Definice 3 (Oprava definice silné stacionarity, Prášková, 2016, Definice 1.7, str. 9)**.** *Silně (striktně) stacionární proces definujeme jako náhodný proces* $\{X_t, t \in T\}$*, pro který platí, že pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$*, pro libovolná reálná* $x_1, \ldots, x_n$ *a pro libovolná* $t_1, \ldots, t_n$ *a* τ *taková, že* $t_k \in T, t_{k+\tau} \in T, 1 \leq k \leq n$*, platí*

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_1+\tau,\ldots,t_n+\tau}(x_1, \ldots, x_n),$$

kde $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$ *je sdružená distribuční funkce veličin* $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$*, tedy lze psát*

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{P}[X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n].$$

Definice 4 (Oprava definice slabé stacionarity, Prášková, 2016, Definice 1.8, str. 9)**.** *Slabě stacionární náhodný proces definujeme jako náhodný proces* $\{X_t, t \in T\}$ *s konečnými druhými momenty, pro který platí, že má konstantní střední hodnotu* $\mu_t = \mu$ *(pro libovolné* $t \in T$*) a kovariance závisí pouze na časovém posunu* τ *mezi dvěma náhodnými veličinami* $X_t, X_{t+\tau}$ *z náhodného procesu,* $t \in T, \tau > 0$*.*

Doplněk 1 (Definice: Gaussovský proces, Prášková, 2016, Definice 1.6, str. 9)**.** *Náhodný proces* $\{X_t, t \in T\}$ *se nazývá gaussovský, pokud jsou všechna jeho konečněrozměrná rozdělení normální (*$\forall n \in \mathbb{N}$ *a* $t_1, \ldots, t_n \in T$ *má vektor* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^\top$ *n-rozměrné normální rozdělení* $N_n(\mu, \Sigma)$*).*

Tvrzení 1 (Oprava tvrzení 1)**.** *Nechť* $\{X_t\}$ *je nekorelovaný a gaussovský náhodný proces. Označme* $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ *a* $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)^\top$*, pak pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *je sdružená hustota* f_X *symetrická ve smyslu rovnosti* $f_X(x) = f_X(|x|)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$*.*

Doplněk 2 (Definice: Norma vektoru)**.** *Eukleidovská norma vektoru* $x \in \mathbb{R}^n$ *je číslo* $||x|| = \sqrt{x^\top x}$*.*

Definice 11 (Oprava definice konvergence v distribuci, Kulich, 2018, Definice 7.3, str. 31)**.** *Říkáme, že posloupnost náhodných vektorů* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje v distribuci k náhodnému vektoru* X *pro* n *rostoucí nade všechny meze (*$X_n \xrightarrow{D} X$*) právě když*

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

v každém bodě x*, kde je distribuční funkce* $F_X(x)$ *spojitá.*

Doplněk 3 (Definice: Striktně stacionární a ergodická posloupnost, Štěpán, 1987, str.393)**.** *Řekneme, že striktně stacionární posloupnost* $X_1, X_2, \ldots$ *je striktně stacionární a ergodická, jestliže* $P[(X_1, X_2, \ldots) \in S]$ *je 0 nebo 1 pro* $S \in \mathscr{S}_p$*, kde* $\mathscr{S}_p$ *chápeme jako p-invariantní množinu* $\mathscr{S}_p = \{S \in \mathscr{B}^n : p^{-1}S = S\}$*, kde p je operátor posunutí (*$p(X_n) = X_{n+1}$*).*

Doplněk 4 (Tvrzení o transformaci stacionární a ergodické posloupnosti, Štěpán, 1987, Důsledek VI.6.4, str. 394)**.** *Nechť je posloupnost* $X_1, X_2, \ldots$ *striktně stacionární a ergodická a máme* $f : (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$ *takové, že* $Y_n = f(X_n, X_{n+1}, \ldots), n \in \mathbb{N}$*, pak je posloupnost* $Y_1, Y_2, \ldots$ *rovněž striktně stacionární a ergodická.*

Doplněk 5 (Ergodická věta, Štěpán, 1987, VI.6.5, str.395)**.** *Nechť je posloupnost* $X_1, X_2, \ldots$ *striktně stacionární a ergodická. Pak*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) \overset{sj}{\to} \mathsf{E}\, f(X_1)$$

pro každou borelovsky měřitelnou funkci f *takovou, že* $f(X_1) \in L_1$*.*

Tvrzení 3 (Oprava tvrzení 3)**.** *Nechť máme striktně stacionární a ergodický náhodný proces* $\{X_t\}$ *s veličinami s nulovou střední hodnotou, kladným rozptylem a konečnou špičatostí, který má všechny konečněrozměrné vektory svých veličin spojitě rozdělené, pak pro* $n \to \infty$ *platí*

$$B_{\tau,n} \overset{sj}{\to} \beta_\tau = \frac{\mathsf{E}[X_t^2 X_{t+\tau}^2]}{(\mathsf{E}[X_t^2])^2}.$$

Doplněk 6 (Definice: Stejnoměrná integrovatelnost, Štěpán, 1987, str. 190)**.** *Řekneme, že* $\mathscr{F}$ *je stejnoměrně integrovatelná množina náhodných veličin, jestliže*

$$\int_{[|X| \geq c]} |X|\, dP \to 0,$$

pro $c \to \infty$*, stejnoměrně na* $\mathscr{F}$*.*

Doplněk 7 (Tvrzení: Postačující podmínky stejnoměrné integrovatelnosti, Štěpán, 1987, III.2.2, str. 190)**.** *Nechť* $\mathscr{F} \subset L_1$ *je taková množina, že buď existuje* $Y \in L_1$ *tak, že* $|X| \leq Y$ *skoro jistě pro* $X \in \mathscr{F}$ *(*Y *nazýváme integrovatelná majoranta), nebo existuje* $\epsilon > 0$ *tak, že* $\sup\{\mathsf{E}\, |X|^{1+\epsilon}, X \in \mathscr{F}\} < \infty$*. Potom* $\mathscr{F}$ *je stejnoměrně integrovatelná množina.*

Doplněk 8 (Definice: Cauchyovská posloupnost podle středu, Štěpán, 1987, str.189)**.** *Řekneme, že posloupnost* $\{X_n\} \subset L_1$ *je cauchyovská podle středu, když* $\lim_{n,m\to\infty} \mathsf{E}\, |X_n - X_m| = 0$*.*

Doplněk 9 (Tvrzení: Cauchyovská posloupnost podle středu a stejnoměrná integrovatelnost, Štěpán, 1987, III.2.6, str. 192)**.** *Nechť je posloupnost* $\{X_n\}$ *cauchyovská podle středu, pak je tato posloupnost stejnoměrně integrovatelná.*

Doplněk 10 (Tvrzení o konvergenci středních hodnot, Štěpán, 1987, III.4.18.b), str. 224)**.** *Nechť* $X, X_1, X_2, \ldots$ *jsou náhodné veličiny splňující* $X_n \overset{D}{\to} X$*. Pak platí, že je-li posloupnost* $\{X_n\}$ *stejnoměrně integrovatelná, pak* $X \in L_1$ *a* $\mathsf{E}\, X_n \to \mathsf{E}\, X$*.*

Tvrzení 5 (Oprava tvrzení 5)**.** *Nechť* $A_{\tau,n}$ *je nestranným odhadem rozptylu výběrových autokorelací a posloupnost veličin z náhodného procesu* $\{X_t, t \in T\}$ *je stejnoměrně integrovatelná, pak*

$$n\, var(R_{\tau,X}) \to \beta_\tau. \tag{1}$$

Literatura

KULICH, M. (2018). Základy teorie pravděpodobnosti. https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~zichova/FinMat/PravdepodobnostKulich.pdf. Souhrn pro předmět Matematická statistika 1.

PRÁŠKOVÁ, Z. (2016). *Základy náhodných procesů II.* Druhé upravené vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-246-3529-3.

ŠTĚPÁN, J. (1987). *Teorie pravděpodobnosti.* první vydání. Academia, Praha.