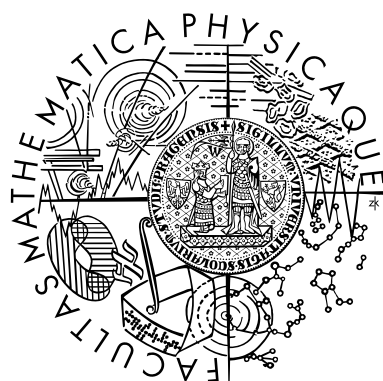


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Tomáš Málek

Globální charakteristiky polí v prostoročasech
s nenulovou kosmologickou konstantou

Ústav teoretické fyziky MFF UK
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.
Studijní program: Fyzika, teoretická fyzika

Děkuji především doc. Pavlu Krtoušovi za jeho cenné rady, inspirující komentáře a neutuchající trpělivost se kterou vedl moji diplomovou práci.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 8. 8. 2007

Tomáš Málek

Obsah

Úvod	i
1 Konformní energie	1
2 De Sitterův prostoročas	5
2.1 Sférické kosmologické souřadnice	8
2.2 Ploché kosmologické souřadnice	9
2.3 Robinsonovy-Trautmanovy souřadnice	10
3 Elektromagnetické pole rovnoměrně urychlené částice	12
4 Souřadnice centrované na částici	17
4.1 Centrované ploché souřadnice	18
4.2 Centrované sférické souřadnice	23
5 Energie a toky energie	27
5.1 Energie měřená kosmologickými pozorovateli	29
5.1.1 Ploché souřadnice	29
5.1.2 Sférické souřadnice	32
5.2 Porovnání zachovávajících se energií	34
5.3 Energie uvnitř oblasti	36
5.3.1 Centrované ploché souřadnice	36
5.3.2 Centrované sférické souřadnice	38
5.4 Toky energie	40
5.4.1 Ploché souřadnice	40
5.4.2 Sférické souřadnice	41
5.4.3 Centrované ploché souřadnice	42
5.4.4 Centrované sférické souřadnice	42
5.5 Vztah lokální energie v Minkowského prostoru a konformně ploché energie v de Sitterově prostoru	44
6 Závěr	47

Název práce: Globální charakteristiky polí v prostoročasech s nenulovou kosmologickou konstantou

Autor: Tomáš Málek

Katedra: Ústav teoretické fyziky MFF UK

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

E-mail vedoucího: Pavel.Krtous@utf.mff.cuni.cz

Abstrakt: V práci je zkoumáno testovací elektromagnetické pole generované párem rovnoměrně urychlených nabitých částic v de Sitterově prostoročasu. Energie měřená lokálními pozorovateli nesplňuje v obecných prostoročasech zákon globálního zachování. Využili jsme konformní vtahy de Sitterova prostoru s Einsteinovým vesmírem a Minkowského prostorem a našli tak časové konformní Killigovy vektory. S těmito vektory jsou spojeny zachovávané energie. Vypočetli jsme hustoty a toky těchto energií elektromagnetického pole a jejich asymptotické chování. Získali jsme celkovou energii uvnitř oblasti umístěné na částici a celkový tok přes její hranici. Porovnali jsme obě zachovávané energie a studovali vztah mezi konformně plochou energií pole rovnoměrně urychlených částic v de Sitterově prostoru a lokální energií rovnoměrně se pohybující částice v Minkowského prostoru.

Klíčová slova: zářivá pole, rovnoměrně urychlené zdroje, de Sitterův vesmír

Title: Global characteristics of fields on space-times with nonvanishing cosmological constant

Author: Tomáš Málek

Department: Institute of Theoretical Physics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University Prague

Supervisor: Doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: Pavel.Krtous@utf.mff.cuni.cz

Abstract: We investigate the electromagnetic testing field generated by pair of uniformly accelerated charged particles on the de Sitter space. Energy measured by local observers does not satisfy the conservation law in general spacetimes. We use conformal relation between the de Sitter space, the Einstein universe and the Minkowski space to find timelike conformal Killing vectors. These vectors are related to conserved energy. We calculate density and flux of this energy and their asymptotic behaviours. We analyze total energy inside a region centered on the particle and total flux through the border of this region. Finally, we compare both definitions of conservative energy and we study relation between conformally flat energy of the field of uniformly accelerated particles in the de Sitter space and local energy of the field of a uniformly moving particle in the Minkowski space.

Keywords: radiative field, uniformly accelerated sources, de Sitter universe

Úvod

Tato práce vychází z článku [1], kde bylo nalezeno boost-rotálně symetrické elektromagnetické pole páru rovnoměrně urychlených nabitých testovacích částic na asymptoticky netriviálním pozadí s kladnou kosmologickou konstantou, jako zobecnění Bornova řešení v de Sitterově prostoročasu. Navážeme na tyto získané výsledky a budeme zkoumat rozložení energií a toky energií elektromagnetického pole těchto částic.

Abychom mohli provést bilanci energie, požadujeme globální zachování zkoumané energie. Energie lokálních pozorovatelů v prostoročasech bez časové izometrie nemá tuto požadovanou vlastnost. V první kapitole si tedy zavedeme konformní energii, která díky existenci konformních Killingových vektorů představuje zachovávanou veličinu. Každému časovému konformnímu Killingovu vektoru bude příslušet odpovídající zachovávaná energie.

V druhé kapitole se seznámíme se základními vlastnostmi de Sitterova prostoročasu, s jeho topologií, konformní strukturou a jeho vztahy s Minkowského prostorem a Einsteinovo vesmírem. Na de Sitterově prostoru, díky jeho maximální symetrii, existuje mnoho systémů souřadnic, my si uvedeme pouze ploché kosmologické, sférické kosmologické a Robinsonovo-Trautmanovo souřadnice, které budeme dále využívat.

Kromě přímého výpočtu trajektorie a vyřešením vlnové rovnice, lze získat pole rovnoměrně urychlených nabitých částic na de Sitterově prostoročasu využitím konformní invariance rovnic elektromagnetického pole a transformací mezi de Sitterovým a Minkowského prostoročasem. Tento postup použitý v [1] je stručně popsán ve třetí kapitole.

Pro zjednodušení výpočtů a interpretaci hustot a toků energií, zavedeme ve čtvrté kapitole souřadnice centrované na částici, parametrizující průnik světelného kužele s vrcholem na částici a nadplochy s konstantním časem ve sférických, respektive v plochých kosmologických souřadnicích.

Využijeme dvou konformních Killingových vektorů, jejichž orbity leží na souřadnicových čarách časové souřadnice plochých kosmologických a sférických kosmologických souřadnic. Získáme tak dvě různé zachovávanou konformní energie. Pátá kapitola obsahuje výsledky výpočtů hustoty konformně ploché energie měřené

kosmologickými pozorovateli v plochých kosmologických souřadnicích a konformně sférické energie měřené kosmologickými pozorovateli ve sférických kosmologických souřadnicích, jejich asymptotické chování a vzájemný vztah mezi oběma energiemi. Dále obsahuje hustoty obou konformních energií uvnitř oblasti tvaru mezikoulí se středem na částici v centrovaných verzích příslušejících souřadnic. Jsou zde spočteny toky energie měřené kosmologickými pozorovateli v plochých a sférických souřadnicích a jejich asymptotické rozvoje a celkové toky energie přes povrch koulí se středem na částici v centrovaných plochých a centrovaných sférických souřadnicích. Nakonec se budeme zajímat o vztah mezi konformně plochou energií v de Sitterově prostoru a lokální energií v Minkowského prostoročasu.

Na závěr úvodu ještě poznámka k notaci. Pokud budeme tenzorové veličiny označovat indexy, pak pro abstraktní indexy, tedy formální označení tenzorového charakteru, budeme používat podtržená malá písmena latinské abecedy. Nepodtržené indexy budou označovat složky tenzoru v konkrétní zvolené bázi.

Kapitola 1

Konformní energie

V této kapitole si zavedeme pojem konformní energie ([4], [5]), který nám dovolí konstruovat zachovávající se energii i v některých prostoročasech bez časové symetrie.

Chceme-li zkoumat bilanci energie v určité oblasti Ω , je zapotřebí mít k dispozici globální zákon zachování. Mějme tedy 4-rozměrnou oblast Ω s časovými řezy Σ_* (obr. 1.1), pak požadujeme, aby rozdíl celkové energie na nadplochách Σ_i a Σ_f odpovídal energii vyteklé z hranice $\partial\Sigma_*$ mezi okamžiky i a f . Tato zachovávající se energie bude souviset s určitou prostoročasovou symetrií. Tyto symetrie představují izometrie a speciálně i konformní transformace. Ačkoliv máme pro energii lokální zákon zachování (1.4), v obecném prostoročasu z něj nelze získat globální zákon zachování, tak jak tomu je možné například pro náboj. Abychom rozdíl mezi oběma případy demonstrovali, ukážeme si nejprve, jak dostat z lokálního zachování náboje globální a poté se pokusíme postupovat analogicky pro energii.

Pro 4-proud J^a lokálně platí rovnice kontinuity

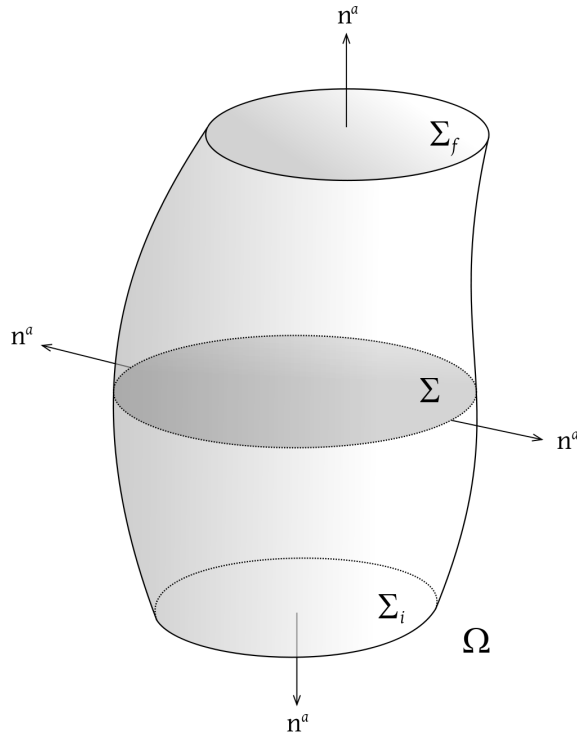
$$\nabla_a J^a = 0, \quad (1.1)$$

pokud ji zintegrujeme přes oblast Ω a použijeme Gaussovu větu

$$\int_{\Omega} \nabla_a J^a \mathbf{g}^{\frac{1}{2}} = \int_{\partial\Omega} J^a \mathbf{n}_a \mathbf{q}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.2)$$

zde $\mathbf{g}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\det g|}$ a $\mathbf{q}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\det q|}$, kde q je metrický tenzor indukovaný metrikou g na nadplochu Σ . Integrál přes hranici $\partial\Omega$ rozdělíme na integrály přes prostoropodobné nadplochy Σ_i a Σ_f , v počátečním a koncovém čase a integrál přes množinu $\bigcup_{\tau} \partial\Sigma_{\tau}$

$$\int_{\partial\Omega} J^a \mathbf{n}_a \mathbf{g}^{\frac{1}{2}} = \int_{\Sigma_f} J^a \mathbf{n}_a \mathbf{q}^{\frac{1}{2}} - \int_{\Sigma_i} J^a \mathbf{n}_a \mathbf{q}^{\frac{1}{2}} + \int_i^f d\tau \int_S J^a dS_a = 0, \quad (1.3)$$



Obrázek 1.1: Globální zákon zachování v oblasti Ω . Prostorupodobné nadplochy Σ představují časové řezy oblasti Ω .

první dva integrály představují celkový náboj v nadplochách Σ_i a Σ_f . Časový řez Σ_τ je 3-rozměrná prostorová nadplocha, dS_a je plošný element plochy hranice Σ_τ . Poslední člen je integrál přes čas τ z celkového toku náboje z oblasti $\partial\Sigma_\tau$ v čase τ .

Stejný postup nelze přímo aplikovat pro tenzor energie-hybnosti. Vyjdeme-li totiž z nulovosti jeho divergence

$$\nabla_a T^{ab} = 0, \quad (1.4)$$

což vyplývá z Einsteinovych rovnic a představuje lokální zákon zachování, zůstane nám jeden volný index a museli bychom provést integraci vektoru. To si sice můžeme dovolit v plochem prostoru, ale obecně to nelze. Problém spočívá v nemožnosti porovnávat vektory z tečných prostorů v různých bodech variety. Je tedy nutné najít vhodnou dodatečnou strukturu, která by nám integraci umožnila a zároveň, abychom získali zúžením tenzoru energie-hybnosti vektorovou veličinu, která by se zachovávala. Touto vhodnou strukturou, jak si ukážeme, je vektorové pole ξ^a splňující Killingovu rovnici

$$\mathcal{L}_\xi g = 0. \quad (1.5)$$

Ukážeme tedy, že celkový tok veličiny $\xi^a T_{ab}$ z oblasti Ω je nulový

$$\int_{\partial\Omega} \xi^a T_{ab} n^b \mathbf{q}^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (1.6)$$

Zvedneme a snížíme indexy a použijeme Gaussovu větu

$$\int_{\partial\Omega} \xi^a T_{ab} n^b \mathbf{q}^{\frac{1}{2}} = \int_{\Omega} \nabla_b (\xi_a T^{ab}) \mathbf{g}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.7)$$

po rozderivování dostáváme

$$\int_{\Omega} \nabla_b (\xi_a T^{ab}) \mathbf{g}^{\frac{1}{2}} = \int_{\Omega} (\nabla_b \xi_a) T^{ab} \mathbf{g}^{\frac{1}{2}} + \int_{\Omega} (\nabla_b T^{ab}) \xi_a \mathbf{g}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.8)$$

Druhý integrál na pravé straně je nulový díky (1.4). Ze symetrie tenzoru energie-hybnosti a z platnosti Killingovy rovnice (1.5)

$$\nabla_{(a} \xi_{b)} = 0, \quad (1.9)$$

plyne nulovost také prvního integrálu a tím tedy platí (1.6). Symetrie tenzoru energie-hybnosti obecně plyne z jeho definice pomocí variace akce podle metriky, díky symetrii metrického tenzoru.

Pokud v prostoročasu s metrikou g , ve kterém hledáme zachovávající se energii, neexistují Killingovy vektory ξ^a , ale nalezneme Killingovy vektory ξ'^a v nějakém prostoročasu s metrikou g' , na který lze přejít pomocí konformní transformace

$$g \rightarrow g' = \Omega^2 g, \quad (1.10)$$

tedy pouze vynásobením metriky skalární funkcí Ω^2 . Víme, že pro ξ'^a a g' platí Killingova rovnice (1.5), navíc

$$\mathcal{L}_{\xi'}(\Omega^2 g) = \Omega^2 \mathcal{L}_{\xi'} g + (\Omega^2)' g, \quad (1.11)$$

pak tyto konformní Killingovy vektory ξ'^a musí splňovat rovnici

$$\mathcal{L}_{\xi'} g = -2 \frac{\Omega'}{\Omega} g, \quad (1.12)$$

neboli

$$\nabla_{(a} \xi'_{b)} = \omega g_{ab}, \quad (1.13)$$

kde ω je pouze skalární faktor $-\frac{\Omega'}{\Omega}$ závisící na souřadnicích. Máme-li tedy k dispozici konformní Killingovo vektorové pole, pak výraz pod prvním integrálem v (1.8)

je díky (1.13) dán stopou tenzoru energie-hybnosti násobenou faktorem ω . Aby platil globální zákon zachování (1.6), musí být splněna podmínka nulovosti stopy T_{ab} . Lze ukázat, že bezstopost plyne z invariance akce daného pole vůči konformnímu přeškálování [6]. To je splněno například právě pro akci elektromagnetického pole.

Jak jsme si tedy ukázali, lze pomocí Killingových vektorů a speciálně i pomocí konformních Killingových vektorů, získat z tenzoru energie-hybnosti zachovávající se veličiny, mající význam energie či hybnosti, které odpovídají daným symetriím prostoročasu. Tyto symetrie reprezentují izometrie a speciálně konformní transformace. Pokud je Killingův vektor časupodobný, dostáváme energii, v případě prostoropodobného hybnost.

Pro pozorovatele v lokálním inerciálním systému má význam i lokální energie, tedy energie získaná zúžením tenzoru energie-hybnosti s vektorem jeho 4-rychlosti. Tato energie se zachovává lokálně, ale pokud 4-rychlost neodpovídá přímo Killingovu vektoru, nebo konformnímu Killingovu vektoru, pak pro ni globální zákon zachování neplatí.

V de Sitterově prostoročasu budeme dále využívat ploché kosmologické souřadnice a sférické kosmologické souřadnice, v nichž souřadnicové čáry časové souřadnice koincidují s orbity konformních Killingových vektorů. Budeme mít tedy dvě zachovávající se energie, spojené se dvěma konformními Killingovy vektory $\partial_{\bar{t}}$, resp. $\partial_{\bar{r}}$.

Kapitola 2

De Sitterův prostoročas

V této části si nejprve připomeneme základní vlastnosti de Sitterova prostoročasu [3] a také popíšeme některé systémy souřadnic [1], které budeme v dalších kapitolách používat.

De Sitterův prostoročas představuje vakuové řešení Einsteinových rovnic s kladnou kosmologickou konstantou Λ

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0, \quad (2.1)$$

provedeme-li kontrakci, dostáváme konstantní kladnou skalární křivost rovnou

$$R = 4\Lambda. \quad (2.2)$$

Společně ještě s anti-de Sitterovým a Minkowského prostoročasem se jedná o maximálně symetrické přesné řešení. Pro 4-rozměrnou varietu to znamená právě 10 generátorů grupy izometrie, v případě de Sitterova prostoru $SO(1, 4)$, tedy 10 nezávislých Killingových vektorových polí. De Sitterův prostoročas má topologii $\mathbb{R} \times S^3$ a lze si ho jednoduše představit, jako hyperboloid

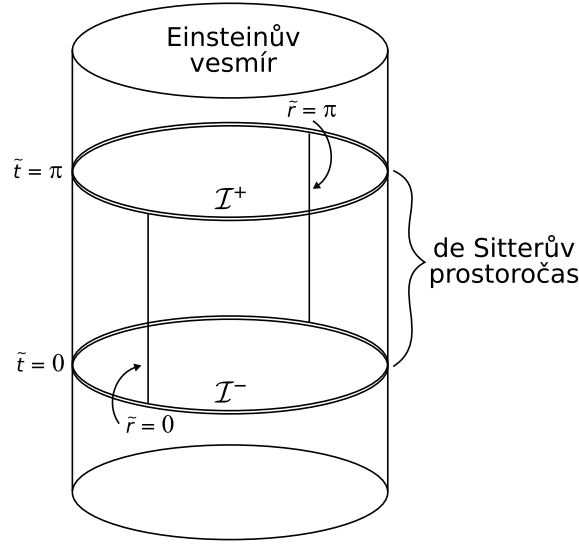
$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \ell_\Lambda, \quad (2.3)$$

vložený do Minkowského prostoročasu M^5

$$g = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2, \quad (2.4)$$

kde $\ell_\Lambda = \sqrt{3/\Lambda}$, tedy jako časový vývoj 3-sféry, která nejprve kontrahuje z nekonečného poloměru do konečného poloměru ℓ_Λ a poté opět expanduje do nekonečna.

Z diagramu (obr. 2.3) je vidět konformní struktura de Sitterova prostoročasu. Má pouze minulé a budoucí prostorupodobné konformní nekonečno \mathcal{I}^- a \mathcal{I}^+ , které dosáhnou všechny časupodobné a světelné geodetiky. Díky tomu zde existuje částicový horizont a horizont událostí.



Obrázek 2.1: De Sitterův prostoročas je konformní částí Einsteinova vesmíru. Zobrazeno v řezu $\tau\text{-}\chi$.

Celou geodeticky úplnou varietu pokrývají sférické kosmologické souřadnice. V nich má metrika tvar (2.11) a je konformní k části Einsteinova vesmíru (obr. 2.1)

$$g_E = \Omega^2 g_{\text{dS}}, \quad \Omega = \sin \tilde{t}. \quad (2.5)$$

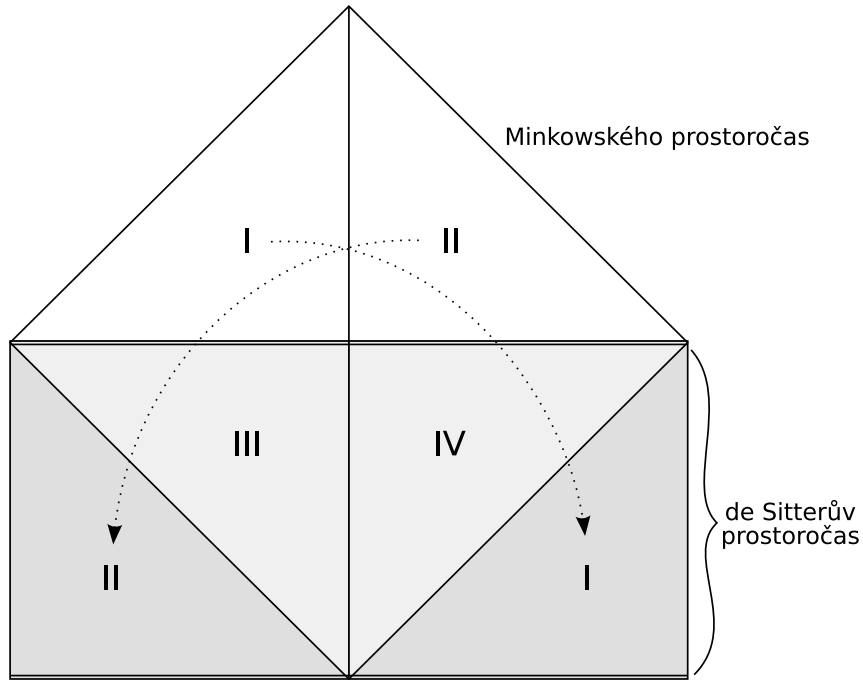
Díky této vlastnosti a vzhledem k tomu, že vektor $\partial_{\tilde{t}}$ je Killingův vektor metriky g_E , je zároveň konformním Killingovým vektorem metriky g_{dS} .

De Sitterův prostoročas je konformně plochý, proto můžeme provést konformní transformaci mezi de Sitterovým a Minkowského prostoročasem. Možností, jak zobrazit jednotlivé oblasti Minkowského prostoru na de Sitterův, je několik. Pro nás je vhodné zejména zobrazení oblastí, tak jak je to znázorněno na obr. 2.2, neboť se budeme zajímat o záření od částice vzniklé na severním pólu ($\tilde{r} = 0$). Této volbě právě odpovídají konformně ploché souřadnice $(\tilde{t}, \tilde{r}, \vartheta, \varphi)$. V nich má metrika g_{dS} tvar (2.15). Pak

$$g_{\text{dS}} = \Omega^2 g_M, \quad \Omega = \frac{\ell_\Lambda}{\tilde{t}}. \quad (2.6)$$

Protože je vektor $\partial_{\tilde{t}}$ Killingovým vektorem metriky g_M , je současně konformním Killingovým vektorem metriky g_{dS} .

Nyní si stručně popíšeme několik souřadnic na de Sitterově prostoročasu, které budeme dále využívat. Pro obsáhlejší přehled můžete nahlédnout do appendixu A práce [1]. Uvedeme si příslušující metriky, ortonormální tetřady, transformační vztahy mezi souřadnicemi a souřadnice graficky znázorníme na konformních diagramech.



Obrázek 2.2: Konformní zobrazení jednotlivých oblastí Minkowského prostoročasu na de Sitterův prostoročas.

Metriky obsahují stejný člen, abychom zápisy zkrátili nahradíme ho jako

$$d\omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi. \quad (2.7)$$

Nebudeme si uvádět tetřádové vektory e_φ , neboť jediná nenulová složka je díky předchozí rovnici ve vztahu k vektoru e_ϑ

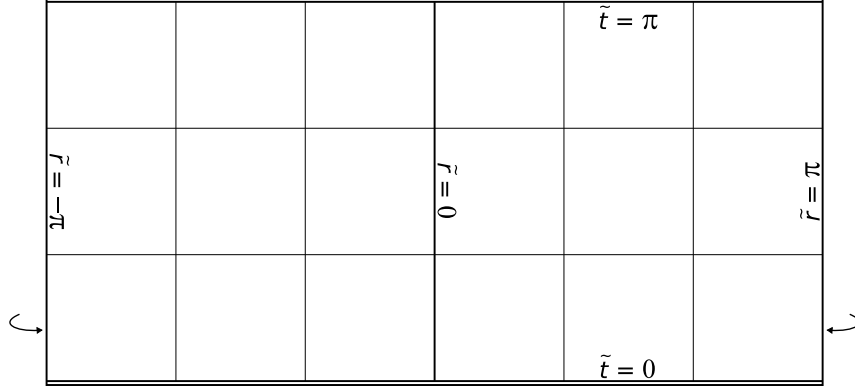
$$(e_\varphi)^\varphi = \frac{1}{\sin \vartheta} (e_\vartheta)^\vartheta. \quad (2.8)$$

V následujících výrazech budeme připouštět i záporné hodnoty radiální souřadnice s následující korespondencí

$$\{r, \vartheta, \varphi\} \leftrightarrow \{-r, \pi - \vartheta, \varphi - \pi\}, \quad (2.9)$$

zjednoduší se tak transformační vztahy souřadnic.

2.1 Sférické kosmologické souřadnice



Obrázek 2.3: Sférické kosmologické souřadnice

Standardní sférické kosmologické souřadnice $\tau, \chi, \vartheta, \varphi$ a přeškálované konformní einsteinovské souřadnice $\tilde{t}, \tilde{r}, \vartheta, \varphi$ pokrývají celý de Sitterův prostoročas. Nadplochy s konstantní časovou souřadnicí představují 3-sféry. Souřadnice τ je vlastní čas podél světočáry kosmologických pozorovatelů, stojících na konstantních prostorových souřadnicích χ, ϑ, φ . Díky konformnímu vztahu mezi de Sitterovým prostorem a Einsteinovým vesmírem (2.5), je vektor $\partial_{\tilde{t}}$ konformní Killingův vektor.

Metriky v těchto souřadnicích mají tvar

$$g = -d\tau^2 + \ell_\Lambda^2 \cosh^2 \frac{\tau}{\ell_\Lambda} (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\omega^2), \quad (2.10)$$

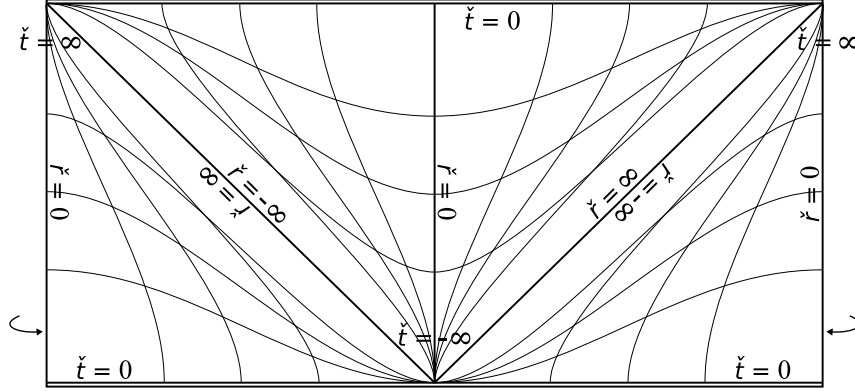
$$g = \frac{\ell_\Lambda^2}{\sin^2 \tilde{t}} (-d\tilde{t}^2 + d\tilde{r}^2 + \sin^2 \tilde{r} d\omega^2), \quad (2.11)$$

přechod mezi standardními a přeškálovanými souřadnicemi je pouze přeškálování času

$$\sin \tilde{t} = \cosh^{-1} \frac{\tau}{\ell_\Lambda}, \quad \tilde{r} = \chi. \quad (2.12)$$

Ortonormální tetřada je dána

$$\begin{aligned} e_\tau &= \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{\ell_\Lambda} \sin \tilde{t} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \\ e_\chi &= \frac{1}{\ell_\Lambda} \cosh^{-1} \frac{\tau}{\ell_\Lambda} \frac{\partial}{\partial \chi} = \frac{1}{\ell_\Lambda} \sin \tilde{t} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}}, \\ e_\vartheta &= \frac{1}{\ell_\Lambda} \cosh^{-1} \frac{\tau}{\ell_\Lambda} \sin^{-1} \chi \frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\ell_\Lambda} \frac{\sin \tilde{t}}{\sin \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \quad (2.13)$$



Obrázek 2.4: Ploché kosmologické souřadnice

Vztahy s plochými souřadnicemi jsou

$$\tan \tilde{t} = \frac{2\ell_\Lambda \tilde{r}}{\ell_\Lambda^2 - \tilde{t}^2 + \tilde{r}^2}, \quad \tan \tilde{r} = \frac{2\ell_\Lambda \tilde{r}}{\ell_\Lambda^2 + \tilde{t}^2 - \tilde{r}^2}. \quad (2.14)$$

2.2 Ploché kosmologické souřadnice

Ploché kosmologické souřadnice $\tilde{r}, \vartheta, \varphi$ a přeškálované ploché kosmologické souřadnice $\tilde{t}, \tilde{r}, \vartheta, \varphi$ pokrývají celý de Sitterův prostoročas, kromě minulého kosmologického horizontu severního pólu $\tilde{t} = \tilde{r}$. Nadplochy s konstantní časovou souřadnicí jsou ploché prostory. Souřadnice \tilde{t} je vlastní čas podél geodetiky kosmologických pozorovatelů, stojících na konstantních prostorových souřadnicích $\tilde{r}, \vartheta, \varphi$. Z konformního vztahu mezi de Sitterovým a Minkowského prostorem (2.6) plyne, že vektor $\partial_{\tilde{t}}$ je konformní Killingův vektor.

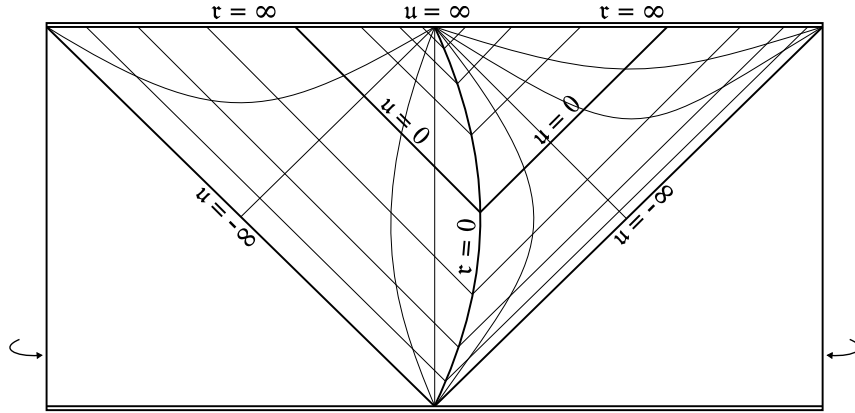
Metriky v těchto souřadnicích mají tvar

$$g = \frac{\ell_\Lambda^2}{\tilde{t}^2} (-d\tilde{t}^2 + d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\omega^2), \quad (2.15)$$

$$g = -d\tilde{\tau}^2 + \exp\left(-\tilde{s} \frac{2\tilde{\tau}}{\ell_\Lambda}\right) (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\omega^2), \quad (2.16)$$

kde $\tilde{s} = \text{sign } \tilde{t}$, tedy kladné znaménko pod a záporné nad horizontem $\tilde{t} = \tilde{r}$. Vztah mezi \tilde{t} a $\tilde{\tau}$ je

$$\tilde{t} = \tilde{s} \ell_\Lambda \exp\left(\tilde{s} \frac{\tilde{\tau}}{\ell_\Lambda}\right). \quad (2.17)$$



Obrázek 2.5: Robinsonovo-Trautmanovo souřadnice

Ortonormální tetřada má tvar

$$\begin{aligned}
 e_{\tilde{t}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} = \frac{\check{s} \check{t}}{l_{\Lambda}} \frac{\partial}{\partial \check{t}}, \\
 e_{\tilde{r}} &= \exp \frac{\check{s} \check{r}}{l_{\Lambda}} \frac{\partial}{\partial \check{r}} = \frac{\check{s} \check{t}}{l_{\Lambda}} \frac{\partial}{\partial \check{r}}, \\
 e_{\vartheta} &= -\frac{\check{s}}{\check{r}} \exp \frac{\check{s} \check{r}}{l_{\Lambda}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{l_{\Lambda}} \frac{\check{t}}{\check{r}} \frac{\partial}{\partial \vartheta}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Transformační vztahy mezi plochými a sférickými souřadnicemi jsou

$$\check{t} = \frac{l_{\Lambda} \sin \tilde{t}}{\cos \tilde{t} - \cos \tilde{r}}, \quad \check{r} = \frac{l_{\Lambda} \sin \tilde{r}}{\cos \tilde{r} - \cos \tilde{t}}. \tag{2.19}$$

2.3 Robinsonovy-Trautmanovy souřadnice

Robinsonovy-Trautmanovy souřadnice u, r, ψ, φ pokrývají de Sitterův prostoročas pouze nad horizontem $\tilde{t} = \tilde{r}$. Souřadnice u je nulová, r je afinní parametr podél nulových geodetik ($u, \psi, \varphi = \text{konst.}$) generujících světelný kužel s vrcholem na $r = 0$. Počátek souřadnic $r = 0$ je umístěn na světočáře rovnoměrně urychleného pozorovatele, pohybujícího se se zrychlením $a = |\ell_{\Lambda}^{-1} \sinh \alpha_0|$.

Metrika v Robinsonových-Trautmanových souřadnicích má tvar

$$g = -H du^2 - du \vee dr + \frac{r^2}{P^2} (d\psi^2 + d\varphi^2), \tag{2.20}$$

kde

$$H = -\frac{\mathbf{r}^2}{\ell_\Lambda^2} + 2\frac{\mathbf{r}}{\ell_\Lambda} \sinh \alpha_0 \tanh \left(\psi - \frac{\mathbf{u}}{\ell_\Lambda} \sinh \alpha_0 \right) + 1, \quad (2.21)$$

$$P = \cosh \left(\psi - \frac{\mathbf{u}}{\ell_\Lambda} \sinh \alpha_0 \right). \quad (2.22)$$

Tyto souřadnice, konkrétně \mathbf{u} , využijeme níže pro vyjádření centrovaných souřadnic. Vzhledem k tomu si uvedeme pouze transformační vztah mezi souřadnicí \mathbf{u} a plochými souřadnicemi

$$\mathbf{u} = \frac{\ell_\Lambda}{\cosh \alpha_0} \log \left| \frac{\ell_\Lambda}{\tilde{t}' - \tilde{r}'} \right|, \quad (2.23)$$

kde \tilde{t}' a \tilde{r}' jsou boostované ploché souřadnice $\tilde{t}, \tilde{r}, \vartheta, \varphi$ v Minkowského prostoru

$$\tilde{t}' = \tilde{t} \cosh \alpha_0 + \tilde{r} \cos \vartheta \sinh \alpha_0, \quad (2.24)$$

$$\tilde{r}' \cos \vartheta' = \tilde{t} \sinh \alpha_0 + \tilde{r} \cos \vartheta \cosh \alpha_0, \quad (2.25)$$

$$\tilde{r}' \sin \vartheta' = \tilde{r} \sin \vartheta. \quad (2.26)$$

Kapitola 3

Elektromagnetické pole rovnoměrně urychlené částice

V této kapitole si stručně popíšeme postup použitý v [1], jak získat elektromagnetické pole nabitě rovnoměrně urychlené testovací částice, na pozadí de Sitterova prostoročasu. Bylo by sice možné provést přímý výpočet trajektorie urychlené částice, vyřešit vlnovou rovnici a z ní získat potenciál, ale postup pomocí konformní transformace je velice elegantní a navíc nás nasměruje k intuitivní interpretaci výsledků, díky vztahu s Minkowského prostorem.

Začneme tedy s částicí v Minkowského prostoročasu, rovnoměrně se pohybující rychlostí

$$v_M = \tanh \alpha_0, \quad (3.1)$$

po ose \tilde{z} ($\vartheta = 0$) v záporném směru a procházející bodem $\tilde{r} = 0$ v souřadnicovém čase $\tilde{t} = 0$. Použijeme-li konformní zobrazení (2.6) znázorněné na obr. 3.1, dostáváme dvě kauzálně oddělené světočáry odpovídající dvěma rovnoměrně urychleným částicím, které vznikají a zanikají na pólech ($\tilde{r} = 0$ částice N, $\tilde{r} = \pi$ částice S) de Sitterova prostoru. Pohybují se po ose $\vartheta = 0$, nejprve proti sobě, v čase $\tilde{t} = \pi/2$ se zastaví a začnou se pohybovat od sebe. Velikost jejich zrychlení je

$$a_{dS} = |\ell_\Lambda^{-1} \sinh \alpha_0|. \quad (3.2)$$

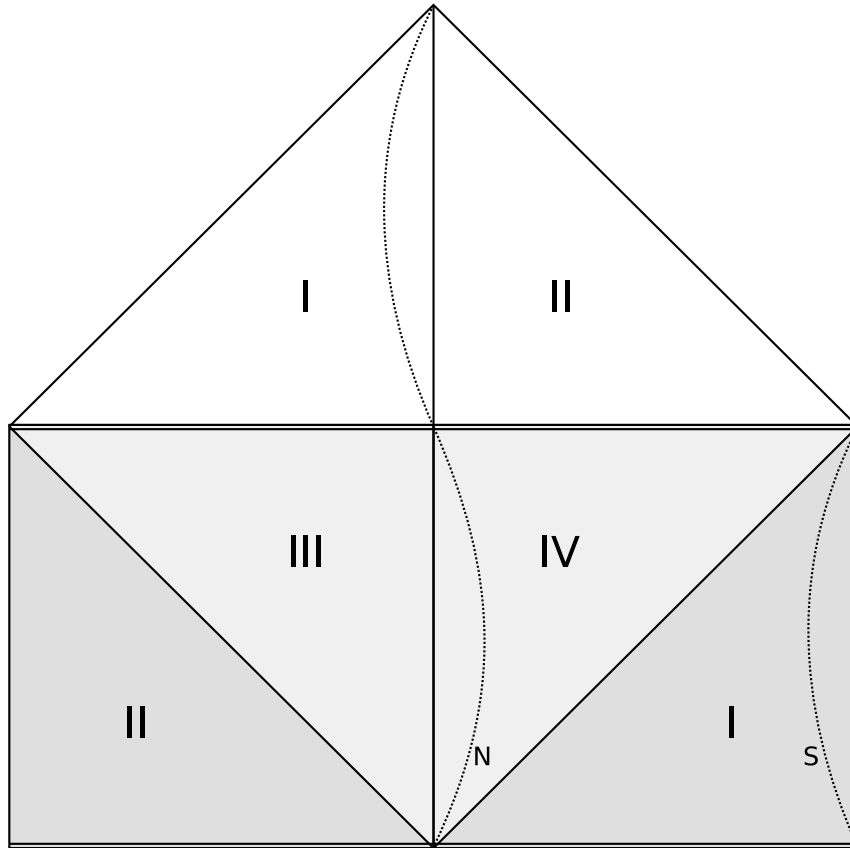
Světočáry částic v plochých souřadnicích jsou určeny rovnicí

$$\tilde{r} = \mp \tanh \alpha_0 \tilde{t}, \quad (3.3)$$

ve sférických souřadnicích splňují

$$\sin \tilde{r} = \pm \tanh \alpha_0 \sin \tilde{t}, \quad (3.4)$$

horní znaménko odpovídá částici N, spodní částici S.



Obrázek 3.1: Rovnoměrně se pohybující částice v Minkowského prostoročasu se po konformní transformaci zobrazí na dvě rovnoměrně urychlené částice v de Sitterově prostoročasu.

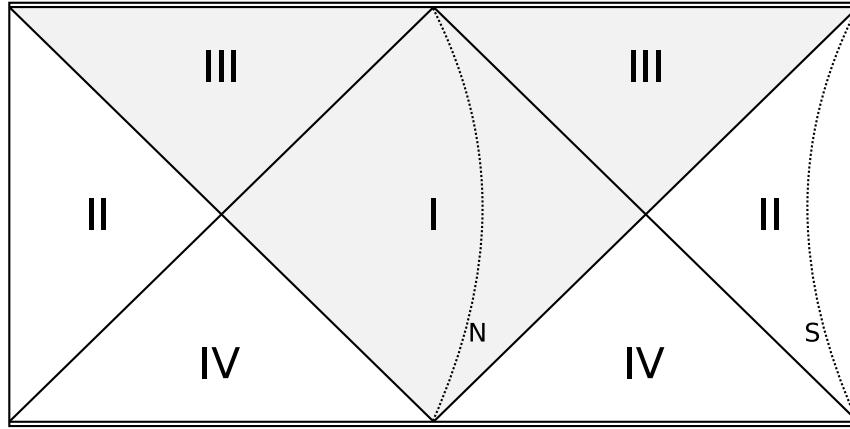
Dále využijeme konformní invariance rovnic elektromagnetického pole

$$\begin{aligned} F &= dA \rightarrow F' = dA', \\ \nabla \cdot F &= -J \rightarrow \nabla' \cdot F' = -J' \end{aligned} \quad (3.5)$$

i samotného tenzoru elektromagnetického pole

$$F \rightarrow F' = F. \quad (3.6)$$

To tedy znamená, že pokud nalezneme pole F rovnoměrně se pohybujícího náboje v Minkowského prostoru, splňující Maxwellovy rovnice (3.5), pak pole F' rovnoměrně urychlených nábojů v de Sitterově prostoru má stejný tvar jako F a je také řešením Maxwellových rovnic. Stačí tedy získat pole rovnoměrně se pohybujícího náboje



Obrázek 3.2: Rozdělení de Sitterova prostoročasu na oblasti, podle přítomnosti retardovaných a advancovaných polí od částice N a S.

v Minkowského prostoru a toto není nic jiného než pouhý boost coulombického pole.

Takto získané symetrické elektromagnetické pole dvou rovnoměrně urychlených částic s opačnými náboji, lze chápat jako kombinaci retardovaných a advancovaných potenciálů od obou částic s příslušnými vahami [2]

$$A_{\text{sym}} = \zeta A_{N\text{ret}} + (1 - \zeta) A_{N\text{adv}} + (1 - \zeta) A_{S\text{ret}} + \zeta A_{S\text{adv}}, \quad (3.7)$$

kde ζ je libovolný konstantní faktor $\zeta \in \mathbb{R}$. Pole je symetrické vzhledem k boostu a rotaci kolem osy, po které se pohybují částice.

Rozdělíme-li de Sitterův prostoročas do čtyř regionů, přesně tak jak je vyznačeno v konformním diagramu na obr. 3.2, pak v oblasti I lze uvažovat retardované i advancované pole pouze od částice N, v oblasti II retardované i advancované pole pouze od částice S. Pouze retardovaná pole od obou částic v oblasti III a čistě advancovaná pole obou částic v oblasti IV. Dále se budeme zajímat pouze o retardované pole částice N, omezíme se tedy na oblast jejího vlivu (I, III). Pokud zvolíme v (3.7) $\zeta = 1$, pak lze symetrické pole v těchto oblastech I a III interpretovat, jako pouze retardované pole částice N.

Pro lepší fyzikální pohled na elektromagnetické pole, zavedeme, ve sférických i plochých souřadnicích, ortonormální tetřády $\{e_i\}$ a duální tetřády $\{e^i\}$, odpovídající příslušným systémům souřadnic. Pak rozložíme elektromagnetické pole F , pomocí tetřádových složek vektorů elektrické intenzity a magnetické indukce. Ve standardních sférických souřadnicích má rozklad tvar

$$F = E^x e^x \wedge e^\tau + E^\vartheta e^\vartheta \wedge e^\tau + E^\varphi e^\varphi \wedge e^\tau + B^x e^\vartheta \wedge e^\varphi + B^\vartheta e^\varphi \wedge e^x + B^\varphi e^x \wedge e^\vartheta. \quad (3.8)$$

Tetrádové složky vektorů elektrické intenzity a magnetické indukce

$$\mathbf{E} = E^x \mathbf{e}_x + E^\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + E^\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{B} = B^x \mathbf{e}_x + B^\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + B^\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.10)$$

jsou měřeny pozorovateli, pohybující se se čtyř-rychlostí, odpovídající časovému vektoru tetrády, v tomto případě \mathbf{e}_τ . Tyto vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} , přísluší danému rozštěpení prostoročasu, závisí tedy na volbě časové nadplochy a ta je ve sférických a plochých souřadnicích různá. Pokud to nebude z kontextu jasné, budeme značit vektory indexem sf nebo pl, pro rozštěpení podle sférických nebo plochých souřadnic. U obecně platných vztahů, nezávislých na volbě nadplochy, indexy uvádět nebudeme.

Vyjádřením pole \mathbf{F} ve sférických souřadnicích dostáváme [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{\mathcal{Q}^3} \frac{\ell_\Lambda^3}{\sin^3 \tilde{t}} \left[-\sinh \alpha_0 \cos \tilde{t} \sin^2 \tilde{r} \sin \vartheta \, d\tilde{r} \wedge d\vartheta \right. \\ & + \left(\cosh \alpha_0 \sin \tilde{r} - \sinh \alpha_0 \sin \tilde{t} \cos \vartheta \right) d\tilde{t} \wedge d\tilde{r} \\ & \left. + \sinh \alpha_0 \sin \tilde{t} \cos \tilde{r} \sin \tilde{r} \cos \vartheta \, d\tilde{t} \wedge d\vartheta \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

porovnáním s tetrádou (2.13) získáme složky vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B}

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{sf}} = & \frac{e}{4\pi} \frac{\ell_\Lambda}{\mathcal{Q}^3} \left[\sinh \alpha_0 \cos \tilde{r} \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta \right. \\ & \left. + \left(\cosh \alpha_0 \frac{\sin \tilde{r}}{\sin \tilde{t}} - \sinh \alpha_0 \cos \vartheta \right) \mathbf{e}_{\tilde{r}} \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{B}_{\text{sf}} = \frac{e}{4\pi} \frac{\ell_\Lambda \sinh \alpha_0}{\mathcal{Q}^3} \cot \tilde{t} \sin \tilde{r} \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.13)$$

kde faktor \mathcal{Q} , který je také vázán na konkrétní rozštěpení prostoročasu, je roven

$$\mathcal{Q} = \ell_\Lambda \left[\left(\cosh \alpha_0 - \sinh \alpha_0 \frac{\sin \tilde{r}}{\sin \tilde{t}} \cos \vartheta \right)^2 - 1 + \frac{\sin^2 \tilde{r}}{\sin^2 \tilde{t}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.14)$$

V plochých souřadnicích dostaneme tyto veličiny, pokud pole \mathbf{F} transformujeme do těchto souřadnic [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \frac{e}{4\pi} \frac{1}{\mathcal{Q}^3} \frac{\ell_\Lambda^3}{\tilde{t}^3} \left[\sinh \alpha_0 \tilde{r}^2 \sin \vartheta \, d\tilde{r} \wedge d\vartheta \right. \\ & + \left(\cosh \alpha_0 \tilde{r} + \sinh \alpha_0 \tilde{t} \cos \vartheta \right) d\tilde{t} \wedge d\tilde{r} \\ & \left. - \sinh \alpha_0 \tilde{t} \tilde{r} \cos \vartheta \, d\tilde{t} \wedge d\vartheta \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

složky vektorů elektrické intenzity a magnetické indukce získáme srovnáním s tetradou (2.18)

$$\mathbf{E}_{\text{pl}} = \frac{e}{4\pi} \frac{\ell_\Lambda}{Q^3} \left[\sinh \alpha_0 \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta - \left(\cosh \alpha_0 \frac{\check{r}}{\check{t}} + \sinh \alpha_0 \cos \vartheta \right) \mathbf{e}_{\check{r}} \right], \quad (3.16)$$

$$\mathbf{B}_{\text{pl}} = \frac{e}{4\pi} \frac{\ell_\Lambda \sinh \alpha_0}{Q^3} \frac{\check{r}}{\check{t}} \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.17)$$

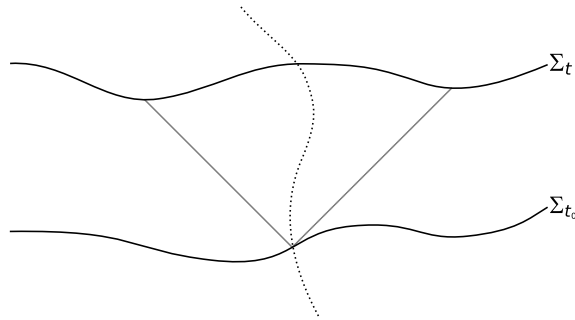
zde faktor Q je dán

$$Q = \ell_\Lambda \left[\left(\cosh \alpha_0 + \sinh \alpha_0 \frac{\check{r}}{\check{t}} \cos \vartheta \right)^2 - \left(1 - \frac{\check{r}^2}{\check{t}^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.18)$$

Kapitola 4

Souřadnice centrované na částici

Pro další výpočty a interpretaci výsledků bude vhodné zavést souřadnice s počátkem umístěným na částici, tak aby se zjednodušili integrační meze při výpočtu celkové energie uvnitř oblasti, respektive tok energie ven z oblasti tvaru koule se středem na částici. Poloměr takovéto trojrozměrné koule $R = \text{konst.}$, tedy novou radiální souřadnici, získáme jako parametr určující průniky světelného kužele, v jehož vrcholu se nachází částice na nadploše Σ_{t_0} , s prostorupodobnou nadplochou Σ_t . Tato konstrukce centrovaných souřadnic nám identifikuje energii vyzářenou částicí v čase t_0 s energií vyteklou z oblasti $R = \text{konst.}$ v čase t . Nadplochy Σ jsou řezy prostoročasu s konstantní časovou souřadnicí, v případě plochých souřadnic to jsou nadplochy konstantního času \tilde{t} , ve sférických souřadnicích to budou nadplochy konstantního času \tilde{t} .



Obrázek 4.1: Souřadnice centrované na částici, získané jako průnik prostorupodobné nadplochy $t = \text{konst.}$ a světelného kužele s vrcholem na světočáře částice v čase t_0 .

K vyjádření těchto nových souřadnic pro rovnoměrně urychlené částice využijeme Robinsonovy-Trautmanovy souřadnice, konkrétně souřadnici u , která parametrizuje světelné kužely s vrcholem na částici. Využijeme transformačních vztahů (2.23) a vyjádříme si bod (r, ϑ) na nadploše $t = \text{konst.}$ a polohu částice $(r_0, \vartheta = 0)$ v čase t_0

pomocí souřadnice u . Protože obě události leží na světelném kuželu, rovnají se hodnoty jejich souřadnic u . Rovnost můžeme chápat, jako implicitně zadanou uzavřenou křivku, vytvořenou jako průnik světelného kužele s nadplochou $t = \text{konst.}$, kde r_0, t_0 jsou parametry určující světelný kužel a nejsou nezávislé, neboť jsou svázány rovnicí trajektorie částice. Nalezením vhodné transformace, která převede tuto implicitní rovnici do tvaru pro obecnou kružnici, dostaneme novou radiální a úhlovou souřadnici R, Θ vyjádřenou pomocí r, t, r_0, t_0 a ϑ . Úhlová souřadnice φ je totožná.

4.1 Centrované ploché souřadnice

Nejdříve provedeme uvedený postup v plochých kosmologických souřadnicích. Vyjádříme si Robinsonovu-Trautmanovu souřadnici u bodu (\check{r}, ϑ) na nadploše $\check{t} = \text{konst.}$

$$u = \frac{\ell_\Lambda}{\cosh \alpha_0} \log \left| \frac{\ell_\Lambda}{\check{t} \cosh \alpha_0 + \check{r} \cos \vartheta \sinh \alpha_0 - K} \right|, \quad (4.1)$$

kde $K = \sqrt{(\check{t} \sinh \alpha_0 + \check{r} \cos \vartheta \cosh \alpha_0)^2 + \check{r}^2 \sin^2 \vartheta}$ a také Robinsonovu-Trautmanovu souřadnici u polohy částice $(\check{r}_0, \vartheta = 0)$ v čase \check{t}_0

$$u_0 = \frac{\ell_\Lambda}{\cosh \alpha_0} \log \left| \frac{\ell_\Lambda}{\check{t}_0 \cosh \alpha_0 + \check{r}_0 \sinh \alpha_0 - \sqrt{(\check{t}_0 \sinh \alpha_0 + \check{r}_0 \cosh \alpha_0)^2}} \right|. \quad (4.2)$$

Obě události budou ležet na totožném světelném kuželu, pokud se budou rovnat jejich Robinsonovo-Trautmanovo souřadnice u a u_0 . Po několika úpravách této rovnosti dostáváme

$$(\check{r} \cos \vartheta - \check{r}_0)^2 + \check{r}^2 \sin^2 \vartheta = (\check{t} - \check{t}_0)^2. \quad (4.3)$$

Zavedeme-li tedy nové souřadnice R, Θ vztahy

$$R \cos \Theta = \check{r} \cos \vartheta - \check{r}_0,$$

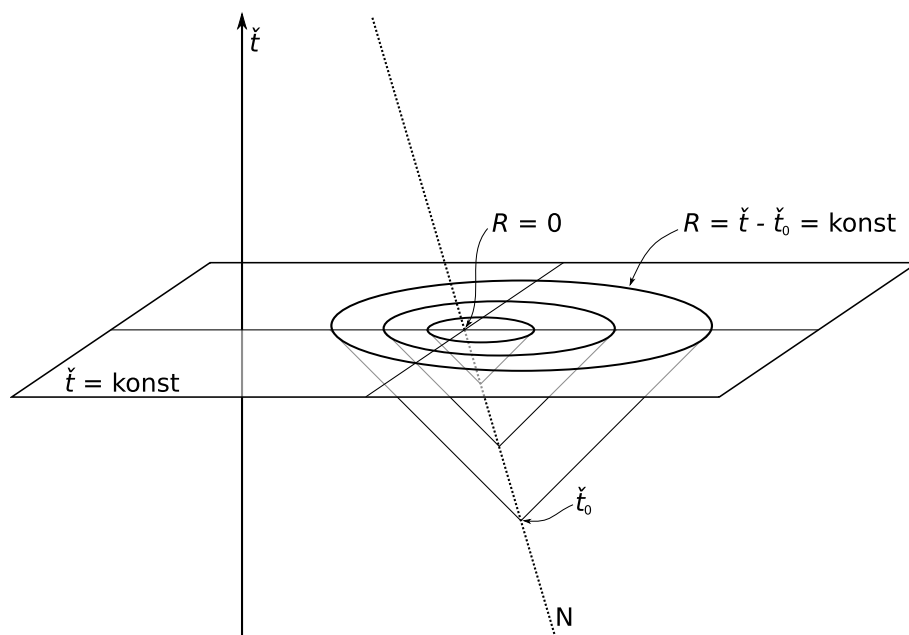
$$R \sin \Theta = \check{r} \sin \vartheta, \quad (4.4)$$

pak po srovnání s (4.3) a protože $\check{t} \geq \check{t}_0$ dostaneme

$$R = \check{t} - \check{t}_0. \quad (4.5)$$

Nové souřadnice R, Θ jsou tedy jakousi „translací“ počátku o \check{r}_0 ve směru $\vartheta = 0$, takže se částice nachází na $R = 0$. Hodnota souřadnice R , na časové nadploše \check{t} , je dána rozdílem časů \check{t} a \check{t}_0 , kde \check{t}_0 je čas vyemitování záření částicí, které dosáhne do R v čase \check{t} .

Díky konformním vlastnostem plochých kosmologických souřadnic v de Sitterově prostoročasu, můžeme provádět geometrické úvahy v Minkowského prostoročasu. Zde odpovídá světočára rovnoměrně urychlené částice v de Sitterově prostoru, světočára rovnoměrně se pohybující částice v Minkowského prostoru. Oblasti vlivu částice N , vzniklé na severním pólu ($\tilde{r} = 0$), odpovídá oblast v Minkowského prostoru se záporným časem \tilde{t} . Budoucí konformní nekonečno v de Sitterově prostoru odpovídá nadploše $\tilde{t} = 0$ v Minkowského prostoročasu.



Obrázek 4.2: Konformně ploché souřadnice centrované na částici, zobrazeny v plochém prostoru. V řezu $\varphi = \text{konst.}$ tvoří souřadnicové čáry $R = \text{konst.}$, tedy průniky světelných kuželů s prostorupodobnou nadplochou, nesoustředné kružnice.

Posun počátku centrovaných souřadnic vůči počátku původních souřadnic, tedy poloha částice \tilde{r}_0 , je určena hodnotou \tilde{t}_0 pomocí (3.3) a ta je rovna rozdílu R a \tilde{t} , viz 4.5. To znamená, že velikost posunu na dané prostorové nadploše závisí na samotné hodnotě R

$$\tilde{r}_0 = \tanh \alpha_0 (R - \tilde{t}). \quad (4.6)$$

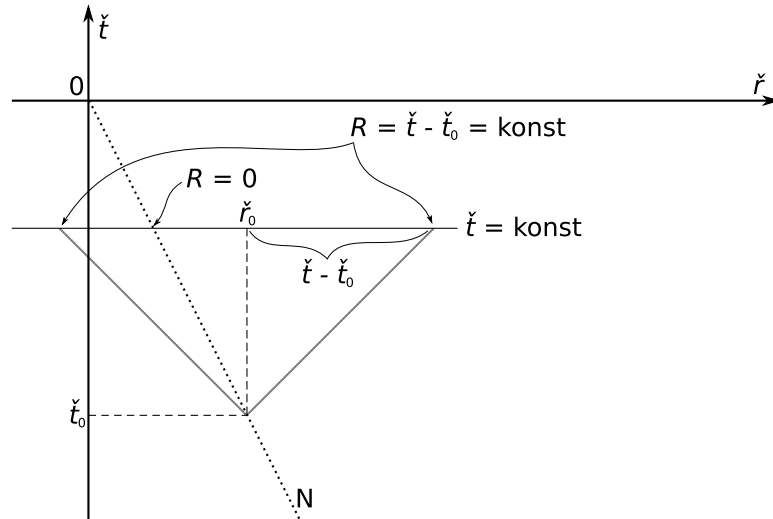
Díky tomu, nadplochy se souřadnicí $R = \text{konst.}$ tvoří nesoustředné koule, v řezu $\tilde{t}, \varphi = \text{konst.}$ to jsou nesoustředné kružnice, viz obr. 4.2. Střed těchto koulí není umístěn na částici na prostorové nadploše s časem \tilde{t} , ale v bodě, kde se nacházela částice v čase \tilde{t}_0 . Poloměr takovéto koule v plochých kosmologických souřadnicích je roven hodnotě R , potom vlastní fyzikální poloměr měřený metrikou (2.15) je $\frac{\ell_\Lambda}{\tilde{t}} R$.

Dosadíme-li vyjádření \tilde{r}_0 (4.6) do transformačních vztahů (4.4), můžeme si explicitně vyjádřit původní souřadnice pomocí nových

$$\begin{aligned} \tilde{r}^2 = R^2 (1 - 2 \tanh \alpha_0 \cos \Theta + \tanh^2 \alpha_0) + \\ + 2R\tilde{t} \tanh \alpha_0 (\cos \Theta - \tanh \alpha_0) + \tilde{t}^2 \tanh^2 \alpha_0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\tan \vartheta = \frac{R \sin \Theta}{R(\cos \Theta + \tanh \alpha_0) - \tilde{t} \tanh \alpha_0}. \quad (4.8)$$

V případě, že $\tanh \alpha_0 = 0$, tedy má-li částice nulové zrychlení, přecházejí centrované ploché souřadnice na ploché.



Obrázek 4.3: Centrované ploché souřadnice v Minkowského prostoročasu. Počátek je umístěn na částici, ale střed kružnice $R = \text{konst.}$ je v místě, kde se nacházela částice v čase \tilde{t}_0 .

K dalším výpočtům budeme potřebovat vyjádření derivací plochých souřadnic

podle centrovaných plochých souřadnic

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \check{r}}{\partial R} &= \frac{R + \check{r}_0 \cos \Theta + \tanh \alpha_0 (R \cos \Theta + \check{r}_0)}{\check{r}}, \\
 \frac{\partial \vartheta}{\partial R} &= \frac{-R \sin \Theta \tanh \alpha_0 + \check{r}_0 \sin \Theta}{\check{r}^2}, \\
 \frac{\partial \check{r}}{\partial \Theta} &= -\frac{R \check{r}_0 \sin \Theta}{\check{r}}, \\
 \frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} &= \frac{R^2 - R \check{r}_0 \cos \Theta}{\check{r}^2}.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Objemový element v centrovaných plochých souřadnicích na prostorové nadploše $\check{t} = \text{konst.}$ získáme z objemového elementu v plochých souřadnicích, jako determinant metriky (2.15)

$$dV = \frac{\ell_\Lambda^3}{|\check{t}^3|} \check{r}^2 \sin \vartheta d\check{r} \wedge d\vartheta \wedge d\varphi \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\ell_\Lambda^3}{|\check{t}^3|} \check{r}^2 \sin \vartheta \left(\frac{\partial \check{r}}{\partial R} dR + \frac{\partial \check{r}}{\partial \Theta} d\Theta \right) \wedge \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial R} dR + \frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} d\Theta \right) \wedge d\varphi \\
 &= \frac{\ell_\Lambda^3}{|\check{t}^3|} \check{r}^2 \sin \vartheta \left(\frac{\partial \check{r}}{\partial R} \frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} - \frac{\partial \check{r}}{\partial \Theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial R} \right) dR \wedge d\Theta \wedge d\varphi \\
 &= \frac{\ell_\Lambda^3}{|\check{t}^3|} R^2 \sin \Theta (1 + \tanh \alpha_0 \cos \Theta) dR \wedge d\Theta \wedge d\varphi,
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

kde jsme využili transformace 1-forem

$$d\check{r} = \frac{\partial \check{r}}{\partial R} dR + \frac{\partial \check{r}}{\partial \Theta} d\Theta, \tag{4.12}$$

$$d\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial R} dR + \frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} d\Theta \tag{4.13}$$

a také, že z (4.9) platí

$$\frac{\partial \check{r}}{\partial R} \frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} - \frac{\partial \check{r}}{\partial \Theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial R} = \frac{R}{\check{r}} (1 + \tanh \alpha_0 \cos \Theta). \tag{4.14}$$

Nakonec si ještě vypočítáme plošný element kolmý na vektor ∂_R , který využijeme při vyjádření hustoty toku energie z oblasti tvaru koule $R = \text{konst.}$ Nejdříve potřebujeme jednotkový vektor e_R , k tomu je třeba určit normu vektoru ∂_R , indukovanou

metrikou (2.15)

$$\begin{aligned}
 \partial_R &= \frac{\partial \check{r}}{\partial R} \partial_{\check{r}} + \frac{\partial \vartheta}{\partial R} \partial_{\vartheta} \\
 &= -\frac{\ell_\Lambda R + \check{r}_0 \cos \Theta + \tanh \alpha_0 (R \cos \Theta + \check{r}_0)}{\check{t}} \mathbf{e}_{\check{r}} + \\
 &\quad + \frac{\ell_\Lambda \check{r} \tanh \alpha_0 R \sin \Theta - \check{r}_0 \sin \Theta}{\check{t} \check{r}^2} \mathbf{e}_{\vartheta}, \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

přičemž jsme dosadili derivace (4.9) a přepsali vektory $\partial_{\check{r}}$ a ∂_{ϑ} pomocí vektorů tetrády (2.18). Díky tomu je pak norma vektoru ∂_R pouze odmocnina ze součtu kvadrátů faktorů, stojících před jednotkovými vektory. Po několika úpravách tak dostáváme

$$|\partial_R| = -\frac{\ell_\Lambda}{\check{t}} \sqrt{\tanh^2 \alpha_0 + 2 \tanh \alpha_0 \cos \Theta + 1}, \tag{4.16}$$

znaménko mínus se zde objevilo, aby kompenzovalo zápornou hodnotu souřadnice \check{t} . Jednotkový vektor \mathbf{e}_R je roven $\partial_R/|\partial_R|$

$$\mathbf{e}_R = -\frac{\check{t}}{\ell_\Lambda \sqrt{\tanh^2 \alpha_0 + 2 \tanh \alpha_0 \cos \Theta + 1}} \partial_R. \tag{4.17}$$

Nyní již získáme plošný element zúžením 3-formy objemu (4.11) s vektorem \mathbf{e}_R

$$\begin{aligned}
 dS &= dV \cdot \mathbf{e}_R \\
 &= \frac{\ell_\Lambda^2 R^2 \sin \Theta}{\check{t}^2 \sqrt{\tanh^2 \alpha_0 + 2 \tanh \alpha_0 \cos \Theta + 1}} (1 + \tanh \alpha_0 \cos \Theta) d\Theta \wedge d\varphi. \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

4.2 Centrované sférické souřadnice

Stejným způsobem zavedeme centrované souřadnice i v případě sférických kosmologických souřadnic. Opět bychom si vyjádřili bod na nadploše $\tilde{t} = \text{konst.}$ a polohu částice v čase \tilde{t}_0 pomocí Robinsonovy-Trautmanovy souřadnice u a dali do rovnosti. Ušetříme si práci a využijeme jednodušší, ale ekvivalentní rovnost vyjádřenou v plochých souřadnicích (4.3) a přepíšeme ji pomocí transformačních vztahů (2.19) do sférických souřadnic

$$\cos \tilde{r} \cos \tilde{r}_0 + \sin \tilde{r} \sin \tilde{r}_0 \cos \vartheta = \cos(\tilde{t} - \tilde{t}_0). \quad (4.19)$$

Počátek bude opět lokalizován na částici. Tentokrát ale nové souřadnice R, Θ získáme rotací o úhel \tilde{r}_0 ve směru $\vartheta = 0$

$$\sin R \cos \Theta = \sin \tilde{r} \cos \vartheta \cos \tilde{r}_0 - \cos \tilde{r} \sin \tilde{r}_0,$$

$$\sin R \sin \Theta = \sin \tilde{r} \sin \vartheta,$$

$$\cos R = \sin \tilde{r} \cos \vartheta \sin \tilde{r}_0 + \cos \tilde{r} \cos \tilde{r}_0. \quad (4.20)$$

Porovnáním s (4.19) vyplyne podobně

$$\cos R = \cos(\tilde{t} - \tilde{t}_0), \quad (4.21)$$

protože $\tilde{t} \geq \tilde{t}_0$ je tedy nakonec hodnota R určena opět pouze rozdílem časů

$$R = \tilde{t} - \tilde{t}_0. \quad (4.22)$$

Úhel \tilde{r}_0 o který je pootočen počátek centrovaných souřadnic vůči počátku sférických kosmologických souřadnic, tedy poloha částice v čase \tilde{t}_0 , je vztahem (3.4) určen hodnotou \tilde{t}_0 a ta je rovna rozdílu R a \tilde{t} (4.22). Velikost úhlu pootočení na dané prostorové nadploše závisí na samotné hodnotě R

$$\sin \tilde{r}_0 = -\tanh \alpha_0 \sin(R - \tilde{t}). \quad (4.23)$$

Nadplochy se souřadnicí $R = \text{konst.}$ tvoří nesoustředné koule, v řezu $\tilde{t}, \varphi = \text{konst.}$ jím odpovídají nesoustředné kružnice na sféře, viz obr. 4.4. To znamená, že střed této koule je umístěn v bodě, kde se nacházela částice v čase \tilde{t}_0 . Poloměr takovéto koule vyjádřený ve sférických kosmologických souřadnicích je roven hodnotě R , vlastní fyzikální poloměr měřený metrikou (2.11) je pak $\frac{\ell_{\Lambda}}{\sin \tilde{t}} R$.

Pokud budou mít částice nulové zrychlení, tedy když $\tanh \alpha_0 = 0$, pak ze vztahu pro trajektorii částice (3.4) plyne $\tilde{r}_0 = 0$ a centrované sférické souřadnice přecházejí na sférické kosmologické souřadnice.

Vyjádříme si derivace původních souřadnic podle centrovaných, které budeme dále potřebovat

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{r}}{\partial R} &= \frac{1}{\sin \tilde{r}} \left(\sin R \cos \tilde{r}_0 + \sin R \cos \tilde{r}_0 \cos \Theta \frac{\partial \tilde{r}_0}{\partial R} + \right. \\
 &\quad \left. + \cos R \sin \tilde{r}_0 \cos \Theta + \cos R \sin \tilde{r}_0 + \cos R \sin \tilde{r}_0 \frac{\partial \tilde{r}_0}{\partial R} \right), \\
 \frac{\partial \vartheta}{\partial R} &= \frac{-\sin R \cos \tilde{r} \sin \Theta \frac{\partial \tilde{r}_0}{\partial R} + \sin \tilde{r}_0 \sin \Theta}{\sin^2 \tilde{r}}, \\
 \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \Theta} &= -\frac{\sin R \sin \tilde{r}_0 \sin \Theta}{\sin \tilde{r}}, \\
 \frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} &= \frac{2 \sin^2 R \cos^2 \Theta \cos \tilde{r}_0 + \sin R \cos R \sin \tilde{r}_0 \cos \Theta}{\sin^2 \tilde{r}}, \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

kde

$$\frac{\partial \tilde{r}_0}{\partial R} = -\tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0}. \tag{4.25}$$

Z objemového elementu ve sférických souřadnicích na nadploše $\tilde{t} = \text{konst.}$, který získáme jako determinant metriky (2.11), dostaneme objemový element v centrovaných sférických souřadnicích následovně

$$\begin{aligned}
 dV &= \frac{\ell_\Lambda^3}{\sin^3 \tilde{t}} \sin^2 \tilde{r} \sin \vartheta d\tilde{r} \wedge d\vartheta \wedge d\varphi \tag{4.26} \\
 &= \frac{\ell_\Lambda^3}{\sin^3 \tilde{t}} \sin^2 \tilde{r} \sin \vartheta \left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial R} dR + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \Theta} d\Theta \right) \wedge \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial R} dR + \frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} d\Theta \right) \wedge d\varphi \\
 &= \frac{\ell_\Lambda^3}{\sin^3 \tilde{t}} \sin^2 \tilde{r} \sin \vartheta \left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial R} \frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} - \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \Theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial R} \right) dR \wedge d\Theta \wedge d\varphi \\
 &= \frac{\ell_\Lambda^3}{\sin^3 \tilde{t}} \sin^2 R \sin \Theta \left(1 + \frac{\partial \tilde{r}_0}{\partial R} \cos \Theta \right) dR \wedge d\Theta \wedge d\varphi \\
 &= \frac{\ell_\Lambda^3}{\sin^3 \tilde{t}} \sin^2 R \sin \Theta \left(1 - \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \cos \Theta \right) dR \wedge d\Theta \wedge d\varphi, \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

kde jsme využili transformace 1-forem

$$d\tilde{r} = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial R} dR + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \Theta} d\Theta, \tag{4.28}$$

$$d\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial R} dR + \frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} d\Theta \tag{4.29}$$

a také, že z (4.24) platí

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial R} \frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} - \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \Theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial R} = \frac{\sin R}{\sin \tilde{r}} \left(1 + \frac{\partial \tilde{r}_0}{\partial R} \cos \Theta \right). \quad (4.30)$$

Pro vyjádření hustoty toku energie z oblasti tvaru koule $R = \text{konst.}$, budeme potřebovat plošný element kolmý na vektor ∂_R . K jeho určení využijeme jednotkový vektor e_R , který získáme z vektoru ∂_R a jeho normy, indukované metrikou (2.11)

$$\begin{aligned} \partial_R &= \frac{\partial \tilde{r}}{\partial R} \partial_{\tilde{r}} + \frac{\partial \vartheta}{\partial R} \partial_{\vartheta} \\ &= \frac{\ell_\Lambda}{\sin \tilde{t}} \frac{1}{\sin \tilde{r}} \left(\sin R \cos \tilde{r}_0 + \sin R \cos \tilde{r}_0 \cos \Theta \frac{\partial \tilde{r}_0}{\partial R} + \right. \\ &\quad \left. + \cos R \sin \tilde{r}_0 \cos \Theta + \cos R \sin \tilde{r}_0 + \cos R \sin \tilde{r}_0 \frac{\partial \tilde{r}_0}{\partial R} \right) e_{\tilde{r}} + \\ &\quad + \frac{\ell_\Lambda \sin \tilde{r} - \sin R \cos \tilde{r} \sin \Theta \frac{\partial \tilde{r}_0}{\partial R} + \sin \tilde{r}_0 \sin \Theta}{\sin \tilde{t} \sin^2 \tilde{r}} e_{\vartheta}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

kde jsme dosadili derivace (4.24) a přepsali vektory $\partial_{\tilde{r}}$ a ∂_{ϑ} , pomocí vektorů tetrády (2.13). Díky tomu je pak norma vektoru ∂_R pouze odmocnina ze součtu kvadrátů faktorů, stojících před jednotkovými vektory. Po několika úpravách tak dostáváme

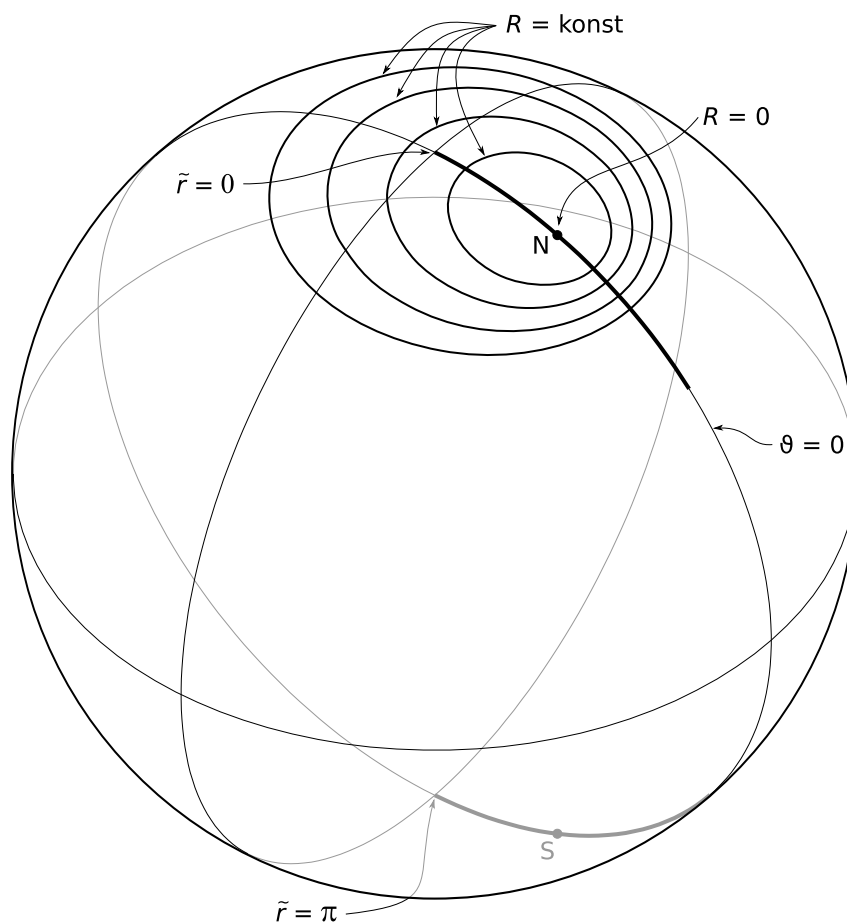
$$|\partial_R| = \frac{\ell_\Lambda}{\sin \tilde{t}} \sqrt{\tanh^2 \alpha_0 \frac{\cos^2 \tilde{t}_0}{\cos^2 \tilde{r}_0} - 2 \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \cos \Theta + 1}, \quad (4.32)$$

takže jednotkový vektor e_R je roven $\partial_R/|\partial_R|$

$$e_R = \frac{\sin \tilde{t}}{\ell_\Lambda \sqrt{\tanh^2 \alpha_0 \frac{\cos^2 \tilde{t}_0}{\cos^2 \tilde{r}_0} - 2 \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \cos \Theta + 1}} \partial_R. \quad (4.33)$$

Nakonec zúžíme 3-formu objemu (4.27) s vektorem e_R a dostáváme plošný element

$$\begin{aligned} dS &= dV \cdot e_R \\ &= \frac{\ell_\Lambda^2 \sin^2 R \sin \Theta}{\sin^2 \tilde{t} \sqrt{\tanh^2 \alpha_0 \frac{\cos^2 \tilde{t}_0}{\cos^2 \tilde{r}_0} - 2 \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \cos \Theta + 1}} \times \\ &\quad \times \left(1 - \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \cos \Theta \right) d\Theta \wedge d\varphi. \end{aligned} \quad (4.34)$$



Obrázek 4.4: Centrované sférické souřadnice. Řez $\tilde{t} = \text{konst.}$, souřadnice φ je potlačena. Souřadnicové čáry konstantní souřadnice R představují nesoustředné kružnice na sféře. Počátek je umístěn na částici N .

Kapitola 5

Energie a toky energie

Ze získaného tenzoru elektromagnetického pole F rovnoměrně urychlených nábojů, bychom potřebovali nejprve vypočítat tenzor energie-hybnosti

$$T_{ab} = F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd} \quad (5.1)$$

a z něho potom, pomocí časupodobného Killingova vektoru ξ^a , energii a tok energie

$$T_{ab}\xi^a n^b. \quad (5.2)$$

Je-li jednotkový vektor n^a časupodobný, odpovídá tento výraz hustotě energie, je-li prostorupodobný, pak se jedná o hustotu toku energie ve směru tohoto vektoru.

Zvolíme-li rozštěpení prostoročasu na prostorupodobné řezy Σ a jednotkový časupodobný vektor n^a je v každém bodě kolmý na tyto nadplochy, pak lze tenzor elektromagnetického pole zapsat ve tvaru

$$F_{ab} = E_a \wedge n_b + \varepsilon_{abc}B^c. \quad (5.3)$$

Trojrozměrný Levi-Civitův tenzor ε_{abc} na nadploše Σ splňuje

$$\varepsilon_{abc}n^a = 0, \quad \varepsilon_{abcd} = n_a \wedge \varepsilon_{bcd}, \quad (5.4)$$

tenzor energie-hybnosti lze rozložit jako

$$T_{ab} = Un_a n_b - n_a \vee S_b + \tau_{ab}, \quad (5.5)$$

kde hustota energie U , Poyntingův vektor S_b a tenzor napětí τ_{ab} je

$$U = \frac{1}{2}(E^2 + B^2), \quad (5.6)$$

$$S_a = \varepsilon_{abc}E^b B^c, \quad (5.7)$$

$$\tau_{ab} = -E_a E_b - B_a B_b + U g_{ab}. \quad (5.8)$$

Zvolíme ortonormální tetradu $\{(e_i)^a\}$ a jako jednotkový vektor n^a vybereme tetradový časopodobný vektor. Trojrozměrné vektory elektrické intenzity E a magnetické indukce B , v nadploše Σ , jsou určeny tetradovými komponentami

$$E = E^i e_i, \quad (5.9)$$

$$B = B^i e_i. \quad (5.10)$$

Následující vztahy platí jak pro sférické souřadnice, tak pro ploché souřadnice. Abychom je nemuseli vypisovat dvakrát, zavedeme značení \circ nad souřadnicí t , které zahrnuje oba dva případy. V plochých souřadnicích za \circ dosadíme háček \checkmark , ve sférických vlnovku \sim .

Protože orbity obou konformních Killingových vektorů ∂_t a $\partial_{\checkmark t}$ leží na souřadnicových čarách souřadnice $\checkmark t$, resp. \tilde{t} , jsou konformní Killingovy vektory násobkem odpovídajícího jednotkového vektoru

$$\partial_{\checkmark t} = |\partial_{\checkmark t}| e_{\checkmark t}, \quad (5.11)$$

porovnáním s (2.18) a (2.13) dostáváme normy indukované odpovídajícími metrikami (2.15) a (2.11)

$$|\partial_{\checkmark t}| = -\frac{\ell_\Lambda}{\checkmark t}, \quad (5.12)$$

$$|\partial_{\tilde{t}}| = \frac{\ell_\Lambda}{\sin \tilde{t}}. \quad (5.13)$$

Znaménko mínus se objevilo v (5.12), vzhledem k tomu, že jsme v oblasti $\checkmark t \leq 0$. Pak tedy zachovávající se energie, spojená se symetrií odpovídající vektoru $\partial_{\checkmark t}$, je jednoduše vyjádřena pomocí tetradových složek elektrické intenzity a magnetické indukce

$$T_{ab}(\partial_{\checkmark t})^a (e_i)^b = \frac{1}{2} |\partial_{\checkmark t}| (E^2 + B^2). \quad (5.14)$$

Tok této energie ve směru jednotkového vektoru e_i je

$$T_{ab}(\partial_{\checkmark t})^a (e_i)^b = |\partial_{\checkmark t}| S_i = |\partial_{\checkmark t}| \varepsilon_{ijk} E^j B^k. \quad (5.15)$$

5.1 Energie měřená kosmologickými pozorovateli

Nejprve se budeme zajímat o hustotu energie měřenou kosmologickými pozorovateli ve sférických a plochých souřadnicích. Jsou to pozorovatelé stojící na konstantních souřadnicích a jsou tedy spojeni s tetradou (2.18) v plochých, respektive (2.13) ve sférických souřadnicích. To znamená, že jimi měřené vektory elektrické intenzity E a magnetické indukce B přesně odpovídají výrazům (3.16) a (3.17), respektive (3.12) a (3.13).

5.1.1 Ploché souřadnice

V případě kosmologických pozorovatelů v plochých souřadnicích budeme uvažovat zachovávající se energii spojenou s konformním Killingovým vektorem $\partial_{\tilde{t}}$. Využijeme vztahu (5.14) pro energii vyjádřenou pomocí tetradových složek E a B , dosadíme normu (5.12) a dostáváme

$$\begin{aligned} T_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^{\underline{a}}(e_{\tilde{t}})^{\underline{b}} = & -\frac{1}{2} \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{\ell_{\Lambda}^3 \tilde{t}} \left[\frac{1}{((\cosh \alpha_0 + \sinh \alpha_0 \frac{\tilde{r}}{\tilde{t}} \cos \vartheta)^2 - 1 + \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{t}^2})^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2 \sinh^2 \alpha_0 \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{t}^2} \sin^2 \vartheta}{((\cosh \alpha_0 + \sinh \alpha_0 \frac{\tilde{r}}{\tilde{t}} \cos \vartheta)^2 - 1 + \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{t}^2})^3} \right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Výraz vyskytující se uvnitř závorek v obou jmenovateli, lze jednoduše přepsat jako $(\sinh \alpha_0 + \cosh \alpha_0 \frac{\tilde{r}}{\tilde{t}} \cos \vartheta)^2 + \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{t}^2} \sin^2 \vartheta$ a je vždy nezáporný. Nulový je pouze v případě, že oba členy jsou nulové a k tomu dochází právě tehdy, když pozorovatel protíná světočáru částice S (3.3), tzn. pro $(\tilde{r} = \tilde{r}_0, \tilde{t} = \tilde{t}_0, \vartheta = 0)$. Pak energie, jak očekáváme, diverguje.

Provedeme-li rozvoj hustoty energie (5.16) v budoucím konformním nekonečnu, tedy pro $\tilde{t} \rightarrow 0$, dostáváme

$$T_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^{\underline{a}}(e_{\tilde{t}})^{\underline{b}} \approx -\frac{1}{2} \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{\ell_{\Lambda}^3} \frac{\tilde{t}^3 \cosh^2 \alpha_0 + \sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta}{\tilde{r}^4 (\sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta + 1)^3}. \quad (5.17)$$

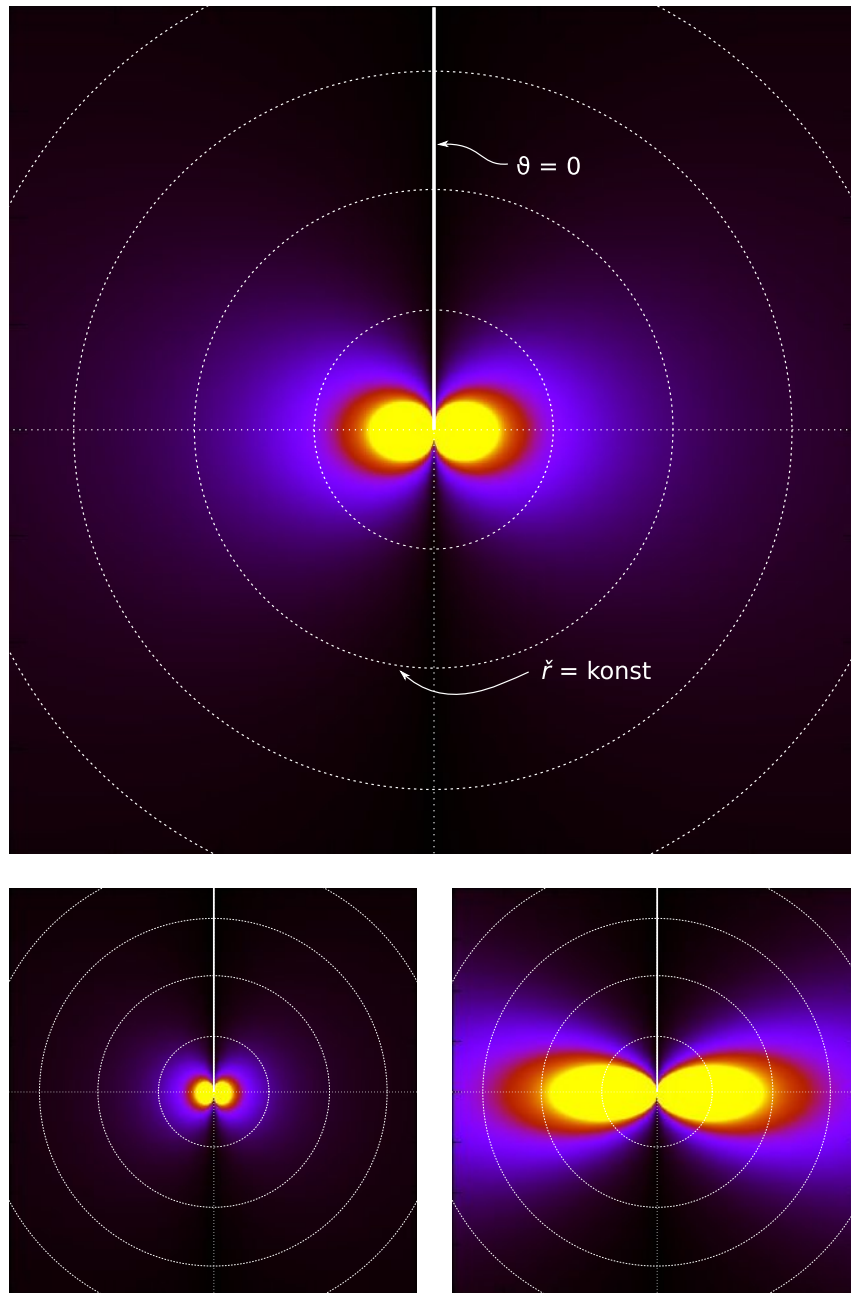
Hustota energie se asymptoticky chová jako \tilde{t}^3 , ve vlastním čase kosmologických pozorovatelů $\tilde{\tau}$ (2.17) to znamená rozvoj pro $\tilde{\tau} \rightarrow \infty$ a hustota energie má exponenciální pokles jako $\exp(-3\tilde{\tau}/\ell_{\Lambda})$.

Množství této energie v elementárním objemu získáme připsáním objemového elementu v plochých souřadnicích (4.10)

$$T_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^{\underline{a}}(e_{\tilde{t}})^{\underline{b}} dV \approx \frac{1}{2} \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\cosh^2 \alpha_0 + \sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta}{(\sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta + 1)^3} \sin \vartheta d\tilde{r} d\vartheta d\varphi \quad (5.18)$$

a je nezávislé na čase \check{t} , tedy v nekonečnu je hustota energie na „prostorový“ úhel parametrizovaný souřadnicemi $\check{r}, \vartheta, \varphi$ konečná.

Rozložení hustoty energie na „prostorový“ úhel v budoucím nekonečnu je na obr. 5.1. Plochy konstantní hodnoty hustoty energie tvoří toroid, jehož osa symetrie odpovídá ose, po které se pohybuje částice ($\vartheta = 0$). S větší hodnotou zrychlení se toroid natahuje ve směru kolmém na tuto osu.



Obrázek 5.1: Rozložení hustoty energie na „prostorový“ úhel v plochých kosmologických souřadnicích, v budoucím nekonečnu (na nadploše $\check{t} = 0$). Souřadnice φ je potlačena. Světlejší odstíny představují vyšší hodnoty. Plná bílá čára představuje projekci trajektorie částice N . Jednotlivé obrázky jsou vykresleny pro různé hodnoty $\tanh \alpha_0$ (nahore 0.5, vlevo dole 0, vpravo dole 0.8).

5.1.2 Sférické souřadnice

Pro kosmologické pozorovatele ve sférických souřadnicích si vyjádříme zachovávanou energii spojenou tentokrát s konformním Killingovým vektorem $\partial_{\tilde{t}}$. Opět ze (5.14), dosazením normy (5.13), plyne

$$\begin{aligned} T_{ab}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\tilde{t}})^b &= \frac{1}{2} \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{\ell_\Lambda^3 \sin \tilde{t}} \left[\frac{1}{\left((\cosh \alpha_0 - \sinh \alpha_0 \frac{\sin \tilde{r}}{\sin \tilde{t}} \cos \vartheta)^2 - 1 + \frac{\sin \tilde{r}^2}{\sin \tilde{t}^2} \right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \sinh^2 \alpha_0 \frac{\sin \tilde{r}^2}{\sin \tilde{t}^2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \tilde{t}}{\left((\cosh \alpha_0 - \sinh \alpha_0 \frac{\sin \tilde{r}}{\sin \tilde{t}} \cos \vartheta)^2 - 1 + \frac{\sin \tilde{r}^2}{\sin \tilde{t}^2} \right)^3} \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Výraz vyskytující se uvnitř závorek v obou jmenovatelích lze opět jednoduše přepsat jako $(\sinh \alpha_0 - \cosh \alpha_0 \frac{\sin \tilde{r}}{\sin \tilde{t}} \cos \vartheta)^2 + \frac{\sin \tilde{r}^2}{\sin \tilde{t}^2} \sin^2 \vartheta$ a je také vždy nezáporný. Nulový je pouze v případě, že oba členy jsou nulové a to nastává právě tehdy, když pozorovatel protíná světočáru jedné z částic (3.4), tzn. pro $(\tilde{r} = \tilde{r}_0, \pi - \tilde{r}_0; \tilde{t} = \tilde{t}_0; \vartheta = 0)$. Není překvapující, že energie v těchto průsečících diverguje.

Asymptotický rozvoj hustoty energie (5.19) v budoucím nekonečnu $\tilde{t} \rightarrow \pi$ je

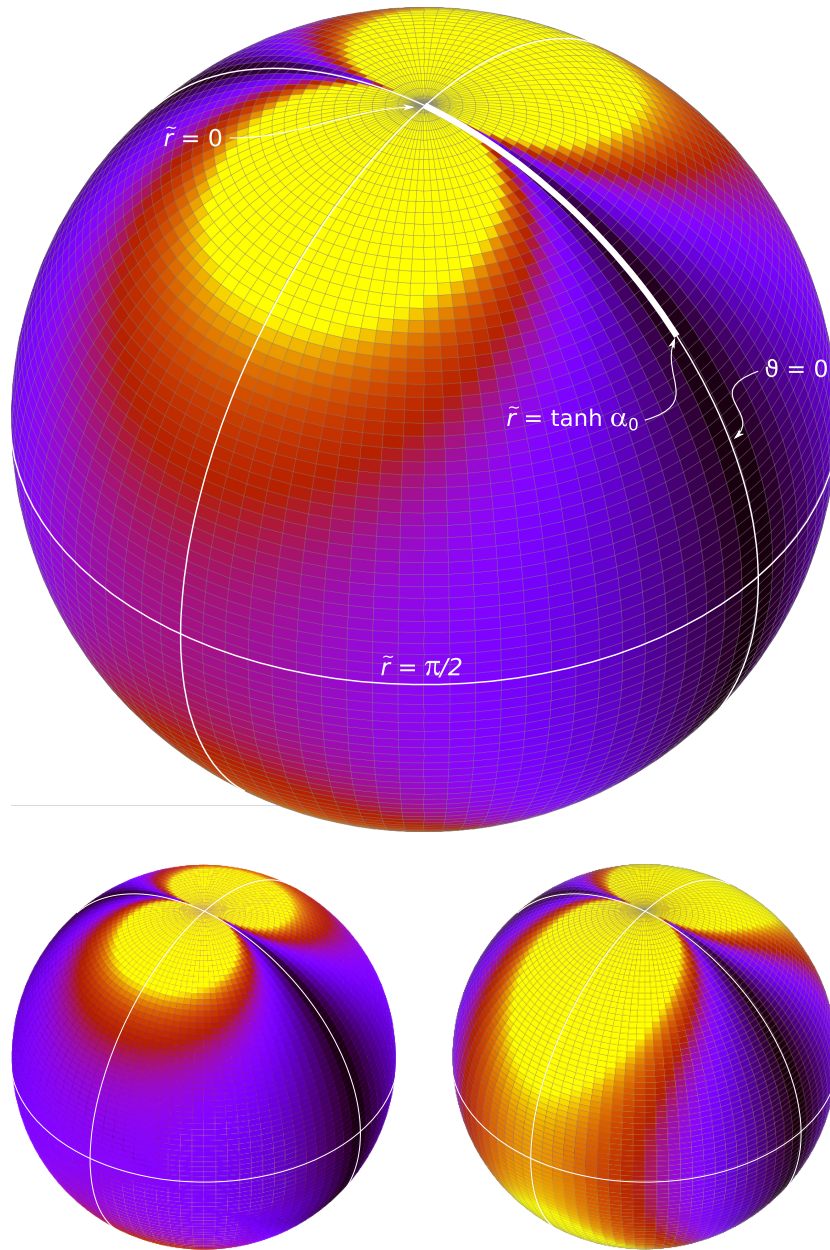
$$T_{ab}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\tilde{t}})^b \approx \frac{1}{2} \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{\ell_\Lambda^3} \frac{\sin^3 \tilde{t} \cosh^2 \alpha_0 + \sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta}{\sin^4 \tilde{r} (\sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta + 1)^3}. \quad (5.20)$$

Přepsáním do vlastního času kosmologických pozorovatelů τ (2.12), jde o rozvoj pro $\tau \rightarrow \infty$ a hustota energie se chová jako $\cosh^{-3}(\tau/\ell_\Lambda) \approx \exp(-3\tau/\ell_\Lambda)$ a je opět exponenciálně tlumena.

Přidáme formu objemu ve sférických souřadnicích (4.26) a dostáváme rozložení množství energie v elementárním objemu na nadploše konformního nekonečna

$$T_{ab}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\tilde{t}})^b dV \approx \frac{1}{2} \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{\sin^2 \tilde{r}} \frac{\cosh^2 \alpha_0 + \sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta}{(\sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta + 1)^3} \sin \vartheta d\tilde{r} d\vartheta d\varphi, \quad (5.21)$$

které je nezávislé na souřadnicovém čase \tilde{t} a je konečné. Rozložení hustoty energie na prostorový úhel v budoucím nekonečnu je na obr. 5.2. Plochy konstantní hodnoty hustoty energie tvoří, jako v případě plochých souřadnic, toroid, jehož osa symetrie odpovídá ose po které se pohybuje částice ($\vartheta = 0$). S větší hodnotou zrychlení se toroid opět natahuje ve směru kolmém na tuto osu, ale tentokrát máme dva toroidy obklopující obě částice. Rozložení hustoty energie na severní a jižní polokouli jsou symetrické.



Obrázek 5.2: Rozložení hustoty energie ve sférických kosmologických souřadnicích v časovém nekonečnu (stejná situace v budoucím, na nadploše $\tilde{t} = \pi$ i minulém nekonečnu, na nadploše $\tilde{t} = 0$). Souřadnice φ je potlačena. Světlejší odstíny představují vyšší hodnoty. Severní a jižní polokoule jsou symetrické. Silná bílá křivka představuje projekci trajektorie částice N . Rozložení hustoty energie je vykresleno pro různé hodnoty $\tanh \alpha_0$ (nahore 0.3, vlevo dole 0, vpravo dole 0.5).

5.2 Porovnání zachovávajících se energií

Mohli bychom očekávat, že obě zachovávající se energie, spojené s konformními Killingovy vektory $\partial_{\tilde{t}}$ a $\partial_{\tilde{r}}$, budou dávat v budoucím nekonečnu obdobné výsledky. Podíváme-li se na konformní diagramy s vyznačenými souřadnicovými čarami sférických i plochých souřadnic, jak vidno, prostorový řez $\tilde{t} = \pi$ odpovídá řezu $\tilde{t} = 0$. Vektory $\partial_{\tilde{t}}$ a $\partial_{\tilde{r}}$ jsou kolmé na nadplochy $\tilde{t} = \text{konst.}$ a $\tilde{r} = \text{konst.}$, takže by mohly asymptoticky koincidovat.

Skutečně tomu tak je, neboť vyjádříme-li si vektor $\partial_{\tilde{t}}$ pomocí lineární kombinace vektorů plochých souřadnic

$$\partial_{\tilde{t}} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \partial_t + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{t}} \partial_{\tilde{r}}, \quad (5.22)$$

kde koeficienty jsou rovny

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\ell_\Lambda (1 - \cos \tilde{t} \cos \tilde{r})}{(\cos \tilde{t} - \cos \tilde{r})^2} \quad (5.23)$$

a

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\ell_\Lambda \sin \tilde{t} \sin \tilde{r}}{(\cos \tilde{t} - \cos \tilde{r})^2}. \quad (5.24)$$

V limitě $\tilde{t} \rightarrow \pi$ koeficient $\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{t}}$ vymizí a vektory $\partial_{\tilde{t}}$ a $\partial_{\tilde{r}}$ se na této nadploše liší pouze škálovacím faktorem, který v této limitě dává

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tilde{t}} \rightarrow \frac{\ell_\Lambda}{1 + \cos \tilde{r}} \quad (5.25)$$

a je degenerovaný pro $\tilde{r} = \pi$.

Porovnáme-li asymptotické rozvoje hustot zachovávajících se energií v budoucím nekonečnu (5.17) a (5.20), musíme dostat stejný faktor. A opravdu platí, díky transformačním vztahům (2.19)

$$\frac{\tilde{t}^3}{\tilde{r}^4} = \frac{1 + \cos \tilde{r} \sin^3 \tilde{t}}{\ell_\Lambda \sin^4 \tilde{r}} \quad (5.26)$$

a v limitě se faktory shodují.

Divergence je způsobena tím, že hustota energie v plochých souřadnicích je nulová na celé nadploše $\tilde{t} = 0$ vyjma částice N, vzniklé na severním pólu de Sitterova prostoročasu ($\tilde{r} = 0$), kde diverguje. Částice S, vzniklá na jižním pólu se na této nadploše nachází v nekonečnu $\tilde{r} = \infty$ a z tohoto důvodu nezpůsobuje divergenci. Naopak ve sférických souřadnicích, kromě divergence na částici N, vzniklé na severním pólu ($\tilde{r} = 0$), ještě diverguje i na částici S, vzniklé na jižním pólu ($\tilde{r} = \pi$), neboť

v tomto případě je nadplocha $\tilde{t} = \pi$ uzavřený prostor a tak se tato částice na rozdíl od předchozího případu nachází v konečné oblasti, takže se projeví.

Nyní zjistíme, jak spolu souvisí objemové elementy v plochých a sférických souřadnicích v budoucím nekonečnu. K tomu potřebujeme transformační vztah mezi 1-formami $d\tilde{r}$ a $d\tilde{t}$. Nejprve si vyjádříme derivaci \tilde{r} podle \tilde{r} při konstantním \tilde{t}

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{r}} = \ell_\Lambda \frac{1 + \cos \tilde{r} \cos \tilde{t}}{(\cos \tilde{r} + \cos \tilde{t})^2}, \quad (5.27)$$

pak tedy na nadploše $\tilde{t} = \pi$

$$d\tilde{r} = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{r}} d\tilde{r} + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{t}} d\tilde{t} = \frac{\ell_\Lambda}{1 - \cos \tilde{r}} d\tilde{r}, \quad (5.28)$$

to že $\partial \tilde{r} / \partial \tilde{t} \rightarrow 0$ již víme z (5.24). Vyjdeme z objemového elementu v plochých souřadnicích, využijeme transformační vztahy mezi souřadnicemi (2.19) a mezi formami (5.28)

$$\begin{aligned} dV_{\text{pl}} &= -\frac{\ell_\Lambda^3}{\tilde{t}^3} \tilde{r}^2 \sin \vartheta d\tilde{r} \wedge d\vartheta \wedge d\varphi \\ &= \frac{\ell_\Lambda^2 (1 + \cos \tilde{r})}{\sin^3 \tilde{t}} \sin^2 \tilde{r} \sin \vartheta \frac{\ell_\Lambda}{1 - \cos \tilde{r}} d\tilde{r} \wedge d\vartheta \wedge d\varphi, \end{aligned} \quad (5.29)$$

nakonec dostáváme vztah mezi objemovými elementy v plochých a sférických souřadnicích

$$dV_{\text{pl}} = \frac{(1 + \cos \tilde{r})}{(1 - \cos \tilde{r})} dV_{\text{sf}}. \quad (5.30)$$

Zkombinujeme faktory mezi hustotami zachovávajících se energií, spojené s konformními Killingovy vektory $\partial_{\tilde{t}}$ a $\partial_{\tilde{r}}$ a mezi objemovými elementy v plochých a sférických souřadnicích. Dostáváme tak vztah, mezi elementárním množstvím energie spojeným s vektorem $\partial_{\tilde{t}}$ a elementárním množstvím energie spojeným s vektorem $\partial_{\tilde{r}}$, pro $\tilde{t} \rightarrow \pi$

$$T_{\underline{ab}} (\partial_{\tilde{t}})^{\underline{a}} (e_{\tilde{r}})^{\underline{b}} dV_{\text{pl}} = \frac{(1 + \cos \tilde{r})^2}{\ell_\Lambda (1 - \cos \tilde{r})} T_{\underline{ab}} (\partial_{\tilde{r}})^{\underline{a}} (e_{\tilde{t}})^{\underline{b}} dV_{\text{sf}}. \quad (5.31)$$

5.3 Energie uvnitř oblasti

V této části budeme zkoumat celkovou zachovávající se energii uvnitř oblasti tvaru koule se středem na částici. Využijeme zde právě souřadnice centrované na částici, zavedené v kapitole 4. V těchto souřadnicích je tato koule určena jednoduše vztahem $R = \text{konst.}$. Abychom se vyhnuli divergenci na částici, budeme uvažovat mezikouli $R \in \langle R_1, R_2 \rangle$.

5.3.1 Centrované ploché souřadnice

Přepíšeme si zachovávající se energii, spojenou s konformním Killingovým vektorem $\partial_{\tilde{t}}$, pomocí centrovaných souřadnic, které jsme zavedli v kapitole 4. Hustota energie (5.16) lze zapsat jako

$$T_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\tilde{t}})^b = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_\Lambda}{\tilde{t}} \frac{1}{Q^6} \left[Q^2 + 2\ell_\Lambda^2 \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{t}^2} \sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta \right], \quad (5.32)$$

faktor Q (3.18) se v centrovaných souřadnicích (4.4) po několika úpravách zjednoduší

$$Q^2 = \ell_\Lambda^2 \frac{R^2}{\tilde{t}^2} \cosh^2 \alpha_0 (\tanh \alpha_0 \cos \Theta + 1)^2. \quad (5.33)$$

Objemová hustota energie je nakonec v těchto souřadnicích

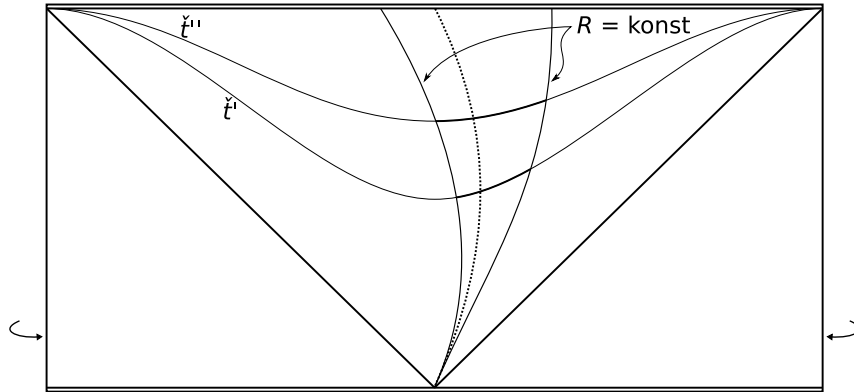
$$T_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\tilde{t}})^b = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\tilde{t}^3}{\ell_\Lambda^3 \cosh^4 \alpha_0 R^4} \times \frac{(\tanh \alpha_0 \cos \Theta + 1)^2 + 2 \tanh^2 \alpha_0 \sin^2 \Theta}{(\tanh \alpha_0 \cos \Theta + 1)^6}. \quad (5.34)$$

Připíšeme objemový element v centrovaných plochých souřadnicích (4.11) a získáme množství energie v elementárním objemu

$$T_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\tilde{t}})^b dV = \frac{1}{2} \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\sin \Theta}{\cosh^4 \alpha_0 R^2} \times \frac{(\tanh \alpha_0 \cos \Theta + 1)^2 + 2 \tanh^2 \alpha_0 \sin^2 \Theta}{(\tanh \alpha_0 \cos \Theta + 1)^6} \times (\tanh \alpha_0 \cos \Theta + 1) dR d\Theta d\varphi. \quad (5.35)$$

Členy s \tilde{t} se vykrátí, elementární množství energie tak nezávisí na čase a na každé časové nadploše je určeno pouze prostorovými souřadnicemi. Jak je vidět, použití centrovaných souřadnic nám pomohlo k separaci úhlové a radiální části, můžeme tak výraz jednoduše integrovat

$$\int T_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\tilde{t}})^b dV = \frac{e^2}{8\pi} \frac{4 \cosh^4 \alpha_0 - 1}{3} \left[\frac{1}{R} \right]_{R_1}^{R_2}. \quad (5.36)$$



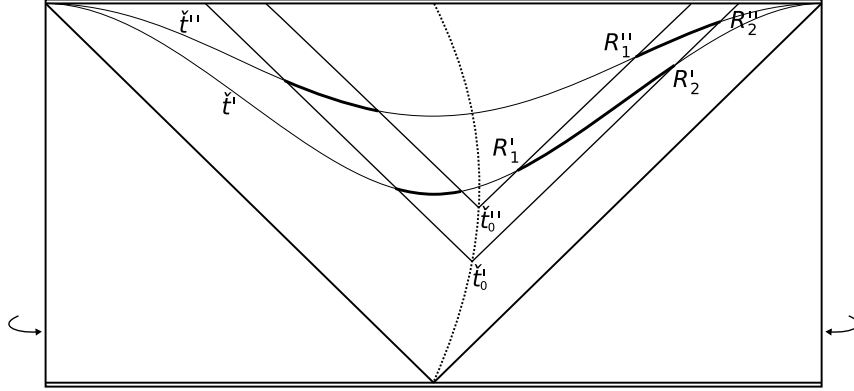
Obrázek 5.3: V případě konformně plochých kosmologických pozorovatelů je celková energie uvnitř oblasti tvaru koule $R = \text{konst.}$ na všech časových nadplochách konstantní.

Celková energie uvnitř mezikoulí závisí pouze na vnějším a vnitřním poloměru. Uvnitř koule konstantního poloměru $R = \text{konst.}$ (obr. 5.3) zůstává neměnné množství energie. Fyzikální poloměr této koule však exponenciálně roste, jeho vyjádření ve vlastním čase kosmologických pozorovatelů je $\exp(\tilde{\tau}/\ell_\Lambda)R$.

Na obr. 5.4 jsou vykresleny světelné kužely s vrcholem na částici v časech t'_0 a t''_0 . Kužely protínají prostorupodobnou nadplochu konstantního souřadnicového času a takto ohraničená oblast představuje mezikouli. Celkové energie E' , E'' a E^∞ uvnitř mezikoulí na nadplochách $\tilde{t} = \tilde{t}', \tilde{t}''$ a budoucím nekonečnu jsou po dosazení (4.5) do (5.36) rovny

$$E' = k \frac{t'_0 - t''_0}{(t' - t'_0)(t' - t''_0)}, \quad E'' = k \frac{t'_0 - t''_0}{(t'' - t'_0)(t'' - t''_0)}, \quad E^\infty = k \frac{t'_0 - t''_0}{t'_0 t''_0}, \quad (5.37)$$

kde $k = e^2(4 \cosh^4 \alpha_0 - 1)/24\pi$. Pokud by bylo pole čistě zářivé, musely by se tyto celkové energie rovnat. Jejich hodnota by odpovídala celkovému toku energie vyzářené částicí mezi okamžiky t'_0 a t''_0 . Intuice získaná v asymptoticky plochých prostoročasech říká, že celková vyzářená energie bude pouze energie E^∞ , neboť do nekonečna se dostane pouze zářivá složka, coulombická část se utlumí. V našem případě je ale možné, že z důvodu prostorupodobného charakteru nekonečna se zde vyskytuje i coulombické pole.



Obrázek 5.4: Energie vyzářená částicí mezi okamžiky t'_0 a t'_1 a její příspěvek k celkové energii v mezikouli na nadploše konstantní časové souřadnice.

5.3.2 Centrované sférické souřadnice

Stejně tak si vyjádříme konformní energii (5.19), spojenou s konformním Killinovým vektorem $\partial_{\tilde{t}}$, v centrovaných sférických souřadnicích (4.20). Tato objemová hustota energie v původních souřadnicích lze přepsat do tvaru

$$\mathbb{T}_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\tilde{t}})^b = \frac{1}{2} \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_\Lambda}{\sin \tilde{t}} \frac{1}{Q^6} \left[Q^2 + 2\ell_\Lambda^2 \frac{\sin^2 \tilde{r}}{\sin^2 \tilde{t}} \sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta \cos^2 \tilde{t} \right], \quad (5.38)$$

faktor Q (3.14) si vyjádříme v centrovaných souřadnicích (4.20) a po dlouhých úpravách se zjednoduší do tvaru

$$Q^2 = \ell_\Lambda^2 \frac{\sin^2 R}{\sin^2 \tilde{t}} \left((\cosh \alpha_0 \cos \tilde{r}_0 \cos \Theta - \sinh \alpha_0 \cos \tilde{t}_0)^2 + \sin^2 \Theta \right). \quad (5.39)$$

Nakonec je tedy hustota energie vyjádřená v centrovaných sférických souřadnicích

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\tilde{t}})^b &= \frac{1}{2} \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\sin^3 \tilde{t}}{\ell_\Lambda^3 \sin^4 R} \times \\ &\times \left[\frac{(\cosh \alpha_0 \cos \tilde{r}_0 \cos \Theta - \sinh \alpha_0 \cos \tilde{t}_0)^2}{((\cosh \alpha_0 \cos \tilde{r}_0 \cos \Theta - \sinh \alpha_0 \cos \tilde{t}_0)^2 + \sin^2 \Theta)^3} + \right. \\ &\left. + \frac{\sin^2 \Theta (1 + 2 \sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \tilde{t})}{((\cosh \alpha_0 \cos \tilde{r}_0 \cos \Theta - \sinh \alpha_0 \cos \tilde{t}_0)^2 + \sin^2 \Theta)^3} \right]. \quad (5.40) \end{aligned}$$

Může se zdát, že se nám opět, díky centrovaným souřadnicím, podařilo odseparovat úhlovou závislost od radiální, ale to je pouze zdánlivé, neboť \tilde{r}_0 a \tilde{t}_0 vyskytující se v úhlové části závisí díky (3.4) a (4.22) na R a \tilde{t} .

Přidáme objemový element vyjádřený v centrováných sférických souřadnicích (4.27) a dostáváme rozložení množství energie v elementárním objemu

$$\begin{aligned} T_{ab}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\tilde{t}})^b dV &= \frac{1}{2} \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\sin \Theta}{\sin^2 R} \left(1 - \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \cos \Theta \right) \times \\ &\times \left[\frac{(\cosh \alpha_0 \cos \tilde{r}_0 \cos \Theta - \sinh \alpha_0 \cos \tilde{t}_0)^2}{((\cosh \alpha_0 \cos \tilde{r}_0 \cos \Theta - \sinh \alpha_0 \cos \tilde{t}_0)^2 + \sin^2 \Theta)^3} + \right. \\ &\left. + \frac{\sin^2 \Theta (1 + 2 \sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \tilde{t})}{((\cosh \alpha_0 \cos \tilde{r}_0 \cos \Theta - \sinh \alpha_0 \cos \tilde{t}_0)^2 + \sin^2 \Theta)^3} \right] \times \\ &\times dR d\Theta d\varphi. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Přes úhlovou část lze integrovat a dostáváme výraz, jehož integrace přes radiální souřadnici je komplikovaná, neboť se závislost na R vyskytuje i v \tilde{t}_0 a \tilde{r}_0

$$\begin{aligned} \int T_{ab}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\tilde{t}})^b dV &= \int \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{\sin^2 R} \times \\ &\times \left[\cos^2 \tilde{t} \sinh^2 \alpha_0 \left(40 (1 - \cosh^2 \alpha_0 \cos^2 \tilde{r}_0) (1 + 2 \sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \tilde{t}_0) - 6 \right) + \right. \\ &\left. + 8 \cos \tilde{t} \sinh^2 \alpha_0 \cosh^4 \alpha_0 \cos^4 \tilde{r}_0 \left(3 + 2 \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \right) + 3 \right] dR. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Na rozdíl od předchozího případu centrováných plochých souřadnic, je celková energie uvnitř mezikoulí konstantního poloměru závislá na čase.

5.4 Toky energie

V této části se budeme zajímat o tok obou zachovávajících se energií, nejprve tok měřený kosmologickými pozorovateli v plochých a sférických souřadnicích a poté celkový tok z oblasti tvaru koule $R = \text{konst.}$ se středem na částici v centrovaných plochých i centrovaných sférických souřadnicích.

S kosmologickými pozorovateli jsou spojeny tetrády (2.18) a (2.13). Tok energie reprezentuje Poytingův vektor S (5.15), v případě konformní energie, ještě přenásobený normou odpovídajícího konformního Killingova vektoru (5.12), nebo (5.13).

5.4.1 Ploché souřadnice

V plochých souřadnicích dostáváme nenulové pouze tetrádové komponenty \check{r} a ϑ

$$\begin{aligned} S_{\check{r}} &= E^{\vartheta} B^{\varphi} - E^{\varphi} B^{\vartheta} = E^{\vartheta} B^{\varphi} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_{\Lambda}^4}{Q^6} \sinh^2 \alpha_0 \frac{\check{r}}{\check{t}} \sin^2 \vartheta, \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} S_{\vartheta} &= E^{\varphi} B^{\check{r}} - E^{\check{r}} B^{\varphi} = -E^{\check{r}} B^{\varphi} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_{\Lambda}^4}{Q^6} \left(\cosh \alpha_0 \frac{\check{r}}{\check{t}} + \sinh \alpha_0 \cos \vartheta \right) \sinh \alpha_0 \frac{\check{r}}{\check{t}} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Hustota toku zachováající se energie spojené s vektorem $\partial_{\check{t}}$ ve směru vektorů $e_{\check{r}}$ a e_{ϑ} je pak

$$T_{\underline{ab}} (\partial_{\check{t}})^{\underline{a}} (e_{\check{r}})^{\underline{b}} = \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_{\Lambda}^3 \check{r}}{\check{t}^2} \frac{\sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta}{\left((\cosh \alpha_0 + \sinh \alpha_0 \frac{\check{r}}{\check{t}} \cos \vartheta)^2 - (1 - \frac{\check{r}^2}{\check{t}^2}) \right)^3}, \quad (5.45)$$

$$T_{\underline{ab}} (\partial_{\check{t}})^{\underline{a}} (e_{\vartheta})^{\underline{b}} = \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_{\Lambda}^3 \check{r}}{\check{t}^2} \frac{(\cosh \alpha_0 \frac{\check{r}}{\check{t}} + \sinh \alpha_0 \cos \vartheta) \sinh \alpha_0 \sin \vartheta}{\left((\cosh \alpha_0 + \sinh \alpha_0 \frac{\check{r}}{\check{t}} \cos \vartheta)^2 - (1 - \frac{\check{r}^2}{\check{t}^2}) \right)^3}. \quad (5.46)$$

Oba toky vymizí v budoucím nekonečnu ($\check{t} = 0$), na ose symetrie po které se pohybují částice ($\vartheta = 0$), nebo pokud je zrychlení nulové ($\alpha_0 = 0$). Asymptotickým rozvojem těchto hustot toků energie pro $\check{t} \rightarrow 0$ dostáváme

$$T_{\underline{ab}} (\partial_{\check{t}})^{\underline{a}} (e_{\check{r}})^{\underline{b}} \approx \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_{\Lambda}^3 \check{t}^4}{\check{r}^5} \frac{\sinh^2 \alpha_0 \sin^2 \vartheta}{(\sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta + 1)^3}, \quad (5.47)$$

$$T_{\underline{ab}} (\partial_{\check{t}})^{\underline{a}} (e_{\vartheta})^{\underline{b}} \approx \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_{\Lambda}^3 \check{t}^3}{\check{r}^4} \frac{\cosh \alpha_0 \sinh \alpha_0 \sin \vartheta}{(\sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta + 1)^3}. \quad (5.48)$$

5.4.2 Sférické souřadnice

Ve sférických souřadnicích jsou nenulové opět jen komponenty \tilde{r} a ϑ Poyntingova vektoru

$$\begin{aligned} S_{\tilde{r}} &= E^{\vartheta} B^{\varphi} - E^{\varphi} B^{\vartheta} = E^{\vartheta} B^{\varphi} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_{\Lambda}^4}{Q^6} \sinh^2 \alpha_0 \frac{\sin \tilde{r}}{\tan \tilde{t}} \cos \tilde{r} \sin^2 \vartheta, \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} S_{\vartheta} &= E^{\varphi} B^{\tilde{r}} - E^{\tilde{r}} B^{\varphi} = -E^{\tilde{r}} B^{\varphi} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_{\Lambda}^4}{Q^6} \left(\cosh \alpha_0 \frac{\sin \tilde{r}}{\sin \tilde{t}} - \sinh \alpha_0 \cos \vartheta \right) \sinh \alpha_0 \frac{\sin \tilde{r}}{\tan \tilde{t}} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Hustota toku zachovávající se energie, příslušející vektoru $\partial_{\tilde{t}}$, ve směru tetradových vektorů $e_{\tilde{r}}$ a e_{ϑ} je rovna

$$\begin{aligned} T_{\underline{ab}} (\partial_{\tilde{t}})^a (e_{\tilde{r}})^b &= \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_{\Lambda}^3 \sin \tilde{r}}{\sin^2 \tilde{t}} \times \\ &\quad \times \frac{\sinh^2 \alpha_0 \cos \tilde{t} \cos \tilde{r} \sin^2 \vartheta}{\left(\left(\cosh \alpha_0 - \sinh \alpha_0 \frac{\sin \tilde{r}}{\sin \tilde{t}} \cos \vartheta \right)^2 - \left(1 - \frac{\sin \tilde{r}^2}{\sin \tilde{t}^2} \right) \right)^3}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} T_{\underline{ab}} (\partial_{\tilde{t}})^a (e_{\vartheta})^b &= \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_{\Lambda}^3 \sin \tilde{r}}{\sin^2 \tilde{t}} \left(\cosh \alpha_0 \frac{\sin \tilde{r}}{\sin \tilde{t}} - \sinh \alpha_0 \cos \vartheta \right) \times \\ &\quad \times \frac{\sinh \alpha_0 \cos \tilde{t} \sin \vartheta}{\left(\left(\cosh \alpha_0 - \sinh \alpha_0 \frac{\sin \tilde{r}}{\sin \tilde{t}} \cos \vartheta \right)^2 - \left(1 - \frac{\sin \tilde{r}^2}{\sin \tilde{t}^2} \right) \right)^3}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Toky jsou nulové v minulém a budoucím nekonečnu ($\tilde{t} = 0, \pi$), na nadploše časové symetrie ($\tilde{t} = \pi/2$), ose axiální symetrie na které leží trajektorie částic ($\vartheta = 0$) a v případě nulového zrychlení ($\alpha_0 = 0$). Asymptotické rozvoje hustot toků energie v budoucím nekonečnu jsou

$$T_{\underline{ab}} (\partial_{\tilde{t}})^a (e_{\tilde{r}})^b \approx \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_{\Lambda}^3 \sin^4 \tilde{t}}{\sin^5 \tilde{r}} \frac{\sinh^2 \alpha_0 \cos \tilde{r} \sin^2 \vartheta}{(\sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta + 1)^3}, \quad (5.53)$$

$$T_{\underline{ab}} (\partial_{\tilde{t}})^a (e_{\vartheta})^b \approx \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\ell_{\Lambda}^3 \sin^3 \tilde{t}}{\sin^4 \tilde{r}} \frac{\cosh \alpha_0 \sinh \alpha_0 \sin \vartheta}{(\sinh^2 \alpha_0 \cos^2 \vartheta + 1)^3}. \quad (5.54)$$

5.4.3 Centrované ploché souřadnice

Pro výpočet celkového toku energie z oblasti tvaru koule $R = \text{konst.}$ v centrovaných plochých souřadnicích, využijeme vyjádření jednotkového vektoru $e_R = \partial_R/|\partial_R|$, jako lineární kombinaci jednotkových vektorů $e_{\tilde{r}}$ a e_{ϑ} z (4.15). Hustota toku energie ve směru vektoru e_R je tedy kombinací hustot toků energie ve směru vektorů $e_{\tilde{r}}$ a e_{ϑ}

$$\begin{aligned}
T_{ab}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_R)^b &= \frac{1}{|\partial_R|} \left[-\frac{\ell_\Lambda}{\tilde{t}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial R} T_{ab}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\tilde{r}})^b - \frac{\ell_\Lambda \tilde{r}}{\tilde{t}} \frac{\partial \vartheta}{\partial R} T_{ab}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\vartheta})^b \right] \\
&= \frac{1}{\tilde{r} \sqrt{\tanh^2 \alpha_0 + 2 \tanh \alpha_0 \cos \Theta + 1}} \times \\
&\quad \times \frac{\ell_\Lambda}{\tilde{t}} \left[(\tanh \alpha_0 (R \cos \Theta + \tilde{r}_0) + \tilde{r}_0 \cos \Theta + R) S_{\tilde{r}} - \right. \\
&\quad \left. - (R \sin \Theta \tanh \alpha_0 - \tilde{r}_0 \sin \Theta) S_{\vartheta} \right] \\
&= \frac{e^2 \ell_\Lambda^3}{16\pi^2 \mathcal{Q}^6} \frac{R \sin^2 \Theta \sinh^2 \alpha_0}{\tilde{t}^3 \sqrt{\tanh^2 \alpha_0 + 2 \tanh \alpha_0 \cos \Theta + 1}} (\tilde{t} - \tilde{t}_0 - R) \\
&= 0. \tag{5.55}
\end{aligned}$$

Toky energie jsme přepsali pomocí Poyntingových vektorů (5.15), za ně dosadili z (5.43) a (5.44) a zaměnili ploché souřadnice za centrované. Nakonec dostáváme tok energie z oblasti $R = \text{konst.}$ identicky rovný nule na všech nadplochách $\tilde{t} = \text{konst.}$ Tento výsledek je v souladu s tím, že energie uvnitř takovéto oblasti nezávisí na čase \tilde{t} (5.36) a je tak splněn globální zákon zachování energie.

5.4.4 Centrované sférické souřadnice

Stejný postup aplikujeme na výpočet celkového toku energie ze sféry $R = \text{konst.}$ v centrovaných sférických souřadnicích. Vyjádříme si vektor e_R pomocí tetradových vektorů $e_{\tilde{r}}$ a e_{ϑ} z (4.31). Hustota toku energie ve směru e_R je pak opět dána kombinací hustot toků energie ve směrech vektorů $e_{\tilde{r}}$ a e_{ϑ} . Toky prepíšeme pomocí komponent

Poyntingova vektoru (5.49), (5.50) a provedeme záměnu souřadnic

$$\begin{aligned}
 T_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_R)^b &= \frac{1}{|\partial_R|} \left[\frac{\ell_\Lambda}{\sin \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial R} T_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_{\tilde{r}})^b + \frac{\ell_\Lambda \sin \tilde{r}}{\sin \tilde{t}} \frac{\partial \vartheta}{\partial R} T_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_\vartheta)^b \right] \\
 &= \frac{1}{\sin \tilde{r} \sqrt{\tanh^2 \alpha_0 \frac{\cos^2 \tilde{t}_0}{\cos^2 \tilde{r}_0} + 2 \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \cos \Theta + 1}} \times \\
 &\quad \times \frac{\ell_\Lambda}{\sin \tilde{t}} \left[\left(-\tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \left(\sin R \cos \Theta \cos \tilde{r}_0 + \cos R \sin \tilde{r}_0 \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \cos R \sin \tilde{r}_0 \cos \Theta + \sin R \cos \tilde{r}_0 \right) S_{\tilde{r}} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\sin R \sin \Theta \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \cos r - \sin \tilde{r}_0 \sin \Theta \right) S_\vartheta \right] \\
 &= \frac{e^2 \ell_\Lambda^3}{16\pi^2 Q^6} \frac{\sin R \sin^2 \Theta \sinh^2 \alpha_0 \cos \tilde{t}}{\sin^3 \tilde{t} \sqrt{\tanh^2 \alpha_0 \frac{\cos^2 \tilde{t}_0}{\cos^2 \tilde{r}_0} + 2 \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \cos \Theta + 1}} \times \\
 &\quad \times \left(\sin \tilde{t} \cos R \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} - \sin \tilde{t}_0 - \sin R \cos \tilde{r} \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \right). \tag{5.56}
 \end{aligned}$$

Připíšeme plošný element (4.34) a dostáváme elementární množství toku energie

$$\begin{aligned}
 T_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_R)^b dS &= \frac{e^2 \ell_\Lambda^4}{16\pi^2 Q^6} \frac{\sin^3 R \sin^3 \Theta \sinh^2 \alpha_0 \cos \tilde{t}}{\sin^4 \tilde{t} \left(\tanh^2 \alpha_0 \frac{\cos^2 \tilde{t}_0}{\cos^2 \tilde{r}_0} + 2 \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \cos \Theta + 1 \right)} \times \\
 &\quad \times \left(\sin \tilde{t} \cos R \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} - \sin \tilde{t}_0 - \sin R \cos \tilde{r} \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \right) \times \\
 &\quad \times \left(1 - \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \cos \Theta \right) d\Theta d\varphi. \tag{5.57}
 \end{aligned}$$

Asymptotický rozvoj elementárního množství toku energie v budoucím nekonečnu pro $\tilde{t} \rightarrow \pi$

$$\begin{aligned}
 T_{\underline{ab}}(\partial_{\tilde{t}})^a(e_R)^b dS &\approx \frac{e^2}{16\pi^2 \ell_\Lambda^2} \sin^2 \tilde{t} \frac{\sin^3 \Theta \sinh^2 \alpha_0}{\cosh^6 \alpha_0 \cos^6 \tilde{r}_0 \left(1 - \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \cos \Theta \right)^4} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{\left(\tanh^2 \alpha_0 \frac{\cos^2 \tilde{t}_0}{\cos^2 \tilde{r}_0} + 2 \tanh \alpha_0 \frac{\cos \tilde{t}_0}{\cos \tilde{r}_0} \cos \Theta + 1 \right)}, \tag{5.58}
 \end{aligned}$$

se chová jako $\sin^2 \tilde{t}$, ve vlastním čase kosmologických pozorovatelů pro $\tau \rightarrow \infty$ dostáváme exponenciální pokles jako $\exp(-2\tau/\ell_\Lambda)$.

5.5 Vztah lokální energie v Minkowského prostoru a konformně ploché energie v de Sitterově prostoru

Víme již, že rovnoměrně urychlená nabitá částice N , vznikající na severním pólu de Sitterova prostoru, je pomocí konformního zobrazení spojená s rovnoměrně se pohybující nabitou částicí ve „spodní“ části Minkowského prostoru, kde $\check{t} \leq 0$. Mezi metrikami obou prostoročasů, lze přecházet pouze přenásobením konformním faktorem

$$g_{\text{dS}} = \Omega^2 g_{\text{M}}, \quad \Omega = \frac{\ell_{\Lambda}}{\check{t}}. \quad (5.59)$$

Podíváme se nyní, jaký bude mít vliv konformní transformace na fyzikální veličiny. Tenzorovou veličinu, která se při konformní transformaci transformuje

$$A_{\underline{b}_1 \underline{b}_2 \dots \underline{b}_n}^{a_1 a_2 \dots a_m} \rightarrow A'_{\underline{b}_1 \underline{b}_2 \dots \underline{b}_n}^{a_1 a_2 \dots a_m} = \Omega^p A_{\underline{b}_1 \underline{b}_2 \dots \underline{b}_n}^{a_1 a_2 \dots a_m}, \quad (5.60)$$

nazýváme konformní hustotou váhy p . Začneme s ortonormální tetradou. Jednotkové tetradové vektory jsou konformní hustoty váhy -1 , formy duální tetrády jsou hustoty váhy 1

$$e_i^{\text{dS}} = \Omega^{-1} e_i^{\text{M}}, \quad (5.61)$$

$$e_{\text{dS}}^i = \Omega e_{\text{M}}^i. \quad (5.62)$$

Tenzor elektromagnetického pole F je metricky nezávislý objekt a Maxwellovy rovnice jsou konformně invariantní, pokud je F zvolen hustotou váhy nula

$$F_{\text{dS}} = F_{\text{M}}. \quad (5.63)$$

Tuto jeho vlastnost jsme již využili, právě při hledání pole rovnoměrně urychlené nabitě částice v kapitole 3. Rozklad tenzoru F pomocí tetradových složek vektorů elektrické intenzity E a magnetické indukce B má v případě konformně plochých souřadnic v de Sitterově prostoročasu i plochých souřadnic v Minkowského prostoročasu stejný tvar, ale vektory E , B a formy duální tetrády jsou různé

$$F = E \wedge e^{\check{t}} + B \cdot e^{\check{r}} \wedge e^{\check{\vartheta}} \wedge e^{\check{\varphi}}, \quad (5.64)$$

liši se příslušnou mocninou konformního faktoru, odpovídající váze p . Využitím rovnosti polí F_{dS} a F_{M} , přepsáním duální tetrády pomocí (5.62) a porovnáním levé a pravé strany

$$\begin{aligned} E_{\text{M}}^{\check{r}} e_{\text{M}}^{\check{r}} \wedge e_{\text{M}}^{\check{t}} + \dots + B_{\text{M}}^{\check{\vartheta}} e_{\text{M}}^{\check{\vartheta}} \wedge e_{\text{M}}^{\check{\varphi}} &= E_{\text{dS}}^{\check{r}} e_{\text{dS}}^{\check{r}} \wedge e_{\text{dS}}^{\check{t}} + \dots + B_{\text{dS}}^{\check{\vartheta}} e_{\text{dS}}^{\check{\vartheta}} \wedge e_{\text{dS}}^{\check{\varphi}} \\ &= E_{\text{dS}}^{\check{r}} \Omega^2 e_{\text{M}}^{\check{r}} \wedge e_{\text{M}}^{\check{t}} + \dots + B_{\text{dS}}^{\check{\vartheta}} \Omega^2 e_{\text{M}}^{\check{\vartheta}} \wedge e_{\text{M}}^{\check{\varphi}}, \end{aligned}$$

dostáváme pro tetřádové složky elektrické intenzity a magnetické indukce

$$E_{\text{dS}}^i = \Omega^{-2} E_{\text{M}}^i, \quad (5.65)$$

$$B_{\text{dS}}^i = \Omega^{-2} B_{\text{M}}^i. \quad (5.66)$$

Tenzor energie-hybnosti je konformní hustota váhy -2 , což se snadno přesvědčíme z jeho tvaru pro elektromagnetické pole (5.1)

$$\begin{aligned} T_{\underline{ab}}^{\text{dS}} &= \frac{1}{4} g_{\underline{ab}}^{\text{dS}} F_{\underline{cd}} F_{\underline{kl}} g_{\text{dS}}^{\underline{ck}} g_{\text{dS}}^{\underline{dl}} - F_{\underline{ac}} F_{\underline{bd}} g_{\text{dS}}^{\underline{cd}} \\ &= \frac{1}{4} \Omega^2 g_{\underline{ab}}^{\text{M}} F_{\underline{cd}} F_{\underline{kl}} \Omega^{-2} g_{\text{M}}^{\underline{ck}} \Omega^{-2} g_{\text{M}}^{\underline{dl}} - F_{\underline{ac}} F_{\underline{bd}} \Omega^{-2} g_{\text{M}}^{\underline{cd}} \\ &= \Omega^{-2} T_{\underline{ab}}^{\text{M}}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Dále si ukážeme, jak se projeví transformace vektorů E a B ve vztahu mezi zachovávanými se energií v de Sitterově prostoročasu, spojenou s vektorem $\partial_{\check{t}}$ a energií měřenou lokálními pozorovateli v plochých souřadnicích v Minkowského prostoročasu. Objemová hustota konformní energie v de Sitterově prostoročasu je určena vztahem (5.14)

$$T_{\underline{ab}}^{\text{dS}} (e_{\check{t}}^{\text{dS}})^{\underline{a}} (\partial_{\check{t}})^{\underline{b}} = \frac{1}{2} \Omega (E_{\text{dS}}^2 + B_{\text{dS}}^2) = \frac{1}{2} \Omega^{-3} (E_{\text{M}}^2 + B_{\text{M}}^2), \quad (5.68)$$

hustota energie v Minkowského prostoru je přímo z (5.6)

$$T_{\underline{ab}}^{\text{M}} (e_{\check{t}}^{\text{M}})^{\underline{a}} (e_{\check{t}}^{\text{M}})^{\underline{b}} = \frac{1}{2} (E_{\text{M}}^2 + B_{\text{M}}^2). \quad (5.69)$$

Transformační vztah mezi těmito hustotami energií tedy je

$$T_{\underline{ab}}^{\text{dS}} (e_{\check{t}}^{\text{dS}})^{\underline{a}} (\partial_{\check{t}})^{\underline{b}} = \Omega^{-3} T_{\underline{ab}}^{\text{M}} (e_{\check{t}}^{\text{M}})^{\underline{a}} (e_{\check{t}}^{\text{M}})^{\underline{b}}. \quad (5.70)$$

Metrická forma objemu na nadploše $\check{t} = \text{konst.}$ se transformuje jako konformní hustota váhy 3

$$dV_{\text{dS}} = e_{\text{dS}}^{\check{r}} \wedge e_{\text{dS}}^{\check{\theta}} \wedge e_{\text{dS}}^{\check{\varphi}} = \Omega^3 e_{\text{M}}^{\check{r}} \wedge e_{\text{M}}^{\check{\theta}} \wedge e_{\text{M}}^{\check{\varphi}} = \Omega^3 dV_{\text{M}}. \quad (5.71)$$

To tedy nakonec znamená, že elementární množství konformní energie elektromagnetického pole rovnoměrně urychlené částice v de Sitterově prostoročasu v plochých souřadnicích se přímo rovná elementárnímu množství energie pole rovnoměrně se pohybující nabitě částice v Minkowského prostoročasu

$$T_{\underline{ab}}^{\text{dS}} (e_{\check{t}}^{\text{dS}})^{\underline{a}} (\partial_{\check{t}})^{\underline{b}} dV_{\text{dS}} = T_{\underline{ab}}^{\text{M}} (e_{\check{t}}^{\text{M}})^{\underline{a}} (e_{\check{t}}^{\text{M}})^{\underline{b}} dV_{\text{M}}. \quad (5.72)$$

Hustota toku energie ve směru vektoru e_i^{dS} se transformuje stejně jako hustota energie (5.70), stačí nahradit vektor e_i^{dS} vektorem e_i^{M}

$$\underline{T}_{ab}^{\text{dS}} (e_i^{\text{dS}})^a (\partial_{\dot{t}})^b = \Omega^{-3} \underline{T}_{ab}^{\text{M}} (e_i^{\text{M}})^a (e_{\dot{t}}^{\text{M}})^b. \quad (5.73)$$

Protože hustota toku energie v Minkowského prostoročasu vyjádřená pomocí Poyntingova vektoru z (5.7) je

$$\underline{T}_{ab}^{\text{M}} (e_i^{\text{M}})^a (e_{\dot{t}}^{\text{M}})^b = S_i^{\text{M}} \quad (5.74)$$

a hustota toku konformní energie v de Sitterově prostoročasu vyjádřená pomocí Poyntingova vektoru z (5.15) je

$$\underline{T}_{ab}^{\text{dS}} (e_i^{\text{dS}})^a (\partial_{\dot{t}})^b = \Omega S_i^{\text{dS}}, \quad (5.75)$$

nakonec mezi Poyntingovy vektory platí

$$S_i^{\text{dS}} = \Omega^{-4} S_i^{\text{M}}. \quad (5.76)$$

Kapitola 6

Závěr

V této kapitole si shrneme získané výsledky, ke kterým jsme dospěli a pokusíme se je krátce interpretovat.

Využili jsme časové Killingovy vektory z Minkowského prostoru a Einsteinova vesmíru, které jsou díky konformním vztahům těchto prostoročasů s de Sitterovým prostoročasem jeho konformní Killingovy vektory $\partial_{\tilde{t}}$ a $\partial_{\tilde{r}}$. Orbity těchto vektorů odpovídají souřadnicovým čarám časové souřadnice plochých, respektive sférických kosmologických souřadnic. Zúžením tenzoru energie-hybnosti s těmito konformními Killingovy vektory jsme získali dvě zachovávající se energie.

Nejprve jsme zkoumali energii spojenou s vektorem $\partial_{\tilde{t}}$ měřenou kosmologickými pozorovateli v plochých kosmologických souřadnicích. Hustota této energie vykazuje divergenci pouze na částici S vzniklé na jižním pólu, neboť kromě nadplochy budoucího nekonečna, ploché souřadnice nepokrývají trajektorii částice N vzniklé na severním pólu. Asymptoticky hustota energie exponenciálně klesá jako $\exp(-3\tilde{r}/\ell_\Lambda)$, ale množství energie v elementárním objemu, v asymptotickém rozvoji, je na čase \tilde{t} nezávislé a má tedy konečnou hodnotu. Jeho rozložení na nadploše budoucího nekonečna je zobrazeno na obr. 5.1. Plochy konstantní hodnoty hustoty energie tvoří toroid, jehož osa symetrie odpovídá ose, po které se pohybuje částice.

Poté jsme se zajímali o energii spojenou s vektorem $\partial_{\tilde{r}}$ měřenou kosmologickými pozorovateli, tentokrát ve sférických kosmologických souřadnicích. Hustota energie již diverguje na obou částicích a opět se asymptoticky chová jako $\exp(-3\tau/\ell_\Lambda)$. Množství energie v elementárním objemu, v rozvoji blízko budoucího nekonečna, je opět nezávislé na čase \tilde{t} a na nadploše budoucího nekonečna má konečnou hodnotu, která je vykreslena na obr. 5.2. Plochy konstantní hodnoty hustoty energie, jako v případě plochých kosmologických souřadnic, tvoří toroid. Tentokrát však dva toroidy obklopují obě částice. Rozložení hustoty energie na severní a jižní polokouli je symetrické.

Očekávali jsme, že obě zachovávající se energie by mohli na nadploše budoucího nekonečna dávat stejné výsledky. Vztah mezi těmito energiemi odpovídá vztahu

mezi konformními Killingovy vektory ∂_t a $\partial_{\bar{t}}$ a ty, jak je patrné z konformních diagramů, jsou kolmé na nadplochu budoucího nekonečna. Zjistili jsme, že se vektory v nekonečnu liší pouze škálovacím faktorem a díky němu si nejsou rovny hustoty energie, ani množství energie v elementárních objemech.

Dále jsme využili centrované verze plochých a sférických souřadnic, zavedené v kapitole 4, k výpočtu celkové energie obsažené v oblasti tvaru koule se středem umístěným na částici. Abychom se vyhnuli divergenci na částici uvažovali jsme pouze mezikouli. V plochých souřadnicích nám centrované souřadnice pomohly k separaci a šlo tak snadno množství energie kompletně zintegrovat. Zjistili jsme, že hodnota celkové energie uvnitř mezikouli je závislá pouze na poloměrech této oblasti a zrychlení částice a je nezávislé na čase, to znamená, že uvnitř koule konstantního poloměru zůstává neměnné množství energie. Ve sférických centrovaných souřadnicích šlo integrovat pouze přes úhlovou část, pro integraci přes radiální souřadnici je výraz příliš komplikovaný a navíc v tomto případě explicitně závisí na čase. Množství energie uvnitř koule konstantního poloměru se s časem mění.

V následující podkapitole jsme se zabývali toky energie. Nejprve opět z pohledu kosmologických pozorovatelů a to toky energie spojené s konformním Killingovým vektorem ∂_t v plochých kosmologických souřadnicích a toky energie odpovídající konformnímu Killingovu vektoru $\partial_{\bar{t}}$ ve sférických kosmologických souřadnicích. V obou případech jsou nenulové pouze radiální a ϑ složky Poyntingových vektorů.

Hustota toku energie v plochých kosmologických souřadnicích je nulová v budoucím nekonečnu, na ose ve které leží trajektorie částic a v případě, že zrychlení je nulové. Hustota toku energie ve sférických kosmologických souřadnicích vymizí v budoucím a minulém nekonečnu, na ose po které se pohybují částice, pokud je nulové zrychlení a navíc na nadploše časové symetrie. Nulové toky hustoty energie v budoucím nekonečnu a ve sférických kosmologických souřadnicích také v minulém nekonečnu, můžeme chápat tak, že k rozpínání prostoru dochází tak velkou rychlostí, že již žádná energie nemůže téct.

Poté jsme opět využili centrované souřadnice a zaměřili se na celkové množství energie vyteklé z koule se středem umístěným na částici. V plochých centrovaných souřadnicích je hustota toku energie přes povrch koule, na libovolné časové nadploše, identicky rovná nule. Celkové množství energie vyteklé z této koule je tedy nulové. Ve sférických centrovaných souřadnicích již dostáváme nenulovou hustotu toku energie přes povrch koule. Asymptotický rozvoj množství energie vyteklé z elementární plochy, v budoucím nekonečnu, klesá jako $\exp(-2\tau/\ell_\Lambda)$.

Nakonec jsme se podívali na vztah mezi konformně plochou energií elektromagnetického pole páru rovnoměrně urychlených nabitých částic v de Sitterově prostoru, tedy zachovávající se energii spojenou s konformním Killingovým vektorem ∂_t a energií elektromagnetického pole rovnoměrně se pohybující nabitě částice v Minkowského prostoru. Zjistili jsme, že ačkoliv se hustoty těchto energií liší, množství těchto dvou energií v elementárním objemu se rovnají.

Skutečnost, že celková energie uvnitř oblasti tvaru mezikoulí se středem na částici v plochých souřadnicích zůstává neměnná, současně s tím, že tok energie přes hranici této oblasti je nulový, ukazuje na coulombický charakter tohoto pole. Fyzikální poloměr této oblasti exponenciálně narůstá, vyjádříme-li jej pomocí vlastního času kosmologických pozorovatelů. Pole se tedy chová jako coulombické pole pohybující se spolu s částicí v rozpínajícím se prostoru. Jedná se tedy konformně coulombovské pole, což také víme ze vztahu mezi rovnoměrně urychlenými částicemi v de Sitterově prostoru a rovnoměrně se pohybující částicí v Minkowského prostoru.

Literatura

- [1] J. Bičák a P. Krtouš: *Fields of accelerated sources: Born in de Sitter*, J. Math. Phys. **46**, 102504 (2005)
- [2] J. Bičák a P. Krtouš: *Accelerated sources in de Sitter spacetime and the insufficiency of retarded fields*, Phys. Rev. D **64**, 124020 (2001)
- [3] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis: *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973)
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler: *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973)
- [5] R. M. Wald: *General relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984)
- [6] M. Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov* (IRIS, Bratislava, 2004)
- [7] R. Penrose and W. Rindler: *Spinors and Space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1984)
- [8] I. M. Ryzhik, I. S. Gradshteyn: *Table of integrals, series and products* (Academic Press, San Diego, 2000)
- [9] H. Stephani et. al.: *Exact Solutions of Einstein's Field Equations, Second Edition* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002)