK} y_{j\Phi NK}^* y_{1h}^{NI} \right| \lesssim 2y_{max} y_{1h} y_{1\Phi} \sim 8\pi y_{1h} y_{1\Phi} \quad (5.68)$$



Obrázek 5.7: Funkce odpovídající dvousmyčkovým integrálům typu 5.3

Dále na základě podmínky poruchovosti konstant skalárního potenciálu pišme odhad

$$c_{mn}^{Bh} \lesssim \frac{1}{2\sqrt{3}} 2c_{max} \sim \frac{4\pi}{\sqrt{3}}. \quad (5.69)$$

Komplikace spočívá právě v odhadu kombinací unitárních matic diagonalizujících skalární spektrum a integrálu $I_{sk.}$. V první řadě zdůrazněme, že i přestože je funkce $I_{sk.}$ neomezená, výraz (5.60) nelze v poruchovém režimu získat libovolně veliký. Na první pohled by se mohlo zdát, že pokud by konkrétní $m_c^{(B\lambda)}$ odpovídalo lehkému Higgsově bosonu standardního modelu, získali bychom extrémně velké hodnoty proměnných funkce $I_{sk.}$ a následně i extrémně velkou zkoumanou dvousmyčkovou korekci. Tak tomu ve skutečnosti není, neboť „absolutní škála“ této funkce není podstatná. Pro dané $m_c^{(B\lambda)}$ můžeme k funkci $I_{sk.}$ přičíst libovolnou konstantu bez změny velikosti M_s . To jsme koneckonců již viděli, když jsme ukazovali, jakým způsobem dojde k vyrušení závislosti na regularizačním parametru ϵ . Jedná se o přímočarý důsledek relace (5.63). Zároveň z diskuze skalárního potenciálu 4.4.4 víme, že v poruchovém režimu je přirozená škála ostatních skalárních částic rovna V , jedinou výjimkou jsou dva triplety ze spektra H_2, A^*, T . Proměnnou y (5.66) tedy nelze získat libovolně velkou, na rozdíl od proměnné x (5.65). V této proměnné pak skutečně výraz $I_{sk.}$ logaritmicky diverguje. Zároveň se ale dostáváme do režimu (4.100), což ihned vede k potlačení jakékoli divergence diskutované korekce k majoranovské hmotnosti. Unitární matice $U_{a(i)}^{(T)}$ v tomto případě nabývá tvaru (4.103), dostaneme tak výraz s logaritmicky rostoucím čitatelem a jmenovatelem rostoucím jako mocnina. Celkově by tak ve skutečnosti zkoumaná radiační korekce klesala k nule.

Na základě chování funkce $I_{sk.}$, viz 5.7, učiňme jednoduchý odhad

$$\left| \sum_{mn} \sum_{abc} \sum_{\lambda} U_{a(l)}^{(T)} U_{a(3)}^{*(T)} U_{b(1)}^{(h\lambda)} U_{b(m)}^{*(h\lambda)} U_{c(2)}^{(B\lambda)} U_{c(n)}^{*(B\lambda)} I_{sk.}(x_{ac}^{\lambda}, y_{bc}^{\lambda}) \right| \sim 1. \quad (5.70)$$

O hmotnostech těžkých skalárních částic nemáme dostatečné informace. Tvrdíme tak, že hmotnostní spektrum může být v principu takové, že rozmezí hodnot $I_{sk.}(x_{ac}^{\lambda}, y_{bc}^{\lambda})$ je dostatečně velké (a zároveň ve spektru nemáme příliš těžké triplety,

viz předchozí diskuze), aby výraz (5.70) skutečně dosahoval velikosti řádu ~ 1 . Celkově pak dostáváme potenciální velikost

$$M_{sk.}^{max} \sim \frac{\sqrt{3}}{2(4\pi)^2} y_{1h} y_{1\Phi} V. \quad (5.71)$$

To je ale kvantitativně podstatný rozdíl oproti korekcím generovaným interakcemi s vektorovými bosony. Místo úměry kalibračním vazbám g_R, g_s jsme obdrželi úměru yukawovským maticím $y_{1h}, y_{1\Phi}$. Tyto matice sice vystupují ve výrazech pro hmotnosti matice fermionů (4.22), nicméně volnost v těchto výrazech je tak velká, že nelze učinit závěry o relativní škále velikostí těchto matic. I poněkud přízemní odhad

$$y_{1h}, y_{1\Phi} \lesssim 1 \quad (5.72)$$

vede na

$$M_{sk.}^{max} \sim 10^{-2.3} V, \quad (5.73)$$

zatímco kdyby se podařilo získat realistické hmotnostní matice fermionů i v případě na hraně poruchovosti

$$y_{1h}, y_{1\Phi} \sim 4\pi, \quad (5.74)$$

dostali bychom dokonce

$$M_{sk.}^{max} \sim V. \quad (5.75)$$

Tvrdíme tedy, že nelze vyloučit scénář, kdy se spontánní narušení symetrie $G_{PS} \rightarrow G_{SM}$ odehrává na škále $V \sim 10^{13} \text{ GeV}$ a i přesto je extrémně nízká hmotnost neutrin dána dvousmyčkovou radiační korekcí.

Shrňme si, co jsme na základě chování korekce dané lagrangiánem (5.58) zjistili. V první řadě jsme demonstrovali, jakým způsobem dojde k vyrušení divergencí v regularizačním parametru smyčkových integrálů. Dále jsme viděli, že tato korekce je úměrná součinu tří yukawovských matic. V principu tak může být tento typ radiačních korekcí řádově mnohem větší, než příspěvek generovaný pomocí interakcí s kalibračními bosony. Tento závěr je zcela neovlivněn tím, že jsme uvažovali pouze určitou třídu korekcí. Ostatní korekce jsou totiž úměrné jiné sadě yukawovských matic, tudíž nemůže dojít k žádnému „přirozenému“ odečtení a následnému celkovému potlačení tohoto typu korekcí.

5.2.3 Celková korekce k majoranovské hmotnosti neutrin

Na závěr provedeme stručné shrnutí získaných poznatků o dvousmyčkové radiační korekci k majoranovské hmotnosti v minimálním Pati-Salamově modelu. Viděli jsme, že existují dva zásadně odlišné typy Feynmanových grafů, které na úrovni dvou smyček generují majoranovskou hmotnost pro pole ν_c .

Na prvním typu korekcí se podílejí interakce polí s vektorovými bosony. Pro tuto korekci lze psát (5.23)

$$M_{v.}^{IJ} = \frac{3g_s^2 g_R^2}{(4\pi)^4} V \sum_j (y_1^{IK} U_{jT} + y_2^{IK} U_{jA^*}) U_{jH}^* I(s_j, k). \quad (5.76)$$

Yukawovské matice $y_{1,2}$ jsou zcela nekorelované s diracovskými hmotnostmi fermionů. Pokud požadujeme, aby teorie byla v těchto konstantách poruchová, dostaneme (5.37)

$$|M_{v.}^{IJ}| < \frac{9\sqrt{2}}{(4\pi)^4} g_s^2 g_R^2 V |y_{max}^{IJ}|. \quad (5.77)$$

Pokud by se jednalo o jediný zdroj majoranovské hmotnosti neutrin, požadovali bychom $M_{\nu} \gtrsim 10^{13} \text{ GeV}$. Pomocí běhu vazeb $g_{R,s}$ bychom pak obdrželi podmínku na škálu spontánního narušení symetrie (5.38), (5.39)

$$|M_{\nu}^{IJ}| \lesssim 10^{-3.2} V. \quad (5.78)$$

$$V \gtrsim 10^{16.2} \text{ GeV}. \quad (5.79)$$

Druhý typ korekcí je dán pouze interakcemi skalárních bosonů. Tyto korekce bychom nebyli v tomto modelu schopni získat bez multipletu $\Phi = (15, 2, \bar{2})$. Těchto korekcí je příliš velké množství na to, abychom byli schopni přesně a detailně analyzovat celkovou velikost jejich součtu. Příslušný dvousmyčkový integrál je navíc neomezený ve svých proměnných, což opět komplikuje diskuzi. Na určité třídě těchto korekcí jsme si tak alespoň ukázali některé základní vlastnosti. Předně tyto korekce jsou úměrné součinu tří yukawovských matic, přičemž dvě z nich souvisí s diracovskými hmotnostmi fermionů. V důsledku je tak v principu možné, aby tento typ korekcí dosahoval potenciálně až velikosti (5.75)

$$M_{sk.}^{max} \sim V. \quad (5.80)$$

To ale implikuje oproti (5.79) podstatně konzervativnější podmínku na škálu spontánního narušení

$$V \gtrsim 10^{13} \text{ GeV}. \quad (5.81)$$

Oba typy korekcí mají společné to, že v nich figuruje propagátor multipletů $D = (6, 1, 1)$ a $H = (4, 2, 1)$, respektive jsou přímo úměrné součinu prvků unitární matice (4.94) $U_{iA^*} U_{iH}^*$ nebo $U_{iT} U_{iH}^*$. Ze samotného závěru diskuze skalárního potenciálu 4.4.4 víme, že za určitých podmínek můžeme odhadnout, na jaké škále se tyto výrazy pohybují. Konkrétně kdyby Pati-Salamova kalibrační symetrie byla pouze důsledek spontánního narušení ještě větší symetrie, jako například $SO(10)$, na škále V_{GUT} , hmotnostní škála částic z multipletu $D = (6, 1, 1)$ by se rovnala právě této škále. Pokud by tato škála navíc byla výrazně větší než V , tedy

$$V_{GUT} \gg V, \quad (5.82)$$

mohli bychom na základě rovnice (4.103) psát řádový odhad

$$U_{iA^*} U_{iH}^* \sim \mu \frac{V}{V_{GUT}^2} \lesssim \sqrt{-2\lambda_1} \frac{V}{V_{GUT}} < \sqrt{8\pi} \frac{V}{V_{GUT}}, \quad (5.83)$$

kde jsme navíc využili nerovnic (4.97), (4.98) a požadované podmínky poruchovosti $\lambda_1 < 4\pi$. Pro součin $U_{iT} U_{iH}^*$ bychom získali zcela stejný odhad. V situaci, kdy je Pati-Salamova symetrie důsledek narušení větší symetrie tedy získáme dodatečné potlačení radiačních korekcí k majoranovské hmotnosti. Podmínka (5.82) je zejména relevantní při diskuzi korekcí generovaných výhradně skalárními bosony, neboť bez tohoto dodatečného potlačení připouštíme hodnoty škály $V \sim 10^{13} \text{ GeV}$, zatímco škála V_{GUT} by se měla pohybovat okolo 10^{16} GeV . Odhad (5.80) v této situaci přechází na

$$M_{sk.}^{max} \sim \sqrt{8\pi} \frac{V^2}{V_{GUT}}. \quad (5.84)$$

Při $V_{GUT} \sim 10^{16} \text{ GeV}$ získáváme modifikaci (5.81)

$$V \gtrsim 10^{14.2} \text{ GeV}. \quad (5.85)$$

5.3 Minimální Pati-Salamův model s levo-pravou symetrií

Doposud jsme škálu spontánního narušení považovali za zcela neznámou. Oproti tomu v $SU(5) \times U(1)$ modelu můžeme škálu spontánního narušení odhadnout z podmínky částečného sjednocení kalibračních vazeb [14].

Sjednocení kalibračních vazeb má svoje místo i v Pati-Salamově modelu. Kalibrační grupa obsahuje $SU(2)_L$ a $SU(2)_R$ grupu, přičemž každé odpovídá vlastní kalibrační vazba. V minimální verzi modelu, kterou jsme se do teď zabývali, se tyto vazby vyvíjejí odlišným způsobem i nad škálou V . Do běhu g_R totiž přispívá skalární multiplet $H = (4,2,1)$, zatímco do běhu g_L nikoli. Kdybychom ve skalárním sektoru uvažovali i analogický multiplet $H_L := (4,1,2)$, běh obou vazeb by se řídil stejnou diferenciální rovnicí.

Pak bychom mohli uvažovat situaci, kdy na nízkých energetických škálách vazby $g_{R,L}$ nabývají odlišných hodnot, přičemž se na škále spontánního narušení sjednotí. Následně by se vyvíjely jako jedna jediná. V modelu bychom měli kompletní diskrétní levo-pravou symetrii, byť spontánně narušenou.

V takové situaci můžeme škálu spontánního narušení V odhadnout z podmínky sjednocení $g_R = g_L$ a následně jí porovnat s odhady plynoucích z Wittenova mechanismu. Ty navíc můžeme použít stejné jako v předchozí části, neboť multiplet H_L negeneruje nové korekce k majoranovské hmotnosti polí ν_c .

Škálu V v tomto modelu odhadněme z grafu 4.1. Získáváme hrubý odhad

$$V_{PS} \sim 10^{13.7} \text{ GeV}. \quad (5.86)$$

Vidíme, že kdybychom uvažovali pouze smyčkové korekce generované interakcemi s kalibračními bosony, spontánní narušení na této škále by dle (5.39) bylo nekonzistentní s hmotnostmi neutrin. To ale není pravda, pokud uvažujeme i příspěvky čistě od skalárních bosonů, jak je vidět z (5.75).

Pozoruhodně nelze vyloučit ani scénář, kdy je Pati-Salamova symetrie důsledkem narušení $SO(10)$ symetrie. Odhad (5.85) je jistě třeba brát s rezervou. Připomeňme, že příspěvky od skalárních bosonů měly velmi komplikovanou strukturu, která nám znemožnila učinit přesné odhady. Museli jsme se tak uchýlit pouze k hrubým řádovým odhadům bez vyčíslování konkrétních numerických prefaktorů. V odhadu (5.86) pro změnu ignorujeme přesnou strukturu skalárního hmotnostního spektra, o vícesmyčkových korekcích nemluvě. Z tohoto důvodu nelze rozdíl sotva půl řádu mezi odhadem (5.85) a (5.86) brát jako signál, že je Wittenův mechanismus nekompatibilní s narušením symetrie $SO(10) \rightarrow G_{PS}$.

K tomuto modelu na závěr poznamenejme, že multiplet H_L v principu umožňuje získat další nezávislý způsob, jakým generovat hmotnosti neutrin. Konkrétně se jedná o „Wittenovskou“ obdobu seesaw mechanismu II. typu. Odpovídající Feynmanovy grafy jsou naprosto analogické k těm, které jsme zkoumali doposud, v 5.4,5.6 stačí pouze zaměnit multiplet antičástic F_c za multiplet F , kalibrační bosony W_R za W_L a multiplet H za H_L . Získáme tak radiační korekci pro majoranovskou hmotnost polí ν . Ta bude pochopitelně úměrná vakuové střední hodnotě neutrálního pole z multipletu H_L . Stejně jako tomu je v [44], i zde můžeme očekávat, že tato vakuová střední hodnota bude velmi malá. Tyto příspěvky nikterak neovlivňují dosavadní diskuzi - pokud pomocí Wittenova mechanismu, resp. se-

esaw mechanismu I. typu získáme příliš těžká neutrína, seesaw mechanismus II. typu situaci nezachrání.

5.4 Neminimální varianty Pati-Salamova modelu

Podívejme se v krátkosti, jak by situace vypadala v Pati-Salamově modelu s odlišným skalárním sektorem. Z diskuze 4.2.3 víme, že multiplet $D = (6,1,1)$ není jediný, který umožňuje narušení fermionového čísla. Podívejme se, jaké důsledky by mělo zvolení odlišného multipletu.

Multiplet $E = (10,3,1)$

Tento multiplet obsahuje singlet vůči transformacím Standardního modelu, což nám přirozeně umožňuje získat majoranovskou hmotnost přímo na stromové úrovni díky yukawovské interakci

$$y^{IJ} F_{cI}^{i\bar{\alpha}} F_{cJ}^{j\bar{\beta}} E_{ij\bar{\alpha}\bar{\beta}}. \quad (5.87)$$

Majoranovská hmotnost polí ν_c je tak zcela volný parametr teorie.

Všimněme si, že jelikož je multiplet E v obou dvojicích indexů symetrický, je i odpovídající yukawovská matice symetrická.

Multiplet $D_A = (6,3,1)$ a $E_A = (10,1,1)$

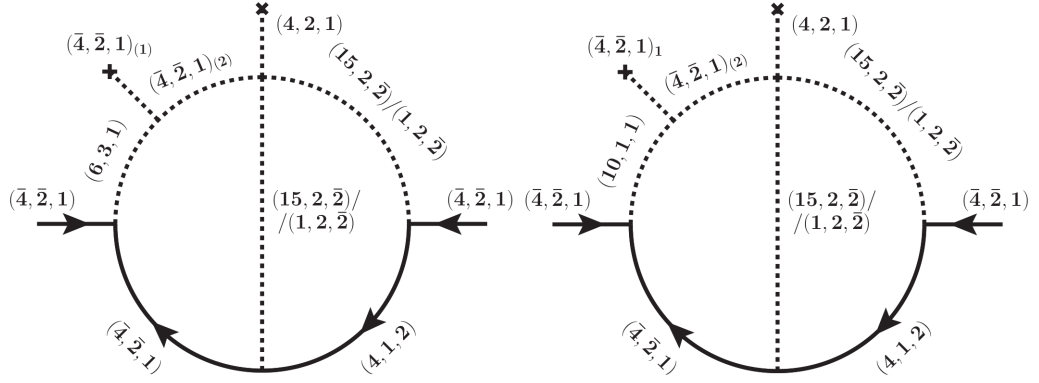
Ani jeden z těchto multipletů singlet vůči transformacím Standardního modelu neobsahuje. Zároveň je ze symetrie indexů patrné, že yukawovské matice odpovídající těmto multipletům jsou antisymetrické. To ale znamená, že grafy typu 5.2 nelze pomocí těchto multipletů zkonstruovat, neboť pouze symetrická část příslušné yukawovské matice je pro tyto korekce relevantní. Nicméně korekce typu 5.3 stále mohou být nenulové, neboť jsou úměrné součinu tří yukawovských matic. Takový součin samozřejmě již antisymetrický být nemusí. Kvalitativně se diskuze těchto skalárních příspěvků příliš neliší, zatímco kvantitativní analýza by byla závislá na konkrétní volbě ostatních skalárních multipletů.

Na 5.8 můžeme vidět, jak by mohly například vypadat konkrétní nenulové Feynmanovy diagramy. Pokud pouze nahradíme multiplet $(6,1,1)$ za $(6,3,1)$ nebo $(10,1,1)$, nebudeme schopni získat nenulový propagátor s multipletem $(4,2,1)$, neboť potřebné interakce

$$D_{Aij\bar{\alpha}\bar{\beta}} H^{*i\bar{\alpha}} H^{*j\bar{\beta}}, E_{Aij} H^{*i\bar{\alpha}} H^{*j\bar{\beta}} \epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (5.88)$$

jsou kvůli symetrii indexů identicky rovné nule. Pokud bychom měli k dispozici dva odlišné multiplety H , opět bychom byli schopni potřebný propagátor zkonstruovat.

Další možností je spontánně narušit symetrii pomocí jiného multipletu než $H = (4,2,1)$, případně uvažovat více kopií již uvažovaného multipletu. V kontextu Pati-Salamova modelu tím ale dosáhneme pouze toho, že získáme více příspěvků



Obrázek 5.8: Dvousmyčkové korekce k majoranovské hmotnosti polí neutrin ν_c v neminimálních Pati-Salamově modelu s multipletem $(6,3,1)$, resp. $(10,1,1)$. Spodní index u multipletů $(4,2,1)$ značí to, že pro konstrukci potřebné interakce potřebujeme tyto multiplety dva.

na stejné hmotnostní škále, případně obdržíme odlišný výraz pro skalární propa-
gátor mezi multipletem narušujícím fermionové číslo a multipletem narušujícím
symetrii, což by vedlo k modifikaci nerovnice (5.35). Bez přidání velkého množství
dalších multipletů se tak učiněné řádové odhady příliš nezmění.

V $SU(5) \times U(1)$ teorii [15] byla situace odlišná. Přidáním dalšího skalárního
multipletu se podařilo vyhnout úměře majoranovské hmotnosti polí ν_c yukawov-
ské matici dolních kvarků a následnému potlačení odpovídající radiační korekce.
V Pati-Salamově modelu toto potlačení nemáme již od samého začátku.

5.5 Pati-Salamův model s maximálním naruše- ním parity

Nyní se zaměříme na model s kalibrační grupou

$$G := SU(4) \times SU(2)_L \times U(1)_{T_R^3}. \quad (5.89)$$

Jedná se jak o podgrupu grupy G_{PS} , kterou jsme doteď uvažovali, ale zároveň i
o podgrupu $SO(10)$ grupy 2.2. Leptony jsme opět sjednotili s kvarky, nicméně
tentokrát uvažujeme maximálně narušenou paritu, tj. neuvažujeme $SU(2)_R$ in-
terakce, stejně jako je tomu ve Standardním modelu.

Fermiony se vůči této grupě přirozeně transformují jako

$$\begin{aligned} Q &:= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \nu \\ d_1 & d_2 & d_3 & e \end{pmatrix} = (4, 2, 0)_G, \\ U &:= \begin{pmatrix} u_c^1 & u_c^2 & u_c^3 & \nu_c \end{pmatrix} = (\bar{4}, 1, -1/2)_G, \\ D &:= \begin{pmatrix} d_c^1 & d_c^2 & d_c^3 & e_c \end{pmatrix} = (\bar{4}, 1, 1/2)_G, \end{aligned} \quad (5.90)$$

kde čísla v závorkách udávají transformační vlastnosti vůči grupě G (5.89). Hmot-
nosti fermionů můžeme generovat pomocí multipletů

$$(1, \bar{2}, 1/2)_G, (15, \bar{2}, 1/2)_G, \quad (5.91)$$

s tím, že získáme vztahy analogické k (4.26),(4.27).

Konstrukce dvousmyčkových korekcí k majoranovské hmotnosti neutrin se ale v určitých aspektech liší, neboť nyní již nemáme k dispozici nabitě bosony W_R^\pm , které hrály stěžejní roli při konstrukci příspěvků k majoranovské hmotnosti generované interakcemi s vektorovými bosony.

5.5.1 Příspěvky generované vektorovými bosony

Do potenciálních diagramů směřují dvě fermionové linky odpovídající multipletu U . Právě kvůli tomu, že již neuvažujeme kalibrační $SU(2)_R$ invarianci, nemáme k dispozici interakci vektorových bosonů s multiplety U a D zároveň. V případném diagramu tedy figurují fermiony pouze z U . Skalární multiplety, pomocí kterých lze otočit směr fermionové linie, najdeme tím pádem pomocí tenzorového součinu

$$(4,1,1/2)_G \otimes (4,1,1/2)_G = (6,1,1)_G \oplus (10,1,1)_G. \quad (5.92)$$

Všimněme si, že se v rámci grupy G_{PS} (4.1) se jedná o submultiplety reprezentací $(6,3,1)_G$ a $(10,3,1)_G$. Následující diskuze je tak prakticky shodná s tou, kterou jsme provedli v předcházející sekci.

Antisymetrická varianta $(6,1,1)_G$ odpovídá antisymetrické yukawovské matici, příslušné dvousmyčkové korekce generované interakcemi vektorových bosonů jsou tak nulové. Symetrická varianta $S := (10,1,1)_G$ obsahuje singlet Standardního modelu, kterému lze přiřadit nenulovou vakuovou střední hodnotu. Interakce

$$y^{IJ} U_I^i U_J^j S_{ij} \quad (5.93)$$

generuje majoranovský hmotností člen přímo na stromové úrovni, stejně jako tomu bylo v (5.87).

Majoranovská hmotnost neutrin je tedy buď zcela nezávislý parametr (varianta $(10,1,1)_G$) a nebo je tento typ radiačních korekcí nulový (varianta $(6,1,1)_G$).

5.5.2 Příspěvky generované výhradně skalárními bosony

Majoranovská hmotnost neutrin může být stále generována pomocí diagramů typu 5.6. Přesnou podobu diagramů nalezneme snadno, stačí se podívat na situaci v modelech s grupou G_{PS} , čemuž jsme se do teď věnovali, a z relevantních grafů, tj. z 5.3 a 5.8, vybrat správné submultiplety.

Pokusme se najít „minimální“ model s grupou G . Kromě uvedených multipletů můžeme k narušení fermionového čísla využít též multiplety

$$(6,1,0)_G, (10,1,0)_G, \quad (5.94)$$

které v kontextu grupy G_{PS} odpovídají multipletům $(6,1,1)$ a $(10,1,1)$. Nejprve si uvědomme, že vůči grupě Standardního modelu se uvedené reprezentace transformují jako

$$(6,1,0)_G = (3,1, -1/3)_{SM} \oplus (\bar{3},1,1/3)_{SM}, \quad (5.95)$$

$$(6,1,1)_G = (3,1,2/3)_{SM} \oplus (\bar{3},1,4/3)_{SM}, \quad (5.96)$$

$$(10,1,0)_G = (1,1, -1)_{SM} \oplus (3,1, -1/3)_{SM} \otimes (6,1,1/3)_{SM}. \quad (5.97)$$

Spontánní narušení symetrie $G \rightarrow G_{SM}$ provedeme pomocí multipletu

$$H_G := (4,1,1/2)_G = (1,1,0)_{SM} \oplus (3,1,2/3)_{SM}. \quad (5.98)$$

Ihned vidíme, že bez přidání dalších multipletů přichází v úvahu pouze narušení fermionového čísla pomocí multipletu $D_G := (6,1,1)_G$. To pro nás není překvapení, neboť zbylé dvě varianty v kontextu grupy G_{PS} využívaly existence tripletu H_2 (4.63), který se vyskytoval přirozeně jako součást multipletu $H = (4,2,1)$ (4.7). Zároveň ale opět narážíme na problém při konstrukci invariantní interakce, zaručující nenulovost potřebného skalárního propagátoru, z důvodu symetrie indexů. Reprezentace D_G je antisymetrická, potřebný invariant

$$D_{Gij} H_G^{*i} H_G^{*j} \quad (5.99)$$

je identicky rovný nule. Bez přidání dalších multipletů tak Wittenův mechanismus aplikovat nelze. Pokud bychom do teorie přidali například další kopii multipletu H_G , potřebné diagramy bychom byli schopni již zkonstruovat snadno. Stejně tak bychom ale mohli namísto D_G využít reprezentace $(6,1,0)_G$ a do teorie přidat multiplet $(4,1, -1/2)_G$. Odpovídající Feynmanovy diagramy by byly analogické těm z minimálního Pati-Salamova modelu 5.6. Bez dalších požadavků tak není zřejmé, kterou variantu považovat za *minimální*.

6. Rozpad protonu v Pati-Salamově modelu

V předchozí kapitole jsme ukázali, že požadavek dostatečně veliké majoronové hmotnosti polí ν_c dává spodní odhad na škálu spontánního narušení Pati-Salamovy symetrie. Za určitých podmínek, viz část 5.3, jsme mohli škálu spontánního narušení odhadnout pomocí požadavku sjednocení vazeb a následně tyto odhady porovnat. Zároveň jsme mohli v diskuzi $SU(5) \times U(1)$ modelu [15] vidět, že příliš nízká škála spontánního narušení symetrie by mohla implikovat příliš krátký poločas hypotetického rozpadu protonu.

V této kapitole aplikujeme známé výsledky o rozpadu protonu na minimální Pati-Salamův model. Ukážeme si, že minimální Pati-Salamův model je v tomto ohledu velmi neprediktivní. V důsledku nejsme schopni najít žádný vztah mezi poločasem rozpadu protonu a hmotností neutrin. Uvidíme, že situace je v odlišných variantách této třídy modelů analogická.

6.1 Minimální Pati-Salamův model

Cílem této části je zjistit, zdali interakce minimálního Pati-Salamova modelu připouštějí rozpad protonu na stromové úrovni a jak vypadají příslušné efektivní operátory dimenze $d = 6$.

V první řadě si můžeme uvědomit, že interakce fermionů s vektorovými bosony (4.40) nemohou sami o sobě v Pati-Salamově zapříčinit rozpad protonu. Zdůvodnění je přímočaré - tyto interakce zřejmě zachovávají číslo $B - L$, nicméně můžeme nahlédnout, že zároveň zachovávají i $B + L$. Tím pádem tyto interakce zachovávají baryonové i leptonové číslo zároveň a k rozpadu protonu prostřednictvím vektorových bosonů na stromové úrovni docházet nemůže. V tomto ohledu se zřejmě $SU(5) \times U(1)$ model liší.

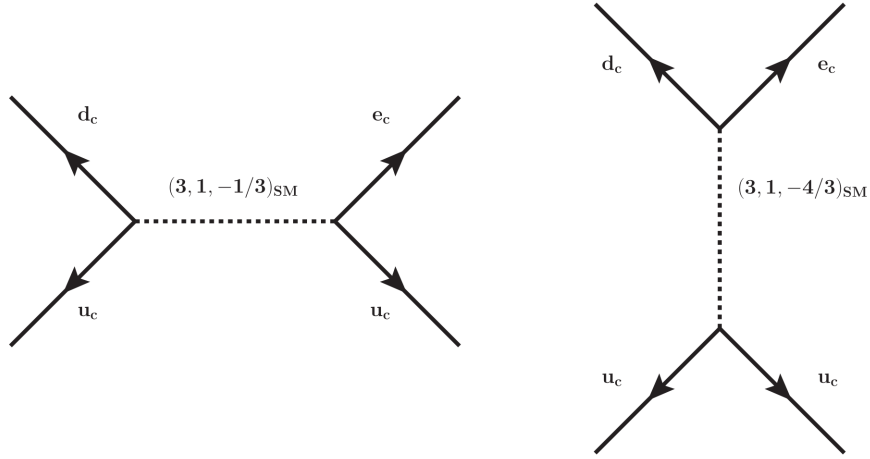
Stále se může stát, že k rozpadu protonu dochází prostřednictvím yukawovských interakcí se skalárními bosony. V [49] lze najít seznam skalárních multipletů Standardního modelu, které dokáží generovat rozpad protonu na stromové úrovni. Z této publikace bude pro nás důležitý fakt, že tuto schopnost mají skalární tripletu $(3, 1, -1/3)_{SM}$ a $(3, 1, -4/3)_{SM}$. Minimální Pati-Salamův model skutečně první z těchto tripletů obsahuje, neboť jej přirozeně obsahuje reprezentace $D = (6, 1, 1)$ (4.66). Očekáváme, že díky yukawovským interakcím tohoto multipletu půjde dosáhnout rozpadu protonu prostřednictvím diagramů typu 6.1.

Konkrétně rozpisem yukawovských interakcí (4.61) obdržíme

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (e_{cI} \vec{u}_{cJ} - \nu_{cI} \vec{d}_{cJ}) (y_1^{IJ} \vec{T} + y_2^{IJ} \vec{A}^*) + (\vec{u}_{cI} \times \vec{d}_{cJ}) (y_1^{IJ} \vec{A} + y_2^{IJ} \vec{T}^*) + \\ & + (e_{lI} \vec{u}_J - \nu_{lI} \vec{d}_J) (y_3^{IJ} \vec{T}^* + y_4^{IJ} \vec{A}) + (\vec{u}_I \times \vec{d}_J) (y_3^{IJ} \vec{A}^* + y_4^{IJ} \vec{T}) + h.c., \end{aligned} \quad (6.1)$$

kde jsme barevný index nahradili značením pomocí vektorů. Označme

$$A_{ijkl}^{IJKL} := \sum_a y_i^{IJ} y_j^{KL} \frac{U_{aT} U_{aT}^*}{m_a^2} + y_k^{IJ} y_l^{KL} \frac{U_{aA} U_{aA}^*}{m_a^2} + y_i^{IJ} y_l^{KL} \frac{U_{aA}^* U_{aT}}{m_a^2} + y_j^{IJ} y_k^{KL} \frac{U_{aA} U_{aT}^*}{m_a^2}, \quad (6.2)$$



Obrázek 6.1: Příklad Feynmanových diagramů přispívajících k rozpadu protonu na stromové úrovni.

kde m_a^2 jsou vlastní čísla matice (4.93) a U_{ij} jsou prvky matice (4.94). Pokud přejdeme k vlastním stavům hmotnosti skalárních tripletů a v diagramech typu 6.1 nahradíme (těžké) skalární propagátory

$$\frac{i}{p^2 - m_a^2} \rightarrow -\frac{i}{m_a^2}, \quad (6.3)$$

obdržíme stejné výsledky jako pomocí efektivního lagrangiánu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{eff} = & A_{2112}^{IJKL} \epsilon_{ijk} u_{cI}^i d_{cJ}^j \left(u_{cK}^k e_{cL} - d_{cK}^k \nu_{cL} \right) + \\ & + A_{23^*14^*}^{IJKL} \epsilon_{ijk} u_{cI}^i d_{cJ}^j \left(\bar{u}_K^k \bar{e}_L - \bar{d}_K^k \bar{\nu}_L \right) + \\ & + A_{4^*13^*2}^{IJKL} \epsilon_{ijk} \bar{u}_I^i \bar{d}_J^j \left(u_{cK}^k e_{cL} - d_{cK}^k \nu_{cL} \right) + \\ & + A_{4^*3^*3^*4^*}^{IJKL} \epsilon_{ijk} \bar{u}_I^i \bar{d}_J^j \left(\bar{u}_K^k \bar{e}_L - \bar{d}_K^k \bar{\nu}_L \right), \end{aligned} \quad (6.4)$$

přičemž hvězdičkou u indexů koeficientů A (6.2) značíme, že příslušná yukawovská matice je komplexně sdružená.

Na stromové úrovni tak máme hned několik efektivních operátorů dimenze $d = 6$, které přispívají k rozpadu protonu. Výpočet poločasu rozpadu protonu můžeme provést analogicky jako v [50] - přejdeme k vlastním stavům hmotnosti fermionů, určíme jednotlivé koeficienty u efektivních operátorů a dosadíme do vzorců plynoucích z chirálního lagrangiánu a mřížových výpočtů. Nicméně jak je i v tomto zdroji poukázáno, byť v kontextu $SU(5)$ teorie, pokud jsou yukawovské interakce (6.1) odlišné od těch, které jsou zodpovědné za hmotnosti fermionů, nejsme schopni učinit téměř žádné předpovědi.

Pro konkrétnost se dále omezíme pouze například na proces

$$p \rightarrow \pi_0 + e^+, \quad (6.5)$$

pro ostatní potenciální rozpadové kanály by diskuze probíhala analogicky. Uni-tární matice diagonalizující hmotnostní matice nabitých fermionů označme (v

souladu s [50]) pro tuto část

$$U_c^T M_u U = M_u^{diag.}, \quad (6.6)$$

$$D_c^T M_d D = M_d^{diag.}, \quad (6.7)$$

$$E_c^T M_e E = M_e^{diag.} \quad (6.8)$$

a definujeme

$$a(d_c, e_c) = A_{2112}^{IJKL} U_{cI1} D_{cJ1} U_{cK1} E_{cL1}, \quad (6.9)$$

$$a(d_c, e) = A_{23^*14^*}^{IJKL} U_{cI1} D_{cJ1} U_{K1}^* E_{L1}^*, \quad (6.10)$$

$$a(d, e_c) = A_{4^*13^*2}^{IJKL} U_{I1}^* D_{J1}^* U_{cK1} E_{cL1}, \quad (6.11)$$

$$a(d, e) = A_{4^*3^*3^*4^*}^{IJKL} U_{I1}^* D_{J1}^* U_{K1}^* E_{L1}^*. \quad (6.12)$$

Pro rozpadovou šířku procesu (6.5) dostaneme [50]

$$\Gamma_{p \rightarrow \pi_0 + e^+} \approx \left(1.71 \cdot 10^{-4} \text{ GeV}^5\right) \left(|a(d, e) - a(d_c, e)|^2 + |a(d, e_c) - a(d_c, e_c)|^2\right). \quad (6.13)$$

Tato veličina musí splňovat experimentální podmínku [51]

$$\Gamma_{p \rightarrow \pi_0 + e^+}^{-1} \gtrsim 1.6 \cdot 10^{34} \text{ yr}. \quad (6.14)$$

Nyní již zcela konkrétně vidíme, proč bez dalších předpokladů nejsme schopni smysluplně odhadnout poločas rozpadu protonu v rámci Pati-Salamova modelu. Struktura koeficientů (6.9)-(6.12) relevantních efektivních operátorů je příliš složitá a vstupuje do ní velké množství neznámých parametrů. Ve zcela obecném případě nemáme dostatek informací o yukawovských maticích y_i , hmotnostním spektru relevantních skalárních tripletů a ani o maticích diagonalizujících hmotnostní matice nabitých fermionů. Vhodnou volnou yukawovských konstant lze v principu dosáhnout, aby tyto koeficienty byly dokonce nulové. V následující kapitole si alespoň ukážeme, že se situace výrazně zjednoduší v případě, kdy je hmotnostní škála multipletu D výrazně vyšší, než škála spontánního narušení Pati-Salamovy symetrie. Zároveň uvidíme, že získané závěry se příliš nezmění ani v jiných realizacích Pati-Salamova modelu.

6.2 Modifikace a neminimální varianty Pati-Salamova modelu

V předchozí části jsme si na příkladu procesu (6.5) ukázali, jakou strukturu má výraz pro rozpadovou šířku protonu v minimálním Pati-Salamově modelu. V této části si ukážeme, jak se situace změní ve variantách diskutovaných v předchozí kapitole. Konkrétně si ukážeme, že pokud je Pati-Salamova symetrie důsledek spontánního narušení symetrie typu $SO(10)$, spodní hranice odhadu na škálu V (5.85) je konzistentní s dostatečně nízkou rozpadovou šířkou protonu. Poté pomocí získaných výsledků velmi stručně okomentujeme neminimální modely a variantu s maximálně narušenou paritou, resp. s kalibrační grupou G (5.89).

Pati-Salamův model jako efektivní teorie

V části 5.2.3 jsme zmiňovali, že lze Pati-Salamovu symetrii chápat jako důsledek spontánního narušení např. $SO(10)$ symetrie na škále $V_{GUT} \sim 10^{16} \text{ GeV}$. Požadavek realisticky malých hmotností neutrin implikoval řádový odhad (5.85)

$$V \gtrsim 10^{14.2} \text{ GeV}. \quad (6.15)$$

Ukažme si, jaké důsledky má spontánní narušení případné $SO(10)$ symetrie na výrazně vyšší škále než V pro rozpadovou šířku protonu. Zároveň pro jednoduchost předpokládejme, že veškeré yukawovské matice y_i se pohybují přibližně na stejné škále

$$|y_i| \sim y \quad (6.16)$$

a zavedme „efektivní“ hmotnost

$$|a(d,e) - a(d_c,e)|^2 + |a(d,e_c) - a(d_c,e_c)|^2 \sim \frac{y^4}{m_{eff}^4}. \quad (6.17)$$

Z podmínky (6.14) dostaneme

$$m_{eff} \gtrsim y \cdot 10^{15.5} \text{ GeV} \gtrsim 4\pi \cdot 10^{15.5} \text{ GeV}. \quad (6.18)$$

Zjednodušení nyní spočívá v tom, že díky předpokladu

$$\mu_{DD^*} \sim V_{GUT} \gg V \quad (6.19)$$

víme, jakou strukturu má hmotností spektrum polí z reprezentace D a jak odpovídající hmotnostní matici (4.93) diagonalizovat. Díky (4.103) můžeme psát řádový odhad

$$A_{ijkl}^{IJKL} \sim \frac{y^2}{\mu_{DD^*}^2} \sim \frac{y^2}{V_{GUT}^2}, \quad (6.20)$$

ignorovat vliv matic diagonalizujících hmotnostní matice nabitých fermionů a získat tak

$$V_{GUT} \sim m_{eff} \gtrsim 4\pi \cdot 10^{15.5} \text{ GeV} \approx 10^{16.6} \text{ GeV}, \quad (6.21)$$

což se s ohledem na učiněné velmi hrubé aproximace příliš neliší od požadavku $V_{GUT} \sim 10^{16} \text{ GeV}$. Už jen samotný vliv unitárních matic (6.6)-(6.8) může v principu limit (6.21) výrazně snížit.

Spodní limit (6.14) udává podmínku na hmotnostní škálu multipletu D , nikoli na škálu spontánního narušení Pati-Salamovy symetrie. Zároveň vidíme, že získaný limit je potenciálně konzistentní se sjednocením vazeb v rámci velké sjednocující teorie.

Neminimální varianty Pati-Salamova modelu

Snadno si uvědomíme, že z hlediska rozpadu protonu se situace v neminimálních variantách Pati-Salamova modelu příliš nezmění. Klíčová je pouze existence vhodných yukawovských interakcí částic se skalárním tripletem $(3,1, -1/3)_{SM}$. Takový triplet obsahují kromě reprezentace D i varianty 5.4 D_A, E_A i E . Skrz yukawovské vazby obdržíme lagrangián analogický k (6.1). Multiplety D_A a E

navíc jistě obsahují i multiplet $(3,1, -4/3)_{SM}$, který též do rozpadu protonu přispívá.

Jediným rozdílem je, že reprezentace D_A a E kvůli netriviální transformaci vůči $SU(2)_R$ grupě yukawovsky interagují pouze s multiplety F_c , nikoli s F . Z koeficientů (6.9)-(6.12) je tím pádem nenulový pouze první z nich. To ale na zbytku diskuze nic nemění.

$SU(4) \times SU(2)_L \times U(1)$ model

Ani zde se situace prakticky nijak nemění. Vidíme, že všechny přípustné reprezentace (5.95)-(5.97) narušující fermionové číslo obsahují barevný triplet, který generuje rozpad protonu. Yukawovské matice těchto interakcí nesouvisí s těmi, které generují hmotnosti fermionů. Můžeme tak provést obdobnou diskuzi jako v předchozích částech.

Závěr

Nejprve jsme stručně shrnuli známé výsledky Standardního modelu 1, představili si tři varianty see-saw mechanismu a princip Wittenova mechanismu 3. Následně jsme detailně diskutovali lagrangián *minimálního* Pati-Salamova modelu 4. Viděli jsme, že přirozená škála diracovské hmotnosti neutrin je stejná jako škála hmotností horních kvarků (4.26), (4.27). Z tohoto důvodu od majoranovské hmotnosti polí ν_c chceme, aby byla velká alespoň

$$M_\nu \gtrsim 10^{13} \text{ GeV}. \quad (6.22)$$

Poté získáme realistické hmotnosti lehkých neutrin (2.9).

Následně jsme ukázali, jak Wittenův mechanismus aplikovat právě v minimálním Pati-Salamově modelu 5.2. Viděli jsme, že existují dva velmi odlišné typy dvousmyčkových korekcí generující majoranovskou hmotnost polí ν_c . První z nich je analogický těm, které známe z kontextu $SO(10)$ [13] či $SU(5) \times U(1)$ modelu [14, 15]. Klíčové pro konstrukci odpovídajících diagramů jsou interakce vektorových polí, konkrétně tyto diagramy můžeme vidět na obrázku 5.4. V příloze B jsme ukázali, že stačí provést explicitní výpočet pro nulovou vnější hybnost. Zjistili jsme, že pokud by neexistovaly další radiační korekce, nerovnost (6.22) by implikovala podmínku pro vakuovou střední hodnotu multipletu narušujícího Pati-Salamovu symetrii (5.39)

$$V \gtrsim 10^{16.2} \text{ GeV}. \quad (6.23)$$

Druhý typ radiačních korekcí jsme získali tak, že jsme v předešlých Feynmanových diagramech nahradili vektorové linie za skalární 5.6. Existenci těchto korekcí nám zaručila přítomnost skalárního multipletu $(15, 2, \bar{2})$, který v narušeném lagrangiánu přispívá k diracovským hmotnostem fermionů 4.2.2. Těchto příspěvků existuje celá řada, na rozdíl od příspěvků předchozího typu jsme tak nebyli schopni kvantifikovat horní mez velikosti těchto korekcí přesně. Zaměřili jsme se tak pouze na určitou třídu korekcí, generovanou lagrangiánem (5.58). Velikost odpovídající majoranovské hmotnosti byla určena především yukawovskými konstantami, o kterých máme příliš málo informací. Z tohoto důvodu tvrdíme, že prediktivita modelu je výrazně horší než ve zmiňovaných $SU(5) \times U(1)$ a $SO(10)$ teoriích, ve kterých existují pouze korekce prvního typu. Ukázali jsme, že potenciálně nelze vyloučit ani scénář, kdy jsou odpovídající yukawovské matice velké natolik, že pro vakuovou střední hodnotu V lze namísto (6.23) požadovat pouze (5.81)

$$V \gtrsim 10^{13} \text{ GeV}. \quad (6.24)$$

Dále jsme diskutovali situaci, kdy je Pati-Salamova symetrie důsledkem spontánního narušení ještě větší kalibrační symetrie, například právě $SO(10)$ 5.2.3. Z diskuze skalárního potenciálu 4.4.4 víme, že přirozená škála hmotností polí z multipletu narušujícího fermionové číslo je právě rovna škále spontánního narušení této *velké* kalibrační symetrie. Značíme jí V_{GUT} . Pokud by tato škála byla výrazně větší než škála V , došlo by k dodatečnému potlačení obou typů radiačních korekcí. Pro velikost škály $V_{GUT} \sim 10^{16} \text{ GeV}$, okolo které by se teoreticky

měly sjednocovat kalibrační vazby 2.2, jsme místo (6.24) obdrželi přísnější odhad (5.85)

$$V \gtrsim 10^{14.2} \text{ GeV}. \quad (6.25)$$

Rozebrali jsme též možnost částečného sjednocení kalibračních vazeb v rámci Pati-Salamova modelu 5.3. Toho lze dosáhnout přidáním multipletu $H_L = (4,1,2)$ do minimálního Pati-Salamova modelu. Škála, na které by mělo dojít k sjednocení vazeb g_L, g_R je konzistentní se spodní hranicí nerovnosti (6.25).

V neminimálních Pati-Salamových modelech by diskuze vypadala velmi podobně 5.4. Výjimkou je varianta obsahující skalární multiplet $(10,3,1)$, která umožňuje získat majoranovskou hmotnost polí ν_c přímo na stromové úrovni.

V modelu s kalibrační grupou

$$G := SU(4) \times SU(2)_L \times U(1)_{T_R^3}, \quad (6.26)$$

nelze sestavit dvousmyčkové korekce prvního typu k majoranovské hmotnosti polí ν_c , pokud zároveň v teorii nemáme skalární multiplet $(10,1,1)_G$, který generuje majoranovskou hmotnost přímo na stromové úrovni 5.5. Příspěvky druhého typu lze konstruovat naprosto stejným způsobem, jako ve výše diskutovaných modelech. Jelikož je grupa G podgrupou G_{PS} , stačí uvažovat analogické interakce, pouze se omezíme na patřičné interakce submultipletů G_{PS} multipletů. Bez dalších požadavků není zřejmé, jak definovat *minimální* model s grupou G . Buď jsme nuceni uvažovat více kopií multipletu narušujícího kalibrační symetrii a nebo poněkud uměle uvažovat existenci multipletu $(4,1, -1/2)_G$ 5.5.2.

V poslední kapitole 6 jsme ukázali, že veškeré diskutované modely obsahují skalární triplet schopný generovat rozpad protonu na stromové úrovni s odpovídajícím efektivním operátorem dimenze $d = 6$. Odpovídající yukawovské konstanty jsou pro nás naprosto neznámé, což nám následně znemožňuje učinit odhady na příslušné rozpadové šířky, případně nalézt souvislost s majoranovskou hmotností neutrin, jako tomu bylo například v $SU(5) \times U(1)$ modelu [15]. Ukázali jsme však, že pokud je Pati-Salamova symetrie důsledkem spontánního narušení větší symetrie, experimentální omezení na poločas rozpadu protonu negeneruje další podmínky na škálu spontánního narušení V , nýbrž pouze na škálu V_{GUT} 6.2.

Celkově nelze diskutované modely na základě provedených úvah prohlásit za nerealistické, pouze za velmi neprediktivní v porovnání s jinými obdobnými teoriemi. Jedná se především o důsledek faktu, že majoranovská hmotnost neutrin i poločas rozpadu protonu silně ovlivňují zcela neznámé yukawovské konstanty. Řada učiněných odhadů byla provedena pouze řádově, nicméně nezdá se, že detailní numerická analýza by byla schopna bez dodatečných informací přinést relevantní předpovědi.

Seznam použité literatury

- [1] C. N Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical Review Letters*, 96, 1954.
- [2] A. A. Fadeev, L. D. , Slavnov. *Gauge Fields: An Introduction To Quantum Theory*. 2nd printing. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts USA, 1982.
- [3] A. Bailin, D. , Love. *Introduction To Gauge Field Theory*. Revisited edition. IOP Publishing Ltd, Bristol, UK, 1993.
- [4] ATLAS Collaboration. Observation of a new particle in the search for the standard model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Physics Letters B*, 716:1–29, 2012.
- [5] The Super-Kamiokande Collaboration. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Physical Review Letters*, 81, 1998.
- [6] The SNO Collaboration. Electron energy spectra, fluxes, and day-night asymmetries of 8B solar neutrinos from the 391-day salt phase SNO data set. *Physical Review C*, 72, 2005.
- [7] The KamLAND Collaboration. Measurement of neutrino oscillation with KamLAND: Evidence of spectral distortion. *Physical Review Letters*, 94, 2005.
- [8] The K2K Collaboration. Measurement of neutrino oscillation by the K2K experiment. *Physical Review D*, 74:2856–2861, 2006.
- [9] KATRIN Collaboration. An improved upper limit on the neutrino mass from a direct kinematic method by KATRIN. *Physical Review Letters*, 123, 2019.
- [10] S. R. Choudhury and S. Choubey. Updated bounds on sum of neutrino masses in various cosmological scenarios. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018:017–017, 2018.
- [11] P. Minkowski. $\nu \rightarrow e + \gamma$ at rate of one out of 109 muon decays? *Physics Letters B*, 67:421–428, 1977.
- [12] R. N. Mohapatra and G. Senjanović. Neutrino mass and spontaneous parity nonconservation. *Physical Review Letters*, 44, 1980.
- [13] E. Witten. Neutrino masses in the minimal O(10) theory. *Physics Letters B*, 91:81–84, 1980.
- [14] C. A. Rodriguez, H. Kolečová, and M. Malinský. Witten’s mechanism in the flipped SU(5). *Physical Review D*, 89, 2014.
- [15] D. Harries, M. Malinský, and M. Zdráhal. Witten’s loop in the minimal flipped SU(5) unification revisited. *Physical Review D*, 98, 2018.

- [16] G. K. Leontaris and J. D. Vergados. The see-saw mechanism in string models. *Physics Letters B*, 258:111–117, 1991.
- [17] J. C Pati and A. Salam. Lepton number as the fourth color. *Physical Review D*, 10, 1974.
- [18] H. Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics*. Second Edition. CRC Press, Boca Raton, Florida USA, 2018.
- [19] A. Zee. *Group Theory in a Nutshell for Physicist*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey USA, 2016.
- [20] R. Slansky. Group theory for unified model building. *Physics Reports*, 79:1–128, 1981.
- [21] W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein. *Quantum Chromodynamics*. Third Revised and Enlarged Edition. Springer, Berlin Heidelberg, 2007.
- [22] F. J. Ynduráin. *The Theory of Quark and Gluon Interactions*. Fourth edition. Springer, Berlin Heidelberg, 2006.
- [23] W. Greiner and J. Reinhardt. *Quantum Electrodynamics*. Fourth edition. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [24] E. Paschos. *Electroweak theory*. First edition. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo, 2007.
- [25] J. Hořejší. *Fundamentals of Electroweak Theory*. Karolinum Press, Praha, 2002.
- [26] S. Coleman and E. Weinberg. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. *Physical Review D*, 7:1888–1910, 1973.
- [27] P. W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, 13:508–509, 1964.
- [28] F. Englert and R. Brout. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Physical Review Letters*, 13:321–323, 1964.
- [29] T. W. B. Kibble. Symmetry breaking in non-abelian gauge theories. *Physical Review*, 155:1554–1561, 1967.
- [30] S. Weinberg. A model of leptons. *Physical Review Letters*, 19:1264–1266, 1967.
- [31] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg. Broken symmetries. *Physical Review*, 127:965–970, 1962.
- [32] C. Grosse-Knetter and R. Kögerler. Unitary gauge, Stueckelberg formalism, and gauge-invariant models for effective Lagrangians. *Physical Review D*, 48:2865–2876, 1993.

- [33] B. W. Lee and J. Zinn-Justin. Spontaneously broken gauge symmetries. III. Equivalence. *Physical Review D*, 5:3155–3160, 1972.
- [34] B. W. Lee and J. Zinn-Justin. Spontaneously broken gauge symmetries. IV. General gauge formulation. *Physical Review D*, 7:1049–1056, 1973.
- [35] Planck Collaboration. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594, 2016.
- [36] K.A. Olive et al. (Particle Data Group). Review of particle physics. *Chinese Physics C*, 38:090001, 2014.
- [37] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, London, UK, 2002.
- [38] D. J. Gross and F. Wilczek. Asymptotically free gauge theories. I. *Physical Review D*, 8:3633–3652, 1973.
- [39] H. D. Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions? *Physical Review Letters*, 30:1346–1349, 1973.
- [40] T.E. Velasco. *Model Building and Phenomenology in Grand Unified Theories*. PhD thesis, Univeristy College London, 2015.
- [41] H. Georgi and S. L. Glashow. Unity of all elementary-particle forces. *Physical Review Letters*, 32:438–441, 1974.
- [42] H. Fritzsch and Minkowski P. Unified interactions of leptons and hadrons. *Annals of Physics*, 93:193–266, 1975.
- [43] T. Appelquist and J. Carazzone. Infrared singularities and massive fields. *Physical Review D.*, 11:2856–2861, 1975.
- [44] R. N. Mohapatra and G. Senjanović. Neutrino masses and mixings in gauge models with spontaneous parity violation. *Physical Review D*, 23:165–180, 1981.
- [45] R. Foot, H. Lew, X. G. He, and G. C. Joshi. Seesaw neutrino masses induced by a triplet of leptons. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 44:441–444, 1989.
- [46] R. N. Mohapatra and G. Senjanović. Higgs-boson effects in grand unified theories. *Physical Review D*, 27:1601–1612, 1983.
- [47] F. del Aguila and L. E. Ibanez. Higgs bosons in SO(10) and partial unification. *Nuclear Physics B*, 177:60–86, 1981.
- [48] S. Dimopoulos and H.M. Georgi. Extended survival hypothesis and fermion masses. *Physics Letters B*, 140:67–70, 1984.
- [49] J. Arnold, B. Fornal, and M. Wise. Simplified models with baryon number violation but no proton decay. *Physical Review D*, 87:075004, 2012.

- [50] I. Doršner, S. Fajfer, and N. Kosnik. Heavy and light scalar leptoquarks in proton decay. *Physical Review D*, 86:015013, 2012.
- [51] Super-Kamiokande Collaboration. Search for proton decay via $p \rightarrow e^+\pi^0$ and $p \rightarrow \mu^+\pi^0$ in 0.31 megaton \cdot years exposure of the Super-Kamiokande water Cherenkov detector. *Physical Review D*, 95:012004, 2017.
- [52] H. K. Dreines, H. E. Harber, and P. Martin. Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry. *Physics Reports*, 494:1–196, 2010.
- [53] A. Ghinculov and Y. Yao. Massive two-loop integrals in renormalizable theories. *Nuclear Physics B*, 516:385–401, 1998.
- [54] J. Van der Bij and M. Veltman. Two-loop large higgs mass correction to the ρ parameter. *Nuclear Physics B*, 231:205–234, 1984.
- [55] G. 't Hooft and M. Veltman. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B*, 44:189–213, 1972.

A. Spinory, bispinory a Diracovy γ matice

Mějme běžnou metriku Minkowského prostoročasu ve tvaru

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (\text{A.1})$$

Spinory zavedeme jako objekty s přesně danými transformačními vlastnostmi vůči Lorentzově grupě. Necht' matice M je komplexní matice 2×2 s determinantem rovným jedné, tedy $M \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$. Kromě ní pak budeme potřebovat komplexně sdruženou matici M^* a jejich inverze M^{-1}, M^{*-1} . S maticovými indexy píšme

$$M_\alpha^\beta, (M^{-1})_\alpha^\beta, (M^*)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, (M^{*-1})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}. \quad (\text{A.2})$$

Definujme antisymetrickou matici $\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ o rozměru 2×2 s $\epsilon^{12} = 1$. Inverzní matici značíme $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, liší se pouze znaménkem. Platí relace

$$\epsilon^{\delta\alpha} M_\alpha^\beta \epsilon_{\beta\gamma} = (M^{-1})_\gamma^\delta. \quad (\text{A.3})$$

Nyní uvažme dvoukomponentní objekt ξ_α a k němu komplexně sdružený $\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$. Definujme operaci zvyšování indexu jako

$$\begin{aligned} \xi^\alpha &:= \epsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta, \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} &:= \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\xi}_{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Transformaci těchto čtyř objektů vůči matici M definujeme jako

$$\begin{aligned} \xi'_\alpha &:= M_\alpha^\beta \xi_\beta, & \xi'^\alpha &:= (M^{-1})^\alpha_\beta \xi^\beta, \\ \bar{\xi}'_{\dot{\alpha}} &:= (M^*)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{\xi}_{\dot{\beta}}, & \bar{\xi}'^{\dot{\alpha}} &:= (M^{*-1})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Všimněme si, že tyto transformace jsou konzistentní s (A.3). Požadujeme navíc, aby různé takové objekty spolu antikomutovaly, tedy aby tvořily tzv. Grassmanovu algebru. Pak tyto objekty nazýváme spinory. Z hlediska Lorentzovy grupy rovnice (A.5) neříká nic jiného, než že objekty s netečkovanými indexy tvoří $(1/2, 0)$ reprezentaci Lorentzovy grupy, zatímco ty s tečkovanými $(0, 1/2)$ [19]. Výjimečně budeme potřebovat objekty transformující se jako spinory, které však spolu komutují. Ty budeme explicitně nazývat komutujícími spinory.

Sčítací konvenci pro spinorové indexy zavedeme jako

$$\begin{aligned} \chi\eta &:= \chi^\alpha \eta_\alpha = -\eta_\alpha \chi^\alpha = \eta^\alpha \chi_\alpha = \eta\chi, \\ \bar{\chi}\bar{\eta} &:= \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\eta}\bar{\chi}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Využili jsme toho, že spinory antikomutují.

Doplňme běžné Paulieho matice o jednotkovou matici σ^0 a definujme

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i), \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i). \quad (\text{A.8})$$

Těmto maticím můžeme taktéž přiřadit spinorové indexy, konkrétně můžeme psát

$$\sigma^\mu = \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu, \quad \bar{\sigma}^\mu = \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}. \quad (\text{A.9})$$

Poté se výrazy typu $\chi\sigma^\mu\bar{\eta}$ skutečně transformují jako čtyřvektor [19].

Diracovým bispinorem ψ máme na mysli složený objekt transformující se podle $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ reprezentace Lorentzovy grupy, přesněji můžeme psát

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Majoranovým bispinorem ψ_M myslíme bispinor sestavený pouze pomocí jednoho spinoru, totiž

$$\psi_M := \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Pro Diracovy γ matice, splňující

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.12})$$

volíme Weylovu realizaci, tedy

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 := \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Pro matici nábojového sdružení volíme konvenci

$$C := i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} \epsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

V této Weylově realizaci γ matic platí

$$-\gamma_\mu^T = C^{-1}\gamma_\mu C. \quad (\text{A.15})$$

Sdružený bispinor má pak složky

$$\bar{\psi}_D = \begin{pmatrix} \eta^\alpha & \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Zřejmě pro Majoranovský spinor platí

$$\bar{\psi}^T = C\psi. \quad (\text{A.17})$$

V průběhu celého textu pracujeme převážně se spinory namísto bispinorů. Uveďme pár detailů ohledně značení, Nechť ψ_e je běžné diracovské bispinorové pole popisující například elektron. Pak poli e, e_c , které zavádíme v kapitole 1, rozumíme

$$e := \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi_e, \quad (\text{A.18})$$

$$e_c := \frac{1 - \gamma_5}{2}C^{-1}\bar{\psi}_e. \quad (\text{A.19})$$

Zcela analogické vztahy platí i pro ostatní pole fermionů. V textu navíc implicitně používáme sčítací konvenci. V literatuře lze běžně nalézt výrazy typu eCe_c , což se dá přepsat na $e_\alpha e_c^\alpha$. V naší sčítací konvenci tedy píšeme $-ee_c$. Pokud tedy máme na paměti, že pracujeme s dvoukomponentními spinory a používáme sčítací konvenci, nemusíme v řadě výrazů matici C explicitně vypisovat. Pole e nazýváme polem částic, zatímco pole e_c polem antičástic. Jelikož se obě transformují dle $(1/2, 0)$ reprezentace Lorentzovy grupy, nazýváme je levotočivými poli. Zdůrazněme, že v tomto kontextu se pojem levotočivost vztahuje k chiralitě (tedy právě k transformačním vlastnostem vůči Lorentzově grupě), nikoli k helicitě.

B. Propagátory majoranovských polí

Uvažujeme pouze dva spinory ξ_1, ξ_2 , zobecnění na větší počet je přímočarý. Odpovídající majoranovské bispinory značíme

$$\begin{aligned}\psi_1 &:= \begin{pmatrix} \xi_{1\alpha} \\ \bar{\xi}_1^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \\ \psi_2 &:= \begin{pmatrix} \xi_{2\alpha} \\ \bar{\xi}_2^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Matici volných propagátorů G_0 zavedeme jako

$$G_0 := \begin{pmatrix} \langle \xi_{i\alpha} \xi^{j\beta} \rangle_0 & \langle \xi_{i\alpha} \bar{\xi}_{j\dot{\beta}} \rangle_0 \\ \langle \bar{\xi}_i^{\dot{\alpha}} \xi_j^\beta \rangle_0 & \langle \bar{\xi}_i^{\dot{\alpha}} \bar{\xi}_{j\dot{\beta}} \rangle_0 \end{pmatrix} = \langle \psi_i \bar{\psi}_j \rangle_0.\tag{B.2}$$

Jedná se o matici s rozměry 8×8 . Lomené závorky v tomto případě značí vakuovou střední hodnotu T-součinu vnitřku závorky. Index 0 značí, že se jedná o propagátory ve volné teorii. Časoprostorové argumenty polí explicitně nevypisujeme, pokud to není potřeba. Z kontextu bude vždy jasné, zda pracujeme v souřadnicové reprezentaci nebo v impulsové.

Součet příspěvků jednočásticových ireducibilních Feynmanových grafů označíme

$$P := \begin{pmatrix} \langle \xi_i^\alpha \xi_{j\beta} \rangle_{1PI} & \langle \xi_i^\alpha \bar{\xi}_{j\dot{\beta}} \rangle_{1PI} \\ \langle \bar{\xi}_{i\dot{\alpha}} \xi_{j\beta} \rangle_{1PI} & \langle \bar{\xi}_{i\dot{\alpha}} \bar{\xi}_{j\dot{\beta}} \rangle_{1PI} \end{pmatrix} = \langle \bar{\psi}_i \psi_j \rangle_{1PI}.\tag{B.3}$$

Zde lomené závorky s indexem $1PI$ značí pouze to, že se jedná o součet hodnot odpovídajících $1PI$ grafů. Rozeberme podrobněji značení a definici těchto veličin.

Připomeňme, že $1PI$ grafy jsou takové, které jsou souvislé a nelze je přerušit jedné vnitřní linie rozdělit na dva podgrafy. Jejich hodnotu určíme pomocí Feynmanových pravidel. Konkrétně provedeme rozvoj T-exponenciály interakční části lagrangiánu a vybereme pouze příspěvky obsahující pole uvedené v příslušné závorce $\langle \rangle_{1PI}$. Tyto pole zcela ignorujeme, zatímco ostatní spolu zúžíme v souladu s Wickovým teorémem. Následně vybereme pouze ty příspěvky, jejichž odpovídající Feynmanův graf je typu $1PI$. V literatuře bývá často zvykem počítat tyto $1PI$ příspěvky mírně odlišným způsobem - s T-exponenciálou kontrahujeme další dvě pole, a následně „ustříhneme“ vnější propagátory. Nicméně my tyto další dvě pole neuvažujeme a ekvivalentně „ustříháváme“ samotná pole vystupující v závorce $\langle \rangle_{1PI}$. Jedná se o ekvivalentní postup, v kontextu majoranovských částic považujeme tento přístup v některých situacích za méně matoucí. Opačná poloha spinorových indexů v matici P vůči matici G_0 je tak dána tím, že v závorkách jsou právě ty spinory, které odpovídají „utrženým“ polím, tedy ve skutečnosti platí např.

$$\langle \xi_i^\alpha \xi_{j\beta} \rangle_{1PI} = a_\alpha^\beta,\tag{B.4}$$

kde a_α^β je matice určená Feynmanovými pravidly pro příslušné grafy.

Při výpočtech pochopitelně nesmíme zapomenout na kombinatorický faktor odpovídajícího grafu. Pozor si navíc musíme dávat v případě $i = j$ pro $\langle \xi_i^\alpha \xi_{j\beta} \rangle_{1PI}$

a $\langle \bar{\xi}_{i\alpha} \bar{\xi}_j^\beta \rangle_{1PI}$. V takové situaci musíme započítat dodatečný faktor 2. Ten se objeví v důsledku toho, že vnější propagátory lze připojit dvěma způsoby na „utržená“ pole ξ_i^α a $\xi_{j\beta}$, resp. $\bar{\xi}_{i\alpha}$, $\bar{\xi}_j^\beta$. Rozeberme tento faktor podrobně. Pokud máme jeden příspěvek ve tvaru

$$\xi_i^\alpha(x) a_\alpha^\beta(x,y) \xi_{i\beta}(y), \quad (\text{B.5})$$

máme ihned i druhý odpovídající druhému způsobu připojení propagátorů

$$\xi_i^\alpha(x) \epsilon^{\beta\delta} a_\delta^\gamma(y,x) \epsilon_{\gamma\alpha} \xi_{i\beta}(y). \quad (\text{B.6})$$

Pouze jsme přeznačili časoprostorové argumenty (přes které se ve skutečnosti nakonec integruje), prohodili pozici spinorů a změnili polohu indexů pomocí ϵ matic. Přísně vzato tedy nedostáváme faktor 2, ale příspěvek v předchozím tvaru. Změna polohových argumentů ve Fourierově transformaci odpovídá změně znaménka vnějšího impulsu. Jelikož však v lorentzovsky invariantních teoriích musí platit $a_\alpha^\beta \propto \delta_\alpha^\beta$ a závislost na impulsu musí být kvadratická, získáváme skutečně zmíněný faktor 2.

Připomeňme, že pro majoranovské bispinory platí (A.17). Proto má skutečně smysl uvažovat pouze 1PI příspěvky typu $\langle \bar{\psi}_i \psi_j \rangle_{1PI}$ a propagátory pouze typu $\langle \psi_i \bar{\psi}_j \rangle_0$. Jedná se totiž pouze o naši volbu, případný propagátor $\langle \psi_i \psi_j \rangle_0$ snadno nalezneme z propagátoru již vypočteného. I v případě, kdy počítáme s bispinory, se musíme mít na pozoru v situaci $i = j$. Díky nenulovosti například kontrakce $\langle \psi_i \psi_j \rangle_0$ máme i nyní dvě možnosti, jak připojit vnější propagátory na konkrétní 1PI příspěvek. Provedme stejnou diskuzi jako v případě spinorů. Pokud máme příspěvek

$$\bar{\psi}_i(x) A(x,y) \psi_i(y), \quad (\text{B.7})$$

kde A je matice v prostoru bispinorů, tak existuje i příspěvek odpovídající opačnému připojení propagátorů

$$\bar{\psi}_i(x) (CA(y,x)C^{-1})^T \psi_i(y) = \bar{\psi}_i(x) (C^{-1}A^T(y,x)C) \psi_i(y). \quad (\text{B.8})$$

Pro $A \propto (1 \pm \gamma_5)/2$ zřejmě zreprodukujeme výše diskutovaný faktor 2. Kdybychom ale měli například příspěvek $A = (1 + \gamma_5)\not{p}$, dle (B.8) bychom obdrželi i $A = (1 - \gamma_5)\not{p}$. To v řeči spinorů znamená pouze to, že pokud máme graf přispívající do $\langle \xi_i^\alpha \bar{\xi}_j^\beta \rangle_{1PI}$, máme zároveň i analogický příspěvek pro $\langle \bar{\xi}_{i\alpha} \xi_{j\beta} \rangle_{1PI}$.

Nyní si snadno uvědomíme, že platí rovnice

$$G = G^0(I + PG). \quad (\text{B.9})$$

Platnost nahlédneme opakovanou iterací rovnice. Například v řeči bispinorů postupně dostáváme příspěvky typu

$$\langle \psi_i \bar{\psi}_j \rangle = \langle \psi_i \bar{\psi}_j \rangle_0 + \langle \psi_i \bar{\psi}_k \rangle_0 \langle \bar{\psi}_k \psi_l \rangle_{1PI} \langle \psi_l \bar{\psi}_j \rangle_0 + \dots \quad (\text{B.10})$$

V řeči spinorů je logika zcela stejná - postupně sčítáme všechny možné 1PI grafy spojené volnými propagátory. V tuto chvíli by mělo být značení příspěvků 1PI grafů jasné, stejně tak by mělo být zřejmé, proč do příslušných 1PI grafů započítáváme faktor 2, resp. co se myslí tím, že vnější propagátory lze na 1PI graf připojit dvěma způsoby - celá procedura je zavedena tak, abychom skutečně rovnicí (B.9) zrekonstruovali plný rozvoj propagátoru. Řešením rovnice (B.9) je

$$G = (G_0^{-1} - P)^{-1} := \Gamma^{-1}. \quad (\text{B.11})$$

Prvky matice Γ nazýváme (dvoubodovými) 1PI funkcemi.

B.1 Volný lagranián

Zavedené pojmy použijeme pro výpočet $1PI$ funkcí v elementárním případě - volný lagranián s obecným hmotnostním členem. Nejprve se pro jednoduchost omezíme na situaci s reálným hmotnostní členem, následně výsledek zobecníme na komplexní hmotnostní člen. Konkrétně v této sekci mějme

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \bar{\chi} & \bar{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & 0 \\ 0 & i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \chi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} + h.c. \quad (\text{B.12})$$

Pro reálný hmotnostní člen můžeme v řeči bispinorů psát

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}_\chi i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_\chi + \bar{\psi}_\eta i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_\eta \right) - \frac{1}{2} \left(m_L \bar{\psi}_\chi \psi_\chi + m_R \bar{\psi}_\eta \psi_\eta \right) - m_D \left(\bar{\psi}_\eta \psi_\chi \right). \quad (\text{B.13})$$

Jako volný lagranián vezměme pouze kinetickou část. Řešením pohybových rovnic snadno zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} \langle \chi_\alpha \bar{\chi}_\beta \rangle_0 &= i \frac{p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu}{p^2}, & \langle \eta_\alpha \bar{\eta}_\beta \rangle_0 &= i \frac{p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu}{p^2}, \\ \langle \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \eta^\beta \rangle_0 &= i \frac{p^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta}}{p^2}, & \langle \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \chi^\beta \rangle_0 &= i \frac{p^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta}}{p^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

zatímco ostatní kontrakce jsou nulové. V řeči bispinorů tedy

$$\langle \psi_i \bar{\psi}_j \rangle_0 = \delta_{ij} \frac{i p_\mu \gamma^\mu}{p^2}. \quad (\text{B.15})$$

Příspěvky do $1PI$ funkcí jsou triviální v tom smyslu, že stačí uvažovat pouze první mocninou *interakční* (tedy v tomto případě hmotnostní) části lagraniánu. Pokud sugestivně napíšeme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= -\frac{m_L}{2} \left(\chi^\alpha \delta_\alpha^\beta \chi_\beta + \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} \right) - \frac{m_R}{2} \left(\eta^\alpha \delta_\alpha^\beta \eta_\beta + \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{\eta}^{\dot{\beta}} \right) - \\ &\quad - m_D \left(\chi^\alpha \delta_\alpha^\beta \eta_\beta + \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{\eta}^{\dot{\beta}} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

můžeme ihned psát

$$P = i \begin{pmatrix} -\delta_\alpha^\beta \otimes \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} & p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ p^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & -\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \otimes \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -i \cdot 1 \otimes M. \quad (\text{B.17})$$

U členů s m_L a m_R jsme započítali faktor 2 diskutovaný v předchozí sekci, faktor i pak plyne z toho, že se jedná o první člen Dysonova rozvoje. Symbol M značí matici hmotností, zatímco symbol 1 jednotkovou matici 4×4 v prostoru bispinorů (poloha spinorových indexů je zřejmá z předchozí rovnice).

V řeči bispinorů máme

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{1}{2} \left(m_L \bar{\psi}_l \psi_l \right) - \frac{1}{2} \left(m_R \bar{\psi}_r \psi_r \right) - m_D \left(\bar{\psi}_r \psi_l \right) \quad (\text{B.18})$$

a tedy

$$P = \langle \bar{\psi}_i \psi_j \rangle_{1PI} = -i \cdot 1 \otimes \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}, \quad (\text{B.19})$$

kde jsme opět pro diagonální členy započítali oba členy odpovídající dvěma možným způsobům připojení vnějších propagátorů - tím jsme získali faktor 2 v souladu s (B.8). Vidíme, že výsledky počítání se spinory a bispinory jsou shodné.

Pro 1PI funkce tedy získáme rovnici

$$\begin{aligned} \Gamma &= -i \begin{pmatrix} -\delta_\alpha^\beta \otimes \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} & p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ p^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \otimes \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= -i (p_\mu \gamma^\mu \otimes I - 1 \otimes M). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Situaci nyní na komplexní hmotové členy zobecníme snadno. Stále se jedná o víceméně triviální záležitost, nicméně již v tomto případě narazíme na určité chování, které lze zobecnit na interagující případ.

Hmotnostní člen má nyní díky komplexnímu sdružení tvar

$$\begin{aligned} L_{mass} &= -\frac{m_L}{2} \chi^\alpha \delta_\alpha^\beta \chi_\beta - \frac{m_L^*}{2} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} - \frac{m_R}{2} \eta^\alpha \delta_\alpha^\beta \eta_\beta - \frac{m_R^*}{2} \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{\eta}^{\dot{\beta}} - \\ &\quad - m_D \chi^\alpha \delta_\alpha^\beta \eta_\beta - m_D^* \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{\eta}^{\dot{\beta}} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(m_L \bar{\psi}_\chi \frac{1-\gamma_5}{2} \psi_\chi + m_L^* \bar{\psi}_\chi \frac{1+\gamma_5}{2} \psi_\chi \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(m_R \bar{\psi}_\eta \frac{1-\gamma_5}{2} \psi_\eta + m_R^* \bar{\psi}_\eta \frac{1+\gamma_5}{2} \psi_\eta \right) - \\ &\quad - \left(m_D \bar{\psi}_\eta \frac{1-\gamma_5}{2} \psi_\chi + m_D^* \bar{\chi}_\eta \frac{1+\gamma_5}{2} \psi_\eta \right). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Pro 1PI příspěvky P tedy dostáváme

$$P = i \begin{pmatrix} -\delta_\alpha^\beta \otimes \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} & p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ p^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & -\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \otimes \begin{pmatrix} m_L^* & m_D^* \\ m_D^* & m_R^* \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

respektive (opět si můžeme vyzkoušet, že získáme stejný výsledek jak při počítání s bispinory, tak se spinory)

$$P = \langle \bar{\psi}_i \psi_j \rangle_{1PI} = -i \frac{1-\gamma_5}{2} \otimes \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} - i \frac{1+\gamma_5}{2} \otimes \begin{pmatrix} m_L^* & m_D^* \\ m_D^* & m_R^* \end{pmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

Pro 1PI funkce máme

$$\begin{aligned} \Gamma &= -i \begin{pmatrix} -\delta_\alpha^\beta \otimes \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} & p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ p^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \otimes \begin{pmatrix} m_L^* & m_D^* \\ m_D^* & m_R^* \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= -i \left(p_\mu \gamma^\mu \otimes I - \frac{1-\gamma_5}{2} \otimes \cdot M - \frac{1+\gamma_5}{2} \otimes \cdot M^* \right). \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Pro reálné hmotnosti zřejmě zreprodukujeme výsledek z předchozí sekce.

Vidíme, že v případě komplexních hmotností se nám ve výrazu pro Γ objevují projektory $(1 \pm \gamma_5)/2$, tedy struktura výrazu je o něco bohatší. V další části rozebereme, jak 1PI funkce vypadají v obecném interagujícím případě.

B.2 Obecný interakční lagrangián

Jak se změní struktura matice Γ v obecném případě interagující teorie se snáze diskutuje v řeči spinorů.

Nejprve diskutujeme korekci k členu explicitně obsahujícímu σ matice. Po započtení interakčních korekcí dostaneme

$$\langle \xi_i^\alpha \bar{\xi}_j^\beta \rangle_{1PI} := ip_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu Z_{ij}(p^2) = ip_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu \otimes Z(p^2). \quad (\text{B.25})$$

Druhý člen, tedy člen $\langle \bar{\xi}_{i\dot{\alpha}} \xi_{j\beta} \rangle_{1PI}$ snadno získáme z členu prvního. Prohozením argumentů, čímž změníme celkové znaménko, ale zároveň i znaménko hybnosti ve Fourierově obraze, a změnou polohy indexů totiž člen převedeme na člen předchozí. Platí tedy

$$\langle \bar{\xi}_{i\dot{\alpha}} \xi_{j\beta} \rangle_{1PI} = ip^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} Z_{ji}(p^2) = ip^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \otimes Z^T(p^2). \quad (\text{B.26})$$

Právě transpozici matice Z bychom ve výsledku nemuseli čekat. V teoriích s jedním nabitým bispinorem, jako například QED, totiž platí

$$\langle \chi^\alpha \bar{\eta}^\beta \rangle_{1PI} = 0 \quad (\text{B.27})$$

ve všech řádech poruchové teorie, což má za následek dokonce diagonálnost matice Z . V QED by totiž nenulovost takového příspěvku byla ve sporu se zachováním náboje, resp. s nulovostí $\langle ee^T \rangle_{1PI}$.

Korekce k hmotnostní matici označíme

$$\langle \xi_i^\alpha \xi_{j\beta} \rangle_{1PI} = -i\delta_\alpha^\beta \otimes (M + \Sigma(p^2)). \quad (\text{B.28})$$

$$\langle \bar{\xi}_{i\dot{\alpha}} \bar{\xi}_j^\beta \rangle_{1PI} := -i\delta_{\dot{\alpha}}^\beta \otimes (M^* + \tilde{\Sigma}(p^2)). \quad (\text{B.29})$$

Ze symetrie indexů vidíme, že matice Σ je symetrická.

Dle [52] můžeme psát $\tilde{\Sigma}^* = \Sigma$ a $Z^\dagger = Z$. Celkově tedy máme

$$\begin{aligned} \Gamma &= -i \begin{pmatrix} -\delta_\alpha^\beta \otimes (M + \Sigma(p^2)) & p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu \otimes (I + Z(p^2)) \\ p^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \otimes (I + Z^T(p^2)) & -\delta_{\dot{\alpha}}^\beta \otimes (M^* + \Sigma^*(p^2)) \end{pmatrix} = \\ &= -i \frac{1 - \gamma_5}{2} (p_\mu \gamma^\mu \otimes (I + Z) - 1 \otimes (M + \Sigma)) - \\ &\quad -i \frac{1 + \gamma_5}{2} (p_\mu \gamma^\mu \otimes (I + Z^T) - 1 \otimes (M^* + \Sigma^*)), \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

kde Σ je symetrická a Z hermitovská matice.

B.3 Póly propagátorů majoranovských polí

Nyní již víme, jak v obecné interagující teorii vypadají dvoubodové 1PI funkce Γ . Také víme, že fyzikální hmotnosti částic jsou rovny pólům příslušného propagátoru. Z rovnice (B.11) tak vidíme, že hmotnosti můžeme ekvivalentně nalézt jako body p_0^2 , ve kterých je matice Γ singulární.

Ukažme si, jak lze v teoriích s Wittenovskou smyčkou nalézt fyzikální hmotnosti neutrin. Jako výsledek očekáváme tři velmi lehká neutrina a tři naopak velmi těžká 3.

Nejprve převedme Γ do diagonálního tvaru v prostoru indexů i, j . Pokud od původních spinorů přejdeme k novým spinorům pomocí matice A , tedy

$$\begin{aligned}\xi_i &\rightarrow A_{ij}\xi_j, \\ \bar{\xi}_i &\rightarrow A_{ij}^*\bar{\xi}_j,\end{aligned}\tag{B.31}$$

matice Γ z definice (B.11) přejde na

$$\begin{aligned}\Gamma &\rightarrow \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & A^{*T} \end{pmatrix} \cdot \Gamma \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \otimes A^T + \frac{1+\gamma_5}{2} \otimes A^{*T} \right) \Gamma \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \otimes A + \frac{1+\gamma_5}{2} \otimes A^* \right).\end{aligned}\tag{B.32}$$

Matici A tedy volíme tak, aby matice

$$\begin{aligned}A^T (M + \Sigma(p^2)) A, \\ A^T (I + Z(p^2)) A^*\end{aligned}\tag{B.33}$$

byly diagonální a první z nich reálná. Všimněme si, že v obecném případě nemáme ničím zaručenou unitárnost této matice. Patrná je též závislost matice A na vnějším impulsu p^2 .

Označme tedy

$$\Sigma_D(p^2) := A^T(p^2) (M + \Sigma(p^2)) A(p^2) := \Sigma_{D(i)}(p^2)\delta_{ij},\tag{B.34}$$

$$Z_D(p^2) := A^T(p^2) (I + Z(p^2)) A^*(p^2) := Z_{D(i)}(p^2)\delta_{ij},\tag{B.35}$$

přičemž tyto matice jsou již diagonální. Matice Γ přejde dle (B.32) na

$$\begin{aligned}\Gamma_D &:= -i \begin{pmatrix} -\delta_\alpha^\beta \otimes \Sigma_D(p^2) & p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu \otimes Z_D(p^2) \\ p^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \otimes Z_D(p^2) & -\delta_{\dot{\alpha}\beta} \otimes \Sigma_D(p^2) \end{pmatrix} = \\ &= -i (p_\mu \gamma^\mu \otimes Z_D(p^2) - 1 \otimes \Sigma_D(p^2)) := \Gamma_{D(i)}\delta_{ij}\end{aligned}\tag{B.36}$$

Body, ve kterých je matice Γ singulární, nyní najdeme běžným způsobem. Díky diagonalitě matic (B.34),(B.35) dostáváme sadu rovnic

$$(\not{k} + m_i)\Gamma_{D(i)} = 0, \quad k^2 = m_i^2,\tag{B.37}$$

kde m_i je fyzikální hmotnost odpovídající příslušnému bloku $\Gamma_{D(i)}$. Pomocí rovnice (B.36) snadno zjistíme, že (B.37) lze ekvivalentně přepsat na

$$m_i Z_{D(i)}(m_i^2) = \Sigma_{D(i)}(m_i^2).\tag{B.38}$$

Fyzikální hmotnosti jsou tedy určeny sadou rovnic (B.38) a (B.34),(B.35), tedy soustavou rovnic

$$A^T(p^2) \left(M + \Sigma(p^2) \right) A(p^2) = \Sigma_{D(i)}(p^2) \delta_{ij}, \quad (\text{B.39})$$

$$A^T(p^2) \left(I + Z(p^2) \right) A^*(p^2) = Z_{D(i)}(p^2) \delta_{ij}, \quad (\text{B.40})$$

$$m_i Z_{D(i)}(m_i^2) = \Sigma_{D(i)}(m_i^2). \quad (\text{B.41})$$

Je patrné, že vyřešit tyto rovnice analyticky je v typickém případě nemožné, což nás nutí uchýlit se k aproximačním metodám.

B.4 Radiační seesaw mechanismus

Aplikujme výsledky předchozí části na naší situaci, tedy na případ, kdy získáme velkou majoranovskou hmotnost polí ν_c jako radiační korekci. Víme, že obdržíme tři těžká neutrina s hmotnostmi M_i^M a tři lehká neutrina s hmotností m_i^M .

Označme

$$\begin{aligned} \Sigma_{D(i)}(m_i^2) &= m_{i(0)} + \Delta \Sigma_{D(i)}(m_i^2), \\ Z_{D(i)}(m_i^2) &= 1 + \Delta Z_{D(i)}(m_i^2). \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Pro matici A pišme

$$A(p^2) = U_\Sigma(p^2) + \Delta A(p^2), \quad (\text{B.43})$$

kde $U_\Sigma(p^2)$ unitární matice diagonalizující $M + \Sigma$. Pokud $\Delta Z \ll I$, máme i $\Delta A \ll I$.

Zaměříme se na rovnici (B.41) a pokusme se jí řešit perturbativně. Dosazením (B.42) obdržíme

$$m_i = m_{i(0)} + \left(\Delta \Sigma_{D(i)}(m_i^2) - m_i \Delta Z_{D(i)}(m_i^2) \right) := m_i^{(0)} + \Delta m_i. \quad (\text{B.44})$$

Hodnotu $m_i^{(0)}$ chápeme jako první odhad fyzikální hmotnosti, ostatní členy jako korekce. Iterací rovnice a Taylorovým rozvojem získáme

$$\begin{aligned} m_i &= m_{i(0)} + \Delta \Sigma_{D(i)}(m_{i(0)}^2) - m_{i(0)} \Delta Z_{D(i)}(m_{i(0)}^2) + \\ &+ 2m_{i(0)} \Delta m_i \Delta \Sigma'_{D(i)}(m_{i(0)}^2) - 2m_{i(0)}^2 \Delta m_i \Delta Z'_{D(i)}(m_{i(0)}^2) - \\ &- \Delta m_i \Delta Z_{D(i)}(m_{i(0)}^2) + 2m_{i(0)} \Delta m_i^2 \Delta Z'_{D(i)}(m_{i(0)}^2) + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

což v prvním přiblížení dává

$$m_i = m_{i(0)} + \Delta \Sigma_{D(i)}(m_{i(0)}^2) - m_{i(0)} \Delta Z_{D(i)}(m_{i(0)}^2) + \dots \quad (\text{B.46})$$

Pro těžká neutrina označme $\Delta \Sigma_{D(i)} = \Delta \Sigma_{(i)}^M$. Až na případné další korekce se jedná právě o radiační majoranovskou hmotnost polí antineutrin, které jsme se v této práci věnovali. „Přirozená“ bezrozměrná proměnná této funkce je poměr p^2/V^2 , kde V je „velká“ vakuová střední hodnota multipletu narušující Pati-Salamovu symetrii. Jako $m_{i(0)}$ můžeme použít hmotnost na stromové úrovni, tedy diracovskou hmotnost (4.15). Pak ale vidíme, že (B.46) je vhodným přiblížením a navíc můžeme dále aproximovat

$$M_i^M \approx \Delta \Sigma_{(i)}^M(0), \quad (\text{B.47})$$

neboť $m_{i(0)}/\Delta\Sigma_{D(i)} \approx 0$. M_ν^M značí právě hmotnosti těžkých neutrin. Pro lehká neutrina víme, že díky seesaw formulí (3.22) získáme výsledek typu

$$m_i^M \sim m_\nu^2/\Sigma_{(i)}^M(m_i^2). \quad (\text{B.48})$$

To nás opravňuje k tomu, abychom i hmotnosti lehkých neutrin počítali pouze pomocí radiačních korekcí s nulovou vnější hybností. Jelikož nás zajímá pouze první nenulový korekční člen, můžeme v rovnici (B.43) zanedbat člen ΔA . Celkově skutečně dostáváme pro matici hmotnostní neutrin

$$M_\nu = M_0 + \Sigma(0), \quad (\text{B.49})$$

na kterou můžeme aplikovat formule seesaw mechanismu I. typu.

C. Výpočet dvousmyčkových integrálů s nulovou vnější hybností

V tomto dodatku si explicitně spočítáme funkci (5.22), danou součtem dvousmyčkových integrálů, a integrál (5.61). Víme, že pro $M_R = M_X$ je funkce (5.22) shodná s funkcí získanou při výpočtu Wittenovské radiační korekce v $SU(5) \times U(1)$ modelu. Provedeme tedy analogický výpočet jako v [15], přičemž nastíníme obecný postup při výpočtu dvousmyčkových integrálů. Tento postup následně aplikujeme na výpočet funkce (5.61).

Běžným postupem je algebraickými úpravami převést veškeré dílčí integrály na určitou sadu „elementárních“ integrálů [53]. Tato metoda je v našem případě obzvláště efektivní, neboť nám stačí spočítat dané integrály pouze pro nulovou vnější hybnost. V takovém případě můžeme jednotlivé mezivýsledky psát ve velmi kompaktní a přehledné formě pomocí takzvaných *Veltman-Van der Bijových* závorek [54]. Nejprve tento formalismus stručně shrneme a poté se pustíme do samotného výpočtu zmíněných funkcí.

Konvence a konkrétní značení přebíráme z [15]. Zrekapitulujme pro přehlednost klíčové definice a relace. Integrály počítáme v dimenzionální regularizaci, počet dimenzí značíme D a konvenci pro regularizační parametr ϵ volíme

$$D = 4 - 2\epsilon. \quad (\text{C.1})$$

Veltman-Van der Bijovy závorečky zavedeme jako

$$\begin{aligned} & \{M_{11}, M_{12}, \dots; M_{21}, \dots; M_{31}, \dots\} := \\ & := \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(p^2 - M_{11}^2)(p^2 - M_{12}^2) \dots} \frac{1}{(q^2 - M_{21}^2) \dots} \frac{1}{((p+q)^2 - M_{31}^2) \dots}, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\{M_{11}, M_{12}, \dots; \} := \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - M_{11}^2)(p^2 - M_{12}^2) \dots}, \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} & \{M_{11}, M_{12}, \dots; M_{21}, \dots; M_{31}, \dots\} [A(p, q)] := \\ & := \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(p^2 - M_{11}^2)(p^2 - M_{12}^2) \dots} \frac{1}{(q^2 - M_{21}^2) \dots} \frac{1}{((p+q)^2 - M_{31}^2) \dots} A(p, q). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Dále používáme zkrácené značení

$$\{2M_A; M_B; M_C\} = \{M_A, M_A; M_B; M_C\}. \quad (\text{C.5})$$

Elementárními integrály budeme mít na mysli právě integrály typu $\{2M_A; M_B; M_C\}$ společně s $\{M_A\}$. Potřebné integrály převedeme na elementární rozkladem na parciální zlomky, částečným dělením a využitím 't Hooftovy p-

operace [55]

$$\begin{aligned} & \{M_A; M_B; M_C\} = \\ & = \frac{1}{D-3} \left(M_A^2 \{2M_A; M_B; M_C\} + M_B^2 \{2M_B; M_C; M_A\} + M_C^2 \{2M_C; M_A; M_B\} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Pro tyto elementární integrály máme explicitní vztahy

$$\{M_A\} = -i \frac{M_A^2}{(4\pi)^2} \left(-\epsilon^{-1} + L_A - \frac{\epsilon}{2} \left(L_A^2 + 1 + \frac{\pi^2}{6} \right) \right) + O(\epsilon^2), \quad (\text{C.7})$$

$$\{2M; M_B; M_C\} = \frac{1}{(4\pi)^4} (S(M) - f(a,b)) + O(\epsilon), \quad (\text{C.8})$$

kde

$$L_A := \log \frac{M_A^2}{4\pi Q^2} + \gamma - 1, \quad (\text{C.9})$$

Q je renormalizační škála, γ Euler-Mascheroniho konstanta,

$$S(M) := -\frac{1}{2\epsilon^2} + \epsilon^{-1} \left(L + \frac{1}{2} \right) - \left(L^2 + L + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{12} \right), \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{M^2}{M_A^2}, \\ b &= \frac{M^2}{M_B^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

a funkce $f(a,b)$ je dána vztahem

$$\begin{aligned} f(a,b) &:= -\frac{1}{2} \log a \log b + \frac{1-a-b}{2\sqrt{q}} \left(\text{Li} \left(-\frac{x_2}{y_1} \right) + \text{Li} \left(-\frac{y_2}{x_1} \right) - \text{Li} \left(-\frac{x_1}{y_2} \right) + \right. \\ & \left. + \text{Li} \left(\frac{b-a}{x_2} \right) + \text{Li} \left(\frac{a-b}{y_2} \right) - \text{Li} \left(\frac{b-a}{x_1} \right) - \text{Li} \left(\frac{a-b}{y_1} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Pro přehlednost jsme označili

$$q = 1 - 2(a+b) - (a-b)^2, \quad (\text{C.13})$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} (1 + b - a \pm \sqrt{q}), \quad (\text{C.14})$$

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} (1 + a - b \pm \sqrt{q}). \quad (\text{C.15})$$

Funkce $\text{Li}(z)$ se též nazývá dilogarithmus a je definována jako

$$\text{Li}(z) = - \int_0^z du \frac{\log(1-u)}{u}. \quad (\text{C.16})$$

C.1 Korekce k majoranovské hmotnosti generované vektorovými bosony

Nyní můžeme přejít k výpočtu integrálů (5.16),(5.17). Integrál (5.16) můžeme přepsat na

$$\begin{aligned} I_1(M_X, M_R) &= \\ &= \{M_X, 0; M_R, 0; m\} \left[\left((-D + 4) \not{p} \not{q} - 4(pq) + \frac{p^2}{M_X^2} (pq) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{q^2}{M_R^2} (pq) - \frac{p^2 q^2}{M_R^2 M_X^2} (pq) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Platí

$$\not{p} \not{q} = (pq) + \frac{p^\mu q^\nu}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (\text{C.18})$$

Člen úměrný komutátoru se po integraci přes q neuplatní, neboť jistě bude úměrný výrazu $p^\mu p^\nu [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = 0$. V (C.17) tak můžeme beztržně provést záměnu $\not{p} \not{q} \rightarrow (pq)$, což vede na

$$I_1(M_X, M_R) = \{M_X, 0; M_R, 0; m\} \left[\left(-D + \frac{p^2}{M_X^2} + \frac{q^2}{M_R^2} - \frac{p^2 q^2}{M_R^2 M_X^2} \right) (pq) \right]. \quad (\text{C.19})$$

Integrál (5.17) upravíme stejným způsobem, opět využijeme (C.18) a dostaneme

$$\begin{aligned} I_2(M_X, M_R) &= \{M_X, 0; m, 0; M_R\} \left[\left(D - 2 + \frac{p^2}{M_X^2} + \frac{p^2 + q^2}{M_R^2} - \frac{p^2(p^2 + q^2)}{M_X^2 M_R^2} \right) (pq) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2p^2 q^2}{M_R^2} - \frac{p^4 q^2}{M_X^2 M_R^2} - \frac{p^2 (pq)^2}{M_X^2 M_R^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Nejprve tyto výrazy vyjádříme pomocí jednoduchých závorek, čehož lze dosáhnout jednoduchými algebraickými úpravami. Demonstrujme tento postup na jednom konkrétním členu, u ostatních postupujeme analogicky. Vezměme například

$$\begin{aligned} \{M_X, 0; M_R, 0; m\} [p^2(pq)] &= \{M_X; M_R, 0; m\} [(pq)] = \\ &= \{M_X; M_R, 0; m\} \left[\left((p+q)^2 - m^2 - p^2 + M_X^2 - q^2 + m^2 - M_X^2 \right) \right] = \\ &= \{M_X; M_R, 0\} - \{M_R, 0; m\} - \{M_X; M_R; m\} + (m^2 - M_X^2) \{M_X; M_R, 0; m\}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Zároveň máme

$$\{M_R, 0; m\} = \{M_R, 0\} \{m\}. \quad (\text{C.22})$$

Jednoduché závorky rozkládáme na menší běžným rozkladem na parciální zlomky, případně dalšími právě demonstrovanými úpravami. Můžeme například odvozovat relace typu

$$\begin{aligned} \{M_X; M_R, 0; m\} &= \frac{1}{M_R^2} \{M_X; M_R, 0; m\} [M_R^2 - p^2 + p^2] = \\ &= \frac{1}{M_R^2} (\{M_X; M_R; m\} - \{M_X; 0; m\}) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

nebo například

$$\{M_R, 0\} = \frac{1}{M_R^2} (\{M_R\} - \{0\}) = \frac{1}{M_R^2} \{M_R\}. \quad (\text{C.24})$$

V řeci jednoduchých závorek lze výše nastíněným způsobem integrály (5.16) a (5.17) přepsat na

$$I_1(M_X, M_R) = -(D-1) \left(\frac{\{M_X\} \{M_R\}}{2M_X^2 M_R^2} + \frac{m^2}{2} \{M_R, 0; M_X, 0; m\} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \{M_X, 0; M_R; m\} - \frac{1}{2} \{M_R, 0; M_X; m\} - \frac{m^2}{2M_X^2 M_R^2} \{0; 0; m\} \right) \quad (\text{C.25})$$

a

$$I_2(M_X, M_R) = \frac{2-D}{2} \frac{M_R^2}{M_X^2} \{m, 0; 0; M_R\} + \frac{3-D}{2} \{M_X, 0; m; M_R\} + \\ + \frac{m^2}{4M_X^2 M_R^2} (2\{0; m; M_R\} - \{m; M_X; M_R\}) + \frac{D-2}{2M_X^2 m^2} \{M_X; m\} - \frac{\{M_X; M_R\}}{4M_X^2 M_R^2} + \\ + \frac{M_R^2 - M_X^2}{4M_X^2} \left(2D - 3 + \frac{M_X^2}{M_R^2} \right) \{m, 0; M_X; M_R\} - \frac{M_R^2 - M_X^2}{2M_X^2 M_R^2} \{m; M_X; M_R\} + \\ + \frac{m^2 + M_X^2 + M_R^2}{4M_X^2 M_R^2 m^2} (\{m; M_X\} - \{m; M_R\}). \quad (\text{C.26})$$

Druhým krokem je přejít k elementárním závorkám. Úpravami typu (C.23) převedeme veškeré závorky do tvaru $\{M_A; M_B; M_C\}$ a následně využijeme operace (C.6). Přejdeme rovnou k výrazům $\Sigma_{1,2}$ (5.18). Výsledkem je

$$\Sigma_1 = I_1(M_X, M_R) + I_1(M_R, M_X) = \\ = -\frac{1}{D-3} \frac{m^4}{M_R^2 M_X^2} \{2m; 0; 0\} - \frac{D-1}{M_R^2 M_X^2} \{M_X; M_R\} + \\ + \frac{D-1}{D-3} \left(\{2M_R; M_X; m\} + \{2M_X; M_R; m\} \right) + \\ + \frac{D-1}{D-3} \frac{M_R^2}{M_X^2} \left(\{2M_R; M_X; m\} - \{2M_R; m; 0\} \right) + \\ + \frac{D-1}{D-3} \frac{M_X^2}{M_R^2} \left(\{2M_X; M_R; m\} - \{2M_X; m; 0\} \right) + \\ + \frac{D-1}{D-3} \frac{m^4}{M_X^2 M_R^2} \left(\{2m; M_X; 0\} + \{2m; M_R; 0\} \right) - \\ - \frac{D-1}{D-3} \frac{m^4}{M_X^2 M_R^2} \left(+ \{2m; M_X; M_R\} + \{2m; 0; 0\} \right) + \\ + \frac{D-1}{D-3} \frac{m^2}{M_R^2} \left(\{2M_X; m; 0\} + \{2m; M_X; M_R\} \right) - \\ - \frac{D-1}{D-3} \frac{m^2}{M_R^2} \left(\{2M_X; M_R; m\} + \{2m; M_X; 0\} \right) + \\ + \frac{D-1}{D-3} \frac{m^2}{M_X^2} \left(\{2M_R; m; 0\} + \{2m; M_X; M_R\} - \{2M_R; M_X; m\} - \{2m; M_R; 0\} \right) \quad (\text{C.27})$$

a

$$\begin{aligned}
2\Sigma_2 &= 2(I_2(M_X, M_R) + I_2(M_R, M_X)) = \\
&= \frac{D-2}{M_X^2 m^2} \{M_X; m\} + \frac{D-2}{M_R^2 m^2} \{M_R; m\} - \frac{\{M_R; M_X\}}{M_R^2 M_X^2} + \\
&\quad + \frac{D-2}{D-3} \frac{M_R^4}{M_X^2 m^2} (\{2M_R; 0; 0\} - \{2M_R; m; 0\}) + \\
&\quad + \frac{D-2}{D-3} \frac{M_X^4}{M_R^2 m^2} (\{2M_X; 0; 0\} - \{2M_X; m; 0\}) + \\
&\quad + \frac{m^2}{M_X^2} (\{2m; M_R; 0\} - \{2m; M_X; M_R\}) + \\
&\quad + \frac{m^2}{M_R^2} (\{2m; M_X; 0\} - \{2m; M_X; M_R\}) + \\
&\quad + \frac{1}{D-3} \frac{m^2}{M_R^2} (\{2M_X; m; 0\} - \{2M_X; M_R; m\}) + \\
&\quad + \frac{1}{D-3} \frac{m^2}{M_X^2} (\{2M_R; m; 0\} - \{2M_R; M_X; m\}) - \\
&\quad - \left(\{2M_R; M_X; m\} + \{2M_X; M_R; m\} \right) - \\
&\quad - \frac{M_R^2}{M_X^2} \left(\{2M_R; M_X; m\} - \{2M_R; m; 0\} \right) - \\
&\quad - \frac{M_X^2}{M_R^2} \left(\{2M_X; M_R; m\} - \{2M_X; m; 0\} \right) - \\
&\quad - \frac{D-2}{D-3} \left(\frac{M_R^2}{M_X^2} \{2m; M_R; 0\} + \frac{M_X^2}{M_R^2} \{2m; M_X; 0\} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{D-3} \frac{m^4}{M_X^2 M_R^2} (\{2m; M_X; 0\} + \{2m; M_R; 0\} - \{2m; M_X; M_R\}) + \\
&\quad + \frac{D-2}{D-3} \frac{(M_X^2 - M_R^2)^2}{m^2} \left(\frac{1}{M_X^2} \{2M_R; M_X; m\} + \frac{1}{M_R^2} \{2M_X; M_R; m\} \right) - \\
&\quad - \frac{D-2}{D-3} \frac{(M_X^2 - M_R^2)^2}{m^2} \left(\frac{1}{M_X^2} \{2M_R; M_X; 0\} + \frac{1}{M_R^2} \{2M_X; M_R; 0\} \right) + \\
&\quad + \frac{D-2}{D-3} \frac{(M_X^2 - M_R^2)^2}{M_X^2 M_R^2} \{2m; M_X; M_R\}.
\end{aligned} \tag{C.28}$$

Konečně tak pro hledanou funkci $I(s,k)$ (5.22) dostáváme v limitě $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
-2I(s,k) = & -2 + \left(2ks^2 - s - k^{-1} - 1\right) \log^2 k - 2 \log k + \\
& + 2 \left(1 - k^{-1}\right)^2 \left(f(0,k) + f(0,k^{-1})\right) s^{-1} + \\
& + \left(2 \log k + 2 \log k \left(2ks^2 - s - k^{-1}\right) - 4\right) \log s + \\
& + \left(4ks^2 - (k+1)s - k + 2 - k^{-1}\right) \log^2 s + \\
& + \left(4ks^2 - 2(k+k^{-2})s^{-1}\right) f(0,0) + \\
& + k \left(4s^2 - 6s + 2s^{-1}\right) f(0,s) + \\
& + k^{-1} \left(4k^2s^2 - 6ks + 2k^{-1}s^{-1}\right) f(0,ks) + \\
& + \left(4ks - 2(1+k) - 2(k-1)^2k^{-1}s^{-1}\right) f(s,k^{-1}) + \\
& + \left(4s - 2(1+k)k^{-1} - 2(1-k^{-1})^2s^{-1}\right) f(k,ks) + \\
& + \left(4ks^2 - 2(1+k)s - 2(k-1)^2k^{-1}\right) f(s^{-1},k^{-1}s^{-1}).
\end{aligned} \tag{C.29}$$

Pro $k = 1$, tedy v případě $M_X = M_R$, dostáváme

$$\begin{aligned}
I(s,1) = & 1 + 2 \log s + s(1-2s) \log^2 s + \\
& + 2(s^{-1} - 1) \left(f(0,0)(1+s+s^2) + 2sf(s,1) + \right. \\
& \left. + f(0,s)(s-1)(2s+1) + s^2f(s^{-1},s^{-1})\right).
\end{aligned} \tag{C.30}$$

I přesto, že mnoho ze sčítanců ve výrazu (C.29) v limitních hodnotách proměnných diverguje, tato funkce je omezená. Konkrétně při pevném k dostáváme asymptotické chování

$$\begin{aligned}
I(s \rightarrow 0, k) = & 3 - \\
& - s \left(\frac{(1-k^2)\pi^2 + 3k \log k(1 - (1+k) \log k) - 6(1+k^2)\text{Li}(1-k)}{2(k-1)} - \right. \\
& \left. - \frac{3k \log k}{k-1} \log s \right) + O(s^2 \log^2 s)
\end{aligned} \tag{C.31}$$

$$I(s \rightarrow \infty, k) = -3 + \frac{3(1+k) \log^2 s}{2ks} + O\left(\frac{\log s}{s}\right). \tag{C.32}$$

Pro $k = 1$ jsou tyto výrazy definovány konečnou limitou $k \rightarrow 1$. Skutečně tak máme

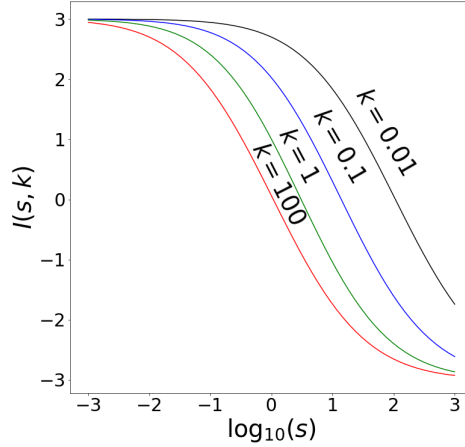
$$-3 < I(s,k) < 3. \tag{C.33}$$

Chování této funkce můžeme vidět na grafu C.1

C.2 Korekce k majoranovské hmotnosti generované výhradně skalárními bosony

Nyní si spočítáme dvousmyčkový integrál (5.61)

$$\tilde{I}_{sk}(m_A, m_B, m_C) := \{m_A, 0; m_B, 0; m_C\} \left| (\not{p}\not{q}) \right|. \tag{C.34}$$



Obrázek C.1: Funkce odpovídající součtu dvousmyčkových integrálů odpovídajících diagramům 5.2

V první řadě i tentokrát můžeme díky (C.18) provést záměnu $pq \rightarrow (pq)$. Nejprve využijeme

$$2(pq) = (p+q)^2 - m_C^2 - p^2 - q^2 + m_C^2, \quad (\text{C.35})$$

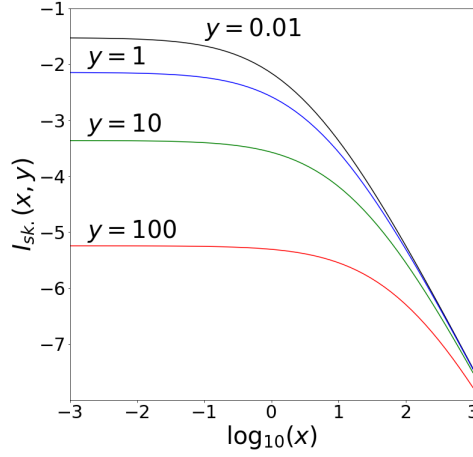
čímž integrál převedeme na součet jednoduchých závorek. Označme

$$x := \frac{m_A^2}{m_C^2}, \quad (\text{C.36})$$

$$y := \frac{m_B^2}{m_C^2}. \quad (\text{C.37})$$

Převodem na elementární integrály obdržíme

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{sk} = & \frac{1}{2(4\pi)^4} \left(2 + \frac{1}{\epsilon} - 2L_C \right) + \\ & + \frac{1}{2(4\pi)^4} \left(-x^{-1}y^{-1} \frac{\pi^2}{6} + \right. \\ & + (1 - x^{-1} + yx^{-1}) f(xy^{-1}, y^{-1}) + (1 - y^{-1} + xy^{-1}) f(yx^{-1}, x^{-1}) + \\ & + (-y^{-1} + x^{-1}y^{-1}) f(x, 0) + (-x^{-1} + x^{-1}y^{-1}) f(y, 0) + \\ & + (y^{-1} - xy^{-1}) f(x^{-1}, 0) + (x^{-1} - yx^{-1}) f(y^{-1}, 0) + \\ & + (x^{-1} + y^{-1} - x^{-1}y^{-1}) f(x, y) - \\ & \left. - \log x - \log y + \frac{1}{2} \log^2(xy^{-1}) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$



Obrázek C.2: Funkce odpovídající dvousmyčkovým integrálům typu 5.3

Tuto funkci potřebujeme k určení majoranovské hmotnosti neutrin. Z diskuze v 5.2.2 víme, že stačí, pokud se omezíme na vyšetřování funkce

$$\begin{aligned}
I_{sk.}(x, y) := & \frac{1}{2} \left(-x^{-1}y^{-1} \frac{\pi^2}{6} + \right. \\
& + (1 - x^{-1} + yx^{-1}) f(xy^{-1}, y^{-1}) + (1 - y^{-1} + xy^{-1}) f(yx^{-1}, x^{-1}) + \\
& + (-y^{-1} + x^{-1}y^{-1}) f(x, 0) + (-x^{-1} + x^{-1}y^{-1}) f(y, 0) + \\
& + (y^{-1} - xy^{-1}) f(x^{-1}, 0) + (x^{-1} - yx^{-1}) f(y^{-1}, 0) + \\
& + (x^{-1} + y^{-1} - x^{-1}y^{-1}) f(x, y) - \\
& \left. - \log x - \log y + \frac{1}{2} \log^2(xy^{-1}) \right). \tag{C.39}
\end{aligned}$$

Tato funkce je symetrická ve svých argumentech a má asymptotické chování

$$I_{sk.}(x \rightarrow \infty, y) = -\frac{1}{2} - \log x - \frac{(y+2) \log^2 x}{4x} + O\left(\frac{\log x}{x}\right), \tag{C.40}$$

$$I_{sk.}(x, y \rightarrow 0) = -\frac{1}{2} - \frac{\pi^2 + 6x \log x - 6\text{Li}(1-x)}{6x} + \tag{C.41}$$

$$+ y \log y \frac{1-x+x \log x}{2(x-1)^2} + O(y). \tag{C.42}$$

Představu o chování této funkce si též můžeme udělat na základě grafu C.2.