MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Veronika Roubínová

Trajektorie frakcionálních Brownových pohybů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Ráda bych zde poděkovala vedoucímu této práce RNDr. Petru Čoupkovi, Ph.D. za cenné rady, vstřícný přístup a veškerý čas, který mi při konzultacích věnoval.

Název práce: Trajektorie frakcionálních Brownových pohybů

Autor: Veronika Roubínová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce se věnuje frakcionálnímu Brownovu pohybu a především vlastnostem jeho trajektorií. Nejprve jsou definovány základní pojmy a samotný frakcionální Brownův pohyb. Následně jsou odvozeny jeho základní vlastnosti, mezi které patří korelace přírůstků a soběpodobnost. V souvislosti s regularitou trajektorií je ukázána jejich spojitost s využitím Kolmogorovovy-Čencovovy věty. V hlavní části práce je poté podrobně dokázán zákon iterovaného logaritmu, který je dále doplněn o simulace limitního chování trajektorií frakcionálního Brownova pohybu a využit následně v důkazu nediferencovatelnosti trajektorií.

Klíčová slova: frakcionální Brownův pohyb, trajektorie, zákon iterovaného logaritmu

Title: Trajectories of Fractional Brownian Motions

Author: Veronika Roubínová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This work concerns the fractional Brownian motion, in particular, the properties of its trajectories. Firstly some basic notions are defined and then the definiton of the fractional Brownian motion itself is given. Subsequently, its basic properties such as correlation of increments and self-similarity are derived. Continuity of its trajectories is shown using the Kolomogorov-Chentsov Theorem. The main chapter contains a thorough proof of the law of the iterated logarithm. It is complemented with simulations of limit behavior of trajectories and used to prove nondifferentiability.

Keywords: fractional Brownian motion, trajectories, law of the iterated logarithm

Obsah

Úvod

Frakcionální Brownův pohyb je náhodný proces, který zobecňuje Brownův pohyb ve smyslu závislosti přírůstků. Brownův pohyb má přírůstky nezávislé, kdežto frakcionální Brownův pohyb dovoluje jejich vzájemnou závislost, která je však kontrolována Hurstovým parametrem H. Zmíněný parametr ovlivňuje také mnoho dalších vlastností daného procesu a tato práce se zaměřuje především na analytické vlastnosti jeho trajektorií.

Frakcionální Brownův pohyb jako první popsal ve své práci [1] Andrej Nikolajevič Kolmogorov v roce 1940. O jeho pojmenování se však zasloužili pánové Benoît Mandelbrot a John Van Ness, kteří jej definovali stochastickým integrálem a více popsali ve své knize [2]. Zároveň to byl právě Benoît Mandelbrot, který pojmenoval parametr H podle britského hydrologa Harolda Edwina Hursta. Harold Edwin Hurst se v první polovině 20. století věnoval studii ročních přírůstků hladiny Nilu v Egyptě, kde z dat pozoroval, že vysoké či nízké hodnoty se seskupují do určitých období, a snažil se odvodit optimální velikost přehrady. Více informací lze nalézt v Hurstově článku [3].

Trajektorie frakcionálního Brownova procesu se objevují v mnoha praktických odvětvích. Kromě zmíněných přírodních jevů (hladina řeky Nilu, intenzita slunečního záření) je můžeme nalézt také v datech finančních či v telekomunikaci. Konkrétnější příklad lze nalézt v článku [4].

Práce se zabývá hlavně důkazem zákona iterovaného logaritmu. Ve většině dostupné literatury je tento výsledek pouze citován, a to z knihy Miguela Arconese [5], která nabízí pohled funkcionální analýzy. Cílem práce je tedy zpracovat tento důkaz podrobně, a to podle knihy [6], která nabízí poměrně přímočarý postup s využitím Borel-Cantelliho lemmatu, ale některé kroky jsou přeskočeny či nevysvětleny.

V první kapitole práce se seznámíme se základními pojmy a definujeme nejprve Brownův pohyb. Následně v druhé kapitole zavedeme samotný frakcionální Brownův pohyb a odvodíme korelaci mezi jeho přírůstky a vlastnost soběpodobnosti. V třetí kapitole se zabýváme přímo analytickými vlastnostmi trajektorií. Nejprve s využitím Kolmogorovovy-Čencovovy věty ukážeme jejich spojitost a poté už následuje část věnovaná podrobnému důkazu zákona iterovaného logaritmu. V poslední části třetí kapitoly uvádíme provedené simulace, ilustrující limitní chování trajektorií, a také využití zákona iterovaného logaritmu v důkazu nediferencovatelnosti trajektorií frakcionální Brownova pohybu.

1. Základní pojmy

1.1 Náhodné procesy

Než se dostaneme k samotnému frakcionálnímu Brownovu procesu a vlastnostem jeho trajektorií, je zapotřebí definovat některé základní pojmy z teorie pravděpodobnosti a náhodných procesů. Uvedené definice jsou čerpány především z učebnice [7].

Definice 1.1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ je pravděpodobnostní prostor a $T \subseteq \mathbb{R}$. Pak množinu náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ s hodnotami v $\mathbb{R}$ nazveme *náhodným procesem.*
Pro pevné $\omega \in \Omega$ nazýváme funkci $X_{(\cdot)}(\omega) : T \to \mathbb{R}, t \mapsto X_t(\omega)$, *trajektorií* náhodného procesu.

Definice 1.2. Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro každé $t \in T$ existuje střední hodnota $\mathsf{E}\, X_t$. Pak funkci $\mu_t : T \to \mathbb{R}, t \mapsto \mathsf{E}\, X_t$, nazýváme *střední hodnota* náhodného procesu. Proces, jehož střední hodnota je identicky rovna nule, se nazývá *centrovaný.*

Definice 1.3. Pokud $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro každé $t \in T$ je druhý moment konečný, tj. $\mathsf{E}\,|X_t|^2 < \infty$, pak funkci $R : T \times T \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$R(s\,, t) = \mathsf{E}[(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)]$$

nazýváme *autokovarianční funkcí* náhodného procesu. Hodnota $R(t, t)$ se nazývá *rozptyl* procesu v čase t.

Definice 1.4. *Konečně rozměrné rozdělení* náhodného procesu $\{X_t, t \in T\}$ je rozdělení náhodného vektoru $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})^\top$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a $t_1, \dots, t_k \in T$.

Definice 1.5. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá *gaussovský*, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, \dots, t_n \in T$, má vektor $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^\top$ n-rozměrné normální rozdělení $\mathcal{N}_n(\boldsymbol{m_t}, \boldsymbol{V_t})$, kde $\boldsymbol{m_t} = (\mathsf{E}\, X_{t_1}, \dots, \mathsf{E}\, X_{t_n})^\top$ a

$$\boldsymbol{V_t} = \begin{pmatrix} \mathrm{var} X_{t_1} & \mathrm{cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) & \dots & \mathrm{cov}(X_{t_1}, X_{t_n}) \\ \mathrm{cov}(X_{t_2}, X_{t_1}) & \mathrm{var} X_{t_2} & \dots & \mathrm{cov}(X_{t_2}, X_{t_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(X_{t_n}, X_{t_1}) & \mathrm{cov}(X_{t_n}, X_{t_2}) & \dots & \mathrm{var} X_{t_n} \end{pmatrix}.$$

Věta 1.1. *Rozdělení náhodného procesu $\{X_t, t \in T\}$ je určeno všemi jeho konečně rozměrnými rozděleními.*

Důkaz. Důkaz lze nalézt například v knize [8, I.10.1 strana 83]. □

Konečně rozměrná rozdělení gaussovského náhodného procesu jsou určena střední hodnotou a autokovarianční funkcí. Této vlastnosti budeme často využívat.

1.2 Brownův pohyb

Frakcionální Brownův pohyb je zobecněním Brownova pohybu. Shodují se v mnoha užitečných vlastnostech, proto jej v této části zavádíme. Více informací o Brownově pohybu lze získat v knize [9, kapitola 2].

Definice 1.6 (Brownův pohyb)**.** *Brownův pohyb (Wienerův proces)* je náhodný proces $B = \{B_t, t \geq 0\}$ splňující následující vlastnosti:

1. $B_0 = 0$ skoro jistě a $\{B_t, t \geq 0\}$ má spojité trajektorie.

2. $\{B_t, t \geq 0\}$ má nezávislé přírůstky. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé časy $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ jsou náhodné veličiny $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}$,$B_{t_3} - B_{t_2}, \ldots$,$B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ nezávislé.

3. Pro každé $0 \leq t < s$ má $B_s - B_t$ normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem rovným $s - t$.

Speciálně platí pro $t \geq 0$, že B_t má normální rozdělení s $\mathsf{E}\, B_t = 0$ a $\operatorname{var} B_t = t$.

Odvodíme zde ještě autokovarianční funkci Brownova procesu, která se nám následovně bude hodit v souvislosti s frakcionální verzí.

Poznámka. Autokovarianční funkce Brownova procesu je

$$\mathsf{E}[B_t B_s] = \min(s, t), \quad s, t \geq 0.$$

Důkaz. Nechť $0 \leq s < t$, počítejme

$$\mathsf{E}[B_t B_s] = \mathsf{E}[(B_s + (B_t - B_s))B_s] = \mathsf{E}[B_s B_s] + \mathsf{E}[(B_t - B_s)B_s] = \operatorname{var} B_s = s,$$

kde jsme využili nezávislosti náhodných veličin $B_t - B_s$ a B_s spolu s vlastností $B_s \sim N(0, s)$, kde symbolem $\sim$ budeme značit, že náhodná veličina má následující rozdělení. Obě tyto vlastnosti plynou z definice 1.6. □

2. Frakcionální Brownův pohyb

2.1 Souvislost s Brownovým pohybem

Základním pojmem celé práce je frakcionální Brownův pohyb, který je zobecněním již zmíněného Brownova pohybu přidáním parametru do autokovarianční funkce. Nyní jej definujeme.

Definice 2.1 (Frakcionální Brownův pohyb). *Frakcionální Brownův pohyb* je spojitý centrovaný gaussovský náhodný proces $\{B_t^H, t \geq 0\}$ s autokovarianční funkcí

$$\mathsf{E}[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad s, t \geq 0. \tag{2.1}$$

Parametr $H \in (0,1)$ nazýváme *Hurstův parametr* nebo *Hurstův exponent.*

Fakt, že centrovaný gaussovský náhodný proces s autokovarianční funkcí (2.1) existuje, plyne z důsledku Daniell-Kolmogorovovy věty, viz [10, věta 12.1.3], a toho, že pro $H \in (0,1)$ je funkce

$$f(s,t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad s, t \geq 0$$

pozitivně semidefinitní. To je dokázáno například v knize [11, strana 9].

Skutečnost, že opravdu existuje takový náhodný proces, který má zároveň spojité trajektorie skoro jistě následně ukazuje Kolmogorovova-Čencovova věta. Tu uvádíme v třetí kapitole.

Hurstův parametr je velice důležitým parametrem pro základní vlastnosti frakcionálního Brownova pohybu, a to například pro korelaci mezi přírůstky, jak bude blíže ukázáno v následující sekci.

Pro případ $H = \frac{1}{2}$ splývá frakcionální Brownův pohyb s Brownovým pohybem, což zanedlouho ukážeme. Dokážeme nejdříve následující dvě lemmata o základních vlastnostech frakcionálního Brownova pohybu.

Lemma 2.1. *Nechť $\{B_t^H, t \geq 0\}$ je frakcionální Brownův pohyb, pak platí*

$$B_t^H \sim N(0, t^{2H}), \quad t \geq 0.$$

Důkaz. Z gaussovskosti frakcionálního Brownova pohybu získáváme, že B_t^H má normální rozdělení, zbývá určit jeho střední hodnotu a rozptyl. Platí $\mathsf{E}\, B_t^H = 0$ a

$$\operatorname{var} B_t^H = \mathsf{E}[B_t^H B_t^H] = \frac{1}{2}(t^{2H} + t^{2H} - |t-t|^{2H}) = t^{2H},$$

tedy $B_t^H \sim N(0, t^{2H})$, což jsme chtěli dokázat. Speciálně pro $t = 0$ dostáváme, že $B_0^H = 0$ skoro jistě. $\square$

Lemma 2.2. *Frakcionální Brownův pohyb $\{B_t^H, t \geq 0\}$ má stacionární přírůstky, tedy pro $s, t \geq 0$ platí*

$$B_{t+s}^H - B_s^H \stackrel{D}{=} B_t^H,$$

kde symbol $\stackrel{D}{=}$ značí rovnost náhodných veličin v distribuci.

Důkaz. Mějme $s, t \geq 0$. Pak z gaussovskosti frakcionálního Brownova pohybu mají $B_{t+s}^H - B_s^H$ i B_t^H normální rozdělení. Zbývá ověřit rovnost středních hodnot a rozptylů. Platí

$$\mathsf{E}[B_{t+s}^H - B_s^H] = \mathsf{E}\, B_{t+s}^H - \mathsf{E}\, B_s^H = 0 = \mathsf{E}\, B_t^H$$

Zároveň dostáváme

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[(B_{t+s}^H - B_s^H)(B_{t+s}^H - B_s^H)] &= \mathsf{E}[B_{t+s}^H B_{t+s}^H] - 2\,\mathsf{E}[B_{t+s}^H B_s^H] + \mathsf{E}[B_s^H B_s^H] \\ &= \frac{1}{2}[(t+s)^{2H} + (t+s)^{2H}] - (t+s)^{2H} - s^{2H} + t^{2H} \\ &\quad + \frac{1}{2}[s^{2H} + s^{2H}] \\ &= t^{2H} = \mathsf{E}[B_t^H B_t^H] = \operatorname{var} B_t^H, \end{aligned}$$

kde předposlední rovnost plyne z lemmatu 2.1. Jelikož platí

$$\mathsf{E}[(B_{t+s}^H - B_s^H)(B_{t+s}^H - B_s^H)] = \operatorname{var}(B_{t+s}^H - B_s^H)$$

a normální rozdělení je jednoznačně určeno střední hodnotou a rozptylem, tak dostáváme rovnost daných náhodných veličin v distribuci. □

Věta 2.3. *Nechť $\{B_t^H, t \geq 0\}$ je frakcionální Brownův pohyb. Pokud $H = \frac{1}{2}$, pak je $\{B_t^H, t \geq 0\}$ Brownův pohyb z definice 1.6.*

Důkaz. Chceme ukázat, že Brownův pohyb je gaussovský a že se s frakcionálním pro $H = \frac{1}{2}$ rovnají ve středních hodnotách a autokovarianční funkci, zbytek plyne z věty 1.1. Pro důkaz gaussovskosti Brownova pohybu mějme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a časy $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Chceme dokázat, že vektor $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})^\top$ má n-rozměrné normální rozdělení, což je ekvivalentní s tím, že libovolná lineární kombinace $Y = c_1 B_{t_1} + \ldots + c_n B_{t_n}, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ má normální rozdělení. Lineární kombinaci můžeme přepsat jako

$$Y = \sum_{i=1}^{n} c_i B_{t_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} c_j \right) (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Nyní už jde z definice Brownova pohybu o součet nezávislých normálně rozdělených veličin, tedy jde o náhodnou veličinu s normálním rozdělením. Proto je Brownův pohyb gaussovský proces. Jelikož z definice jsou oba sledované procesy centrované, tak zbývá ověřit rovnost autokovariančních funkcí. Pro $H = 1/2$ dostáváme následující tvar autokovarianční funkce frakcionálního Brownova pohybu

$$\mathsf{E}[B_t^{\frac{1}{2}} B_s^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2}(t + s - |t - s|) = \min(s, t), \quad s, t \geq 0.$$

Z poznámky za definicí Brownova pohybu 1.6 získáváme rovnost autokovariančních funkcí, tedy s využitím věty 1.1 i platnost tvrzení. □

2.2 Korelace přírůstků

Ukážeme, jak s korelací přírůstků souvisí Hurstův parametr frakcionálního Brownova pohybu. Rozdělíme interval $(0, 1)$ na několik podmnožin se společnými vlastnostmi. Konkrétně:

Pro $H \in (0, 1/2)$ jsou přírůstky záporně korelované.
Pro $H = 1/2$ jsou přírůstky nezávislé (a tedy nekorelované).
Pro $H \in (1/2, 1)$ jsou přírůstky kladně korelované.

Tuto vlastnost nyní ukážeme. V důkazu jsou využity myšlenky ze článku [12, strana 28].

Věta 2.4. *Nechť $\{B_t^H, t \geq 0\}$ je frakcionální Brownův pohyb a pro $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ označme kovarianci mezi přírůstky*

$$\rho^H := \mathsf{E}[(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H)(B_{t_4}^H - B_{t_3}^H)].$$

Pak platí $\rho^H < 0$ pro $H \in (0, 1/2)$ a $\rho^H > 0$ pro $H \in (1/2, 1)$.

Důkaz. Mějme t_1, t_2, t_3, t_4 jako v tvrzení a počítejme:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}[(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H)(B_{t_4}^H - B_{t_3}^H)] = \\
&\quad = \mathsf{E}[B_{t_2}^H B_{t_4}^H] - \mathsf{E}[B_{t_2}^H B_{t_3}^H] - \mathsf{E}[B_{t_1}^H B_{t_4}^H] + \mathsf{E}[B_{t_1}^H B_{t_3}^H] \\
&\quad = \frac{1}{2}(t_2^{2H} + t_4^{2H} - |t_2 - t_4|^{2H}) - \frac{1}{2}(t_2^{2H} + t_3^{2H} - |t_2 - t_3|^{2H}) \\
&\qquad - \frac{1}{2}(t_1^{2H} + t_4^{2H} - |t_1 - t_4|^{2H}) + \frac{1}{2}(t_1^{2H} + t_3^{2H} - |t_1 - t_3|^{2H}) \\
&\quad = \frac{1}{2}(-|t_2 - t_4|^{2H} + |t_2 - t_3|^{2H} + |t_1 - t_4|^{2H} - |t_1 - t_3|^{2H}).
\end{aligned}$$

Z toho, že $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, získáváme

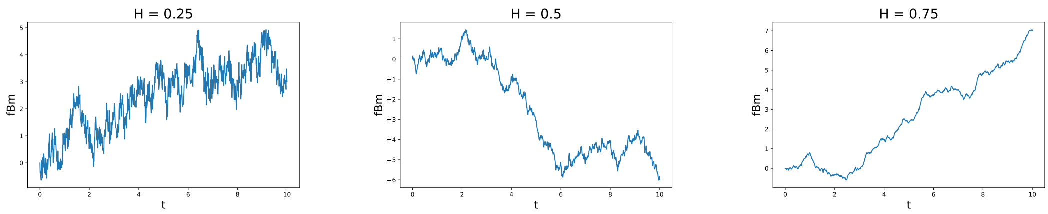
$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}[(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H)(B_{t_4}^H - B_{t_3}^H)] = \\
&\quad = -\frac{1}{2}[(t_4 - t_2)^{2H} - (t_4 - t_1)^{2H}] + \frac{1}{2}[(t_3 - t_2)^{2H} - (t_3 - t_1)^{2H} \\
&\quad = H \int_{t_1}^{t_2} (t_4 - x)^{2H-1}\, dx - H \int_{t_1}^{t_2} (t_3 - x)^{2H-1}\, dx \\
&\quad = (2H - 1)H \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_3}^{t_4} (y - x)^{2H-2}\, dy\, dx.
\end{aligned}$$

Protože funkce $f(x, y) = y - x$ je pro $x \in (t_1, t_2), y \in (t_3, t_4)$ všude kladná, neboť platí $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Proto

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{t_3}^{t_4} (y - x)^{2H-2}\, dy\, dx > 0.$$

Zároveň pro $H \in (0, 1/2)$ je $(2H - 1)H < 0$, tedy $\mathsf{E}[(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H)(B_{t_4}^H - B_{t_3}^H)] < 0$ a pro $H \in (1/2, 1)$ je $(2H - 1)H > 0$, tedy $\mathsf{E}[(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H)(B_{t_4}^H - B_{t_3}^H)] > 0$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Tato vlastnost má spolu s dalšími ukázanými v následujících sekcích vliv na podobu trajektorií frakcionálního Brownova pohybu. Na obrázku 2.1 jsou vyobrazeny tři realizace frakcionálního Brownova pohybu pro různé volby Hurstova parametru. Můžeme pozorovat, že v závislosti na tom, zda je H rovno $1/2$, z intervalu $(0, 1/2)$, či z intervalu $(1/2, 1)$, tak se vlastnosti frakcionálního Brownova pohybu liší. Tomuto faktu se budeme věnovat dále i v následující kapitole. Trajektorie byly vytvořeny s pomocí dostupné knihovny „fbm" v programovacím jazyku Python.



Obrázek 2.1: Trajektorie frakcionálního Brownova pohybu pro různé volby Hurstova parametru.

2.3 Soběpodobnost

Definice 2.2. Buď $H \in (0, 1)$. Náhodný proces $X = \{X_t, t \geq 0\}$ je *H-soběpodobný*, pokud

$$\{X_{at}, t \geq 0\} \stackrel{fidi}{=} \{a^H X_t, t \geq 0\}$$

pro každé $a > 0$, kde $\stackrel{fidi}{=}$ znamená rovnost všech konečně rozměrných rozdělení.

Věta 2.5. *Frakcionální Brownův pohyb $\{B_t^H, t \geq 0\}$ je H-soběpodobný.*

Důkaz. Frakcionální Brownův pohyb je gaussovský, tedy pro konečnou posloupnost $0 \leq t_1, \ldots, t_n, n \in \mathbb{N}$ mají vektory $(B_{at_1}^H, \ldots, B_{at_n}^H)^\top$ a $(a^H B_{t_1}^H, \ldots, a^H B_{t_n}^H)^\top$ n-rozměrné normální rozdělení. Ukážeme, že tato rozdělení se rovnají ve střední hodnotě a varianční matici, a využijeme větu 1.1. Z definice frakcionálního Brownova pohybu platí následující rovnost

$$\mathsf{E}(B_{at_1}^H, \ldots, B_{at_n}^H)^\top = 0 = \mathsf{E}(a^H B_{t_1}^H, \ldots, a^H B_{t_n}^H)^\top.$$

Zbývá tedy ověřit rovnost variančních matic, k čemuž stačí ukázat, že pro každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ platí $\mathsf{E}[B_{at_i}^H B_{at_j}^H] = \mathsf{E}[a^H B_{t_i}^H a^H B_{t_j}^H]$. Počítejme tedy z definice:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[B_{at_i}^H B_{at_j}^H] &= \frac{1}{2}({at_i}^{2H} + {at_j}^{2H} - |at_i - at_j|^{2H}) \\
&= \frac{1}{2} a^{2H} (t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}) \\
&= a^{2H}\, \mathsf{E}[B_{t_i}^H B_{t_j}^H] \\
&= \mathsf{E}[a^H B_{t_i}^H a^H B_{t_j}^H].
\end{aligned}$$

Z toho tedy plyne, že B_{at}^H a $a^H B_t^H$ se rovnají ve všech konečně rozměrných rozděleních, tedy z věty 1.1 platí $\{B_{at}^H, t \geq 0\} \stackrel{fidi}{=} \{a^H B_t^H, t \geq 0\}$, takže frakcionální Brownův pohyb $\{B_t^H, t \geq 0\}$ je H-soběpodobný. $\square$

3. Trajektorie a jejich vlastnosti

3.1 Spojitost

Základní vlastností trajektorií náhodných procesů je jejich spojitost. Jelikož Brownův pohyb má spojité trajektorie, tak je přirozené očekávat toto i od jeho frakcionální verze. Kromě spojitosti ukážeme také silnější vlastnost – hölderovskost.

Definice 3.1. Náhodný proces Y je *modifikací* náhodného procesu X, pokud pro každé $t \geq 0$ platí rovnost

$$\mathsf{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

Základním výsledkem, se kterým budeme v této kapitole pracovat, je Kolmogorovova-Čencovova věta, která nám dává postačující podmínku pro existenci modifikace náhodného procesu se skoro jistě lokálně hölderovskými trajektoriemi. Začneme tedy její formulací.

Věta 3.1. *Nechť $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ je náhodný proces a pro nějaké kladné konstanty α, β a C platí*

$$\mathsf{E}|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t-s|^{1+\beta}, \quad 0 \leq s,t \leq T. \tag{3.1}$$

Pak existuje spojitá modifikace $\widetilde{X} = \{\widetilde{X}_t, 0 \leq t \leq T\}$ náhodného procesu X, která je skoro jistě lokálně hölderovská řádu γ pro každé $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$ ve smyslu

$$\mathsf{P}\left(\omega : \sup_{\substack{0<|t-s|<h(\omega)\\ s,t\in[0,T]}} \frac{|\widetilde{X}_t(\omega) - \widetilde{X}_s(\omega)|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta\right) = 1,$$

kde h je skoro jistě kladná náhodná veličina a $\delta > 0$ je vhodná konstanta.

Důkaz. Důkaz je uveden v knize [9, věta 2.8]. □

Tuto větu můžeme aplikovat i na frakcionální Brownův pohyb, kde je podmínka splněna díky soběpodobnosti tohoto procesu a stacionaritě přírůstků. Získáváme tedy následující důsledek.

Věta 3.2. *Frakcionální Brownův pohyb $\{B_t^H, t \geq 0\}$ má pro $0 < H < 1$ spojitou modifikaci, která je skoro jistě lokálně hölderovská řádu γ pro $\gamma \in (0, H)$.*

Důkaz. Potřebujeme ověřit předpoklad Kolmogorovovy-Čencovovy věty. Díky stacionaritě přírůstků z lemmatu 2.2 a soběpodobnosti z věty 2.5 získáváme

$$\mathsf{E}[|B_t^H - B_s^H|^\alpha] = \mathsf{E}[|B_{t-s}^H|^\alpha] = \mathsf{E}[|(t-s)^H B_1^H|^\alpha] = |t-s|^{\alpha H} K_\alpha,$$

kde K_α je α-tý absolutní moment náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(0,1)$. Pak pro libovolné $\alpha > 1/H$ dostáváme z Kolmogorovovy-Čencovovy věty 3.1 existenci spojité modifikace, která je skoro jistě lokálně hölderovská řádu $\gamma \in (0, H - 1/\alpha)$. Na závěr vezmeme-li α dostatečně veliké, tak dostáváme tvrzení. □

3.2 Zákon iterovaného logaritmu

Zákon iterovaného logaritmu udává limitní chování, přesněji nejmenší možný interval, který pro velké časy obsahuje všechny možné hodnoty trajektorií frakcionálního Brownova pohybu skoro jistě. Základem celé této části je zákon iterovaného logaritmu pro Brownův pohyb.

Věta 3.3. *Nechť $\{B_t, t \geq 0\}$ je Brownův pohyb, pak s pravděpodobností 1 platí*

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{|B_t|}{\sqrt{2t \log \log (1/t)}} = 1.$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt v knize [9, věta 9.23] □

Přirozenou otázkou je, zda obdoba této věty platí také pro frakcionální Brownův pohyb. Ukazuje se, že opravdu lze odvodit podobné tvrzení. Avšak než se k němu dostaneme, formulujeme několik pomocných lemmat. Většina následujících důkazů vychází z knihy [6, strany 590–593]. Doplňujeme je o pomocná lemmata a objasnění vysvětlující v knize neokomentované části důkazů.

Hlavním nástrojem důkazu bude Borel-Cantelliho lemma.

Lemma 3.4.

- *(Cantelli) Je-li $\{A_n\}$ posloupnost jevů takových, že $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty$, pak*

$$\mathsf{P}(\limsup_{n \longrightarrow \infty} A_n) = 0.$$

- *(Borel) Nechť je $\{A_n\}$ posloupnost nezávislých jevů. Pak*

$$\mathsf{P}(\limsup_{n \longrightarrow \infty} A_n) = 0, \text{ je-li } \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty,$$

$$\mathsf{P}(\limsup_{n \longrightarrow \infty} A_n) = 1, \text{ je-li } \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) = \infty.$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt například v knize [10, věta 8.3.4] □

V rámci dalších důkazů budeme potřebovat také následující lemma označované jako Slepianovo.

Lemma 3.5 (Slepian lemma)**.** *Nechť $X = (X_1, \ldots, X_n)^\top, Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^\top$ jsou reálné náhodné vektory s normálním rozdělením splňující $\mathsf{E}X = \mathsf{E}Y = 0$, $\mathsf{E}X_i^2 = \mathsf{E}Y_i^2, i = 1, \ldots, n$ a $\mathsf{E}X_iX_j \leq \mathsf{E}Y_iY_j$ pro $i \neq j$. Pak pro libovolná reálná čísla $u_1, \ldots, u_n$*

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n} \{X_i \leq u_i\}\right) \leq \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n} \{Y_i \leq u_i\}\right).$$

Důkaz. Důkaz tvrzení lze nalézt v knize [13, důsledek 3.12]. □

Během výpočtů se nám budou hodit odhady distribuční a komplementární distribuční funkce normálního rozdělení $N(0, 1)$. Nejprve uvedeme horní a následně dolní odhad.

Lemma 3.6. *Pro komplementární chybovou funkci*

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt, \quad x \geq 0,$$

platí

$$\operatorname{erfc}(x) \leq e^{-x^2}, \quad x \geq 0.$$

Důkaz. Důkaz je v ještě obecnější verzi uveden v článku [14, věta 1]. □

Jelikož komplementární chybová funkce úzce souvisí s distribuční funkcí normálního rozdělení $N(0,1)$, dá se uvedené lemma přeformulovat následovně.

Důsledek 3.6.1. *Nechť X je náhodná veličina s normálním rozdělením $N(0,1)$. Pak platí*

$$\mathsf{P}(X \leq x) \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x < 0, \tag{3.2}$$

$$\mathsf{P}(X \geq x) \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x > 0. \tag{3.3}$$

Důkaz. Mějme náhodnou veličinu X z tvrzení a počítejme nejprve pro $x < 0$ s využitím substituce $t = -\sqrt{2}y$:

$$\mathsf{P}\left(X \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}\, dy = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Jelikož $-\frac{x}{\sqrt{2}} > 0$, tak z lemmatu 3.6 dostáváme nerovnost (3.2).
Obdobně pro $x > 0$ platí s využitím substituce $t = \sqrt{2}y$:

$$\mathsf{P}\left(X \geq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-y^2}\, dy \ = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Zároveň $\frac{x}{\sqrt{2}} > 0$, tedy z lemmatu 3.6 dostáváme nerovnost (3.3). □

Kromě uvedeného horního odhadu budeme potřebovat i odhad spodní, který následuje.

Lemma 3.7. *Nechť $x \geq 0$, pak platí*

$$\frac{x}{1+x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Důkaz. Označme

$$f(x) = \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt - \frac{x}{1+x^2} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

a ukážeme, že $f(x) \geq 0$ pro každé $x \geq 0$. Dosazením $x = 0$ dostáváme

$$f(0) = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt > 0.$$

Zároveň pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x) = -2\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(1+x^2)^2} < 0,$$

tedy funkce f je klesající. Jelikož máme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

tak pro $x \geq 0$ dostáváme $f(x) \geq 0$, z čehož plyne tvrzení lemmatu. $\square$

Lemma 3.8. *Nechť $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ je gaussovská posloupnost náhodných veličin se střední hodnotou 0, rozptylem 1 a vlastností, že pro nějaké $0 < \theta < 1/2$ platí*

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \max\{\mathsf{E}\,[\xi_k\xi_m] : k, m \in (n, 2n], k \neq m\} < \theta.$$

Pak s pravděpodobností 1 platí

$$\limsup_{k\longrightarrow\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{2\log k}} \geq 1 - 2\theta.$$

Důkaz. Využijeme Borel-Cantelliho lemma, proto nejdříve ukážeme, že

$$\sum_{n\geq 1} \mathsf{P}\left(\max_{2^n<k\leq 2^{n+1}} \frac{\xi_k}{\sqrt{2\log k}} < 1 - 2\theta\right) < \infty.$$

Nechť $\{\eta, \eta_k\}_{k\geq 1}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s nulovou střední hodnotou takových, že $\mathsf{E}\,\eta^2 = \theta$ a $\mathsf{E}\,\eta_k^2 = 1 - \theta$ pro každé $k \geq 1$. Nechť $N \in \mathbb{N}$ je takové, že pro každé $n \geq N$ už platí

$$\max\{\mathsf{E}\,[\xi_k\xi_m] : 2^n < k, m \leq 2^{n+1}, k \neq m\} < \theta.$$

Nechť $n \geq N$, pak s využitím nezávislosti $\{\eta, \eta_k\}_{k\geq 1}$ získáváme

$$\mathsf{E}\,[\xi_k\xi_m] \leq \theta = \mathsf{E}\,[(\eta + \eta_k)(\eta + \eta_m)]$$

pro $2^n < k, m \leq 2^{n+1}, k \neq m$. Zároveň $\mathsf{E}\,\xi_k^2 = 1 = \mathsf{E}\,[\eta + \eta_k]^2$. Ze Slepianova lemmatu 3.5 máme

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\max_{2^n<k\leq 2^{n+1}} \frac{\xi_k}{\sqrt{2\log k}} \leq 1 - 2\theta\right) &\leq \\
&\leq \mathsf{P}\left(\max_{2^n<k\leq 2^{n+1}} \xi_k \leq (1-2\theta)\sqrt{2\log 2^{n+1}}\right) \\
&\leq \mathsf{P}\left(\eta + \max_{2^n<k\leq 2^{n+1}} \eta_k \leq (1-2\theta)\sqrt{2\log 2^{n+1}}\right) \\
&\leq \mathsf{P}\left(\eta \leq -\theta\sqrt{2\log 2^{n+1}}\right) + \left(\mathsf{P}\left(\eta_1 \leq (1-\theta)\sqrt{2\log 2^{n+1}}\right)\right)^{2^n},
\end{aligned}$$

kde jsme v poslední nerovnosti využili toho, že $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením. Nyní odhadneme každý člen zvlášť.

Z toho, že $\eta/\sqrt{\theta}$ má normální rozdělení $N(0,1)$, pak s využitím důsledku 3.6.1 dostáváme

$$\mathsf{P}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\theta}} \leq -\sqrt{2\theta \log 2^{n+1}}\right) \leq \exp\left\{-\left(\frac{\sqrt{2\theta \log 2^{n+1}}}{\sqrt{2}}\right)^2\right\} = 2^{-\theta(n+1)}. \tag{3.4}$$

Pro $0 < x < 1$ platí $1 - x < e^{-x}$, tedy pro druhý člen dostáváme

$$\begin{aligned}\left(\mathsf{P}\left(\eta_1 \leq (1-\theta)\sqrt{2\log 2^{n+1}}\right)\right)^{2^n} &= \\ &= \left(1 - \mathsf{P}\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{1-\theta}} \geq \sqrt{2(1-\theta)\log 2^{n+1}}\right)\right)^{2^n} \\ &\leq \exp\left\{-\mathsf{P}\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{1-\theta}} \geq \sqrt{2(1-\theta)\log 2^{n+1}}\right)2^n\right\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Zároveň podobně jako výše $\eta_1/\sqrt{1-\theta}$ má normální rozdělení $N(0,1)$, tedy s využitím lemmatu 3.7 získáváme

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{1-\theta}} \geq \sqrt{2(1-\theta)\log 2^{n+1}}\right) &\geq \\ &\geq \frac{\exp\{-(1-\theta)(n+1)\log 2\}}{\sqrt{2\pi}(2(1-\theta)(n+1)\log 2 + 1)}\sqrt{2(1-\theta)(n+1)\log 2}.\end{aligned}$$

Z toho existuje konečná konstanta $C(\theta)$ závislá pouze na θ taková, že pro n dostatečně velké dostáváme s využitím nerovnosti (3.5) odhad

$$\begin{aligned}\left(\mathsf{P}\left(\eta_1 \leq (1-\theta)\sqrt{2\log 2^{n+1}}\right)\right)^{2^n} &\leq \\ &\leq \exp\left\{-\mathsf{P}\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{1-\theta}} \geq \sqrt{2(1-\theta)\log 2^{n+1}}\right)2^n\right\} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{C(\theta)2^{(\theta-1)n}}{\sqrt{n+1}}2^n\right\} = \exp\left\{-\frac{C(\theta)2^{\theta n}}{\sqrt{n+1}}\right\}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Z nerovností (3.4) a (3.6) dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\mathsf{P}\left(\max_{2^n<k\leq 2^{n+1}}\frac{\xi_k}{\sqrt{2\log k}} < 1-2\theta\right) &\leq \\ &\leq \sum_{n\geq 1}\mathsf{P}\left(\eta \leq -\theta\sqrt{2\log 2^{n+1}}\right) + \sum_{n\geq 1}\left(\mathsf{P}\left(\eta_1 \leq (1-\theta)\sqrt{2\log 2^{n+1}}\right)\right)^{2^n} \\ &\leq \sum_{n\geq 1}2^{-\theta(n+1)} + \sum_{n\geq 1}\exp\left\{-\frac{C(\theta)2^{\theta n}}{\sqrt{n+1}}\right\}.\end{aligned}$$

Jelikož obě tyto řady z podílového kritéria konvergují, tak máme

$$\sum_{n\geq 1}\mathsf{P}\left(\left\{\max_{2^n<k\leq 2^{n+1}}\frac{\xi_k}{\sqrt{2\log k}} < 1-2\theta\right\}\right) < \infty.$$

Z Borel-Cantelliho lemmatu pak už získáváme tvrzení. □

Lemma 3.9. *Nechť $x \in (0,1)$, potom platí*

$$x^a + x^{-a} - (x^{-1} - x)^a \le \begin{cases} x^a + ax^{2-a}, & 1 < a < 2, \\ 2x^a, & 0 < a \le 1. \end{cases}$$

Důkaz. Nejprve dokážeme případ, kdy $1 < a < 2$. Počítejme:

$$\begin{aligned} x^a + x^{-a} - (x^{-1} - x)^a &\le x^a + ax^{2-a} \\ x^{-a} - (x^{-1} - x)^a &\le ax^{2-a} \\ x^{-a}(1 - (1 - x^2)^a) &\le ax^{2-a} \\ 1 - (1 - x^2)^a &\le ax^2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Chceme tedy dokázat $0 \le ax^2 - (1 - (1 - x^2)^a)$. Označme

$$f(x) = ax^2 - (1 - (1 - x^2)^a),$$

pak platí $f(0) = 0$. Ukážeme, že pro $1 < a < 2$ je f neklesající na intervalu $(0,1)$. Platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Big(ax^2 - \Big(1 - (1 - x^2)^a\Big)\Big)' \\ &= 2ax - \Big(-a(1 - x^2)^{a-1}(-2x)\Big) \\ &= 2ax - 2ax(1 - x^2)^{a-1} \\ &= 2ax\left(1 - (1 - x^2)^{a-1}\right). \end{aligned}$$

Pro $x \in (0,1)$ je $0 < (1 - x^2) < 1$, tedy máme $0 < (1 - x^2)^{a-1} < 1$, neboť $1 < a < 2$, zároveň platí $2ax \ge 0$. Z toho dostáváme $f'(x) \ge 0, x \in (0,1)$, což spolu s $f(0) = 0$ dává $0 \le ax^2 - (1 - (1 - x^2)^a)$, a tedy platí (3.7).

Nyní ukážeme nerovnost z tvrzení pro případ $0 < a \le 1$. Počítejme

$$\begin{aligned} x^a + x^{-a} - (x^{-1} - x)^a &\le 2x^a \\ x^{-a} - (x^{-1} - x)^a &\le x^a \\ x^{-a}(1 - (1 - x^2)^a) &\le x^a \end{aligned} \tag{3.8}$$

Protože $0 < a \le 1$, tak $1 - (1 - x^2)^a \le 1 - (1 - x^2) = x^2$, tedy máme

$$x^{-a}(1 - (1 - x^2)^a) \le x^{2-a}.$$

Stačí proto dokázat $x^{2-a} \le x^a$. Platí $x^{2-a} = x^a$ pro $x = 0$ a $x = 1$. Zároveň $x \mapsto x^{2-a}$ je konvexní, neboť

$$\begin{aligned} (x^{2-a})'' &= \Big((2-a)x^{1-a}\Big)' \\ &= (2-a)(1-a)x^{-a} \ge 0 \end{aligned}$$

a $x \mapsto x^a$ je konkávní, neboť

$$\begin{aligned} (x^a)'' &= (ax^{a-1})' \\ &= a(a-1)x^{a-2} \le 0. \end{aligned}$$

Z toho získáváme $x^{2-a} \le x^a, x \in (0,1)$, tedy platí (3.8). $\square$

Nyní uvedeme lemma, které zobecňuje tvrzení důsledku 3.6.1 pro frakcionální Brownův pohyb.

Lemma 3.10. *Nechť S je interval $[0,1]$ a $\{B_t^H, t \geq 0\}$ je frakcionální Brownův pohyb. Pro $\delta \in (0,1]$ označme $S(\delta) := [0,\delta]$ a $\sigma_\delta^2 := \sup\{\mathsf{E}(B_t^H)^2 : t \in S(\delta)\}$. Pak pro $\delta \in (0,1)$ platí $\sigma_\delta^2 = \delta^{2H}\sigma_1^2$. Dále pro každé $\theta \in (0,1)$ existuje konečná konstanta $M = M(\theta)$ závislá pouze na θ taková, že pro každé $\delta \in (0,1]$ a $x > 0$ platí*

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\in S(\delta)} |B_t^H| > x\right) \leq M \exp\left\{-\frac{\theta x^2}{2\sigma_\delta^2}\right\}. \tag{3.9}$$

Důkaz. První část lemmatu platí díky soběpodobnosti frakcionálního Brownova pohybu z věty 2.5, neboť platí

$$\mathsf{E}(B_{t\delta}^H)^2 = \delta^{2H}\,\mathsf{E}(B_t^H)^2.$$

Přechodem k supremu pak dostaneme

$$\sigma_\delta^2 = \sup_{\tilde{t}\in[0,\delta]} \mathsf{E}(B_{\tilde{t}}^H)^2 \sup_{t\in[0,1]} \mathsf{E}(B_{t\delta}^H)^2 = \sup_{t\in[0,1]} \delta^{2H}\,\mathsf{E}(B_t^H)^2 = \delta^{2H}\sigma_1^2.$$

Pro důkaz druhé části buď C_δ pro $\delta > 0$ prostor všech reálných spojitých funkcí na $S(\delta)$ opatřený supremální normou $\|\cdot\|_{\sup}$. Pak náhodný proces X_δ, který je restrikcí náhodného procesu X na množinu $S(\delta)$, je náhodným prvkem C_δ (ve smyslu zobecnění náhodné veličiny s hodnotami v obecném měřitelném prostoru jako v [9, strana 60]) s centrovaným gaussovským rozdělením P, jehož definici a doplňující teorii lze nalézt v příloze v definicích 3.2 a 3.3. Nechť $D_\delta = [0,\delta] \cap \mathbb{Q}$ a mějme posloupnost $\{e_x : x \in D_\delta\}$ spojitých lineárních funkcionálů $e_x : f \mapsto f(x)$ na C_δ. Pak $\sup\{\int e_x^2\,dP : x \in D_\delta\} = \sigma_\delta^2$. Nechť $A_\delta := \sup\{|B_t^H| : t \in S(\delta)\}$, pak zSerniqueovy věty, formulované v příloze jako věta 3.14, plyne

$$M(\alpha,\delta) := \mathsf{E}\,\mathrm{e}^{\alpha A_\delta^2} = \int_{C_\delta} \mathrm{e}^{\alpha\|f\|_{\sup}^2} dP(f) < \infty \text{ právě tehdy, když } \alpha < \frac{1}{2\sigma_\delta^2}. \tag{3.10}$$

Pro $\theta \in (0,1)$ označme $\alpha_\delta := \frac{\theta}{2\sigma_\delta^2}$. Pro libovolné $c > 0$ platí díky soběpodobnosti frakcionálního Brownova pohybu, že $A_{c\delta}$ má stejné rozdělení jako $c^H A_\delta$, a z první části platí

$$\alpha_{c\delta} = \frac{\theta}{2\sigma_{c\delta}^2} = \frac{\theta}{2c^{2H}\sigma_\delta^2} = c^{-2H}\alpha_\delta.$$

Dostáváme tedy, že $\alpha_{c\delta}A_{c\delta}^2$ má stejné rozdělení jako $\alpha_\delta A_\delta^2$. Proto $M := M(\alpha_\delta,\delta) = M(\theta)$ závisí pouze na θ už ne na δ. Potom s využitím vlastnosti (3.10) a toho, že $0 < \alpha_\delta < \frac{1}{2\sigma_\delta^2}$ a $x > 0$ získáváme

$$\mathsf{P}\left(A_\delta > x\right) = \mathsf{P}\left(\mathrm{e}^{\alpha_\delta A_\delta^2} > \mathrm{e}^{\alpha_\delta x^2}\right) \leq \mathsf{E}\,\mathrm{e}^{\alpha_\delta A_\delta^2}\,\mathrm{e}^{-\alpha_\delta x^2} = M(\theta)\,\mathrm{e}^{-\alpha_\delta x^2},$$

což dává požadované tvrzení. □

Následuje zákon iterovaného logaritmu pro frakcionální Brownův pohyb, který je hlavní větou celé této části.

Věta 3.11. *Nechť $\{B_t^H, t \geq 0\}$ je frakcionální Brownův pohyb, pak pro $0 < H < 1$ s pravděpodobností 1 platí*

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{|B_t^H|}{t^H \sqrt{2 \log\log(1/t)}} = 1. \tag{3.11}$$

Důkaz. Pro přehlednost při využití složitějších výrazů v argumentu budeme v následujícím důkazu používat místo značení B_t^H výraz $B^H(t)$.
Pro každé $r \in (0,1)$ se $\log(k \log(1/r))$ chová limitně stejně jako $\log k$ pro $k \to \infty$. Díky tomu dostáváme s pravděpodobností 1

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{B^H(t)}{t^H \sqrt{2 \log\log(1/t)}} \geq \limsup_{k \longrightarrow \infty} \frac{B^H(r^k)}{r^{kH} \sqrt{2 \log k}}. \tag{3.12}$$

Pro $k = 1, 2, \dots$ označme $\xi_k := B^H(r^k)/r^{kH}$. Pak $\{\xi_k, k \geq 1\}$ je posloupnost náhodných veličin se střední hodnotou 0, rozptylem 1 a sdruženým normálním rozdělením takovým, že pro $1 \leq k < m < \infty$ platí z definice autokovarianční funkce

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,[\xi_k \xi_m] &= \frac{1}{2r^{(k+m)H}} \left(r^{2kH} + r^{2mH} - (r^k - r^m)^{2H}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(r^{(k-m)H} + r^{(m-k)H} - \left(r^{(k-m)/2} - r^{(m-k)/2}\right)^{2H}\right)
\end{aligned}$$

S využitím lemmatu 3.9, kde $x = r^{(m-k)/2} \in (0,1)$ a $a = 2H$, dostáváme

$$\mathsf{E}\,[\xi_k \xi_m] \leq \begin{cases} r^{(m-k)H} + 2Hr^{(m-k)(1-H)}, & 1 < 2H < 2, \\ 2r^{(m-k)H}, & 0 < 2H \leq 1, \end{cases}$$

tedy pro každé $\epsilon \in (0, 1/2)$ existuje $r \in (0,1)$ tak malé, že $\mathsf{E}\,[\xi_k \xi_m] < \epsilon$ pro každé $k \neq m$, tedy z lemmatu 3.8 s pravděpodobností 1 platí

$$\limsup_{k \longrightarrow \infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{2 \log k}} \geq 1 - 2\epsilon. \tag{3.13}$$

Jelikož $\epsilon \in (0, 1/2)$ bylo libovolné, tak (3.13) spolu s (3.12) dává (3.11) s nerovností „$\geq$“ místo rovnosti „$=$“.
Pro důkaz opačné nerovnosti mějme $\epsilon > 0$ a $r \in (0,1)$. Pak pro každé k dostatečně velké, aby platilo $r^k < e^{-e}$, máme $\sqrt{2 \log(k \log(1/r))} > \sqrt{2}$. S využitím důsledku 3.6.1 tedy dostáváme následující nerovnost:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\frac{|B^H(r^k)|}{r^{kH}} \geq (1+\epsilon)\sqrt{2 \log(k \log(1/r))}\right) \\
&\qquad = 2\,\mathsf{P}\left(\frac{B^H(r^k)}{r^{kH}} \geq (1+\epsilon)\sqrt{2 \log(k \log(1/r))}\right) \\
&\qquad \leq \exp\left\{-(1+\epsilon)^2 \log(k \log(1/r))\right\} = [k \log(1/r)]^{-(1+\epsilon)^2}.
\end{aligned}$$

Označme pro další průběh důkazu $\psi^H(t) := t^H \sqrt{2 \log(\log(1/t))}$. Jelikož

$$\sum_{k=1}^{\infty} [k \log(1/r)]^{-(1+\epsilon)^2} < \infty,$$

tak z Borel-Cantelliho lemmatu 3.4 dostáváme

$$\limsup_{k \longrightarrow \infty} \frac{|B^H(r^k)|}{\psi^H(r^k)} \leq 1 + \epsilon. \tag{3.14}$$

Dále mějme $\epsilon \in (0, 1/2)$ a $r \in (0, 1)$ takové, že $2(1-r)^H \leq \epsilon$ a $r^H \geq (1+\epsilon)/(1+2\epsilon)$. Pak ukážeme, že s pravděpodobností 1 platí

$$\limsup_{k \longrightarrow \infty} \sup \left\{ \left| \frac{B^H(t)}{\psi^H(t)} - \frac{B^H(r^k)}{\psi^H(r^k)} \right| : r^{k+1} \leq t \leq r^k \right\} < 3\epsilon. \tag{3.15}$$

Pro $k = 1, 2, \dots$ označme $X_k(s) := B^H((1-s)r^k) - B^H(r^k)$, kde $s \in [0, 1]$. Pak X_k je centrovaný gaussovský náhodný proces, který má stejná všechna konečně rozměrná rozdělení jako $\{B^H(sr^k), s \in [0, 1]\}$. Jelikož

$$\sup \{|B^H(t) - B^H(r^k)| : r^{k+1} \leq t \leq r^k\} = \sup \{|X_k(s)| : s \in [0, 1-r]\},$$

tak dostáváme

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\sup \{|B^H(t) - B^H(r^k)| : r^{k+1} \leq t \leq r^k\} > \epsilon\, \psi^H(r^k)\right) \\
&\qquad = \mathsf{P}\left(\sup \{|B^H(s)| : s \in [0, r^k(1-r)\} > \epsilon\, \psi^H(r^k)\right) =: A.
\end{aligned}$$

Nyní s využitím lemmatu 3.10, kde $\theta = 1/2$ a $M = M(1/2)$, dostáváme pro $r^k < e^{-e}$

$$\begin{aligned}
A &\leq M \exp\left\{ -\frac{\epsilon^2 \psi^H(r^k)^2}{4(1-r)^{2H} r^{2kH}} \right\} \\
&= M(k \log(1/r))^{-\epsilon^2/(2(1-r)^{2H})} \\
&\leq M(k \log(1/r))^{-2},
\end{aligned}$$

kde poslední nerovnost plyne z volby $2(1-r)^H \leq \epsilon$. Protože z předchozího plyne

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\sup \{|B^H(t) - B^H(r^k)| : r^{k+1} \leq t \leq r^k\} > \epsilon\, \psi^H(r^k)\right) \\
&\qquad\qquad \leq \sum_{k=1}^{\infty} M(k \log(1/r))^{-2} < \infty,
\end{aligned}$$

tak z Borel-Cantelliho lemmatu 3.4 získáváme

$$\limsup_{k \longrightarrow \infty} \sup \left\{ \frac{|B^H(t) - B^H(r^k)|}{\psi^H(r^k)} : r^{k+1} \leq t \leq r^k \right\} \leq \epsilon. \tag{3.16}$$

Z toho, že ψ^H je rostoucí na $[0, \delta]$ pro $\delta > 0$, dostáváme

$$\lim_{k \to \infty} \sup \left\{ \left| \frac{\psi^H(r^k)}{\psi^H(t)} - 1 \right| : r^{k+1} \leq t \leq r^k \right\} = \lim_{k \to \infty} \frac{\psi^H(r^k)}{\psi^H(r^{k+1})} - 1.$$

Zároveň platí následující limita:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\psi^H(r^k)}{\psi^H(r^{k+1})} - 1 = \lim_{k \to \infty} \frac{\sqrt{\log\log(1/r^k)}}{r^H \sqrt{\log\log(1/r^{k+1})}} - 1 = \frac{1}{r^H} - 1.$$

Celkem tedy s využitím $r^H \geq (1+\epsilon)/(1+2\epsilon)$ dostáváme odhad

$$\lim_{k\to\infty} \sup \left\{ \left| \frac{\psi^H(r^k)}{\psi^H(t)} - 1 \right| : r^{k+1} \leq t \leq r^k \right\} \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}. \tag{3.17}$$

Díky výše zmíněným odhadům už ukážeme nerovnost (3.15). Platí totiž

$$\begin{aligned} \left| \frac{B^H(t)}{\psi^H(t)} - \frac{B^H(r^k)}{\psi^H(r^k)} \right| &\leq \left| \frac{B^H(t)}{\psi^H(t)} - \frac{B^H(r^k)}{\psi^H(t)} + \frac{B^H(r^k)}{\psi^H(r^k)} - \frac{B^H(t)}{\psi^H(r^k)} \right| \\ &\quad + \left| \frac{B^H(r^k)}{\psi^H(t)} - \frac{B^H(r^k)}{\psi^H(r^k)} \right| + \left| \frac{B^H(t)}{\psi^H(r^k)} - \frac{B^H(r^k)}{\psi^H(r^k)} \right| \\ &\leq \left| \frac{B^H(t) - B^H(r^k)}{\psi^H(r^k)} \right| \left| \frac{\psi^H(r^k)}{\psi^H(t)} - 1 \right| \\ &\quad + \left| \frac{B^H(r^k)}{\psi^H(r^k)} \right| \left| \frac{\psi^H(r^k)}{\psi^H(t)} - 1 \right| + \left| \frac{B^H(t) - B^H(r^k)}{\psi^H(r^k)} \right|. \end{aligned}$$

Z předchozího s využitím odhadů (3.14), (3.16) a (3.17) získáváme

$$\limsup_{k\longrightarrow\infty} \sup \left\{ \left| \frac{B^H(t)}{\psi^H(t)} - \frac{B^H(r^k)}{\psi^H(r^k)} \right| : r^{k+1} \leq t \leq r^k \right\} \leq \epsilon \cdot \frac{\epsilon}{1+\epsilon} + (1+\epsilon) \cdot \frac{\epsilon}{1+\epsilon} + \epsilon.$$

Z toho už plyne odhad (3.15).
Limitním přechodem $\epsilon \searrow 0$ pak z nerovností (3.15) a (3.14) dostáváme úvodní rovnost (3.11) s „$\leq$“ místo „$=$“. Spojením obou částí pak plyne tvrzení. □

Z dokázaného tvrzení se dá jednoduše odvodit také limitní chování u nekonečna, které nyní formulujeme.

Důsledek 3.11.1. *Nechť $\{B_t^H, t \geq 0\}$ je frakcionální Brownův pohyb, pak pro $0 < H < 1$ s pravděpodobností 1 platí*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|B_t^H|}{t^H \sqrt{2\log\log(t)}} = 1.$$

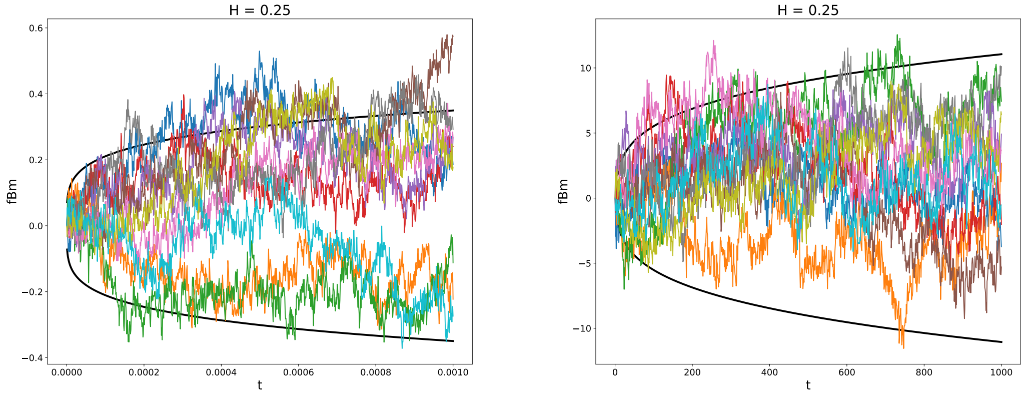
Důkaz. Plyne z věty 3.11 a vlastnosti

$$t^{2H} B^H_{1/t} \stackrel{D}{=} B_t^H, \quad t > 0,$$

která je důsledkem soběpodobnosti dokázané ve větě 2.5. □

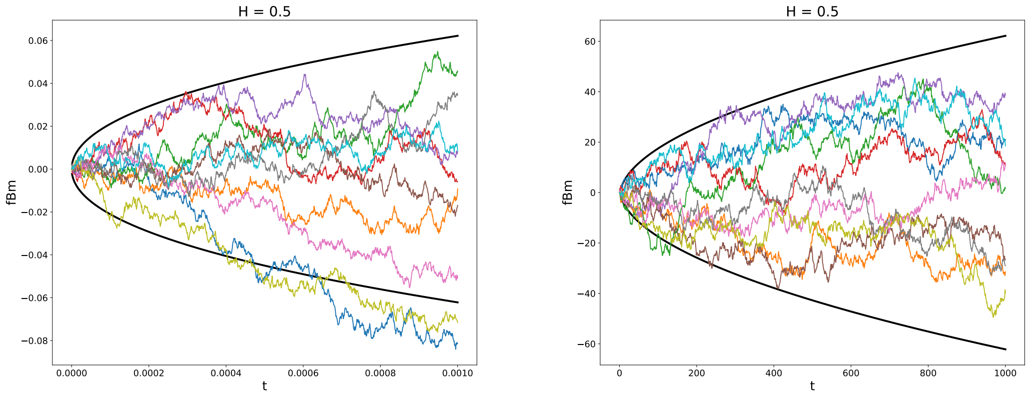
3.3 Ilustrace zákona iterovaného logaritmu

Zákon iterovaného logaritmu udává limitní chování frakcionálního Brownova pohybu. Říká, že s pravděpodobností 1 se výraz $\frac{|B_t^H|}{t^H\sqrt{2\log\log(1/t)}}$ pro klesající čas t dostane do intervalu $[-1{,}1]$ a už z něj nevystoupí. Analogicky pro limitní chování u ∞ se výraz $\frac{|B_t^H|}{t^H\sqrt{2\log\log(t)}}$ pro rostoucí čas t dostane do intervalu $[-1{,}1]$ a už z něj nevystoupí. Pro ilustraci tohoto chování přikládáme simulace na obrázcích 3.1, 3.2 a 3.3, kde bylo vždy vygenerováno 10 trajektorií frakcionálního Brownova pohybu a zároveň „hraniční“ funkce $t^H\sqrt{2\log\log(1/t)}$ v případě limitního chování u 0 a $t^H\sqrt{2\log\log(t)}$ v případě chování pro velké časy. Simulace byly vytvořeny s pomocí dostupné knihovny „fbm“ v programovacím jazyku Python.



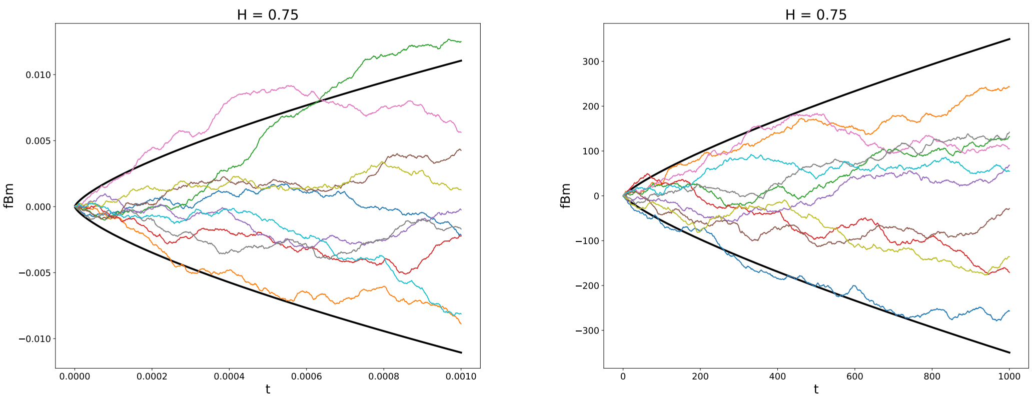
(a) Limitní chování u 0 (b) Chování pro velké časy

Obrázek 3.1: Simulace zákona iterovaného logaritmu pro $H = 1/4$



(a) Limitní chování u 0 (b) Chování pro velké časy

Obrázek 3.2: Simulace zákona iterovaného logaritmu pro $H = 1/2$



(a) Limitní chování u 0 (b) Chování pro velké časy

Obrázek 3.3: Simulace zákona iterovaného logaritmu pro $H = 3/4$

3.4 Důsledky zákona iterovaného logaritmu

Z úvodní sekce třetí kapitoly získáváme lokální hölderovskost trajektorií frakcionálního Brownova pohybu do řádu H. Přirozenou otázkou je, zda tato vlastnost platí i pro vyšší řády. Následující věta ukazuje, že odpověď na tuto otázku je záporná, a to s využitím dříve zmíněného zákona iterovaného logaritmu. Tvrzení vychází ze článku [15, tvrzení 3.2] a je doplněno o další objasnění.

Věta 3.12. *Mějme $\gamma \geq H$, pak frakcionální Brownův pohyb $\{B_t^H, t \geq 0\}$ skoro jistě nemá lokálně hölderovské trajetorie řádu γ.*

Důkaz. Ukážeme tuto vlastnost pro $t = 0$ a následně využijeme stacionarity přírůstků. Ze zákona iterovaného logaritmu získáváme

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{t\searrow 0} \frac{|B_t^H|}{t^H\sqrt{2\log\log(1/t)}} = 1\right) = 1. \tag{3.18}$$

Pro spor předpokládejme, že existuje jev $\mathcal{M}$ s nenulovou pravděpodobností takový, že pro každé $\omega \in \mathcal{M}$ je příslušná trajektorie frakcionálního Brownova pohybu $\{B_t^H, t \geq 0\}$ hölderovská řádu $\gamma \geq H$ v bodě $t = 0$. Pak pro každé $\omega \in \mathcal{M}$ platí

$$\limsup_{t\searrow 0} \frac{|B_t^H(\omega)|}{t^\gamma} < \infty. \tag{3.19}$$

Zároveň jelikož $\gamma \geq H$, tak

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^{\gamma-H}}{\sqrt{2\log\log(1/t)}} = 0. \tag{3.20}$$

Spojením vlastností (3.20) a (3.19) dostáváme

$$\limsup_{t\searrow 0} \frac{|B_t^H(\omega)|}{t^H\sqrt{2\log\log(1/t)}} = 0,$$

což je ve sporu s tvrzením zákona iterovaného logaritmu (3.18). Dokázali jsme tedy, že pro $\gamma \geq H$ frakcionální Brownův pohyb $\{B_t^H, t \geq 0\}$ skoro jistě nemá lokálně hölderovské trajetorie řádu γ v bodě $t = 0$. Současně pro libovolné $t > 0$ a $\gamma \geq H$ máme díky stacionaritě přírůstků z lemmatu 2.2 a vlastnosti pro $t = 0$, že skoro jistě platí

$$\limsup_{|t-t_0|\searrow 0} \frac{|B_t^H - B_{t_0}^H|}{|t-t_0|^\gamma} = \limsup_{|t-t_0|\searrow 0} \frac{|B_{t-t_0}^H|}{|t-t_0|^\gamma} < \infty.$$

Z toho už plyne tvrzení. □

Další důležitou vlastností trajektorií je kromě spojitosti také diferencovatelnost, které se budeme věnovat nyní. Ukážeme, že trajektorie frakcionálního Brownova pohybu se řadí mezi funkce, které jsou spojité, ale v žádném bodě nemají derivaci. Následující věta dokazuje tuto vlastnost s využitím již získaných výsledků z předchozí sekce. Důkaz je čerpán ze článku [15, důsledek 3.3] a je doplněn o dodatečná objasnění.

Věta 3.13. *Frakcionální Brownův pohyb* $\{B_t^H, t \geq 0\}$ *má skoro všechny trajektorie takové, že nemají derivaci v žádném bodě.*

Důkaz. Důkaz povedeme sporem. Tvrzení dokážeme nejprve pro $t = 0$ a následně využijeme stacionarity přírůstků z lemmatu 2.2. Předpokládejme tedy, že existuje jev s nenulovou pravděpodobností $\mathcal{M}$ takový, že pro každé $\omega \in \mathcal{M}$ existuje pro příslušnou trajektorii derivace v bodě $t = 0$ zprava, tedy existuje konečná limita

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{B_t^H(\omega)}{t} < \infty.$$

To však znamená, že existuje jev s nenulovou pravděpodobností $\mathcal{M}$ takový, že příslušné trajektorie frakcionálního Brownova pohybu jsou lipschitzovské v bodě 0, což je ve sporu s dokázaným tvrzením ve větě 3.12. $\square$

Závěr

V práci byly odvozeny základní vlastnosti frakcionálního Brownova pohybu, a to především analytické vlastnosti jeho trajektorií. Kromě důkazu spojitosti, který je důsledkem Kolmogorovovy-Čencovovy věty, práce obsahuje důkaz zákona iterovaného logaritmu. Ten je oproti původnímu zdroji doplněn o rozšiřující vysvětlení postupu a několik pomocných lemmat. Pro lepší názornost jsou přiloženy vytvořené simulace, které ilustrují limitní chování trajektorií frakcionálního Brownova pohybu u nuly a pro velké časy. Zároveň je ukázáno, že získané výsledky mohou být užitečné k odvození dalších vlastností jako je například nediferencovatelnost trajektorií.

Samozřejmě lze nalézt mnoho dalších analytických vlastností, které v práci uvedeny nejsou a práce by se o ně dala v budoucnu rozšířit. Jde například o určení modulu spojitosti frakcionálního Brownova procesu.

Přílohy

Gaussovské míry a Ferniqueova věta

V rámci důkazu zákonu iterovaného logaritmu 3.11 využíváme několik pomocných lemmat mimo jiné také lemma 3.10, které využívá gaussovské míry a Ferniqueovu větu. Jelikož jde o rozšiřující téma, tak zde uvádíme doplňující teorii a hlavní z použitých vět. Následující definice jsou převzaty z Bogachevovy knihy [16, definice 1.1.1 a 2.2.1]. Nejprve zavedeme gaussovskou míru na $\mathbb{R}$ a poté její zobecnění v nekonečně rozměrných prostorech.

Definice 3.2. Borelovská pravděpodobnostní míra γ na $\mathbb{R}$ se nazývá *gaussovská*, pokud je to Diracova míra δ_μ v bodě μ, nebo má hustotu

$$p(\cdot, \mu, \sigma^2) : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Parametry μ, σ^2 označujeme *střední hodnota* a *rozptyl*. Gaussovská míra γ se nazývá *centrovaná*, pokud $\mu = 0$.

Definice 3.3. Nechť X je separabilní Banachův prostor. Pravděpodobnostní míra γ definovaná na borelovské σ-algebře $\mathcal{B}(X)$ se nazývá *gaussovská*, pokud pro každou funkci z duálního prostoru $f \in X^*$ je indukovaná míra $\gamma \circ f^{-1}$ na $\mathbb{R}$ gaussovská. Míra γ se nazývá *centrovaná*, pokud pro každou funkci $f \in X^*$ je indukovaná míra $\gamma \circ f^{-1}$ na $\mathbb{R}$ centrovaná.

Kromě teorie okolo gaussovských měr se v důkazu zmiňovaného lemmatu 3.10 využívá Ferniqueova věta. Konkrétně se jedná o její verzi z knihy R.M.Dudleyho [17], kterou zde uvádíme.

Věta 3.14 (Ferniqueova věta)**.** *Nechť $(X, \mathcal{B})$ je měřitelný vektorový prostor a P centrovaná gaussovská míra na X. Mějme $\{y_n\}_{n\geq 1}$ posloupnost lineárních funkcionálů z X do $\mathbb{R}$ a označme $\|x\| := \sup_{n\geq 1} |y_n(x)|$. Předpokládejme, že $\mathsf{P}(\|x\| < \infty) > 0$. Pak $\tau := (\sup_{n\geq 1} \int y_n^2 dP)^{1/2} < \infty$ a $\mathsf{E} \exp\{\alpha \|x\|^2\} < \infty$ právě tehdy, když $\alpha < \frac{1}{2\tau^2}$.*

Důkaz. Důkaz lze nalézt ve zmiňované knize [17, věta 2.2.8]. □

Seznam použité literatury

[1] Andrei N. Kolmogorov. Wienersche spiralen und einige andere interessante kurven im hilbertschen raum. *Acad. Sci. URSS (NS)*, 26:115–118, 1940.

[2] Benoît B. Mandelbrot, John W. Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10(4):422–437, 1968.

[3] Harold E. Hurst. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116(1):770–799, 1951.

[4] Jim Gatheral, Thibault Jaisson, Mathieu Rosenbaum. Volatility is rough. *Quantitative Finance*, 18(6):933–949, 2018.

[5] Miguel A. Arcones. On the law of the iterated logarithm for Gaussian processes. *Journal of Theoretical Probability*, 8:877–903, 1995.

[6] Richard M. Dudley, Rimas Norvaiša. *Concrete Functional Calculus.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2011.

[7] Zuzana Prášková, Petr Lachout. *Základy náhodných procesů.* Karolinum, 1998.

[8] Josef Štěpán. *Teorie pravděpodobnosti: Matematické základy.* Academia, 1987.

[9] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer, 1991.

[10] Richard M. Dudley. *Real Analysis and Probability.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2002.

[11] Ivan Nourdin. *Selected Aspects of Fractional Brownian Motion.* Springer, 2012.

[12] Benjamin McGonegal. Fractional brownian motion and the fractional stochastic calculus. *Master thesis, New York University*, 2014.

[13] Michel Ledoux, Michel Talagrand. *Probability in Banach Spaces: Isoperimetry and Processes.* Springer, 2006.

[14] Seok-Ho Chang, Pamela C. Cosman, Laurence B. Milstein. Chernoff-type bounds for the Gaussian error function. *IEEE Transactions on Communications*, 59(11):2939–2944, 2011.

[15] Tommi Sottinen. Fractional Brownian motion in finance and queueing. *Academic dissertation, University of Helsinki*, 2003.

[16] Vladimir I. Bogachev. *Gaussian Measures.* American Mathematical Society, 1998.

[17] Richard M. Dudley. *Uniform Central Limit Theorems.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999.