

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Václav Zuzák

Chaotické chování demonstrované programem Mathematica

Katedra meteorologie a ochrany prostředí

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Aleš Raidl, Ph.D.
Studijní program: Fyzika - obecná fyzika

2007

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 31.5.2007

Václav Zuzák

Obsah

1 Úvod	5
1.1 Motivace	5
1.2 Základní pojmy	5
1.3 Příklad - Logistická rovnice	7
2 Scénáře vzniku chaosu	10
2.1 Klasifikace	10
2.2 I.Lokální bifurkace	13
2.2.1 A. Zdvojování periody	13
2.2.2 B. Kvaziperiodicita	14
2.2.3 C. Střídavý chaos (intermitence)	15
2.3 I.Globální bifurkace	16
2.3.1 A.Metastabilní chaos	16
2.3.2 B.Krize	18
3 Závěr	21
Literatura	22

Název práce: Chaotické chování demonstrované programem Mathematica
Autor: Václav Zuzák
Katedra (ústav): Katedra meteorologie a ochrany prostředí
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Aleš Raidl, Ph.D.
e-mail vedoucího: Ales.Raidl@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci s pomocí programu Mathematica demonstrujeme chaotické chování na třech dynamických systémech - diskrétní Logistické rovnici, Lorenzovu spojitým systémem a Rösslerovu spojitým systémem. Speciálně pak různé scénáře cesty k chaosu.

Klíčová slova: chaos, Mathematica, cesty k chaosu

Title: Chaotic Behaviour Demonstrated in Mathematica Software
Author: Václav Zuzák
Department: Department of Meteorology and Environment Protection
Supervisor: RNDr. Aleš Raidl, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Ales.Raidl@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we use Mathematica software to demonstrate the chaotic behaviour of three dynamical systems - discrete Logistic equation and two continuous systems - Lorenz's and Rössler's. Particularly the different kinds of transition to chaos are shown.

Keywords: chaos, Mathematica, transition to chaos

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivace

Od svého vzniku před čtyřiceti lety se teorie chaosu stala poměrně rozsáhlou oblastí výzkumu dynamických systémů jak z matematického, tak i fyzikálního hlediska. Tato práce si vybírá zajímavou oblast na rozhraních chaotického a nechaotického chování - tzv. scénáře vzniku chaosu, a demonstruje je pomocí matematického software Mathematica. Použitý matematický aparát je redukován na nezbytnou míru pro pochopení výsledných trajektorií a grafů.

1.2 Základní pojmy

Mějme spojitý dynamický systém (dále jen DS) v omezeném n -dimenzionálním fázovém prostoru daný trajektorií (vektorové veličiny zvýrazňujeme tučně)

$$\mathbf{T}_{\mathbf{x}_0}(t) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \mathbf{T}_{\mathbf{x}_0}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

obvykle zadaný soustavou obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = f(\mathbf{T}) \quad (1.2)$$

V diskrétním případě odpovídající soustavou diferenčních rovnic

$$T_{n+1} = T_n(\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

Pro počáteční podmínky \mathbf{x}_0 je jejich řešení jednoznačné, lze tedy v libovolném čase přesně určit stav systému - jedná se o deterministický systém. Charakter DS je možné jednoduše odhadnout z tzv. **pevných bodů**. Jsou to body, v nichž jsou časové derivace nulové $\left. \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right|_{\mathbf{x}_p} = 0$, DS v něm tedy stojí.

Lokální chování $\dot{\mathbf{T}}$ (tečka značí časovou derivaci) v okolí libovolného bodu \mathbf{x} můžeme vyjádřit Taylorovým rozvojem (předpokládáme dostatek derivací)

$$\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

kde

$$J_{ij} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right) \quad (1.5)$$

je Jacobiho matice.

Přechodem k vhodným lokálním souřadnicím získáme diagonální matici s elementy $\{\lambda_1^{loc}, \lambda_2^{loc}, \dots, \lambda_n^{loc}\}$, $\lambda_k^{loc} \in \mathbb{C}$ V blízkosti pevného bodu se tedy trajektorie F chová jako:

$$\dot{\mathbf{T}} \propto e^{\lambda_1^{loc} + \lambda_2^{loc} + \dots + \lambda_n^{loc}} \quad (1.6)$$

Podle hodnot koeficientů λ pak můžeme určit typ pevného bodu (atraktivita, spirální charakter, ...)

V libovolném bodě \mathbf{x} udávají λ^{loc} lokální změnu objemu konfiguračního prostoru: n -rozměrná koule o poloměru 1 přechází k n -rozměrnému elipsoidu s hlavními poloosami $e^{\lambda_1^{loc}} \dots e^{\lambda_n^{loc}}$. Dvě blízké trajektorie se tedy chovají podle velikostí λ^{loc} - tzv. **lokálních Ljapunovových exponentů**:

- pro $\lambda < 0$ exponenciálně konvergují
- pro $\lambda > 0$ exponenciálně divergují
- pro $\lambda = 0$ vyvíjejí se lineárně (laminárně)

Globální Ljapunovovy exponenty (dále jen **Ljapunovovy exponenty**) dostaneme zprůměrováním λ^{loc} po trajektorii

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \lambda_i^{loc} \quad (1.7)$$

Velikosti Ljapunovových exponentů tedy kvantifikují globální chování DS. Pro $\lambda_{max} < 0$ jde o konvergující disipativní systém, pro $\lambda_{max} = 0$ o konvergující periodické a pro $\lambda_{max} > 0$ o chaotické systémy. (stále požadujeme omezenost systému).

Chaos tedy můžeme charakterizovat, jako exponenciálně se vyvíjející systém-trajektorie je chaotická, jestliže má alespoň jeden kladný Ljapunovův exponent.

S Ljapunovými koeficienty souvisí graf závislosti stavu systému po mnoha krocích na jeho parametrech-**bifurkační diagram**. Pro každou hodnotu parametru náhodně zvolíme velké množství počátečních bodů (trajektorií),

a sledujeme jejich limitní chování. To se mění v důsledku změny charakteru (počet, poloha, typ, dosah, ...) pevných bodů.

Pokud v n -rozměrném fázovém prostoru zvolíme $n-1$ dimenzionální orientovaný podprostor, můžeme trajektorii redukovat na tento podprostor tzv. **Poincarého zobrazení**. Poincarův obraz vznikne jako průnik trajektorie (resp. spojnice bodů trajektorie v diskrétním případě) a podprostoru (většinou) v předem určené orientaci. Vhodnou volbou nadplochy můžeme získat časově závislou posloupnost bodů, z níž lze snáze nahlédnout vývoj systému.

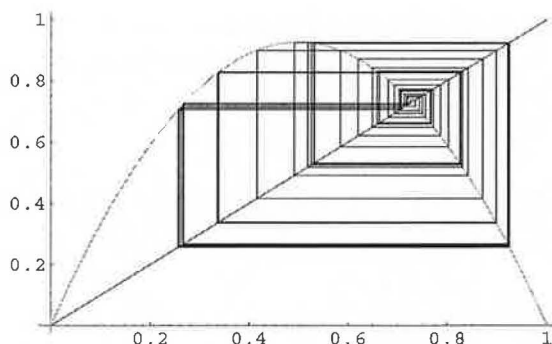
Z jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic plyne neprotínání se trajektorií. V důsledku toho může u spojitého systému docházet k chaotickému chování až pro $n \geq 3$. V prostorech nižší dimenze lze dosáhnout chaosu pomocí diferenčních rovnic, kdy skáče mezi "vzdálenými" oblastmi fázového prostoru.

1.3 Příklad - Logistická rovnice

Vztahy výše uvedených pojmů jsou dobře viditelné na logistické (diferenční) rovnici.

$$x_{n+1} = ax(1-x), 1 < a < 4 \quad (1.8)$$

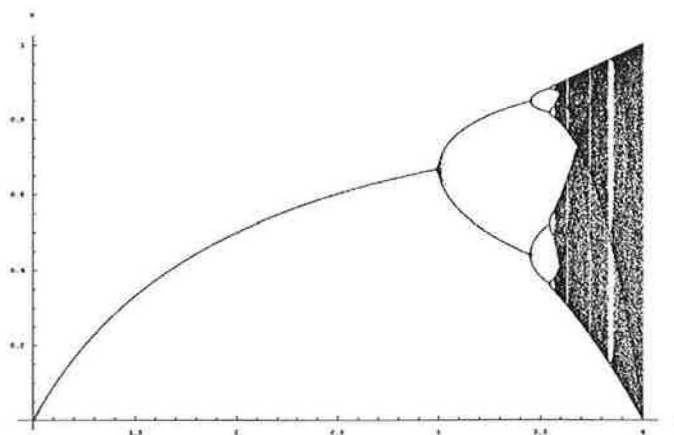
Pro představu: jde o posloupnost hodnot x průsečíků lomené čáry a paraboly v následujícím zobrazení:



Obrázek 1.1: Iterace logistické rovnice

Jednoduchost je dána jednak jednorozměrností, především však tím, že řešení nediverguje.

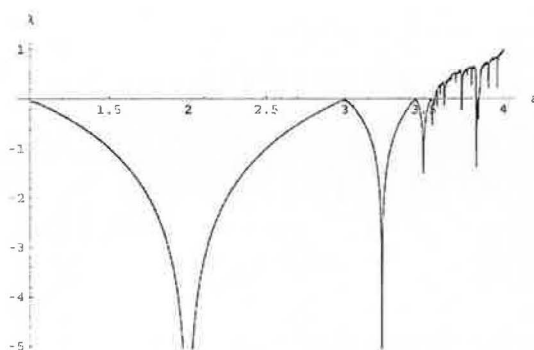
Bifurkační diagram



Obrázek 1.2: Bifurkační diagram logistické rovnice

znázorňuje stav systému po 200 krocích v závislosti na parametru. Pro každou hodnotu parametru je znázorněno 100 konečných hodnot náhodného parametru $0 < x_0 < 1$. Vidíme, že od jisté hodnoty parametru a ($a \simeq 3.6$) dochází k přechodu k chaotickému chování - velmi malá změna počáteční hodnoty x_0 vede (díky exponenciálnímu vzdalování trajektorií $\Leftrightarrow \lambda > 0$) k velké změně konečné hodnoty.

Chování DS kvantifikované velikostí Ljapunovova exponentu. Korespondence s bifurkačním diagramem je jasně patrná.

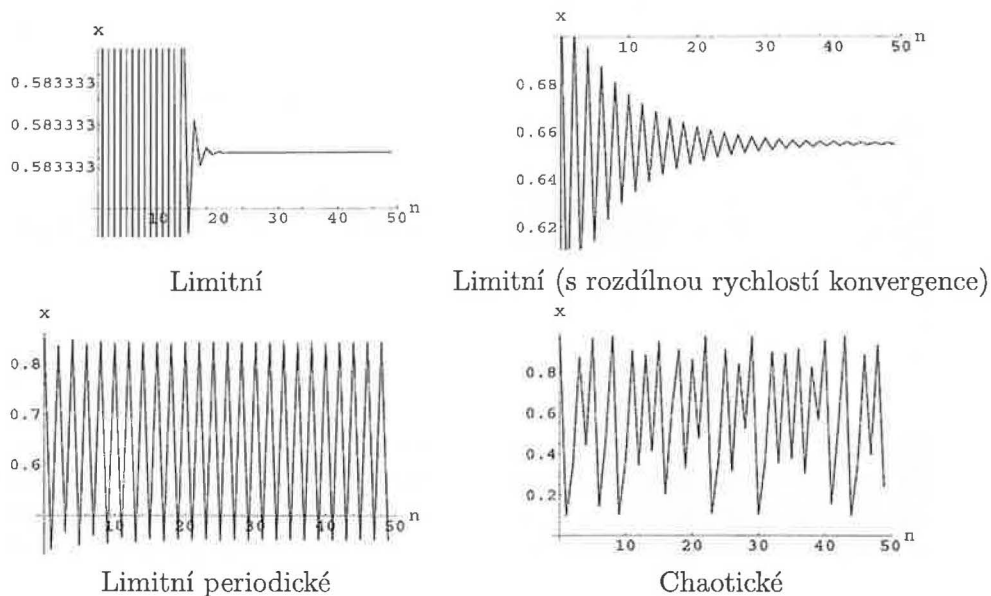


Obrázek 1.3: Ljapunovův exponent logistické rovnice

Každá hodnota je počítána jako průměr pěti náhodně zvolených počátečních bodů. Ze spojitosti výsledného grafu vyplývá, že hodnota λ nezávisí na počátečním x_0 .

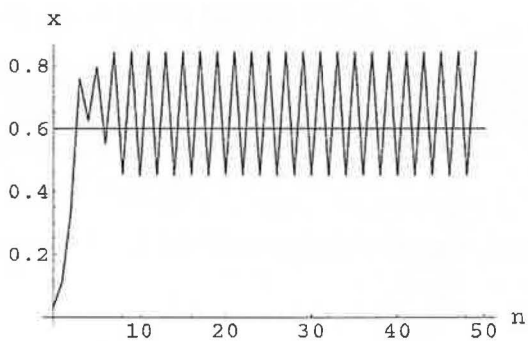
Pro ilustraci prvních 50 kroků pro různé parametry a (\Rightarrow různé λ) \Rightarrow

různé chování, resp. rychlost konvergence. Pro různá počáteční x_0 je charakter chování stejný, ačkoli trajektorie jsou různé.



Tabulka 1.1: Trajektorie logistické rovnice

Poincarého řez pro $a = 3.4$, $x_0=0.01$ může být například bod $x=0.6$. Z průsečíků spojnice trajektorie lze vyčíst přechodový stav i limitní periodicitu.



Obrázek 1.4: Poincarého řez logistické rovnice

Kapitola 2

Scénáře vzniku chaosu

2.1 Klasifikace

Z hlediska zkoumání chaotických systémů jsou nejzajímavější ty, které vykazují zároveň (pro jiné parametry) i periodické, či stacionární chování. Při změně těchto parametrů mezi pravidelným a chaotickým režimem se setkáváme s omezenou množinou dějů (cestám k chaosu) pro velmi odlišné systémy (univerzálnost chaosu). Množina scénářů vzniku chaosu pak vysvětluje obecné způsoby přechodu DS od pravidelnému chování k chaotickému. Zároveň nám tyto přechodové stavy dávají možnost kvalitativní, či kvantitativní předpovědi dynamiky systému. Protože neexistuje jeden DS, který by vykazoval všechny typy přechodu k chaosu, budeme je demonstrovat na více systémech. Jejich použití je odůvodnitelné právě díky výše zmíněné univerzálnosti.

Scénáře vzniku se dělí podle tabulky:

I. Lokální bifurkace	II. Globální bifurkace
A. Zdvojování periody	A. Metastabilní chaos
B. Kvaziperiodicita	B. Krize
C. Střídavý chaos	

Tabulka 2.1: Klasifikace scénářů cesty k chaosu

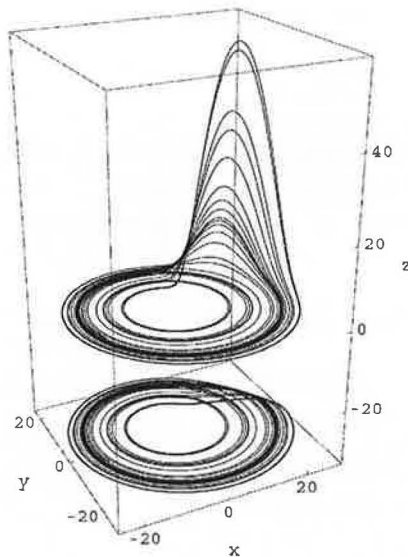
Lokální bifurkace vznikají při lokální změně vlastnosti pevného bodu, globální pokud se mění vlastnosti celého fázového prostoru. Podrobněji budou probrány dále na DS:

- výše zmíněná Logistická rovnice

$$x_{n+1} = a x(1 - x) \quad 1 < a < 4 \quad (2.1)$$

- Rösslerův 3 dimenzionální spojitý DS

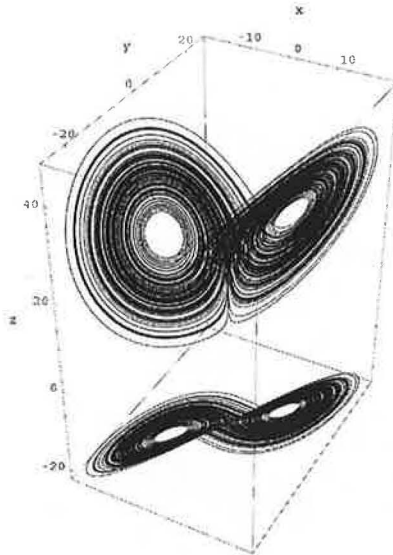
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + a y \\ \dot{z} &= b + z(x - c) \\ a > 0, b > 0, c > 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$



Obrázek 2.1: Rösslerův systém ($a=0.1$, $b=0.1$, $c=18$, $0 < t < 200$)

- Lorenzův 3 dimenzionální spojitý DS

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= x y - \beta z \\ \beta > 0, \rho > 0, \sigma > 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

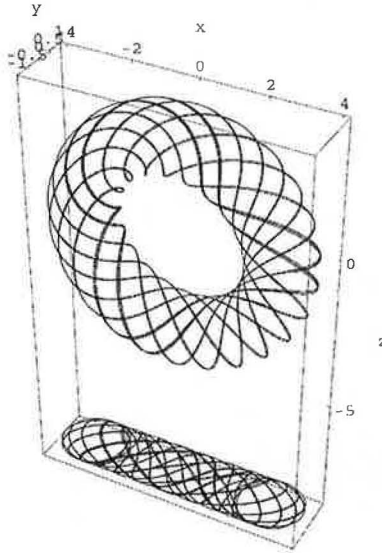


Obrázek 2.2: Lorenzův systém ($\beta = \frac{8}{3}$, $\rho = 28$, $\sigma = 10$, $0 < t < 200$)

Pro numerické řešení Rösslerova a Lorenzova systému jsme použili metodu Runge Kutta. V Rösslerově i Lorenzově systému nejpřehledněji zobrazuje trajektorii průmět do roviny xy . Dále ho budeme výhradně používat.

- Pohyb na toru (resp. totech), tzn. kvaziperiodické chování

$$\begin{aligned}
 x &= (R + \sin(\omega t) \cos(\Omega t)) \\
 y &= r \cos(\omega t) \\
 z &= (R + \sin(\omega t) \sin(\Omega t)) \\
 R &> 0, r > 0
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$



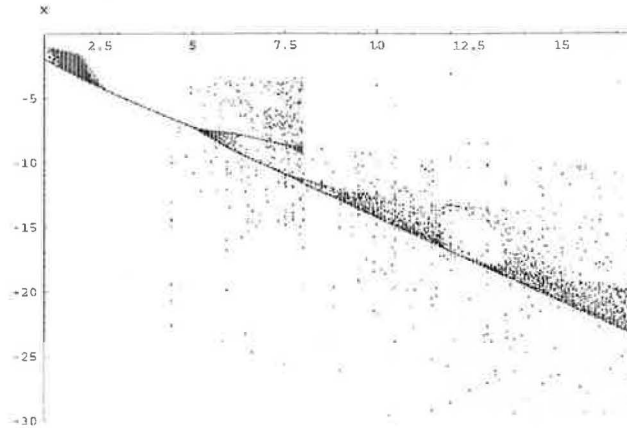
Obrázek 2.3: Trajektorie na povrchu toru ($R=3$, $r=1$, $\Omega = 1$, $\omega = \pi$, $0 < t < 100$)

2.2 I.Lokální bifurkace

2.2.1 A. Zdvojování periody

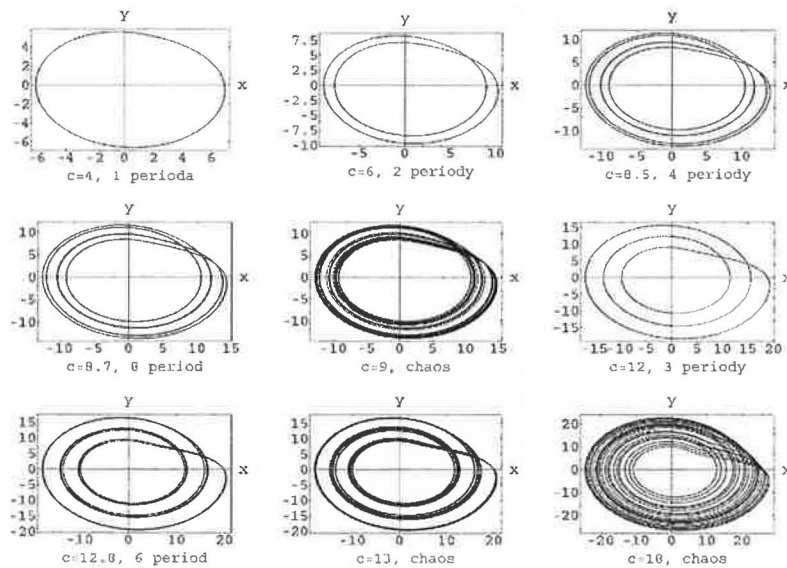
Jedním z nejčastějších způsobů vzniku chaosu je zdvojování periody: při změně parametru systém přechází sledem 2^0 , 2^1 , 2^2 , ... periodických trajektorií. Od určitého hodnoty parametru p_∞ se začíná chovat chaoticky. Univerzálnost tohoto scénáře je vidět na bifurkačních diagramech logistické rovnice a Rösslerova systému. V "oknech" bifurkačních diagramů se tento typ přechodu znovu opakuje, což ukazuje na fraktální charakter atraktoru.

Vytvoření bifurkačního diagramu je výpočetně náročné, protože systém rychle diverguje. (vidíme mnoho bodů mimo bodů mimo hlavní část diagramu). Anomálie v grafu (např. při $c=8$) jsou dány jednak touto divergencí a nutností "skládat" graf z jednotlivých částí, navíc problémy se spuštěním delšího výpočtu v prostředí Mathematica (memory leak, diskutováno v závěru).



Obrázek 2.4: Bifurkační diagram Rösslerova DS

Trajektorie Rösslerova DS pro specifické c

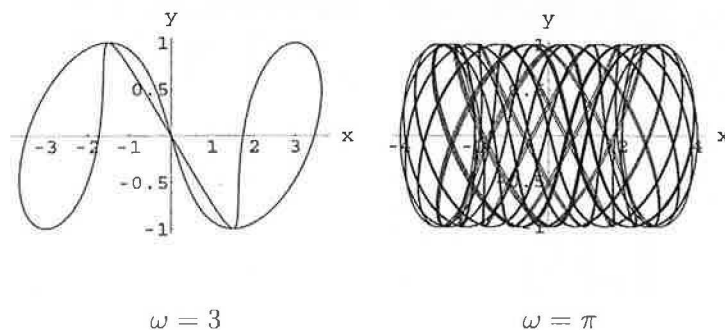


Tabulka 2.2: Trajektorie

2.2.2 B. Kvaziperiodicita

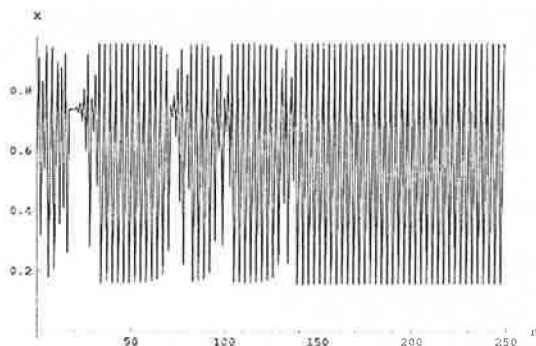
Kvaziperiodické chování lze znázornit na pohybu po plášti toru. V tomto případě nejde ve skutečnosti o chaos. V případě nesouměřitelnosti frekvencí se sice systém nikdy nedostane do bodu, kterým už prošel. (pohyb není periodický), dvě blízké trajektorie se ale nevzdalují exponenciálně- Ljapunovovy

exponenty jsou nulové. Pokud necháme torus otáčet kolem dalšího, vneseme do systému další frekvenci. Spojité spektrum frekvencí, charakteristické pro chaos, ale získáme až nekonečným počtu takových kroků.



2.2.3 C. Střídavý chaos (intermitence)

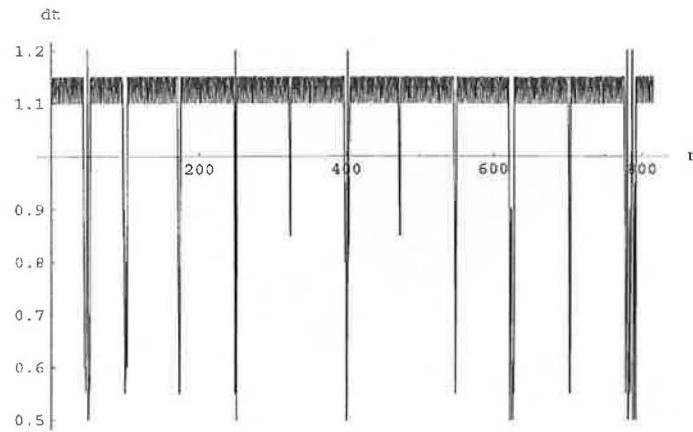
Pokud ve fázovém prostoru existuje oblast periodického chování a zároveň chaotický atraktor, může nastat tzv. střídavý chaos. Vyskytuje se pouze v systémech, v kterých lze volbou parametrů dosáhnout "dotýkání" periodické orbity a oblasti působení chaotického atraktoru. DS pak může přecházet mezi periodickým a chaotickým chováním. Změna parametrů ovlivňuje jak poloha oblastí, tak jejich vlastnosti a vede k prodlužování turbulentní fáze, až k čistě chaotickému chování.



Obrázek 2.5: Střídavý chaos v případě logistické rovnice. $a=3.8284$, (trajektorie pro $x_0=0.8$)

Poincarého zobrazení ukazuje intermitenci na spojitém systému. Pro Lorenzův model redukuje trajektorii na rovinu $x = 0$. Na svislé ose jsou vyneseny časy mezi jednotlivými průchody rovinou. Zobrazení pravidelných

oscilací kolem $dt = 1.12$ je dáno velkým časovým krokem výpočtu (poměrně velká výpočetní náročnost)

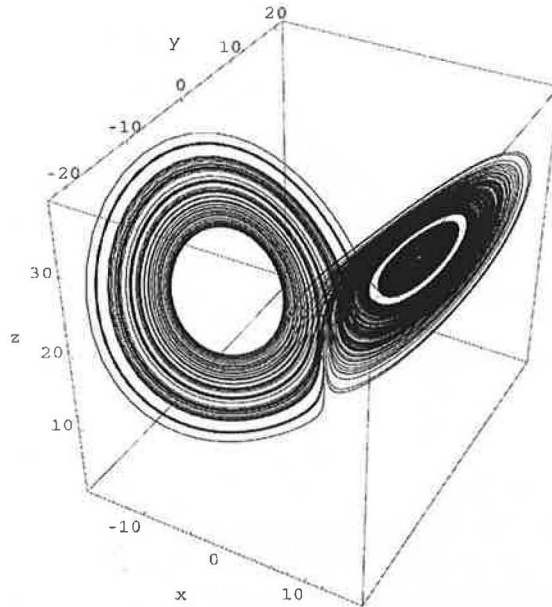


Obrázek 2.6: Poincarův řez

2.3 I. Globální bifurkace

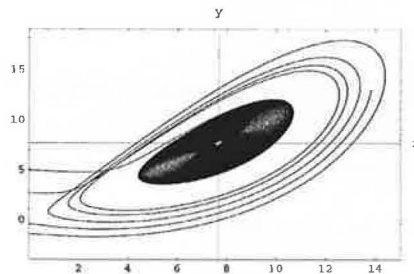
2.3.1 A. Metastabilní chaos

V tomto případě ve fázovém prostoru, kromě chaotického atraktoru, existuje i stabilní bod. Systém se pohybuje v chaotické oblasti po dlouhou dobu, nakonec však přejde na stabilní orbitu, která v tomto bodě končí.



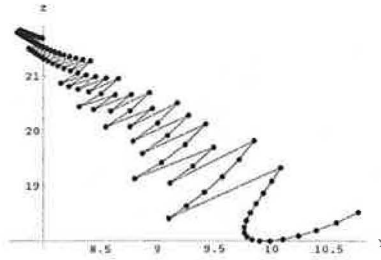
Obrázek 2.7: Trajektorie Lorenzova systému pro $\rho = 23$, $x_0 = [-1, 1, 10]$, $50 < t < 250$.

Trajektorie oběhne mnohokrát (\sim tisíce) pevný bod, až v něm nakonec končí.



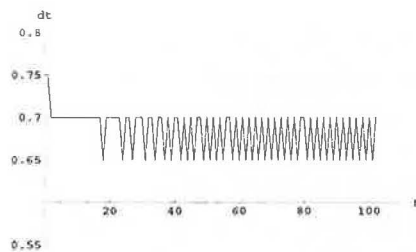
Obrázek 2.8: Průmět do roviny xy pro přechodovou část $170 < t < 250$

Počátek souřadnic umístěn do průmětu pevného bodu (s nulovými časovými derivacemi) [7.66, 7.66].



Obrázek 2.9: Poincarého zobrazení pro do roviny $x = 7.65942$

Dobře vidíme konvergenci k pevnému bodu [7.66, 7.66, 22].



Obrázek 2.10: Časová závislost Poincarého zobrazení

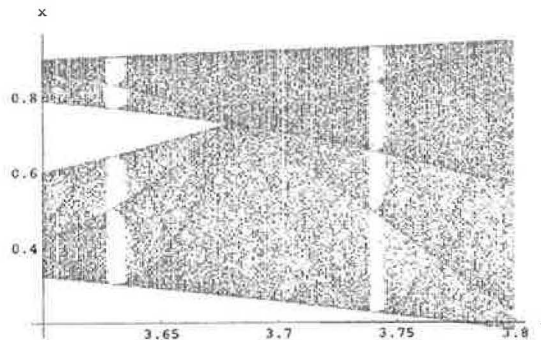
Z rozdílů časů mezi jednotlivými průchody Poincarého řezem vidíme, že perioda oběhu se nemění.

2.3.2 B.Krize

Krize odpovídá náhlé změně vlastností chaotického charakteru, resp. jeho vzniku, či zániku.

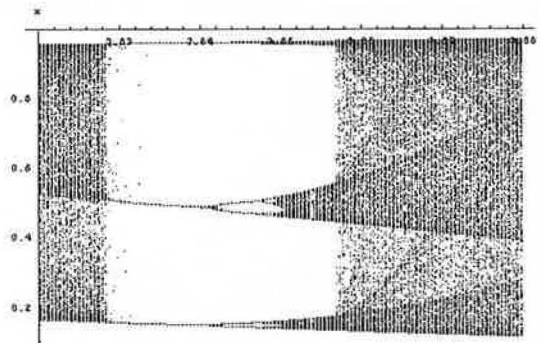
Rozlišujeme

- vnitřní - kdy atraktor mění své vlastnosti- odpovídá proporcím v chaotické oblasti parametrů
- hraniční krizi - souvisí se vznikem, či zánikem atraktoru - začátek a konec laminární fáze v chaotické oblasti.



Obrázek 2.11: Výřez z bifurkačního diagramu Logistické rovnice-vnitřní krize

Vidíme, že ačkoli se systém chová chaoticky, po n krocích ho v určitých stavech nalezneme častěji-body v grafu nejsou homogeně rozprostřeny, ale obsahují oblasti preferovaného výskytu, spojitě závislé na změně parametru a . Tato změna vlastností atraktoru se označuje jako vnitřní krize. Ve výřezu vidíme i hraniční krize(viz dále), na charakter preferovaných oblastí však nemají vliv. Z toho můžeme usoudit, že jde o typově různé změny vlastností atraktoru.



Obrázek 2.12: Hraniční krize

Hraniční krize odpovídá náhlému přechodu k chaotickému chování, při nepatrné změně parametru. Vidíme, že nastává pro všechny trajektorie a týká se tedy celého fázového prostoru.(hrana začátku chaosu přes celou vertikální osu). Zde přechod od chaotického chování k periodickému(perioda 3), zdvojení periody a přechod k chaosu opět hraniční krizí. Při srovnání tohoto výřezu s celým bifurkačním diagramem je dobře vidět fraktální charakter systému.

Kapitola 3

Závěr

S pomocí numerických knihovných metod programu Mathematica lze poměrně snadno vyšetřovat vlastnosti dynamických systémů. Zároveň však máme omezenou možnost kontroly výpočtu, což je v případě systémů s exponenciálně divergentním chováním (chaotických) zásadní. Navíc je v námi používané verzi Mathematicy (5.2 pro Windows) mnoho chyb, kde některé (např. práce s pamětí, nelineárně vzrůstající časová náročnost výpočtu při očekávané lineární) znemožňují rozsáhlejší výpočty. Z mého pohledu zůstává Mathematica výborným nástrojem pro symbolické manipulace, pro numerické výpočty bych ale volil jiný program (např. Matlab).

Literatura

- [1] Alligood K. T., Sauer T. D., Yorke J. A.: *Chaos-an introduction to dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [2] Hilborn R. C.: *Chaos and nonlinear dynamics*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [3] Marek M., Schreiber I.: *Stochastické chování deterministických systémů*, Academia, Praha, 1984.
- [4] <http://chaos.matfyz.cz>