Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh

Comparing strategies when solving some types of word problems

Ondřej Kohout

Vedoucí práce:	prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Studijní program:	Specializace v pedagogice (B7507)
Studijní obor:	B M (7504R015)

2021

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh vypracoval pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

....

podpis

Rád bych poděkoval vedoucí práce prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. nejen za trpělivost, revize, cenné rady a doporučení, které mi při psaní práce velice pomohly, ale také za poskytnutí možnosti pracovat na katedře jako pomocná vědecká síla. Moc děkuji své rodině a nejbližším za veškerou podporu, pomoc a šíření optimismu, který byl po dobu mého už tak dlouhého studia potřeba.

ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá problematikou porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh. V teoretické části pojednává o pojmu concept cartoons, o typových slovních úlohách, procesu a strategiích řešení slovních úloh a o výsledcích zahraničních studií, které se porovnáváním řešitelských strategií zabývají. V praktické části práce je provedena analýza vybraných českých učebnic matematiky pro 2. stupeň základní školy včetně příslušných příruček pro učitele z hlediska přítomnosti více řešitelských strategií k jedné slovní úloze a z hlediska didaktického přístupu k typovým slovním úlohám. Jádrem práce je 15 vytvořených pracovních listů, které sestávají z concept cartoons, v nichž dva hypotetičtí žáci předkládají svá řešení stejné typové slovní úlohy. Součástí práce je i konkrétní návrh, jak takový pracovní list implementovat ve výuce, spolu s návrhem možného pokračování využití porovnávání strategií ve výuce matematiky.

KLÍČOVÁ SLOVA

typová slovní úloha, concept cartoons, strategie řešení, 2. stupeň základní školy, úlohy o pohybu, úlohy o směsích, úlohy o společné práci

ABSTRACT

The bachelor's thesis deals with the issue of comparing strategies when solving selected types of word problems. The theoretical part deals with the notion of concept cartoons, selected types of word problems, the process and strategies for solving word problems and the results of foreign studies that focus on the influence of the comparison of solving strategies in teaching mathematics. The practical part of the work includes an analysis of selected Czech textbooks of mathematics for the lower secondary school, including teacher books, focusing both on the occurrence of multiple solving strategies for the same word problem and on didactic approach to the selected types of word problems. The core of the work is 15 original worksheets, consisting of concept cartoons, in which two hypothetical students present their solutions to the same type of a word problem. This work also includes a proposal on how to implement such a worksheet in class, along with a proposal for a possible continuation of the use of comparing strategies in mathematics teaching.

KEYWORDS

word problem, concept cartoons, solving strategy, lower secondary school, word problems on distance, word problems on mixture, word problems on common work

Obsah

1 Úvod 7
2 Vymezení důležitých pojmů 9
2.1 Concept cartoons 9
2.2 Konceptuální a procedurální znalosti, procedurální flexibilita 9
2.2.1 Konceptuální znalosti 9
2.2.2 Procedurální znalosti 9
2.2.3 Procedurální flexibilita 10
2.3 Vymezení slovní úlohy 10
2.4 Typologie slovních úloh 10
2.5 Typové úlohy 11
2.5.1 Úlohy o pohybu 11
2.5.2 Úlohy o společné práci 11
2.5.3 Úlohy o směsích 11
2.6 Proces řešení slovní úlohy 12
2.7 Strategie řešení slovních úloh 13
2.8 Parametry ovlivňující obtížnost slovní úlohy 13
2.8.1 Operátor a přítomnost stavu 13
2.8.2 Slovní úlohy s antisignálem 14
3 Porovnávání řešitelských strategií 15
3.1 Proces porovnávání 15
3.2 Porovnávání dvou řešitelských strategií 16
3.3 Metodika tvorby concept cartoons s porovnáváním strategií 18
3.4 Doporučení při porovnávání strategií ve výuce 19
4 Strategie řešení úloh v českých učebnicích 20
4.1 Seznam vybraných učebnic 20
4.2 Slovní úlohy řešené alespoň dvěma strategiemi 21
4.3 Neslovní úlohy řešené alespoň dvěma strategiemi 23
4.4 Stručné komentáře ke třem vybraným sadám učebnic 24
4.5 Slovní úlohy o pohybu, společné práci a směsích 26
4.6 Shrnutí 29
5 Úlohy se dvěma žákovskými řešeními 30
5.1 Proč slovní úlohy? 30
5.2 Proč typové úlohy? 30
5.3 Pracovní listy pro žáky 31
5.4 Komentáře žákovských řešení úloh 48

5.5 Návrh na implementaci ve výuce ... 50
5.6 Návrhy otázek s některými odpověďmi ... 51
6 Závěr ... 54
Seznam literatury ... 55
Seznam použitých učebnic a příruček (knížek) pro učitele ... 58
Přílohy ... 62
Příloha A ... 62
Příloha B ... 62

1 Úvod

Slovní úlohy patří už od základní školy (dále ZŠ) k mým oblíbeným tématům v matematice, a to zejména z toho důvodu, že pro většinu z nich existuje více cest, které vedou k jejich správnému řešení. Jak na ZŠ, tak na gymnáziu jsem měl to štěstí, že po nás, žácích, nebylo učiteli vyžadováno, abychom řešili slovní úlohy pouze jedinou strategií. Málokdy se však stalo, že jsme mezi sebou jednotlivé strategie porovnávali v rámci celotřídní diskuze nebo se zabývali otázkami, která ze strategií je lepší nebo zda by šlo úlohu řešit ještě jinou cestou.

K tématu porovnávání řešitelských strategií jsem se dostal během studia na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy díky možnosti podílet se jako pomocná vědecká síla na tvorbě slovních úloh řešených dvěma hypotetickými žáky, kteří komentovali jednotlivé kroky svých řešení. Tyto úlohy byly inspirovány zahraničním výzkumem autorů K. Durkin(ové), J. R. Stara a B. Rittle-Johnson(ové), popsaném v článku (Durkin, Star a Rittle-Johnson, 2017). Při tvorbě těchto úloh jsem také měl možnost nahlédnout do řešení úloh žáků 2. stupně ZŠ, kteří se zúčastnili testování v rámci projektu GAČR, koordinovaného vedoucí mé bakalářské práce, a blíže se seznámit se strategiemi, které při řešení žáci běžně užívají, a také s problémy, s nimiž se při řešení úloh setkávají. Možnost zapojit porovnávání řešitelských strategií do výuky matematiky na 2. stupni ZŠ mne zaujala. Seznámil jsem se se zahraničními studiemi a výzkumy, které se tematikou porovnávání zabývají, a také se zastoupením prezentace více řešitelských strategií v českých učebnicích matematiky pro 2. stupeň ZŠ.

Cílem této bakalářské práce je vytvořit pracovní listy pro žáky, které budou sestávat z concept cartoons, v nichž budou hypotetičtí žáci předkládat svá řešení úlohy, a současně navrhnout, jak je implementovat ve výuce. Jako téma řešených úloh jsem zvolil typové slovní úlohy, které jsou pro velkou část žáků problematické, a to především kvůli jejich charakteru či obtížnosti představení si zadané situace (Rendl et al., 2013).

V teoretické části bakalářské práce budou vymezeny důležité pojmy, které se v práci vyskytují. Následuje shrnutí výsledků zahraničních studií, které se zabývající procesem porovnávání a jeho využitím ve výuce matematiky.

V praktické části se budu zabývat analýzou vybraných sad učebnic matematiky pro 2. stupeň ZŠ z hlediska přítomnosti více strategií řešení úloh a didaktického přístupu k typovým slovním úlohám. Součástí této části jsou obrázky řešených úloh z učebnic. Některé z nich nejsou dostatečně kvalitní, protože jsem vzhledem k nouzovému stavu neměl možnost zajít je dobře naskenovat a nenašel jsem je již naskenované (např. na webu Národní digitální knihovny – www.ndk.cz).[1] Dále budou představeny originální pracovní listy včetně komentovaných řešení žáků a návrhu na jejich implementaci ve výuce.

Práce je ukončena závěrem, který mj. obsahuje návrh možného pokračování v oblasti využití porovnávání strategií ve výuce matematiky.

Bakalářská práce byla vytvořena v rámci projektu TA ČR TL03000469 Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol.

[1] U učebnic autorů O. Odvárka a J. Kadlečka jsem přiložil dostupné kvalitní skeny řešených úloh z dřívějších vydání. Tyto úlohy se od těch v analyzovaných učebnicích liší pouze barevností. U obrázků jsou v popisku uvedeny v závorce po řadě oba autoři, ročník a díl, vydání, rok vydání a strana.

2 Vymezení důležitých pojmů

V této kapitole budou vymezeny důležité pojmy, které jsou třeba pro praktickou část práce. Ve většině případů se pro konkrétní pojmy a termíny v literatuře nachází více možností jejich vymezení. Pro potřeby práce byla vybrána pouze některá z nich.

2.1 Concept cartoons

Pod termínem *concept cartoons*[2] se obvykle rozumí kreslená situace, v níž se k nějakému nastolenému problému pomocí dialogu vyjadřuje více hypotetických osob, které sdílí své rozdílné názory (viz Příloha A). Možnost jejich využití coby učební strategie ve výuce přírodních věd se zřejmě poprvé objevila v roce 1992 v práci B. Keogh(ové) a S. Naylora. Pro výzkumné účely vytvořili sadu fyzikálních concept cartoons převážně na témata světlo, zvuk, síla a změna stavu, s nimiž v rámci celkem 149 lekcí pracovali žáci rozličných věkových kategorií. Jejich výzkum, zaměřený na efektivitu použití concept cartoons ve výuce, ukázal, že práce s nimi podporovala v žácích zvídavost a žáci se více zapojovali do diskuzí a projevovali své názory ochotněji, než bylo běžné. Celkově byla míra motivace žáků při lekcích velice vysoká (Keogh a Naylor, 1999; Naylor a Keogh, 2017).

2.2 Konceptuální a procedurální znalosti, procedurální flexibilita

V rámci pěti studií autorů K. Durkin(ové), J. R. Stara a B. Rittle-Johnson(ové) zaměřených na porovnávání řešitelských strategií (viz oddíl 3.2), z nichž ve velké míře vycházím, byly sledovány tři složky zdatnosti žáků 5. až 8. ročníku ZŠ v matematice: jejich konceptuální znalosti (‚conceptual knowledge'), procedurální znalosti (‚procedural knowledge') a procedurální flexibilita (‚procedural flexibility' nebo ‚procedural fluency'). Tyto oblasti spolu úzce souvisí.

2.2.1 Konceptuální znalosti

Autoři užívají termínu konceptuální znalosti jako synonyma *konceptuálního porozumění*, které „označuje integrované a funkční porozumění matematickým myšlenkám" (Kilpatrick, Swafford a Findel, 2001, s. 118).

Konceptuální znalosti umožňují žákovi chápat matematické pojmy a objekty, matematické operace a vztahy (Vondrová, 2019, s. 23). Například žák s konceptuálními znalostmi zlomků dokáže vysvětlit, proč v úloze na sčítání zlomků různé řešitelské strategie vedou ke stejnému výsledku.

2.2.2 Procedurální znalosti

Pod termínem procedurální znalosti rozumí autoři schopnost provádět posloupnost kroků vedoucí k vyřešení problému včetně aplikace známých postupů k řešení podobných problémů (Rittle-Johnson, Siegler a Alibali, 2001).

---

[2] Termín se jak v českých, tak v zahraničních publikacích zpravidla nepřekládá. Podrobněji viz např. práci Samkové(2016) dostupnou z https://ojs.cuni.cz/scied/article/view/254/315.

Příkladem procedurální znalosti může být například znalost sčítací metody jako postupu řešení soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Pokud ji má žák dobře osvojenou, dokáže vyřešit jakoukoli takovou soustavu.

2.2.3 Procedurální flexibilita

Termín procedurální flexibility je spojen s procedurálními a konceptuálními znalostmi a jejich aplikací při řešení konkrétních matematických problémů. Procedurální flexibilita zahrnuje dovednosti řešit problémy různými způsoby a znalosti, kdy tyto způsoby použít (Kilpatrick, Swafford a Findel, 2001, s. 118).

J. R. Star zmiňuje v souvislosti s procedurálními znalostmi tzv. *hluboké procedurální znalosti*, jež charakterizuje jako „znalosti procedur spojené s pochopením, flexibilitou a kritickým úsudkem…" (Star, 2005, s. 408). Jako příklad uvádí úlohu na řešení lineární rovnice, kde žák s hlubokou procedurální znalostí řešení rovnic může postupovat výhodnějším vytknutím, místo aby použil zdlouhavý univerzální postup řešení.

2.3 Vymezení slovní úlohy

V literatuře, jak české, tak zahraniční, se vyskytuje mnoho různých vymezení pojmu *slovní úloha*. J. Novotná uvádí:

> „Najít v rozsáhlé literatuře věnované slovním úlohám přesnou a vyčerpávající odpověď na otázku *Co je slovní úloha?* se nepodaří." (Novotná, 2000, s. 10)

V práci bude použito vymezení slovní úlohy dle F. Kuřiny:

> „Na úrovni základní školy jsou důležité tzv. slovní úlohy, v nichž je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální, společenskou či jinou tematikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky." (Kuřina, 1990, s. 61)

Kromě slovních úloh se při analýze vybraných českých učebnic matematiky (viz kapitola 4) zabývám též úlohami, které dle zmíněného vymezení nelze za slovní považovat. Takové úlohy dále nazvu úlohami *neslovními*.

2.4 Typologie slovních úloh

Slovní úloha, v souladu s tím, jak byla definována v předchozím oddílu, obsahuje vždy nějakou reálnou situaci, kontext. Chceme-li jednotlivé úlohy dělit do nějakých skupin, jednou z (častých) možností je využít právě jejich kontext. Pro účely této práce je využito dělení uvedené v (Novotná, 2000), kde jsou slovní úlohy děleny na úlohy o pohybu, o společné práci, o směsích, o obsahu a o dělení celku na části. Protože je podstatná část práce zaměřena na tři z výše zmíněných skupin, úlohy o pohybu, společné práci a směsích, bude jim věnován následující oddíl.

2.5 Typové úlohy

Úlohy o pohybu, společné práci a směsích patří k tzv. *typovým úlohám*, pro něž obecně platí, že existuje nějaká formální metoda nebo univerzální strategie jejich řešení (Vondrová, 2019, s. 64). V některých českých učebnicích matematiky pro 2. stupeň ZŠ jsou tyto úlohy od ostatních slovních úloh dokonce odděleny a řešeny pouze jediným způsobem. Důraz je tak kladen zejména na procedurální znalosti a ty konceptuální spolu s procedurální flexibilitou často zůstávají v pozadí. V následující části bude uvedeno vymezení každé z těchto typových úloh včetně zadání vlastních úloh jako názorných příkladů.

2.5.1 Úlohy o pohybu

Novotná (2000, s. 18) vymezuje úlohy o pohybu následovně:

> Za úlohu o pohybu považujeme slovní úlohu, ve které se vyskytují informace o dráze, době pohybu a rychlosti nějakého objektu ve vzájemné kombinaci, to znamená, že k správnému vyřešení takové úlohy lze smysluplně použít vzorec $s = v \cdot t$ (kde *s* je dráha, *v* průměrná rychlost a *t* doba pohybu).

Zadání takové úlohy může vypadat například takto:

> *Aleš a Boris se ráno sešli u Karlova mostu v Praze, aby si v rámci rozcvičky trochu zazávodili. Společně se postavili na jednu stranu mostu tak, že od nich byl cíl na druhé straně vzdálen přesně 500 metrů. Boris byl starší a rychlejší, a proto dal Alešovi náskok 25 sekund. Závod dopadl tak, že oba chlapci doběhli do cíle ve stejnou chvíli. Aleš tak trasu zdolal průměrnou rychlostí 4 m/s a vylepšil si svůj osobní rekord. Jakou průměrnou rychlostí běžel Boris?*

2.5.2 Úlohy o společné práci

Úlohy o společné práci vymezuje Novotná (2000, s. 18) takto:

> Úlohy o společné práci se vyznačují tím, že v nich vystupují dva subjekty (případně tři i více subjektů) různé výkonnosti, které vykonávají společně či současně stejnou práci (činnost). Výkonností zde rozumíme dobu, za kterou subjekt vykoná danou práci.

Následující úlohou na společnou práci by se mohl zabývat nejeden z žáků, který se obává špatné známky:

> *Dvacet čtyři žáků třídy 8.A právě dopsalo závěrečnou písemnou práci z matematiky. Paní učitelka slíbila, že jakmile bude vědět výsledky všech žáků, zapíše je ihned do systému, a testy začne opravovat ve 12:15. S opravou jí ale tentokrát pomáhá kolega, také učitel matematiky. Žáci ze zkušenosti s opravami čtvrtletních prací vědí, že paní učitelka stihne sama opravit v průměru čtyři práce za hodinu. Kolik času by průměrně musel učitel strávit opravou jednoho testu, aby se výsledky neobjevily v systému před 16:00?*

2.5.3 Úlohy o směsích

Poslední ze zmíněných typových úloh vymezuje Novotná (2000, s. 18) takto:

Za slovní úlohy o směsích považujeme takový typ slovních úloh, v jejichž zadání se obvykle setkáváme se smísením roztoků o různé koncentraci, se sléváním různě teplých kapalin, s přípravou slitin z kovů a směsí z různých surovin (potraviny, krmiva, …).

Z vymezení je zřejmé, že úlohy o směsích mohou mít různou povahu. Následující úloha je zaměřena na smísení roztoků:

V hospodě U Falešného piva mají v nabídce raritní pivo se třemi procenty alkoholu s výstižným názvem „Trojprocenťák“. Toto pivo je mixem piva z místního pivovaru, které obsahuje pět procent alkoholu, a perlivé vody. Kolik perlivé vody je obsaženo v po okraj naplněném půllitru „Trojprocenťáku“?

2.6 Proces řešení slovní úlohy

Úkolem řešitele slovní úlohy je odpovědět na položené otázky. Pokud je zadání úlohy spolu s otázkami jednoduché, např. „Na dvorku běhalo pět hus a pět slepic. Kolik zvířat běhalo na dvorku?”, je řešení přímočaré. Je-li ale zadání včetně položených otázek komplikovanější, bude pro nalezení správného řešení nutné nejprve „porozumět úloze“, poté „navrhnout strategii (plán řešení), strategii realizovat“ a nakonec „zkontrolovat nalezené řešení“ (Pólya, 2016, s. 6–7).

Proces řešení slovní úlohy je v literatuře rozdělován podle kognitivních aktivit žáků do několika kroků, které zpravidla vycházejí ze zmíněných čtyř bodů (Vondrová, 2019, s. 61). V práci K. Reussera (1992, s. 230–231) navazující na (Reusser, 1985) je proces řešení slovní úlohy rozdělen do pěti kroků:

I. Porozumění textu úlohy
II. Porozumění situaci úlohy, jehož součástí je tvorba tzv. (*epizodického) situačního modelu*
III. Matematizace a s ní spojená konstrukce *matematického modelu*
IV. Provedení výpočtu
V. Převedení výsledku výpočtu do slovní odpovědi

Autor dodává, že ačkoli lze jednotlivé kroky popsat odděleně, málokdy se vyskytují v přísně časové posloupnosti, a v závislosti na schopnostech řešitele a zadané úloze mohou při procesu řešení některé z nich probíhat souběžně již při čtení textu úlohy (Reusser, 1985, s. 12–13).

M. Hejný (1995, s. 386–387) v rámci řešení slovní úlohy mluví o *zmocňování se úlohy*, čímž nazývá „proces, který probíhá ve vědomí řešitele při vnímání textu slovní úlohy“. Pokud je výsledkem procesu zmocňování se úlohy porozumění (viz bod I. výše), tj. řešitel má představu o situaci úlohy, označuje ho Hejný *zmocňováním se s porozuměním*, jež následně vede k tvorbě situačního modelu. Pokud však představu nemá, nazývá Hejný (1995, s. 387) tento proces *protetickým zmocňováním se*.

2.7 Strategie řešení slovních úloh

Strategií budu v práci v souladu s (Novotná, 2000, s. 24) rozumět „řešitelovu odpověď na otázku „Jak úlohu řešit?", při níž řešitel vytváří souhrn pravidel (plán řešení) určujících způsob jeho dalšího postupu při řešení slovní úlohy".

V rámci slovních úloh lze rozlišit dva základní typy strategií řešení, které souvisí s procesem zmocňování se úlohy: strategie založené na tvorbě situačního modelu, a povrchové strategie, při nichž řešitel tento situační model netvoří a přechází rovnou k modelu matematickému (Vondrová, 2019, s. 85).

Povrchovou strategii použije řešitel, který se namísto tvorby situačního modelu rozhoduje pro matematický model na základě podobnosti úlohy se známou úlohou nebo signálních slov (Vondrová et al., 2019, s. 20). Příkladem, kdy řešitel využívá povrchovou strategii, je např. Olafovo řešení úlohy č. 10 (viz oddíl 5.3), který se rozhoduje na základě spojení *1,5krát víc*, které má funkci antisignálu (viz oddíl 2.8.2), užít operaci násobení místo dělení, které je pro správné řešení slovní úlohy nezbytné. Důvodů k použití povrchové strategie může být více (blíže viz (Vondrová et al., 2019, s. 20–22)). Strategie řešení většiny hypotetických žáků uvedených v oddílu 5.3 jsou spojené především s tvorbou situačního modelu.

2.8 Parametry ovlivňující obtížnost slovní úlohy

V rámci sledování žákovských obtíží při řešení slovních úloh proběhl na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v letech 2015–2018 s podporou projektu GAČR 16-06134s rozsáhlý výzkum s názvem *Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým pojmům*, zabývající se vlivem parametrů na obtížnost řešení slovní úlohy. Dva z parametrů, u nichž bylo výzkumně prokázáno, že jejich přítomnost negativním způsobem ovlivňuje úspěšnost řešení slovních úloh, budou v souladu s (Vondrová et al., 2019) dále stručně vymezeny.

2.8.1 Operátor a přítomnost stavu

Operátorové úlohy jsou úlohy, v nichž vystupují všechna čísla v roli operátorů. Operátory v těchto úlohách mohou mít povahu aditivní (vedou k operaci sčítání či odčítání), nebo multiplikativní (vedou k násobení či dělení). U operátorových úloh lze dále rozlišit, zda je v jejich zadání přítomen stav (číselná hodnota, ke které by žáci řešení mohli vztáhnout), či nikoli (Vondrová et al., 2019).

Zadání operátorové úlohy se stavem může být následující: *Karlovi je 6 let. Ludvík je 2krát starší než Karel a Mirek je 3krát starší než Ludvík. Kolikrát je Mirek starší než Karel?* Vynecháme-li v zadání této úlohy první větu, v níž se číslo 6 vyskytuje jako stav, dostaneme operátorovou úlohu bez stavu se stejným výsledkem: *Ludvík je 2krát starší než Karel a Mirek je 3krát starší než Ludvík. Kolikrát je Mirek starší než Karel?*

Výzkum prokázal, že nepřítomnost stavu žákům, kteří se snaží vytvořit situační model, řešení komplikuje, a to zejména na 1. stupni ZŠ. Stejně tak samotné rozlišení mezi povahou operátorů je pro některé žáky problematické (Vondrová et al., 2019).

2.8.2 Slovní úlohy s antisignálem

Signálem označují autoři (Vondrová et al., 2019, s. 261) podle Hejného (2014) „část zadání slovní úlohy, která evokuje představu určité početní operace“. Nastane-li, že je představa operace v rozporu s operací, kterou je nutné použít, hovoří autoři o *antisignálu*.

Zadání úlohy, v níž se vyskytuje antisignál, může být následující: *V pátek se v trafice prodalo 210 jízdenek, což bylo 3krát více než v sobotu. Kolik jízdenek se prodalo v trafice v sobotu*? Slova *3krát více* mají v zadání roli antisignálu, neboť mohou žáka, který užívá povrchovou strategii, svést k operaci násobení namísto dělení.

Výzkum prokázal, že úlohy s antisignálem vedou k častým problémům žáků s použitím opačné početní operace (např. Vondrová et al., 2019, s. 322).

3 Porovnávání řešitelských strategií

S procesem porovnávání se většina z nás setkává denně, nejčastěji při výběru z možných alternativ, a to ať už se rozhodujeme o tom, zda pojedeme do práce tramvají, či půjdeme pěšky, nebo třeba zda si k svačině koupíme zdravější banán či chutnější sušenku.

V této kapitole bude nejprve představen proces porovnávání spolu se zahraniční psychologickou studií, která se jeho vlivem na učení zabývala. Dále budou uvedeny studie, které se podílely na tom, že porovnávání řešitelských strategií ve výuce zařadil The Institute of Education Sciences (IES)[3] do skupiny pěti doporučení, vedoucích ke zlepšení schopností žáků 4. až 8. ročníků ZŠ řešit matematické úlohy. Nakonec budou představena doporučení, jak správně postupovat při porovnávání řešitelských strategií ve výuce.

3.1 Proces porovnávání

Pozitivní vliv procesu porovnávání na učení byl prokázán v mnoha studiích. Zkušenosti získané při porovnávání vedou k vyšší úspěšnosti při řešení úkolů, které jsou obtížné či abstraktní (Namy a Gentner, 2002, s. 6). V rámci sledování účinku porovnávání během učebního procesu jsou často citovanými např. zahraniční studie popsané v článcích (Oakes a Ribar, 2005) a (Gentner, Loewenstein a Thompson, 2003). Druhá ze zmíněných studií bude v následujících dvou odstavcích stručně představena.

Studie se zabývala otázkou, zda řízené učení pomocí analogií usnadňuje nováčkům v tématu učení a ovlivňuje jejich následné jednání. Experimentu se zúčastnilo celkem 48 studentů vysokých škol, kteří byli rozděleni do tří stejně početných skupin. První dvě skupiny se zúčastnily instruktáže, v níž byly představeny dvě různé vyjednávací strategie při uzavírání smluv, jež byly výhodnější než strategie kompromisu, spolu se dvěma konkrétními příklady k porovnání. Třetí skupině nebyla představena žádná ze strategií. Při testování dostali všichni studenti za úkol rozhodnout, jakou smlouvu je nejlepší uzavřít v situaci, v níž se student a pan domácí přeli o výši a délku nájemného a poplatku za prádlo, aby to bylo pro obě strany co možná nejvýhodnější.

Výsledky ukázaly, že většina účastníků, jimž byly představeny jiné strategie než kompromis, se rozhodla využít právě tu strategii, která byla součástí jejich instruktáže, a skupina, jíž nebyly představeny žádné strategie, zvolila, až na jeden případ, pro obě strany nevýhodnou strategii kompromisu. Výsledky experimentu potvrdily, že aktivní porovnávání příkladů umožňuje studentům

[3] IES je nezávislá nestranná statistická, výzkumná a hodnotící jednotka Ministerstva školství Spojených států amerických (US Department of Education), jejímž hlavním posláním je poskytovat vědecké důkazy, na jejichž základě se utváří vzdělávací politika, a informace ve formátech přístupným nejen učitelům, ale i širší veřejnosti. Pro více informací viz https://ies.ed.gov/.

pochopit jejich společnou strukturu a zlepšit jejich rozhodování v nových situacích (Gentner, Loewenstein a Thompson, 2003).

Příležitosti vidět různé strategie řešení stejné úlohy rozšiřují žákům jejich řešitelské dovednosti, pomáhají jim být při řešení podobných úloh více flexibilní, a navíc díky nim mohou být žáci schopni lépe řešit nové úlohy z různých oblastí (*Principles and Standards for School Mathematics*, 2000, s. 53; Silver et al., 2005, s. 297).

Problematika použití více strategií řešení úloh ve výuce byla v roce 2018[4] zařazena v praktickém průvodci pro učitele (Woodward et al., 2018) mezi pět doporučení, jejichž záměrem je zlepšit řešitelské dovednosti žáky 4. až 8 ročníku ZŠ. Jeho autoři posoudili na základě svých odborných znalostí a analýz kvalitních výzkumů, které se zabývaly danou problematikou, u každého z těchto doporučení jeho průkaznost (‚level of evidence'), jež se odvíjela od hodnocení řady parametrů (např. počtu a kvality provedených výzkumů, konzistentnosti jejich zjištění apod.). Doporučení používat různé řešitelské strategie při výuce ohodnotili autoři jako středně průkazné (‚moderate evidence'). Osm studií prokázalo pozitivní efekt v rámci konceptuálních znalostí a procedurální flexibility, ale tři dodatečné studie s žáky, kteří měli v oblasti algebry omezené nebo žádné předchozí zkušenosti, vykázaly negativní efekt na rozvoj jejich procedurálních znalostí (Woodward et al., 2018, s. 77).

U každého z pěti doporučení byly představeny tři návrhy k vhodné realizaci při výuce. V rámci této práce se zaměřím na následující návrh: „Poskytněte žákům možnost porovnávat vedle sebe na jedné stránce dvě různé strategie řešení úloh." (Woodward et al., 2018, s. 7)

3.2 Porovnávání dvou řešitelských strategií

Výzkum autorů K. Durkin(ové), J. R. Stara a B. Rittle-Johnson(ové), zahrnující celkem pět studií uskutečněných v letech 2007–2012, naznačil, že porovnávání dvou řešitelských strategií má pozitivní vliv na rozvoj procedurální flexibility a v některých situacích i konceptuálních a procedurálních znalostí (Durkin, Star a Rittle-Johnson, 2017). Až na jednu studii byly všechny zaměřeny na algebraické úlohy, konkrétně lineární rovnice, k jejichž vyřešení je zapotřebí provést více kroků.

Všechny studie měly společný design. Na začátku obdrželi žáci vstupní test, poté následovala několikadenní intervence, která nahrazovala vyučovací hodiny, a nakonec proběhl závěrečný test. Prvních tří studií se zúčastnili žáci, kteří měli o dané problematice dostatečné povědomí a zkušenosti.

První studie se zúčastnilo celkem 70 žáků 7. ročníku ZŠ ze čtyř škol, kteří byli v rámci své třídy náhodně rozděleni do dvojic. Žáci ve dvojicích byli rozděleni do dvou skupin: porovnávací (‚compare') a sekvenční (‚sequential'). Žáci z porovnávací skupiny obdrželi do dvojice 12 úloh řešených dvěma strategiemi s úkolem obě tyto strategie společně porovnat. Žáci sekvenční skupiny naopak do dvojice obdrželi 12 stránek, kde na jedné straně byla úloha řešena jednou strategií a na druhé straně byla

[4] Poprvé tam byla zařazena již v roce 2012.

podobná úloha řešena jinou strategií. Na konci každé stránky byly uvedeny otázky, na které měli žáci odpovědět. V průběhu intervence obdrželi žáci i další úlohy k procvičování a učitel provedl několik krátkých výkladů. Po intervenci následoval závěrečný test, který obsahoval 20 úloh zaměřených na procedurální a konceptuální znalosti a procedurální flexibilitu. Obdobný test byl použit i před intervencí. Výsledky studie ukázaly, že žáci porovnávací skupiny dosáhli lepších výsledků v oblasti procedurálních znalostí a flexibility a v oblasti konceptuálních znalostí nebyl mezi skupinami výrazný rozdíl (Rittle-Johnson a Star, 2007).

Druhé studie, která měla stejný design jako první studie, ale jejím tématem bylo odhadování výsledku násobení dvou jedno-, dvou- nebo trojciferných čísel, se zúčastnilo 157 žáků 5. a 6. ročníku ZŠ ze dvou škol. Žákům byly v řešených úlohách představeny tři strategie odhadů: zaokrouhlení pouze jednoho činitele (‚round one‘), obou činitelů (‚round both‘) a tzv. *oříznutí* (‚trunc‘) neboli ignorování jednotek u obou činitelů a následné vynásobení desítek s připsáním dvou nul. Za optimální strategii pro konkrétní úlohu byla považována ta, jejíž řešení se nejvíce přiblížilo správnému výsledku. Výsledky ukázaly, že žáci z porovnávací skupiny, jimž byly předloženy současně dvě různé strategie, dosáhli lepších výsledků v oblasti procedurální flexibility než žáci ze sekvenční skupiny, jimž byla předložena nejprve jedna a pak teprve druhá strategie. V oblasti konceptuálních a procedurálních znalostí nebyl mezi skupinami rozdíl (Star a Rittle-Johnson, 2009).

Ve třetí studii, jíž se zúčastnilo 162 žáků 7. a 8. ročníku ZŠ, byli žáci rozděleni do tří skupin. První skupina porovnávala dvě strategie řešení stejné úlohy, druhá dvě různé úlohy řešené stejnou strategií a třetí dvě obdobné úlohy řešené stejnou strategií. Řešitelské strategie byly uvedeny vždy vedle sebe na jedné stránce. Žáci opět pracovali ve dvojicích a měli za úkol strategie porovnat a odpovědět na položené otázky. Studie ukázala, že efektivita porovnávání nebyla u všech třech skupin stejná. Nejlepších výsledků v rozvoji konceptuálních znalostí a procedurální flexibility dosáhli žáci z první skupiny neboli ti, kteří opět porovnávali dvě strategie stejné úlohy (Rittle-Johnson a Star, 2009).

Poslední ze studií se zabývala otázkou důležitosti předchozích znalostí při porovnávání dvou strategií. Zúčastnilo se jí celkem 236 žáků 7. a 8. ročníku ZŠ, z nichž pouhých 20 % bylo schopno ve vstupním testu správně vyřešit alespoň jednu z rovnic. Žáci byli po dvojicích rozděleni do tří skupin, kde první dvě skupiny byly identické s těmi ze třetí studie a třetí skupina byla sekvenční. Podle předpokladu se žáci bez předchozích znalostí naučili z porovnávání dvou strategií stejné úlohy nebo dvou různých řešených stejnou strategií méně než žáci, kteří pracovali sekvenčně (Rittle-Johnson, Star a Durkin, 2009).

V těchto studiích se zejména ukázalo, že žáci těží z porovnávání úloh dvou strategií nejvíce za předpokladu, že jsou alespoň s jednou řešitelskou strategií (typicky konvenční) seznámeni předem (Rittle-Johnson a Star, 2009) a v dané problematice nejsou nováčky (Rittle-Johnson, Star a Durkin, 2009). Při porovnávání dvou strategií žáci většinu času věnovali diskuzi nad jednotlivými kroky řešení a jejich účinností (Rittle-Johnson, Star a Durkin, 2009, s. 847).

3.3 Metodika tvorby concept cartoons s porovnáváním strategií

V článku z roku 2017 autoři popisují studii, která se zakládala na jejich pěti předchozích studiích. Spolu s výzkumným týmem, učiteli a matematiky vytvořili pro učitele materiál s cílem podpořit porovnávání řešitelských strategií ve výuce. Součástí tohoto materiálu bylo 141 algebraických úloh, zpracovaných tak, že vedle sebe na jedné stránce byly formou concept cartoons představeny dva způsoby řešení dvou hypotetických žáků, kteří své kroky komentovali (‚worked example pair – WEP‘)[5]. Takové řešené úlohy (nejen algebraické) dále nazvu *úlohami se dvěma žákovskými řešeními*. Představená řešení úloh byla doplněna otázkami, na něž měli žáci odpovídat (viz Příloha B). V porovnávání formou concept cartoons se záměrně používají úlohy, s nimiž mají žáci běžně obtíže, a řešitelské strategie zahrnující chyby, kterých se při jejich řešení žáci dopouští.

Úlohy se dvěma žákovskými řešeními autoři rozdělili do čtyř typů v závislosti na použitých strategiích a oblasti matematické zdatnosti, kterou mohou rozvíjet. Pro mou práci jsou podstatné první tři typy:

1) *Která je lepší?* Úloha je řešena dvěma různými správnými strategiemi. Žáci si jejich porovnáváním uvědomují, kterou ze strategií je pro danou úlohu vhodnější použít, což může vést k rozvoji procedurální flexibility.
2) *Proč to funguje?* Úloha je opět řešena dvěma různými strategiemi. Při porovnávání se žáci učí zdůvodnit, proč je možné obě strategie použít, což může vést k rozvoji konceptuálních znalostí.
3) *Která je správná?* Úloha je řešena jednou správnou a jednou špatnou strategií. Porovnávání žákům pomáhá vyhnout se častým chybám při řešení úloh a může rozvíjet jejich konceptuální a procedurální znalosti (Durkin, Star a Rittle-Johnson, 2017).

Po vytvoření materiálu autoři uskutečnili studii v délce jednoho roku, jejímž cílem bylo zhodnotit jeho účinnost. Celé studie se zúčastnilo 76 učitelů, kteří měli během celého školního roku ve své výuce vytvořené úlohy se dvěma žákovskými řešeními používat. Ukázalo se však, že učitelé používali úlohy ve výuce méně často, než bylo autory požadováno, což mělo zásadní vliv na to, že ve výsledcích závěrečných testů žáků, kteří s úlohami pracovali, a žáků, kteří s nimi nepracovali, nebyl zásadní rozdíl.

[5] Některé z těchto úloh včetně návodů, jak s nimi pracovat, a konkrétních postupů, jak zapojit do výuky porovnávání řešitelských strategií, jsou dostupné na webových stránkách https://www.compareanddiscuss.com/.

3.4 Doporučení při porovnávání strategií ve výuce

Autoři K. Durkin(ová), J. R. Star a B. Rittle-Johnson(ová) na základě svých výzkumů navrhli čtyři doporučení, kterých by se učitelé při využívání porovnávání řešitelských strategií ve výuce měli držet.

Používejte úlohy často a předtím žáky seznamte se strategií jejich řešení.

Studie ukázaly, že čím častěji učitelé porovnávání využívali, tím lepších výsledků v procedurálních znalostech na konci školního roku jejich žáci dosáhli. Pro efektivní práci s porovnáváním je vždy důležité, aby byli žáci předem seznámeni s alespoň jednou řešitelskou strategií a měli dostatečné znalosti na to, aby pochopili strategie k porovnávání, protože porovnávat vedle sebe dvě neznámé strategie by mohlo být pro žáky až frustrující (Durkin, Star a Rittle-Johnson, 2017).

Volte téma řešených úloh s ohledem na cíl výuky.

Při volbě typů úloh se dvěma žákovskými řešeními k porovnávání by učitelé měli brát ohled na cíl výuky. Například pokud se již žáci dostatečně seznámili s více strategiemi řešení úloh, může být vhodné použít typ úlohy *Která je správná?*, jejímž cílem je, aby se žáci vyhnuli častým chybám nebo byli více pozorní při čtení zadání úlohy. Podobně, znají-li žáci univerzální strategii, potom má smysl použít typ úlohy *Která je lepší?*, protože se v ní žáci seznámí se strategiemi, které mohou být účinnější.

Předkládejte řešitelské strategie pro porovnání vedle sebe a pokládejte žákům doplňující otázky.

Je podstatné, aby byly strategie prezentovány vedle sebe, protože při jejich porovnávání si žáci nejlépe uvědomují důležité strukturální aspekty neboli to, v čem jsou strategie podobné a v čem se naopak liší. Při porovnávání by též měli žáci odpovídat na doplňující otázky týkající se obou řešitelských strategií, jako např. *Která ze strategií je správná?*, *Ve kterém kroku nastala chyba?*.

Diskutujte řešení úloh v rámci celé třídy.

Diskuze spojená s vysvětlováním jednotlivých strategií žáky se ukázala jako důležitá pro rozvoj učení v matematice, neboť vzájemným vysvětlováním si žáci upevňují své dosavadní znalosti a učí se nové přístupy ostatních žáků. Učitel by kromě otázek na porovnání strategií měl do výuky zapojit i otázky jako např. *Co jste se z tohoto porovnávání naučili?*. Diskuze nad takovými otázkami vede žáky k rozvoji procedurální flexibility (Durkin, Star a Rittle-Johnson, 2017).

4 Strategie řešení úloh v českých učebnicích

Učebnice je jednou z hlavních opor jak žáků, tak učitelů matematiky na 2. stupni ZŠ. Lze předpokládat, že to, jakou učebnici učitel ve své výuce používá, má určitý vliv na jeho pojetí výuky a volbu strategií řešení úloh. U některých učitelů, kteří se zúčastnili výzkumu kritických míst v matematice, se při řešení slovních úloh objevily strategie a postupy, jež v jisté míře korespondovaly s učebnicemi (a příručkami), které ve výuce užívali[6]. Velká část těchto učitelů též zmínila, že učebnice obsahují malé množství úloh na procvičování (Rendl et al., 2013). Cílem této kapitoly je zmapovat výskyt úloh řešených alespoň dvěma různými strategiemi ve vybraných českých učebnicích matematiky pro 2. stupeň ZŠ.

V úvodu kapitoly bude uveden seznam vybraných učebnic, poté tabulky s počty výskytů sledovaných úloh pro jednotlivé sady a ročníky včetně ukázek a krátkých komentářů. Bude následovat komentář tří sad učebnic, které obsahují nejvíce úloh řešených alespoň dvěma strategiemi, rozbor, jak jsou v učebnicicích obvykle prezentovány typové úlohy, a nakonec shrnutí.

4.1 Seznam vybraných učebnic

Pro analýzu jsem vybral celkem sedm řad učebnic, které podle mých zkušeností patří mezi nejčastěji používané a jimž byly až na některé výjimky uděleny schvalovací doložky od Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky pro školní rok 2019/2020[7] a z velké části i pro školní rok následující. Tyto sady se spolu s výčtem jednotlivých učebnic nacházejí v tab. 1, kde jsou kurzívou vyznačeny právě ty učebnice, jichž se zmíněná výjimka týká. Ovšem to, že některé z vybraných učebnic nemají ve svém vydání platnou schvalovací doložku, není důvodem k jejich neužívání ve výuce, neboť dle 2. odstavce 27. paragrafu Školského zákona (č. 561/2004 Sb):

> Školy mohou při výuce kromě učebnic a učebních textů uvedených v seznamu podle odstavce 1 používat i další učebnice a učební texty, pokud nejsou v rozporu s cíli vzdělávání stanovenými tímto zákonem, rámcovými vzdělávacími programy nebo právními předpisy a pokud svou strukturou a obsahem vyhovují pedagogickým a didaktickým zásadám vzdělávání. O použití učebnic a učebních textů podle věty první rozhoduje ředitel školy, který zodpovídá za splnění uvedených podmínek.

Pro větší přehlednost bude v následujících oddílech jako identifikátor jednotlivých sad použito jméno autora a rok vydání celé sady (např. Binterová et al. (2007–2010)) tak, jak jsou uvedeny v prvním sloupci tab. 1. Má-li učebnice pro konkrétní ročník více dílů, pak jsou u tohoto ročníku sloučeny.

[6] U typových úloh učitelé preferovali, ale nikoli vyžadovali zejména strategie přehledného zápisu do tabulky a také nákresy (Rendl et al., 2013). Více než polovina zúčastněných učitelů 2. stupně ZŠ užívala ve výuce učebnice Odvárko a Kadleček(2010–2014), v jejichž příručkách (knížkách) pro učitele je u úloh o pohybu doporučováno vytvoření schématu a u úloh o směsích doporučen zejména zápis do tabulky.

[7] Dostupné online z https://www.msmt.cz/file/50954/ a https://www.msmt.cz/file/48970/.

Vzhledem k charakteru[8] učebnic Hejného et al. (2015–2018) byly všechny učebnice (díly A až F) sloučeny do jediné skupiny pokrývající kompletně 2. stupeň ZŠ.

Tab. 1: Seznam vybraných učebnic

autor (rok); nakladatelství	název	vydání	platnost doložky	rok vydání
Rosecká et al. (1997–2000); Nakladatelství Nová škola Brno, s.r.o.	Aritmetika 6, Geometrie 6	1.	14.07.2021	1997
	Aritmetika 7, Geometrie 7	1.	14.07.2021	1998
	Algebra 8, Geometrie 8	1.	14.07.2021	1999
	Algebra 9, Geometrie 9	1.	14.07.2021	2000
Binterová et al. (2007–2010); Fraus	*Matematika 6 - Aritmetika, Geometrie*	*1.*	*12.06.2019*	*2007*
	Matematika 7 - Aritmetika, Geometrie	*1.*	*30.06.2020*	*2008*
	Matematika 8 - Aritmetika, Geometrie	1.	13.07.2021	2009
	Matematika 9 - Algebra, Geometrie	1.	09.05.2022	2010
Hejný et al. (2015–2018); H-mat, o.p.s.	Matematika A	1.	17.09.2021	2015
	Matematika B	1.	17.09.2021	2015
	Matematika C	1.	21.07.2022	2016
	Matematika D	1.	01.02.2023	2017
	Matematika E	1.	13.11.2023	2017
	Matematika F	1.	25.09.2024	2018
Molnár et al. (1998–2001); Prodos	Matematika 6	1.	03.03.2022	1998
	Matematika 7	1.	07.03.2023	1999
	Matematika 8	1.	04.04.2023	2000
	Matematika 9	1.	12.12.2024	2001
Šarounová et al. (1996–2000); Prometheus	*Matematika 6, 1. a 2. díl*	*1.*	*04.07.2009*	*1996–1997*
	Matematika 7, 1. a 2. díl	1.	07.05.2021	1997–1998
	Matematika 8, 1. a 2. díl	1.	11.03.2022	1998
	Matematika 9, 1. a 2. díl	1.	07.02.2023	1999–2000
Odvárko a Kadleček (2010–2014); Prometheus	Matematika pro 6. ročník ZŠ (1., 2. a 3. díl)	3. přep.	11.03.2022	2010
	Matematika pro 7. ročník ZŠ (1., 2. a 3. díl)	3. přep.	07.02.2023	2011
	Matematika pro 8. ročník ZŠ (1., 2. a 3. díl)	2., 3. přep.	22.01.2024	2012–2013
	Matematika pro 9. ročník ZŠ (1., 2. a 3. díl)	3. přep.	12.03.2025	2013–2014
Půlpán et al. (2007–2010); SPN, a.s.	*Matematika pro 6. ročník ZŠ - Aritmetika*	*1.*	*25.07.2019*	*2007*
	Matematika pro 6. ročník ZŠ - Geometrie	*1.*	*25.07.2019*	*2007*
	Matematika pro 7. ročník ZŠ - Aritmetika	*1.*	*30.06.2020*	*2008*
	Matematika pro 7. ročník ZŠ - Geometrie	*1.*	*30.06.2020*	*2008*
	Matematika pro 8. ročník ZŠ - Algebra	1.	18.11.2021	2009
	Matematika pro 8. ročník ZŠ - Geometrie	1.	18.11.2021	2009
	Matematika pro 9. ročník ZŠ - Algebra	1.	23.03.2022	2010
	Matematika pro 9. ročník ZŠ - Geometrie	1.	23.03.2022	2010

4.2 Slovní úlohy řešené alespoň dvěma strategiemi

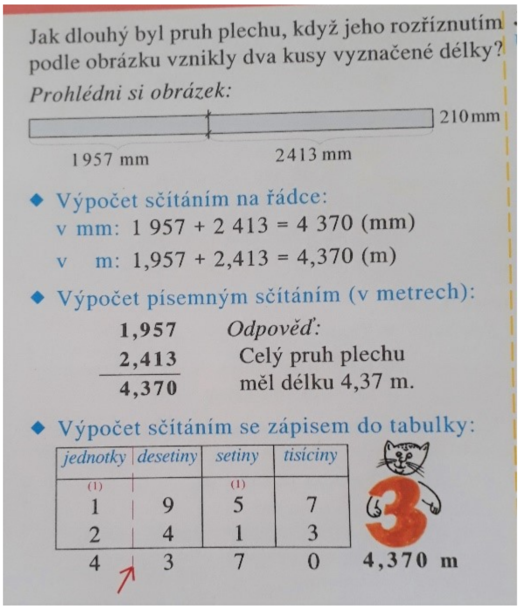
Přestože se ve většině vybraných sadách učebnic vyskytují slovní úlohy ve velkém počtu, jen malá část z nich je řešena. A pokud už je daná slovní úloha řešena, pak většinou pouze jedním způsobem. Tab. 2 ukazuje, kolik slovních úloh je v jednotlivých sadách řešeno alespoň dvěma strategiemi. Více strategií řešení se objevilo zejména v tématech desetinná čísla (viz obr. 1), přímá úměrnost (trojčlenka) (viz obr. 2) a finanční matematika. To, že některé sady učebnic obsahují malé množství úloh řešených alespoň dvěma strategiemi, však neznamená, že by pro výuku založenou na porovnávání řešitelských

[8] Učebnice Hejný et al.(2015–2018) obsahují záměrně neřešené úlohy, neboť „klíčovým cílem [autory] navrhované výuky je to, aby žáci řešením úloh z učebnice a vzájemnou diskuzí sami odhalili převážnou většinu matematických myšlenek“ (Hejný et al., 2017a, s. 5).

strategií nebyly vhodné. Pokud ale učitel ve své výuce nepodněcuje žáky k tomu, aby vymýšleli vlastní strategie nebo mezi sebou strategie porovnávali, může být jediné uvedené řešení v učebnici pro žáka, který mu neporozumí, stresující.

Tab. 2: Počty slovních úloh řešených alespoň dvěma strategiemi

sada učebnic	ročník ZŠ				celkem
	6.	7.	8.	9.	
Binterová et al.(2007–2010)	0	1	3	1	5
Molnár et al.(1998–2001)	0	2	0	3	5
Odvárko a Kadleček(2010–2014)	1	3	2	2	8
Půlpán et al.(2007–2010)	4	5	2	7	18
Rosecká et al.(1997–2000)	7	3	2	5	17
Šarounová et al.(1996–2000)	8	9	3	1	21
Hejný et al.(2015–2018)				1	1


Jak dlouhý byl pruh plechu, když jeho rozříznutím podle obrázku vznikly dva kusy vyznačené délky?

Prohlédni si obrázek:

210 mm

1957 mm   2413 mm

◆ Výpočet sčítáním na řádce:

v mm: 1 957 + 2 413 = 4 370 (mm)

v m: 1,957 + 2,413 = 4,370 (m)

◆ Výpočet písemným sčítáním (v metrech):

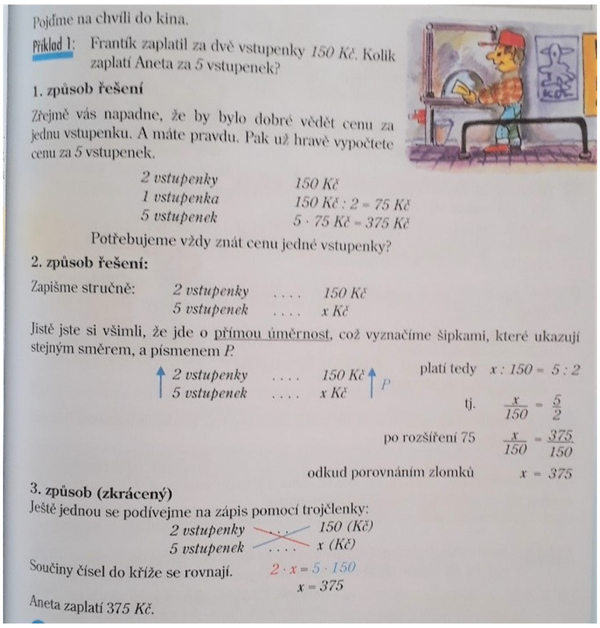
1,957	*Odpověď:*
2,413	Celý pruh plechu
4,370	měl délku 4,37 m.

◆ Výpočet sčítáním se zápisem do tabulky:

jednotky	*desetiny*	*setiny*	*tisíciny*
(1)		(1)	
1	9	5	7
2	4	1	3
4	3	7	0

4,370 m

Obr. 1: Tři různé strategie sčítání dvou desetinných čísel (Rosecká a Čuhajová, 1997, s. 32)


Pojďme na chvíli do kina.

Příklad 1: Františk zaplatil za dvě vstupenky *150 Kč*. Kolik zaplatí Aneta za *5* vstupenek?

1. způsob řešení

Zřejmě vás napadne, že by bylo dobré vědět cenu za jednu vstupenku. A máte pravdu. Pak už hravě vypočtete cenu za *5* vstupenek.

2 vstupenky *150 Kč*
1 vstupenka *150 Kč : 2 = 75 Kč*
5 vstupenek *5 · 75 Kč = 375 Kč*

Potřebujeme vždy znát cenu jedné vstupenky?

2. způsob řešení:

Zapišme stručně: *2 vstupenky* .... *150 Kč*
5 vstupenek .... *x Kč*

Jistě jste si všimli, že jde o přímou úměrnost, což vyznačíme šipkami, které ukazují stejným směrem, a písmenem *P*.

2 vstupenky .... *150 Kč* *P*
5 vstupenek .... *x Kč*

platí tedy $x : 150 = 5 : 2$

tj. $\frac{x}{150} = \frac{5}{2}$

po rozšíření 75 $\frac{x}{150} = \frac{375}{150}$

odkud porovnáním zlomků $x = 375$

3. způsob (zkrácený)

Ještě jednou se podívejme na zápis pomocí trojčlenky:

2 vstupenky .... *150 (Kč)*
5 vstupenek .... *x (Kč)*

Součiny čísel do kříže se rovnají. $2 \cdot x = 5 \cdot 150$
$x = 375$

Aneta zaplatí *375 Kč*.

Obr. 2: Tři způsoby řešení úlohy na přímou úměrnost (Molnár et al., 1999b, s. 95)

Dodejme, že další velkou oporou pro učitele jsou též příručky k učebnicím. Z vybraných sad učebnic existují příručky pro učitele ke čtyřem sadám, a to k Binterová et al. (2007–2010), Molnár et al. (1998–2001), Odvárko a Kadleček (2010–2014)[9] a Hejný et al. (2015–2018). Všechny tyto příručky jsem měl možnost projít. Následující výňatky z příruček dokladují, že více řešitelských strategií je autory vítáno:

„Vedeme žáky k vyhledávání různých řešení." (Molnár, 1998a, s. 94)

„Nebraňte dětem počítat tyto typy úloh úsudkem a zpaměti." (Molnár, 2000a, s. 35)

„Žákům by mělo být umožněno, aby navrhovali a realizovali různé metody řešení." (Odvárko a Kadleček, 2001, s. 40)

[9] Byly mi k dispozici pouze příručky z let 1998–2001. Předpokládám však, že se postoj autorů k řešení více způsoby nezměnil.

„…. doporučujeme poskytnout žákům co nejvíce prostoru pro jejich vlastní nápady a návrhy na postupy řešení.“ (Odvárko a Kadleček, 2001, s. 34)

„Je dobře, když učitel činnost pouze organizuje, vyzývá žáky, aby předkládali různé návrhy, a moderuje jejich diskusi.“ (Hejný et al., 2015c, s. 10)

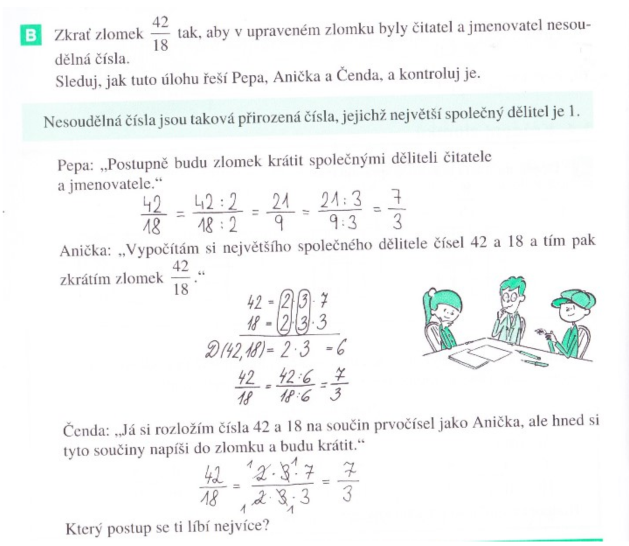
„Sledovat žáky při vysvětlování originálního způsobu řešení, mít při naslouchání diskuzím možnost pochopit, jak žáci o matematických pojmech uvažují, …, to všechno může být radostí a odměnou pro učitele…“ (Hejný et al., 2015c, s. 10)

4.3 Neslovní úlohy řešené alespoň dvěma strategiemi

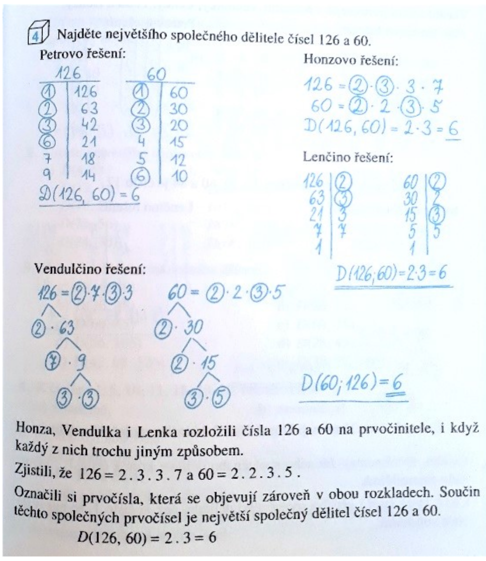
Počet neslovních úloh řešených alespoň dvěma strategiemi se oproti slovním úlohám ve vybraných českých učebnicích ve většině případů ještě snížil (viz tab. 2 a tab. 3). Více strategií řešení se objevilo zejména v tématech zlomky (viz obr. 3), dělitelnost (viz obr. 4) a řešení soustav rovnic.

Tab. 3: Počty neslovních úloh řešených alespoň dvěma strategiemi

sada učebnic	ročník ZŠ				celkem
	6.	7.	8.	9.	
Binterová et al. (2007–2010)	0	0	2	1	3
Molnár et al. (1998–2001)	0	1	1	0	2
Odvárko a Kadleček (2010–2014)	2	6	1	3	12
Půlpán et al. (2007–2010)	4	0	1	0	5
Rosecká et al. (1997–2000)	1	1	1	0	3
Šarounová et al. (1996–2000)	9	9	10	6	34
Hejný et al. (2015–2018)				1	1



Obr. 3: Tři různá žákovská řešení úlohy na krácení zlomků (Odvárko a Kadleček, 7(1), dotisk 2. vydání, 2007, s. 12)



Obr. 4: Čtyři různé žákovské strategie hledání největšího společného dělitele (Šarounová et al., 1997b, s. 75)

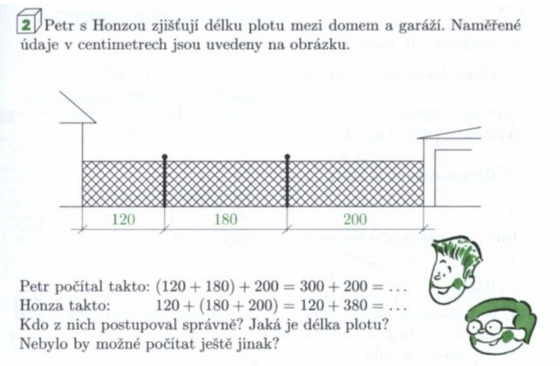
4.4 Stručné komentáře ke třem vybraným sadám učebnic

Ze zkoumaných sad učebnic jsem vybral tři, které obsahují nejvíce úloh řešených alespoň dvěma strategiemi a kromě toho splňují tyto body:

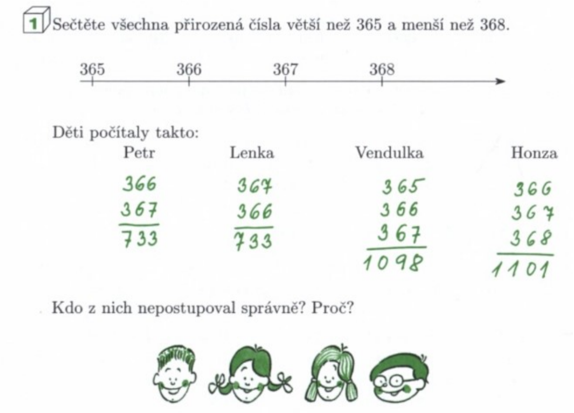
- Jednotlivé strategie jsou prezentovány vedle sebe na jedné stránce.
- Pod některými řešenými úlohami jsou kladeny dodatečné otázky.
- Některá řešení úloh jsou komentována.

Šarounová et al. (1996–2000)

Tato sada učebnic obsahuje celkem 55 úloh řešených alespoň dvěma strategiemi. Úlohy řeší a komentují většinou dva ze čtyř fiktivních žáků, kteří prostupují napříč celou sadou učebnic. V některých řešených úlohách jsou kladeny doplňující otázky (viz obr. 5) a některá z řešení jsou chybná (viz obr. 6).



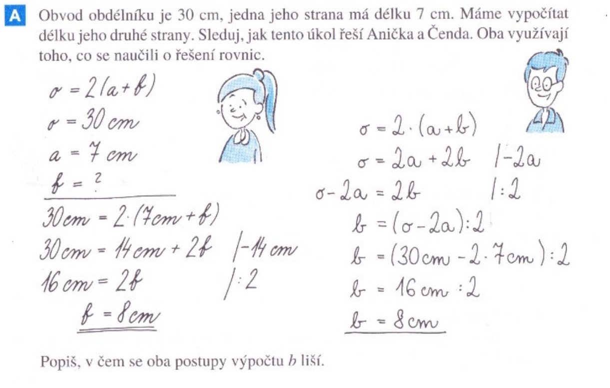
Obr. 5: Dvě různá žákovská řešení úlohy se třemi doplňujícími otázkami (Šarounová et al., 1996, s. 21)



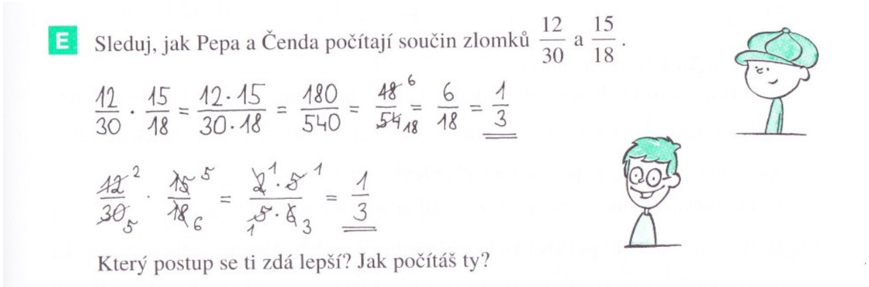
Obr. 6: Čtyři různá žákovská řešení úlohy, z nichž některá jsou chybná (Šarounová et al., 1996, s. 20)

Odvárko a Kadleček (2010–2014)

Tato sada zahrnuje celkem 12 učebnic, tři učebnice pro každý ročník. V učebnicích vystupují tři fiktivní žáci, jejichž řešení úloh jsou často prezentována vedle sebe na jedné stránce (viz obr. 7). Pod většinou řešených úloh jsou kladeny dodatečné otázky (viz obr. 8) nebo zadány doplňující či vysvětlující úkoly (viz obr. 9).



Obr. 7: Dva způsoby určení délky neznámé strany obdélníku (Odvárko a Kadleček, 8(2), 1. vydání, 2006, s. 33)



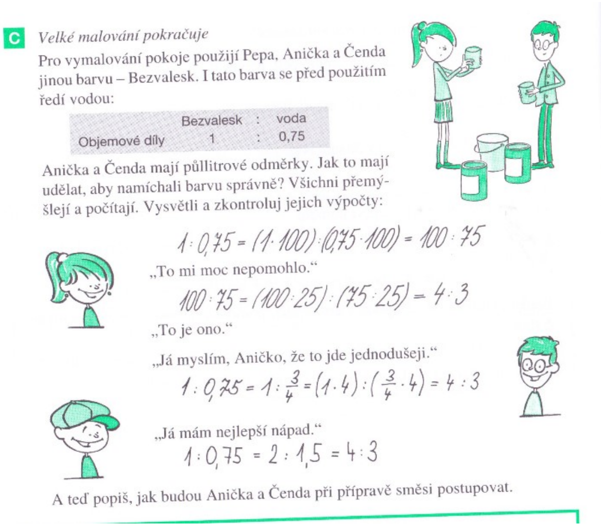
E Sleduj, jak Pepa a Čenda počítají součin zlomků $\frac{12}{30}$ a $\frac{15}{18}$.

$$\frac{12}{30} \cdot \frac{15}{18} = \frac{12 \cdot 15}{30 \cdot 18} = \frac{180}{540} = \frac{\cancel{18}^{6}}{\cancel{54}_{18}} = \frac{6}{18} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{\cancel{12}^{2}}{\cancel{30}_{5}} \cdot \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{18}_{6}} = \frac{\cancel{2}^{1} \cdot \cancel{5}^{1}}{\cancel{5}_{1} \cdot \cancel{6}_{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Který postup se ti zdá lepší? Jak počítáš ty?

Obr. 8: Dva způsoby výpočtu součinu zlomků se dvěma otázkami (Odvárko a Kadleček, 7(1), 2. vydání, 2007, s. 31)



C *Velké malování pokračuje*

Pro vymalování pokoje použijí Pepa, Anička a Čenda jinou barvu – Bezvalesk. I tato barva se před použitím ředí vodou:

	Bezvalesk	:	voda
Objemové díly	1	:	0,75

Anička a Čenda mají půllitrové odměrky. Jak to mají udělat, aby namíchali barvu správně? Všichni přemýšlejí a počítají. Vysvětli a zkontroluj jejich výpočty:

$1 : 0{,}75 = (1 \cdot 100) : (0{,}75 \cdot 100) = 100 : 75$

„To mi moc nepomohlo."

$100 : 75 = (100 : 25) : (75 : 25) = 4 : 3$

„To je ono."

„Já myslím, Aničko, že to jde jednodušeji."

$1 : 0{,}75 = 1 : \frac{3}{4} = (1 \cdot 4) : (\frac{3}{4} \cdot 4) = 4 : 3$

„Já mám nejlepší nápad."

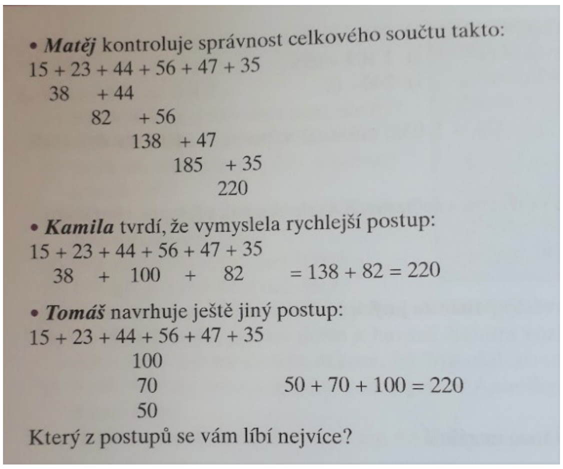
$1 : 0{,}75 = 2 : 1{,}5 = 4 : 3$

A teď popiš, jak budou Anička a Čenda při přípravě směsi postupovat.

Obr. 9: Tři způsoby určení poměru k namíchání barvy (Odvárko a Kadleček, 7(2), 2. vydání, 2004, s. 10)

Půlpán et al. (2007–2010)

Oproti dvěma předchozím sadám se v této sadě u řešení neobjevují ilustrace řešení fiktivních žáků (např. u některých řešení je napsáno pouze jméno řešitele (viz obr. 10) a většina řešených slovních úloh je řešená „společně"[10] (viz obr. 11). Čtenář je často vybízen k tomu, aby dvě strategie řešení mezi sebou porovnával, určil, který ze způsobů považuje za jednodušší, lepší a podobně.



• ***Matěj*** kontroluje správnost celkového součtu takto:

15 + 23 + 44 + 56 + 47 + 35
38 + 44
82 + 56
138 + 47
185 + 35
220

• ***Kamila*** tvrdí, že vymyslela rychlejší postup:

15 + 23 + 44 + 56 + 47 + 35
38 + 100 + 82 = 138 + 82 = 220

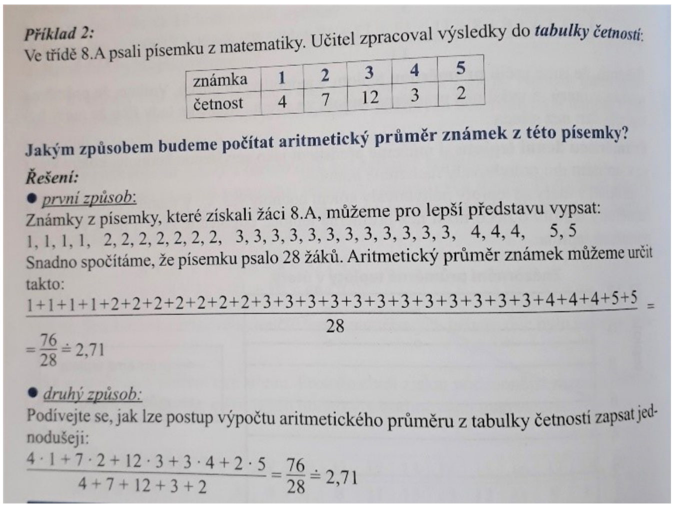
• ***Tomáš*** navrhuje ještě jiný postup:

15 + 23 + 44 + 56 + 47 + 35
100
70
50
50 + 70 + 100 = 220

Který z postupů se vám líbí nejvíce?

Obr. 10: Tři strategie výpočtu součtu šesti sčítanců (Půlpán et al., 2007a, s. 27)

[10] Řešení jsou prezentována v 1. osobě množného čísla.



Příklad 2:
Ve třídě 8.A psali písemku z matematiky. Učitel zpracoval výsledky do ***tabulky četností***:

známka	1	2	3	4	5
četnost	4	7	12	3	2

Jakým způsobem budeme počítat aritmetický průměr známek z této písemky?

Řešení:

- *první způsob:*

Známky z písemky, které získali žáci 8.A, můžeme pro lepší představu vypsat:
1, 1, 1, 1,   2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,   3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,   4, 4, 4,   5, 5
Snadno spočítáme, že písemku psalo 28 žáků. Aritmetický průměr známek můžeme určit takto:

$$\frac{1+1+1+1+2+2+2+2+2+2+2+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+4+4+4+5+5}{28} =$$
$$= \frac{76}{28} \doteq 2{,}71$$

- *druhý způsob:*

Podívejte se, jak lze postup výpočtu aritmetického průměru z tabulky četností zapsat jednodušeji:

$$\frac{4 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{4 + 7 + 12 + 3 + 2} = \frac{76}{28} \doteq 2{,}71$$

Obr. 11: Dva způsoby výpočtu aritmetického průměru známek (Půlpán et al., 2009a, s. 124)

4.5 Slovní úlohy o pohybu, společné práci a směsích

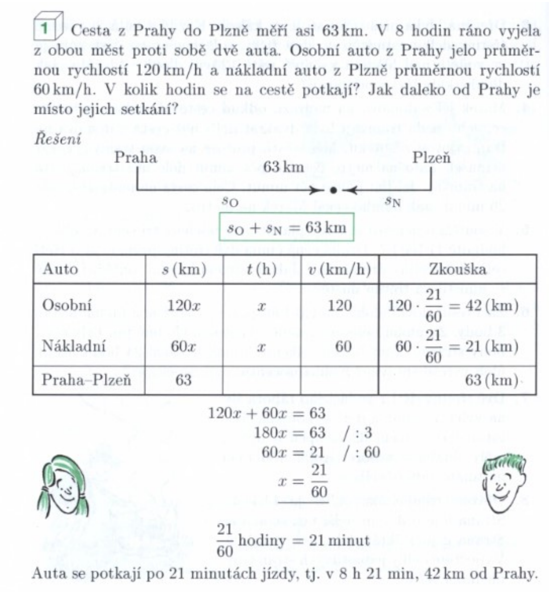
Zaměříme-li se na výskyt řešených úloh o pohybu, společné práci a směsích ve vybraných sadách učebnic (viz tab. 4), až na jednu výjimku (viz poznámku pod čarou č. 8 na str. 21) jsou tyto úlohy ve všech sadách vzorově řešeny, přičemž často pouze jedinou (univerzální) cestou. Nyní se na jednotlivé typy úloh z pohledu strategií jejich řešení podíváme.

Tab. 4: Počet slovních úloh o pohybu, společné práci a směsích

sada učebnic	úlohy řešené více způsoby/řešené úlohy			celkem
	o pohybu	o společné práci	o směsích	
Binterová et al. (2007–2010)	1/3	0/1	0/1	1/5
Molnár et al. (1998–2001)	0/4	0/3	0/2	0/9
Odvárko a Kadleček (2010–2014)	0/3	1/2	0/1	1/6
Půlpán et al. (2007–2010)	2/4	1/4	0/5	3/13
Rosecká et al. (1997–2000)	0/2	0/2	0/4	0/8
Šarounová et al. (1996–2000)	0/3	0/2	0/2	0/7
Hejný et al. (2015–2018)	0/0	0/0	0/0	0/0

Vzorová řešení slovních úloh o pohybu obsahují ve většině případů nákres[11] situace (viz obr. 14) a často i zápis údajů do tabulky, která obsahuje sloupce s průměrnou rychlostí v, dobou jízdy t a celkovou dráhou s a dva řádky pro oba účastníky pohybu. Po vyplnění tabulky následuje sestavení rovnice podle druhu pohybu a poté výpočet (viz obr. 12). Jako alternativní strategie se vyskytuje řešení úvahou, kde je např. při pohybu směrem k sobě nejprve určena dráha, kterou oba účastníci pohybu vykonali za jednu hodinu, a následně vztažena k celkové dráze (viz obr. 13).

[11] Např. v příručce (Binterová, Fuchs a Tlustý, 2007a, s. 64) je autory nákres vyžadován: „V každém případě však situaci ilustrujeme **vhodným diagramem**."



1 Cesta z Prahy do Plzně měří asi 63 km. V 8 hodin ráno vyjela z obou měst proti sobě dvě auta. Osobní auto z Prahy jelo průměrnou rychlostí 120 km/h a nákladní auto z Plzně průměrnou rychlostí 60 km/h. V kolik hodin se na cestě potkají? Jak daleko od Prahy je místo jejich setkání?

Řešení

$$s_O + s_N = 63\,\text{km}$$

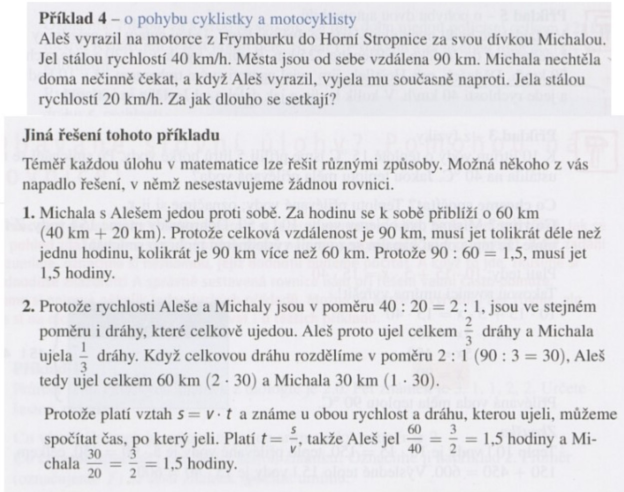
Auto	s (km)	t (h)	v (km/h)	Zkouška
Osobní	$120x$	x	120	$120 \cdot \frac{21}{60} = 42$ (km)
Nákladní	$60x$	x	60	$60 \cdot \frac{21}{60} = 21$ (km)
Praha–Plzeň	63			63 (km)

$$120x + 60x = 63$$
$$180x = 63 \quad / : 3$$
$$60x = 21 \quad / : 60$$
$$x = \frac{21}{60}$$

$$\frac{21}{60}\ \text{hodiny} = 21\ \text{minut}$$

Auta se potkají po 21 minutách jízdy, tj. v 8 h 21 min, 42 km od Prahy.

Obr. 12: Řešení s použitím tabulky (Šarounová et al., 1998b, s. 60)



Příklad 4 – o pohybu cyklistky a motocyklisty
Aleš vyrazil na motorce z Frymburku do Horní Stropnice za svou dívkou Michalou. Jel stálou rychlostí 40 km/h. Města jsou od sebe vzdálena 90 km. Michala nechtěla doma nečinně čekat, a když Aleš vyrazil, vyjela mu současně naproti. Jela stálou rychlostí 20 km/h. Za jak dlouho se setkají?

Jiná řešení tohoto příkladu

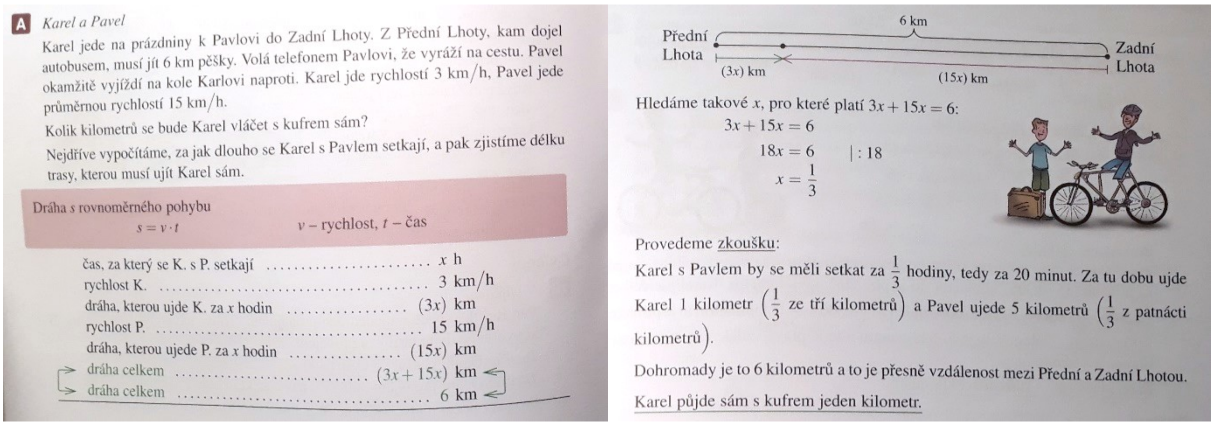
Téměř každou úlohu v matematice lze řešit různými způsoby. Možná někoho z vás napadlo řešení, v němž nesestavujeme žádnou rovnici.

1. Michala s Alešem jedou proti sobě. Za hodinu se k sobě přiblíží o 60 km (40 km + 20 km). Protože celková vzdálenost je 90 km, musí jet tolikrát déle než jednu hodinu, kolikrát je 90 km více než 60 km. Protože 90 : 60 = 1,5, musí jet 1,5 hodiny.

2. Protože rychlosti Aleše a Michaly jsou v poměru 40 : 20 = 2 : 1, jsou ve stejném poměru i dráhy, které celkově ujedou. Aleš proto ujel celkem $\frac{2}{3}$ dráhy a Michala ujela $\frac{1}{3}$ dráhy. Když celkovou dráhu rozdělíme v poměru 2 : 1 (90 : 3 = 30), Aleš tedy ujel celkem 60 km (2 · 30) a Michala 30 km (1 · 30).

Protože platí vztah $s = v \cdot t$ a známe u obou rychlost a dráhu, kterou ujeli, můžeme spočítat čas, po který jeli. Platí $t = \frac{s}{v}$, takže Aleš jel $\frac{60}{40} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ hodiny a Michala $\frac{30}{20} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ hodiny.

Obr. 13: Další způsoby řešení úlohy o pohybu (Binterová, Fuchs a Tlustý, 2009b, s. 87–88)



A *Karel a Pavel*
Karel jede na prázdniny k Pavlovi do Zadní Lhoty. Z Přední Lhoty, kam dojel autobusem, musí jít 6 km pěšky. Volá telefonem Pavlovi, že vyráží na cestu. Pavel okamžitě vyjíždí na kole Karlovi naproti. Karel jde rychlostí 3 km/h, Pavel jede průměrnou rychlostí 15 km/h.

Kolik kilometrů se bude Karel vláčet s kufrem sám?

Nejdříve vypočítáme, za jak dlouho se Karel s Pavlem setkají, a pak zjistíme délku trasy, kterou musí ujít Karel sám.

Dráha s rovnoměrného pohybu
$s = v \cdot t$ $\quad$ v – rychlost, t – čas

čas, za který se K. s P. setkají .... x h
rychlost K. .... 3 km/h
dráha, kterou ujde K. za x hodin .... $(3x)$ km
rychlost P. .... 15 km/h
dráha, kterou ujede P. za x hodin .... $(15x)$ km
dráha celkem .... $(3x + 15x)$ km
dráha celkem .... 6 km

Hledáme takové x, pro které platí $3x + 15x = 6$:

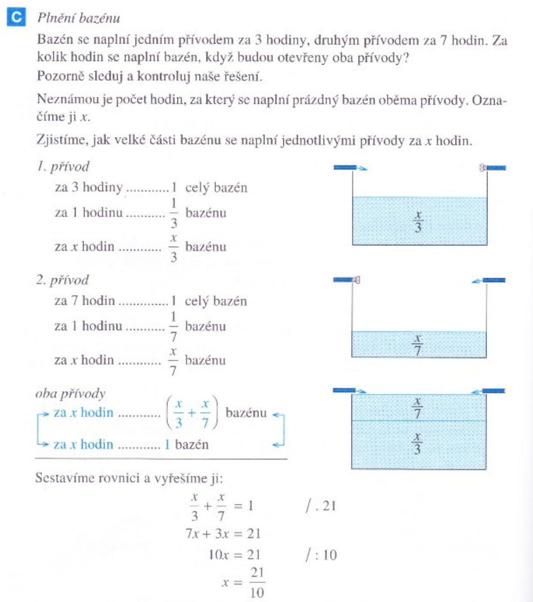
$$3x + 15x = 6$$
$$18x = 6 \quad | : 18$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Provedeme zkoušku:
Karel s Pavlem by se měli setkat za $\frac{1}{3}$ hodiny, tedy za 20 minut. Za tu dobu ujde Karel 1 kilometr $\left(\frac{1}{3}\right.$ ze tří kilometrů$\left.\right)$ a Pavel ujede 5 kilometrů $\left(\frac{1}{3}\right.$ z patnácti kilometrů$\left.\right)$.
Dohromady je to 6 kilometrů a to je přesně vzdálenost mezi Přední a Zadní Lhotou.
Karel půjde sám s kufrem jeden kilometr.

Obr. 14: Řešení s nákresem (Odvárko a Kadleček, 2012c, s. 32–33)

U slovních úloh o společné práci se vesměs objevují dva způsoby řešení, které oba vedou na sestavení rovnice. Pokud je zadáno, za jak dlouhou dobu by danou práci dokončil první nebo druhý pracovník každý sám, a úkolem je určit, za jakou dobu by práci stihli dokončit společně, neznámou je označena právě tato doba (viz obr. 15). Její hodnota se určuje buď přes lineární rovnici, nebo rovnici s neznámou ve jmenovateli (viz obr. 16). Žádné další možnosti řešení jsem ve zkoumaných učebnicích nenalezl.

Ve vybraných učebnicích může sice čtenář narazit na všechny typy úloh o směsi dle definice v oddílu 2.5.3, avšak učebnice neobsahují žádnou slovní úlohu o směsích, která by byla řešena alespoň dvěma různými způsoby. Stejně jako u úloh o pohybu se ve vzorových řešeních častokrát objevil zápis do tabulky (viz obr. 17 a obr. 18).



C *Plnění bazénu*

Bazén se naplní jedním přívodem za 3 hodiny, druhým přívodem za 7 hodin. Za kolik hodin se naplní bazén, když budou otevřeny oba přívody?
Pozorně sleduj a kontroluj naše řešení.

Neznámou je počet hodin, za který se naplní prázdný bazén oběma přívody. Označíme ji x.

Zjistíme, jak velké části bazénu se naplní jednotlivými přívody za x hodin.

1. přívod
za 3 hodiny .... 1 celý bazén
za 1 hodinu .... $\frac{1}{3}$ bazénu
za x hodin .... $\frac{x}{3}$ bazénu

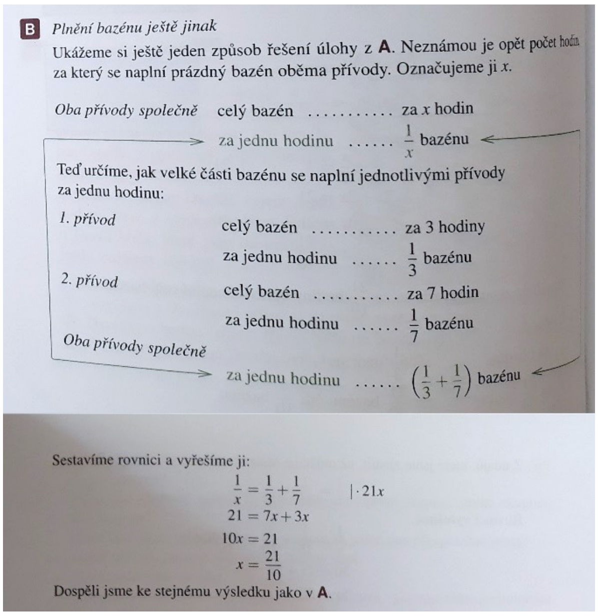
2. přívod
za 7 hodin .... 1 celý bazén
za 1 hodinu .... $\frac{1}{7}$ bazénu
za x hodin .... $\frac{x}{7}$ bazénu

oba přívody
za x hodin .... $\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{7}\right)$ bazénu
za x hodin .... 1 bazén

Sestavíme rovnici a vyřešíme ji:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{7}=1 \quad / \cdot 21$$
$$7x+3x=21$$
$$10x=21 \quad / :10$$
$$x=\frac{21}{10}$$

Obr. 15: První řešení úlohy s nákresem situace (Odvárko a Kadleček, 8(2), 1. vydání, 2006, s. 30)



B *Plnění bazénu ještě jinak*

Ukážeme si ještě jeden způsob řešení úlohy z **A**. Neznámou je opět počet hodin, za který se naplní prázdný bazén oběma přívody. Označujeme ji x.

Oba přívody společně celý bazén .... za x hodin
za jednu hodinu ...... $\frac{1}{x}$ bazénu

Teď určíme, jak velké části bazénu se naplní jednotlivými přívody za jednu hodinu:

1. přívod celý bazén .... za 3 hodiny
za jednu hodinu ...... $\frac{1}{3}$ bazénu

2. přívod celý bazén .... za 7 hodin
za jednu hodinu ...... $\frac{1}{7}$ bazénu

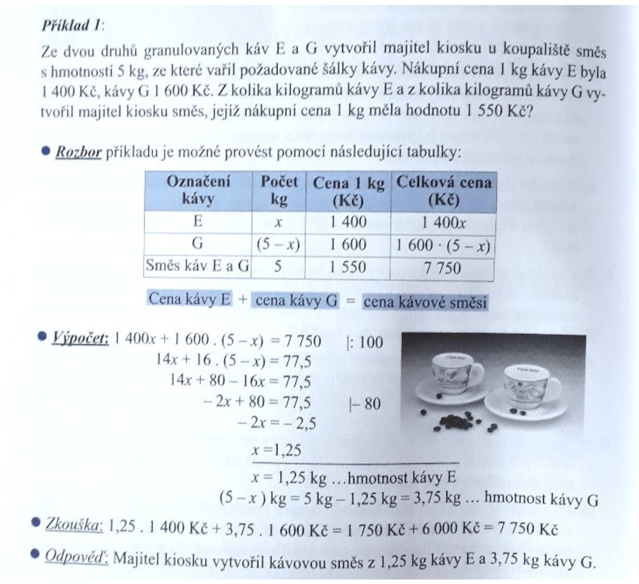
Oba přívody společně
za jednu hodinu ...... $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)$ bazénu

Sestavíme rovnici a vyřešíme ji:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7} \quad | \cdot 21x$$
$$21=7x+3x$$
$$10x=21$$
$$x=\frac{21}{10}$$

Dospěli jsme ke stejnému výsledku jako v **A**.

Obr. 16: Druhé řešení stejné úlohy s výpočtem přes jednu hodinu (Odvárko a Kadleček, 2012c, s. 38–39)



Příklad 1:

Ze dvou druhů granulovaných káv E a G vytvořil majitel kiosku u koupaliště směs s hmotností 5 kg, ze které vařil požadované šálky kávy. Nákupní cena 1 kg kávy E byla 1 400 Kč, kávy G 1 600 Kč. Z kolika kilogramů kávy E a z kolika kilogramů kávy G vytvořil majitel kiosku směs, jejíž nákupní cena 1 kg měla hodnotu 1 550 Kč?

- ***Rozbor*** příkladu je možné provést pomocí následující tabulky:

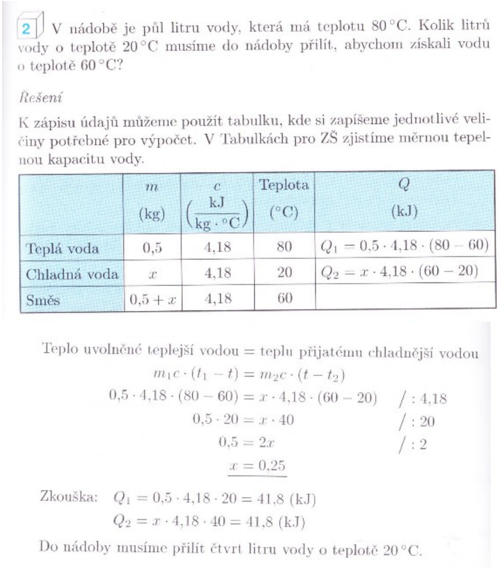
Označení kávy	Počet kg	Cena 1 kg (Kč)	Celková cena (Kč)
E	x	1 400	1 400x
G	$(5-x)$	1 600	1 600 · $(5-x)$
Směs káv E a G	5	1 550	7 750

Cena kávy E + cena kávy G = cena kávové směsi

- ***Výpočet:*** $1\,400x + 1\,600 \,.\, (5-x) = 7\,750 \quad |: 100$
$14x + 16 \,.\, (5-x) = 77{,}5$
$14x + 80 - 16x = 77{,}5$
$-2x + 80 = 77{,}5 \quad |-80$
$-2x = -2{,}5$
$x = 1{,}25$
$x = 1{,}25$ kg …hmotnost kávy E
$(5-x)$ kg = 5 kg – 1,25 kg = 3,75 kg … hmotnost kávy G

- ***Zkouška:*** 1,25 . 1 400 Kč + 3,75 . 1 600 Kč = 1 750 Kč + 6 000 Kč = 7 750 Kč
- ***Odpověď:*** Majitel kiosku vytvořil kávovou směs z 1,25 kg kávy E a 3,75 kg kávy G.

Obr. 17: Řešení úlohy o směsích se zápisem do tabulky (Půlpán et al., 2009a, s. 37)



2 V nádobě je půl litru vody, která má teplotu 80 °C. Kolik litrů vody o teplotě 20 °C musíme do nádoby přilít, abychom získali vodu o teplotě 60 °C?

Řešení

K zápisu údajů můžeme použít tabulku, kde si zapíšeme jednotlivé veličiny potřebné pro výpočet. V Tabulkách pro ZŠ zjistíme měrnou tepelnou kapacitu vody.

	m (kg)	c $\left(\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}}\right)$	Teplota (°C)	Q (kJ)
Teplá voda	0,5	4,18	80	$Q_1 = 0{,}5 \cdot 4{,}18 \cdot (80-60)$
Chladná voda	x	4,18	20	$Q_2 = x \cdot 4{,}18 \cdot (60-20)$
Směs	$0{,}5+x$	4,18	60	

Teplo uvolněné teplejší vodou = teplu přijatému chladnější vodou

$$m_1 c \cdot (t_1 - t) = m_2 c \cdot (t - t_2)$$
$$0{,}5 \cdot 4{,}18 \cdot (80-60) = x \cdot 4{,}18 \cdot (60-20) \quad / : 4{,}18$$
$$0{,}5 \cdot 20 = x \cdot 40 \quad / : 20$$
$$0{,}5 = 2x \quad / : 2$$
$$x = 0{,}25$$

Zkouška: $Q_1 = 0{,}5 \cdot 4{,}18 \cdot 20 = 41{,}8$ (kJ)
$Q_2 = x \cdot 4{,}18 \cdot 40 = 41{,}8$ (kJ)

Do nádoby musíme přilít čtvrt litru vody o teplotě 20 °C.

Obr. 18: Řešení úlohy s použitím kalorimetrické rovnice (Šarounová et al., 1999, s. 69–70)

Při procházení jednotlivých sad učebnic mne překvapilo, že úlohy o pohybu jsou doplněny vztahem pro výpočet dráhy z průměrné rychlosti a času, stejně tak některé úlohy o směsích jsou doplněny kalorimetrickou rovnicí (viz obr. 18). U úloh o společné práci jsem však na vztah pro výpočet práce[12]

[12] Například u úlohy č. 8 ze strany 40 v této bakalářské práci je výkon Anežky 1 kyblík za 2 hodiny ($P_1 = \frac{1}{2}$), Pepy 1 kyblík za 3 hodiny ($P_2 = \frac{1}{3}$). Práce, kterou mají společně vykonat, je nasbírání 1 kyblíku ($W = 1$). Pro neznámý čas t v hodinách platí:

$$W = W_1 + W_2 = P_1 t + P_2 t \;\rightarrow\; 1 = \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t \;\rightarrow t = \frac{6}{5}$$

z (konstatního) výkonu a času ($W = P \cdot t$) spolu se vztahem, že celková práce je rovna součtu prací jednotlivých (k) subjektů ($W = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$), který by dle mého názoru mohl čtenáři pomoci s řešením, nenarazil.

4.6 Shrnutí

Tato kapitola se zabývala výskytem více řešitelských strategií ve vybraných českých učebnicích matematiky pro 2. stupeň ZŠ. Přestože se mezi sebou jednotlivé sady značně liší co do přístupu autorů či celkového množství nabízených úloh, lze na základě prostudovaných sad učebnic konstatovat, že se v nich úlohy řešené alespoň dvěma strategiemi vyskytují velmi zřídka nebo vůbec. Ukázalo se, že úlohy o pohybu, společné práci a směsích jsou v těchto učebnicích většinou vzorově řešeny jediným způsobem, a pokud nebudou žáci učitelem podněcováni k hledání dalších možností řešení[13], tyto úlohy se označení „typových úloh“ či „drilu“ zřejmě nezbaví (blíže viz oddíl 5.2). V následující kapitole budou představeny konkrétní náměty na aplikaci metodického přístupu založeného na porovnávání strategií.

[13] Např. u úloh o společné práci v oddílu 4.3 z příručky (Odvárko a Kadleček, 2001, s. 33–37) má učitel ke každé úloze k dispozici alespoň dva možné způsoby řešení. Oproti tomu v příručce (Molnár et al., 2001b) nemá učitel k žádné z typových úloh jiná řešení než ta, co se nachází v učebnici.

5 Úlohy se dvěma žákovskými řešeními

V úvodu kapitoly bude stručně zdůvodněna volba typových úloh pro porovnávání řešitelských strategií. Dále budou představeny pracovní listy, sestávající z úloh, v nichž dva hypotetičtí žáci předkládají svá řešení. Budou následovat komentáře jednotlivých žákovských řešení každé z úloh spolu s návrhem otázek pro učitele, které by mohl při výuce použít. V závěru kapitoly bude navrženo, jak vytvořené pracovní listy implementovat ve výuce.

5.1 Proč slovní úlohy?

Úlohy se dvěma žákovskými řešeními, které byly vytvořeny v rámci výzkumu zmíněného v oddílu 3.2, byly pouze algebraického charakteru. Toto jednostranné zaměření způsobilo, že podstatná část přihlášených učitelů studii, která byla součástí tohoto výzkumu, nedokončila, protože ve výuce již probírali jiná témata (Durkin, Star a Rittle-Johnson, 2017, s. 591).

Slovní úlohy se oproti algebraickým úlohám vyskytují téměř v každém z probíraných témat v matematice na 2. stupni ZŠ, snad jen s výjimkou některých konstrukčních úloh a úprav výrazů. Přestože se zabývají situacemi ze života, řadí se do oblasti matematiky, která je u většiny žáků neoblíbenou, v některých případech dokonce obávanou, a je jak žáky, tak učiteli považována za jedno z kritických míst matematky, tedy „oblast, v nichž žáci často a opakovaně selhávají" (Rendl et al., 2013, s. 7). Ačkoli se tento materiál zaměřuje především na typové úlohy, porovnávání strategií lze aplikovat i v jiných úlohách. Ukázkou mohou být praktické náměty uvedené v publikaci (Vondrová et al., 2020, s. 108–140).

5.2 Proč typové úlohy?

Převážné množství slovních úloh je možné řešit více způsoby. Takové slovní úlohy umožňují žákům vytvářet nové nebo vhodně využívat již známé strategie řešení, a při jejich sdílení hodnotit jejich účinnost (*Principles and Standards for School Mathematics*, 2000, s. 256). Ačkoli v Rámcovém vzdělávacím programu[14] nejsou typové úlohy explicitně zmíněny, v rámci 8. nebo 9. ročníku ZŠ jsou běžnou součástí výuky matematiky.

V českých učebnicích matematiky jsou typové úlohy obvykle prezentovány jako slovní úlohy, které se řeší jednou univerzální strategií (viz kap. 4). Pro některé žáky je obtížné této univerzální strategii porozumět, a často se tak stává strategií povrchovou. Pokud žák na základě signálních slov přistupuje rovnou k sestavení matematického modelu (v případě typových úloh výsledné rovnice) bez vytvoření situačního modelu, je v případě netriviálního zadání úlohy pravděpodobné, že model sestaví chybně.

Učitelé matematiky na 2. stupni ZŠ, kteří se zúčastnili výzkumu popsaného v (Rendl et al., 2013), se shodli na tom, že při řešení typových úloh je důležité použít grafické znázornění (vytvoření náčrtku

[14] Dostupné z https://www.msmt.cz/file/43792/.

a zaznamenání údajů do tabulky) a mít nějaké vzorově řešené úlohy, které pak budou žáci moci použít v dalších podobných úlohách. Ve více než polovině sledovaných učebnic pro 8. a 9. ročník ZŠ jsou typové úlohy uvedeny v rámci jedné kapitoly, nejčastěji u tématu rovnic spolu s jejich konkrétním zaměřením (na pohyb, na společnou práci a o směsích). Někteří učitelé to, že se dají úlohy zařadit do určitého typu, hodnotili kladně, neboť žáci si úlohy prostě „nadrilují“ (Rendl et al., 2013, s. 101).

5.3 Pracovní listy pro žáky

Z důvodů uvedených v předchozím oddílu jsem se rozhodl po vzoru autorů K. Durkin(ové), J. R. Stara a B. Rittle-Johnson(ové) vytvořit pro žáky 2. stupně ZŠ pracovní listy obsahující typové slovní úlohy se dvěma žákovskými řešeními .

Pracovní listy zahrnují celkem 15 řešených úloh rozdělených do tří sérií: 5 úloh o pohybu, 5 úloh o společné práci a 5 úloh o směsích. Všechny obsahují číselné označení, zadání a řešitelské strategie dvou hypotetických žáků, kteří komentují své jednotlivé kroky. Obrázky hypotetických žáků nakreslila Patricie Slaničková.

První tři úlohy z každé série jsou typů *Která je lepší?*, *Proč to funguje?* a *Která je správná?* (viz oddíl 3.3). Některé strategie hypotetických žáků v řešených úlohách jsou netradiční a nabízejí jiný pohled na danou problematiku, než obvykle nabízí učebnice (viz oddíl 4.5). Do pracovních listů jsem je zařadil zejména z toho důvodu, aby žáci nahlédli, že v případě, kdy neporozuměli univerzální strategii, mohou hledat i jinou strategii.

Další dvě úlohy v každé sérii obsahují parametr zvyšující jejich obtížnost. Čtvrtá úloha je operátorová bez stavu a pátá úloha obsahuje antisignál (viz oddíl 2.8). Úlohy, které neobsahují stav, často vedou k tomu, že žáci, kteří se pokusili vytvořit situační model, úlohu kvůli absenci konkrétní hodnoty nakonec vzdají. Jen málo žáků si za chybějící stav zvolí konkrétní hodnotu (Vondrová, 2019). Z tohoto důvodu je jedna z nabízených strategií založena právě na dosazení určité hodnoty za stav. V řešených úlohách s antisignálem je vždy jedna ze strategií chybná a závisí právě na „nachytání se“ na antisignál. Cílem úloh s antisignálem je zdůraznit význam tvorby situačního modelu a správného porozumění úloze.

Vytvořené typové úlohy se oproti těm z materiálu zmíněném v oddílu 3.3 liší v tom, že pod strategiemi žáků nejsou uvedeny doplňující otázky. Tyto otázky jsou uvedeny souhrnně v oddílu 5.6.

Pro každou sérii typových úloh se dvěma žákovskými řešeními byla pro větší přehlednost vytvořena tabulka (viz tab. 5, tab. 6 a tab. 7). V každé tabulce je pro konkrétní úlohy uveden typ úlohy, kde u typů *Která je správná?* a *s antisignálem* je v závorce uvedeno, které z řešení je správné (+) a které chybné (−), a její zdroj. Úloha č. 8 je inspirována úlohou od společnosti Cermat a byla využita ve výzkumu GAČR: *Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým pojmům*. U úlohy č. 15 je zdroj citován, ostatní úlohy jsou mé vlastní. Za tabulkami následují pracovní listy.

Tab. 5: Úlohy o pohybu

ČÍSLO ÚLOHY	TYP ÚLOHY	ZDROJ
1	*Která je lepší?*	autorská úloha
2	*Proč to funguje?*	autorská úloha
3	*Která je správná?* $(+-)$	autorská úloha
4	*operátorová, bez stavu*	autorská úloha
5	*s antisignálem* $(-+)$	autorská úloha

Tab. 6: Úlohy o společné práci

ČÍSLO ÚLOHY	TYP ÚLOHY	ZDROJ
6	*Která je lepší?*	autorská úloha
7	*Proč to funguje?*	autorská úloha
8	*Která je správná?* $(-+)$	úloha HT4_8C2 (z projektu GAČR 16-06134S)
9	*operátorová, bez stavu*	autorská úloha
10	*s antisignálem* $(+-)$	autorská úloha

Tab. 7: Úlohy o směsích

ČÍSLO ÚLOHY	TYP ÚLOHY	ZDROJ
11	*Která je lepší?*	autorská úloha
12	*Proč to funguje?*	autorská úloha
13	*Která je správná?* $(-+)$	autorská úloha
14	*operátorová, bez stavu*	autorská úloha
15	*s antisignálem* $(-+)$	Úloha HT2_8A3 (Vondrová et al., 2019, s. 402)

Úloha č. 1

Kamarádi Honza a Tomáš si v Jizerských horách naplánovali trasu o celkové délce 31,5 km. Každý z nich vyrazil z jiného konce s tím, že se někde na trase potkají. Honza se vydal pěšky průměrnou rychlostí 2,6 km/h. Ve stejný čas, ale z druhého konce proti němu vyjel na kole průměrnou rychlostí 10 km/h Tomáš. Za jak dlouhou dobu se oba potkali? Kolik km ušel do té doby Honza?

TRISTAN

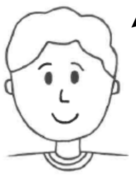
Nejprve si udělám tabulku, do níž napíšu vše, co budu k řešení potřebovat.

Čas strávený oběma na trase bude stejný, označím ho t.

Délky tras chlapců budou rovny součinům jejich rychlostí a času t.

Musí platit, že součet délek tras obou chlapců je roven délce $s = 31{,}5$ km. Za s_1 a s_2 dosadím podle tabulky.

Řeším lineární rovnici s neznámou t.



jméno	rychlost (km/h)	čas (h)	trasa (km)
Honza	$v_1 = 2{,}6$	t	$s_1 = v_1 \cdot t$
Tomáš	$v_2 = 10$	t	$s_2 = v_2 \cdot t$

$$s = s_1 + s_2$$

$$s = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t$$

$$s = 31{,}5$$

$$31{,}5 = 2{,}6 \cdot t + 10 \cdot t$$

$$31{,}5 = 12{,}6 \cdot t$$

$$t = 2{,}5$$

$$s_1 = v_1 \cdot t = 2{,}6 \cdot 2{,}5 = 6{,}5$$

Honza a Tomáš se potkali za 2,5 hodiny. Honza ušel do setkání 6,5 km.

IZOLDA

Honza ušel za hodinu 2,6 km. Tomáš ujel na kole za hodinu 10 km. Společně tak za hodinu urazili 12,6 km.

Celá trasa měřila 31,5 km. Nyní dokážu přes přímou úměrnost určit, za kolik hodin oba urazili celou trasu. Tento údaj označím t.

Teď už vím, že se oba potkali za 2,5 hodiny. Když vím, že Honza ušel za 1 hodinu 2,6 km, pak za 2,5 hodiny ušel 2,5krát více km.

Dostávám, že Honza do setkání ušel 6,5 km.

Oba společně:

$\uparrow$ 1 h .... 12,6 km $\uparrow$

t h ....31,5 km

$$t = 1 \cdot \frac{31{,}5}{12{,}6} = \frac{315}{126} = \frac{5}{2}$$

Honzova trasa:

$\uparrow$ 1 h .... 2,6 km $\uparrow$

2,5 h .... s km

$$s = 2{,}6 \cdot \frac{2{,}5}{1} = 2{,}6 \cdot 2{,}5 = 6{,}5$$

Honza a Tomáš se potkali za 2,5 hodiny. Honza ušel do setkání 6,5 km.

Úloha č. 2

Ignác a Nina se rozhodli, že v neděli na zahradě zkusí pochopit úlohu o pohybu. Ignác se postavil 10 metrů severně od Niny, která stála na startu. Po tlesknutí společně vyšli směrem na sever, Nina rychlostí 2 m/s a Ignác rychlostí 1 m/s. Za jak dlouho od tlesknutí dojde Nina Ignáce?

TRISTAN

Nejprve si udělám tabulku, ve které budu mít čas od tlesknutí, vzdálenosti Ignáce a Niny od startu a náskok, který Ignác na Ninu má.

Každou sekundu zvyší Ignác svou vzdálenost od startu o jeden metr, Nina o dva metry.

Postupně budu tabulku doplňovat.

Zkusím vyjádřit vzdálenosti Ignáce a Niny od startu pro obecný čas t a určit, kdy bude náskok nulový. Tedy čas, kdy se „srazí“.

Dostávám lineární rovnici.

čas od tlesknutí (s)	vzdálenost Ignáce od startu (m)	vzdálenost Niny od startu (m)	náskok (m)
0	10	0	$10-0=10$
1	$10+1\cdot 1=11$	$0+2\cdot 1=2$	$11-2=9$
2	$10+1\cdot 2=12$	$0+2\cdot 2=4$	$12-4=8$
3	$10+1\cdot 3=13$	$0+2\cdot 3=6$	$13-6=7$
…	…	…	…
$\boldsymbol{t}$	$\mathbf{10+1\cdot \boldsymbol{t}=10+\boldsymbol{t}}$	$\mathbf{0+2\cdot \boldsymbol{t}=2\boldsymbol{t}}$	$\mathbf{10+\boldsymbol{t}-2\boldsymbol{t}=0}$

Rovnice nulového náskoku (srážky):

$$10-t=0$$

$$t=10$$

Nina dojde Ignáce za 10 sekund.

IZOLDA

$$v_1 = 1\ \text{m/s}$$

$$v_2 = 2\ \text{m/s}$$

$$s = 10\ \text{m}$$

$$v = v_2 - v_1$$

$$v = 2-1\ \text{m/s} = 1\ \text{m/s}$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{10\ \text{m}}{1\ \text{m/s}} = 10\ \text{s}$$

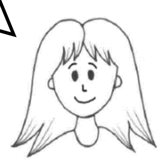
Nina dojde Ignáce za 10 sekund.

Každou sekundu se Nina Ignácovi přiblíží o nějaký kus. Tento kus zkusím určit.

Mám dvě rychlosti $v_1 = 1$ m/s a $v_2 = 2$ m/s a počáteční náskok $s = 10$ m.

Oběma snížím rychlost o Ignácovu rychlost v_1. Ignác tedy bude mít nulovou rychlost (bude stát na místě) a Nina ho bude dohánět rychlostí $v = v_2 - v_1$.

Zajímá nás čas t, za který Nina touto rychlostí dojde až ke stojícímu Ignácovi. To je jednoduché, $t = \frac{s}{v}$.



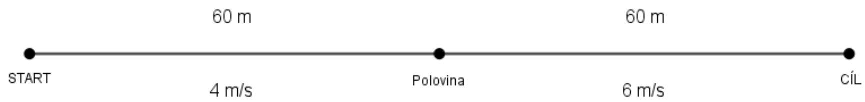
Úloha č. 3

Jana běžela sprint na 120 m. Při prvním běhu doběhla v čase 24 sekund. Jak dlouho by ji trvalo trať uběhnout, pokud by její tempo v první polovině trati bylo o pětinu pomalejší a ve druhé polovině o pětinu rychlejší než její průměrné tempo při prvním běhu?

TRISTAN

24 s ……. 120 m
1 s………… 5 m $\longrightarrow$ Průměrné tempo bylo 5 m/s.

1. polovina trati $\longrightarrow$ $\frac{4}{5}$ tempa ……….. 4 m/s
2. polovina trati $\longrightarrow$ $\frac{6}{5}$ tempa ……….. 6 m/s



1. čas ….. 60 : 4 = 15 s   2. čas ….. 60 : 6 = 10 s

Celkový čas = 1. čas + 2. čas = 15 s + 10 s = 25 s.

Jana by uběhla trať o délce 120 metrů za 25 sekund.

Nejdříve určím, jakým průměrným tempem Jana běžela.

Teď vypočítám, jakým tempem by Jana běžela v první a druhé polovině trati.

Nakreslím si obrázek.

Určím, jak dlouho běžela Jana každý z úseku.

Pak tyto časy sečtu.

IZOLDA

Tempo:

$$120 : 24 = 5$$

1. polovina trati $\longrightarrow$ $\frac{4}{5}$ tempa ……….. 4 m/s = v_1
2. polovina trati $\longrightarrow$ $\frac{6}{5}$ tempa ……….. 6 m/s = v_2

$\downarrow$

průměrné tempo ……. $v = \frac{v_1 + v_2}{2} = 5\ \mathrm{m/s}$

Dráha:

$s = 120\ \mathrm{m}$

Čas:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{120\ \mathrm{m}}{5\ \mathrm{m/s}} = 24\ \mathrm{s}$$

Jana by uběhla trať o délce 120 metrů za 24 sekund.

Nejdřív určím, jakým tempem běžela Jana každý z úseků.

Z obou temp vypočítám průměrné tempo.

Teď mi už jen zbývá vypočítat, jak dlouho Janě při tomto tempu trvalo trať uběhnout.

Tento čas určím jako podíl dráhy a tempa.

Mám výsledek.

Úloha č. 4

Dva kamarádi, Albert a Bedřich, se rozhodli zahrát si na závodníky, kteří se učí finišovat. Poprosili Quida, aby se postavil do cíle trasy, kterou si společně vytyčili, a vytvořil jim cílovou fotografii, tak jako to dělají na velkých závodech. Protože Albert běhá v průměru o čtvrtinu rychleji než Bedřich, část trasy získal Bedřich jako náskok, aby oba cílem proběhli současně. Jakou část trasy získal Bedřich jako náskok?

IZOLDA

Nikde není zmínka o délce trasy a rychlosti alespoň jednoho z chlapců. Tak si to nějak vhodně zvolím.

délka trasy ….. 100 m

A …….. 5 m/s

B …….. 4 m/s

Chlapci musí trasu uběhnout ve stejném čase. Poběží 20 sekund.

doba běhu ….. $100 : 5 = 20$

Za tu dobu uběhne Bedřich 80 metrů.

trasa Bedřich ….. $20 \cdot 4 = 80$

Takže musel získat náskok 20 metrů.

náskok ….. $100 - 80 = 20$

Teď jen dopočítám, jaká část je 20 metrů ze 100 metrů.

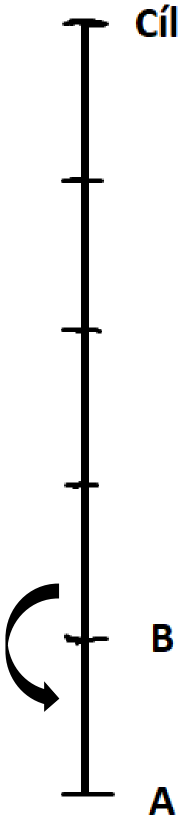
$$\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

To je jedna pětina.

Bedřich získal jako náskok pětinu trasy.

TRISTAN

Když Albert běhá v průměru o čtvrtinu rychleji než Bedřich, pak ve stejném čase uběhne o čtvrtinu delší trasu.



Nakreslím si obrázek.

Udělám úsečku od cíle až k Bedřichovi a rozdělím ji na 4 shodné díly.

Teď doplním Alberta. Ten bude od cíle ještě o čtvrtinu dále než Bedřich.

Z obrázku vidím, že náskok Bedřicha v rámci celé trasy je jedna pětina.

Mám výsledek.

Bedřich získal jako náskok pětinu trasy.

Úloha č. 5

Aby Jirka ušetřil peníze na jízdenky, raději do školy a ze školy jezdí na kole. Když jede do školy, měří jeho trasa 7,2 km a zvládne ji ujet za půl hodiny. Trasa do školy je o polovinu kratší než trasa ze školy. Jak dlouho mu trvá cesta domů, pokud jezdí stejnou průměrnou rychlostí jako do školy?

TRISTAN

Nejdřív vypočítám, jakou průměrnou rychlostí Jirka na kole jezdí. To je jednoduché, stačí 7,2 km vynásobit dvěma.

$\frac{1}{2}$ hod …. 7,2 km

1 hod …. ? km

$2 \cdot 7{,}2 = 14{,}4$

Průměrnou rychlost jsem určil.

Jezdí 14,4 km/h.

Trasa bude o polovinu kratší.

Vypočítám polovinu z 7,2 km a odečtu ji od 7,2 km.

7,2 km

$7{,}2 : 2 = 3{,}6$

$7{,}2 - 3{,}6 = 3{,}6$

Když jezdí 14,4 km/h, pak trasu 3,6 km pojede za čtvrt hodiny.

1 hod ….. 14,4 km

? hod ….. 3,6 km

$$3{,}6 : 14{,}4 = \frac{36}{144} = \frac{1}{4}$$

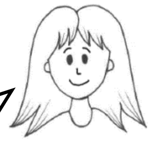
$$\frac{1}{4}\ \text{hod}$$

Mám výsledek.

Cesta domů bude Jirkovi trvat čtvrt hodiny.

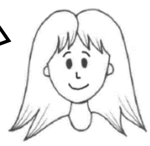
IZOLDA

Nejdřív určím, jak dlouhá je trasa ze školy. Nakreslím si obrázek. Začnu trasou ze školy.



Trasu ze školy rozdělím na dvě poloviny.

V obrázku vyznačím trasu do školy.



Do školy: 7,2 km

Ze školy: $2 \cdot 7{,}2 = 14{,}4$ km

Vidím, že trasa ze školy je dvakrát delší než do školy.

Z dráhy a času určím průměrnou rychlost.

$$v = \frac{7{,}2}{0{,}5} = \frac{72}{5}$$

$$v = \frac{72}{5} = 14{,}4\ \text{km/h}$$

Když je trasa ze školy dlouhá 14,4 km, pojede jí jednu hodinu.

$$t = \frac{14{,}4}{14{,}4} = 1$$

$$t = 1\ \text{h}$$

Cesta domů mu bude trvat jednu hodinu.

Úloha č. 6

Anita, Berta a Cilka se rozhodly, že společně překonají rekord tří spolužáků v počtu sedů lehů za minutu. Každá z nich má jiné tempo. Anita zvládne udělat 1 sed leh za sekundu, Berta 5 sedů lehů za 6 sekund a Cilka 2 sedy lehy za 3 sekundy. Za jak dlouho kamarádky společně udělají 120 sedů lehů, což byl dosavadní rekord spolužáků?

OLAF

Nejdříve spočítám, kolik sedů lehů společně dívky udělají za minutu. Každou s dívek vyřeším zvlášť, poté jejich výkony sečtu.

Pro sedy lehy použiji zkratku SL. Použiji přímou úměrnost.

$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$

Anita:	Berta:	Cilka:
1 s …… 1 SL;	6 s …… 5 SL;	3 s …… 2 SL;
60 s ……60 SL	60 s ……50 SL	60 s ……40 SL

Společně: $\mathbf{60\ SL + 50\ SL + 40\ SL = 150\ SL}$

Nyní jsem zjistil, že dívky za 1 minutu udělají společně 150 sedů lehů.

Zajímá mne ale, za jak dlouho jich udělají 120.

Tento čas určím přes trojčlenku.

↑ 60 s ………………… 150 SL ↑

x s ………………… 120 SL

$$\frac{x}{60} = \frac{120}{150}$$

$$x = 60 \cdot \frac{120}{150} = 60 \cdot \frac{4}{5} = 48$$

Kamarádky udělají 120 sedů lehů za 48 sekund.

ELZA

Úlohu budu řešit rovnicí.

U každé z dívek si proto nejprve vyjádřím její výkon. Tedy kolik sedů lehů (SL) dokáže udělat za 1 sekundu.

Anita: 1 SL/1 s ………. 1 SL/s

Berta: 5 SL/6 s……….. $\frac{5}{6}$ SL/s

Cilka: 2 SL/3 s ………… $\frac{2}{3}$ SL/s

práce **……….**120 SL

čas ……………. x

$$1x + \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}x = 120$$

$$\frac{6x + 5x + 4x}{6} = 120$$

$$\frac{15x}{6} = 120$$

$$15x = 720$$

$$x = \frac{720}{15} = 48$$

Například Berta udělá $\frac{5}{6}$ sedu lehu za 1 sekundu.

Celková „práce“, kterou mají dívky vykonat, je 120 sedů lehů. Čas, který k tomu budou potřebovat, označím x.

Nyní dosadím výkony dívek do rovnice o společné práci s neznámou x.

Z rovnice vyjádřím neznámý čas x.

Mám výsledek.

Kamarádky udělají 120 sedů lehů za 48 sekund.

Úloha č. 7

Tatínek stihne posekat zahradu sám za 1,5 hodiny. Občas přenechá posekání zahrady sousedovic Jendovi, kterému to sice trvá o půl hodiny déle než tatínkovi, ale sekání zahrady je jeho hobby. Navíc si vždy přiveze vlastní sekačku a tatínek tu svou aspoň nemusí vytahovat ze sklepa. V předpovědi hlásili, že do hodiny má začít pršet. Tatínka to ale neodradilo, houkl přes plot na Jendu, aby mu šel pomoct se sekáním. Jenda hned radostně přiběhl se sekačkou a začali společně sekat. Stihnou zahradu do hodiny posekat? Jak dlouho jim to bude trvat?

ELZA

Nejdřív si udělám zápis.

Údaje v hodinách si převedu na minuty.

Teď určím nejmenší společný násobek čísel 90 a 120.

Nyní, když by tatínek pracoval 360 min, posekal by 4 zahrady.

Jenda by posekal 3 zahrady.

Společně by za 6 hodin posekali 7 zahrad.

Tedy 1 zahradu by měli stihnout posekat za šest sedmin hodiny.

Stihnou to do hodiny.

tatínek:

$$1{,}5 \text{ hod} = 90 \text{ min}$$

Jenda:

$$1{,}5 + 0{,}5 \text{ hod} = 120 \text{ min}$$

$$90 = 3 \cdot 30 \qquad 120 = 4 \cdot 30$$

$$\text{nsn}(90, 120) = 3 \cdot 4 \cdot 30 = 360$$

---

tatínek:

90 min .... 1 zahrada

360 min .... 4 zahrady

Jenda:

120 min .... 1 zahrada

360 min .... 3 zahrady

společně:

360 min = 6 hod ...... 7 zahrad

$$\frac{6}{7} \text{ hod} \ldots\ldots\ldots 1 \text{ zahrada}$$

Zahradu společně stihnou posekat za šest sedmin hodiny.

OLAF

Na tuhle úlohu půjdu úvahou, možná trochu neobvyklou.

Nejdřív si ale zapíšu, jak dlouho trvá posekat zahradu každému zvlášť.

tatínek .... 1,5 hod

Jenda .... 2 hod

Za 2 hodiny:

Jenda .... 1 zahrada

tatínek ..... 1 a $\frac{1}{3}$ zahrady

oba .... 2 a $\frac{1}{3}$ zahrady

$$2 + \frac{1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$$

2 hodiny .... $\frac{7}{3}$ zahrady

? hodin .... 1 zahrada

$$2 : \frac{7}{3} = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$$

Teď budu předpokládat, že by oba pracovali tak dlouho, jako by trvalo zahradu posekat Jendovi samotnému.

Oba by za dvě hodiny posekali sedm třetin zahrady.

Přes trojčlenku zjistím výsledek.

Zahradu stihnou posekat společně za $\frac{6}{7}$ hodiny.

Úloha č. 8

Anežka nasbírá kyblík borůvek za dvě hodiny. Pepa naplní stejně velký kyblík za tři hodiny. Za jak dlouho by naplnili až po okraj jeden kyblík společně?

OLAF

Ze zadání vím, že stejně velký kyblík nasbírá Anežka za 2 hodiny a Pepa za 3 hodiny.

Teď oba časy sečtu.

A .... 2 h

P .... 3 h

$$3 + 2 = 5$$

5 hodin – společně 2 kyblíky

Za 5 hodin by společně nasbírali 2 kyblíky.

Zajímá mne ale 1 kyblík, proto vydělím dvěma.

Mám výsledek.

$$5 : 2 = 2{,}5$$

2,5 hodiny – 1 kyblík společně

Společně by jeden kyblík naplnili za 2,5 hodiny.

ELZA

Udělám zápis.

Čas, který budou společně Anežka s Pepou potřebovat k naplnění jednoho kyblíku, označím x.

1 kyblík:

Anežka .... 2 h

Pepa .... 3 h

společně .... x h

1 hodina:

Anežka .... $\frac{1}{2}$

Pepa .... $\frac{1}{3}$

Anežka tedy naplní za hodinu polovinu a Pepa třetinu kyblíku.

Vytvořím rovnici s neznámou x.

Zbavím se zlomků a určím hodnotu x.

Nakonec převedu čas na hodiny a minuty.

Mám výsledek.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1 \quad |\cdot 6$$

$$3x + 2x = 6$$

$$5x = 6 \quad |: 5$$

$$x = \frac{6}{5}$$

$$\frac{6}{5} \cdot 60 = 6 \cdot 12 = 72$$

$$72 \text{ min} = 1 \text{ h } 12 \text{ min}$$

Kyblík by naplnili za 1 h 12 min.

Úloha č. 9

Týmu D trvalo dokončení úkolu o polovinu déle, než byl stanovený limit. Jak dlouho ve srovnání s limitem muselo trvat stejný úkol dokončit týmu E, pokud víte, že když oba týmy na prakticky identickém úkolu spolupracovaly v další části soutěži, dokončily ho přesně ve stanoveném limitu?

ELZA

Žádný údaj o délce limitu není v zadání napsaný.

Zvolím limit 20 minut.

Tým D dokázal úkol splnit za 30 minut.

Jako neznámou x označím dobu, za kterou tým E splnil úkol.

Vyjádřím jako část úkolu každý z týmu zvládl dokončit za 1 minutu.

Sestavím rovnici na společnou práci.

Nakonec určím, kolikrát je x větší než stanovený limit.

$$limit = 20 \text{ min}$$

úkol:

D ……… $20 + 10 \text{ min} = 30 \text{ min}$

E ………. x min

za 1 minutu:

D ……….. $\frac{1}{30}$ E ……….. $\frac{1}{x}$

společná práce:

$$\frac{1}{30} \cdot 20 + \frac{1}{x} \cdot 20 = 1$$

$$\frac{2}{3} + \frac{20}{x} = 1 \quad | \cdot 3x$$

$$2x + 60 = 3x \quad | - 2x$$

$$x = 60$$

$$\frac{60}{20} = 3$$

Týmu E muselo trvat dokončit úkol třikrát déle, než byl stanovený limit.

OLAF

Zkusím tuhle úlohu vyřešit pro obecný limit L.

Při řešení využiji přímé úměrnosti.

Tým D ze zadání dokončil úkol za tři poloviny limitu.

Tedy za limit by dokončil dvě třetiny úkolu.

Na tým E tak zbývá třetina úkolu, kterou má vyřešit v limitu.

Celý úkol by tak dokončil v trojnásobku limitu.

limit ……………. L

$$L + \frac{1}{2}L = \frac{3}{2}L$$

Tým D:

$\frac{3}{2}L$ ……………. 1 úkol

L ……………. $\frac{2}{3}$ úkolu

Tým E:

L ……… $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ úkolu

$3L$ …………………1 úkol

$$\frac{3L}{L} = 3$$

Týmu E muselo trvat dokončit úkol v trojnásobku stanoveného limitu.

Úloha č. 10

Uršula s Vilémem si našli letní brigádu ve fabrice. Jejich úkolem bylo kontrolovat součástky. Vilém za hodinu dokázal zkontrolovat 30 součástek, což bylo 1,5krát víc, než dokázala za stejný čas Uršula. Jak dlouho by oběma trvalo zkontrolovat všech 300 součástek, co jim z výroby přivezli?

ELZA

30 součástek vydělím 1,5.

Tím zjistím, kolik dokázala zkontrolovat Uršula.

Údaje zapíšu.

Oba společně dokážou za 1 hodinu zkontrolovat 50 součástek.

Přes přímou úměrnost zjistím, jak dlouhou dobu by jim zabrala kontrola všech součástek.

Dostávám, že 6 hodin.

$$30 : 1{,}5 = 300 : 15 = 20$$

za 1 hodinu:

V ……….. 30

U ………. 20

V + U ………… 30 + 20 = 50

1 hodina ………… 50 součástek

? hodin ………… 300 součástek

$$300 : 50 = 6$$

Když by pracovali společně, trvalo by jim zkontrolovat 300 součástek 6 hodin.

OLAF

Vilém ……… 30

Uršula …….. $30 \cdot 1{,}5 = 45$

přivezli ……….. 300

čas kontroly …….. x (hod)

za x hod:

Vilém ……… $30 \cdot x$

Uršula …….. $45 \cdot x$

rovnice:

$$30 \cdot x + 45 \cdot x = 300$$

$$75 \cdot x = 300 \quad | : 75$$

$$x = \frac{300}{75} = 4$$

Oběma by trvalo zkontrolovat 300 součástek 4 hodiny.

Nejdřív udělám zápis.

Uršula dokáže zkontrolovat 45 součástek za hodinu.

Čas, který budou potřebovat ke kontrole 300 součástek označím x.

V závislosti na x určím, kolik součástek každý dokáže zkontrolovat za x hodin.

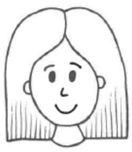
Sestavím příslušnou rovnici.

Mám výsledek.

Úloha č. 11

Rodina Houbových si v sobotu ráno přivstala a vyrazila na houby do nedalekého lesa. Děti sbíraly společně do košíku o objemu pět litrů, rodiče do košíku o objemu tři litry. Dětem se podařilo naplnit 80 % košíku, rodičům 60 %. Po cestě domů potkali houbaře, který se jim pochlubil, že se mu podařilo naplnit tři čtvrtiny velkého košíku o objemu osm litrů. Kdo nasbíral větší množství hub? Houbovi, nebo houbař?

KAZI



Udělám si tabulku, abych to všechno měla přehledně zaznamenáno. Napíšu do ní objemy košíků a podíly hub. V posledním sloupečku vypočítám, kolik litrů hub bylo v jednotlivých košících.

košík	objem	procenta	objem hub
děti	5	80 % = 0,8	$5 \cdot 0{,}8 = 4$
rodiče	3	60 % = 0,6	$3 \cdot 0{,}6 = 1{,}8$
společně	8	x %	4 + 1,8 = 5,8

Košíky Houbových mají společně stejný objem jako houbařův košík.

Určím přes trojčlenku, kolik procent by tvořily houby v houbařově košíku.

Převedu tři čtvrtiny na procenta.

Houbař nasbíral více.

Houbovi:

8 litrů .... 100 %

5,8 litrů .... x %

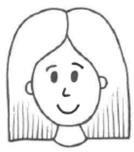
$$\frac{x}{100} = \frac{5{,}8}{8} = \frac{58}{80} = \frac{29}{40}$$

$$x = \frac{29}{40} \cdot 100 = \frac{2\,900}{40} = \frac{725}{10}$$

$$x = 72{,}5$$

Houbař:

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75 \rightarrow 75\ \%$$



Houbař nasbíral více hub než Houbovi.

BIVOJ

Košík houbaře má stejný objem jako oba košíky Houbových.

Určím, jaké množství hub nasbíral houbař a kolik Houbovi. Hodnoty poté porovnám.

Houbař houby:

$$8 : 4 = 2 \rightarrow 2 \cdot 3 = 6$$

Děti houby:

$$80\ \% \ldots\ldots \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$5 : 5 = 1 \rightarrow 1 \cdot 4 = 4$$

Rodiče houby:

$$60\ \% \ldots\ldots \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$3 : 5 = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5}$$

Houbovi:

$$4 + \frac{9}{5} = \frac{20 + 9}{5} = \frac{29}{5}$$

$$\frac{29}{5} < 6$$

Množství hub určím přes trojčlenku.

Vezmu zvlášť děti a rodiče.

Procenta si převedu na zlomky a množství určím opět přes trojčlenku.

Poté sečtu houby dětí a rodičů.

Vidím, že houbař nasbíral více hub.

Houbař nasbíral více hub než Houbovi.

Úloha č. 12

Pepa ví, že pero stojí v papírnictví o 1 korunu více než tužka. Jeho dobrý kamarád za 17 korun koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik korun bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky?

KAZI

V úloze nebudu používat žádné speciální značení, až na to, že pro koruny použiji zkratku k.

Zapíšu si, co vím.

Nejdřív zjistím, kolik stojí jedna tužka.

Jedna tužka bude stát tři koruny.

Jedno pero a dvě tužky budou stát stejně jako tři tužky a jedna koruna k tomu.

Tedy celkem 10 korun.

$$1\ pero = 1\ tužka + 1\ k$$

$$2\ pera + 3\ tužky = 17\ k$$

$$1\ pero + 2\ tužky = ?\ k$$

$$2\ pera + 3\ tužky = 2\ tužky + 2\ k + 3\ tužky = 5\ tužek + 2\ k = 17\ k$$

$$5\ tužek = 15\ k \longrightarrow \underline{\underline{1\ tužka = 3\ k}}$$

$$1\ pero + 2\ tužky = 1\ tužka + 1\ k + 2\ tužky = 3\ tužky + 1\ k$$

$$3\ tužky + 1\ k = 3 \cdot 3\ k + 1\ k = \underline{\underline{10\ k}}$$

Aby si mohl Pepa koupit 1 pero a 2 tužky, bude potřebovat 10 korun.

BIVOJ

Ceny pera a tužky po řadě označím p, t.

Zadání úlohy přepíšu do rovnic a úlohu budu řešit sčítací metodou.

Nejdříve zjistím, kolik stojí tužka.

Z ceny tužky lehce vypočítám cenu pera.

Nakonec vypočítám cenu za pomůcky, které Pepa potřebuje.

$$p = t + 1 \longrightarrow p - t = 1;$$

$$2p + 3t = 17; \quad p + 2t = ?$$

$$p - t = 1 \quad | : (-2)$$
$$2p + 3t = 17$$

$$-2p + 2t = -2$$
$$2p + 3t = 17$$

$$5t = 15 \longrightarrow t = 3$$

$$p = t + 1 \longrightarrow p = 4$$

$$p + 2t = 4 + 2 \cdot 3 = 10$$

Na zakoupení 1 pera a 2 tužek bude Pepa potřebovat 10 korun.

Úloha č. 13

Dostali jste za úkol připravit šťávu z malinového sirupu a vody pro celý tábor. Na sirupu o objemu 700 mililitrů je napsáno, že vystačí na celkem 7 litrů šťávy. Protože by však toto množství šťávy pro všechny nestačilo, rozhodli jste se smíchat sirup s dvojnásobným množstvím vody. Vyjádřete zlomkem v základním tvaru, jakou část šťávy tvoří sirup.

KAZI

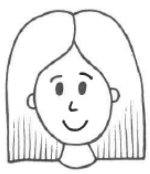
Nejdřív si převedu litry na mililitry, abych měla stejné jednotky.

Šťávy má být dvojnásobné množství.

Proto vynásobím dvěma.

Nyní vyjádřím, jakou část tvoří sirup ve šťávě.

Po zkrácení dostávám výsledek.



$$1\ \mathrm{l} = 1\,000\ \mathrm{ml}$$
$$\downarrow$$
$$7\ \mathrm{l} = 7\,000\ \mathrm{ml}$$

$$7\,000 \cdot 2 = 14\,000$$

$$\frac{700}{14\,000} = \frac{7}{140} = \frac{1}{20}$$

Sirup tvoří $\frac{1}{20}$ šťávy.

BIVOJ

$$7\ \mathrm{l} = 7\,000\ \mathrm{ml}$$

$$7\,000 - 700 = 6\,300$$

$$6\,300 \cdot 2 = 12\,600$$

sirup ………… 700 ml

voda ……. 12 600 ml

šťáva …… 13 300 ml

$$\frac{700}{13\,300} = \frac{7}{133} = \frac{1}{19}$$

Převedu litry na mililitry.

Vypočítám množsví vody v původních 7 litrech šťávy.

Poté ho vynásobím dvěma.

Sečtu objemy sirupu a vody, dostanu objem šťávy.

Nyní už jen vyřeším podíl objemů sirupu a šťávy.

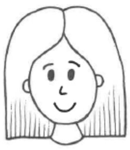
Zkrátím a dostávám výsledek.

Sirup tvoří $\frac{1}{19}$ šťávy.

Úloha č. 14

Na chalupě přestala téct teplá voda. Potřebujete umýt nádobí, ale teče jen studená o teplotě 10 °C. Chcete docílit vody ideálně o teplotě 40 °C. Napadlo vás uvařit část vody v rychlovarné konvici. V jakém poměru použijete studenou a vroucí vodu, abyste dosáhli požadované teploty?

KAZI



Nikde ani zmínka o tom, kolik litrů je studené nebo vroucí vody.

Třeba v naší rychlovarné konvici lze uvařit jeden litr vody.

Tuto hodnotu použiji pro výpočet. Udělám tabulku.

Do tabulky zapíšu pro jednotlivé vody objem a teplotu.

Množství studené vody označím x.

Úlohu budu dále řešit stejně, jako kdybych znala koncentrace.

Sestavím rovnici, určím hodnotu neznámé x.

Studené vody je dvakrát větší množství než vroucí vody.

voda	množství	teplota
studená	x	10
vroucí	1	100
směs	$x+1$	40

$$x \cdot 10 + 1 \cdot 100 = (x+1) \cdot 40$$

$$10x + 100 = 40x + 40 \quad | -10x$$

$$100 = 30x + 40 \quad | -40$$

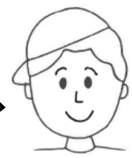
$$60 = 30x \quad | : 30$$

$$x = 2$$

Studené vody budou 2 litry.

Použiji studenou a vroucí vodu v poměru 2 : 1.

BIVOJ



Úlohu budu řešit fyzikálně.

Pro výpočet použiji kalorimetrickou rovnici.

Nejdřív si vedle sebe zapíšu známé údaje.

Označím je pro přehlednost indexy.

Výsledná voda má mít teplotu 40 °C.

Určím změny teplot, ke kterým dojde.

Teď už rovnici lehce sestavím a vyřeším.

Studená:	Vroucí:
$t_1 = 10$	$t_2 = 100$
m_1	m_2
$c = 4{,}18$	$c = 4{,}18$

Výsledná voda:

$$t = 40$$

Změna teplot:

1) $t - t_1 = 40 - 10 = 30$

2) $t_2 - t = 100 - 40 = 60$

$$Q_1 = Q_2$$

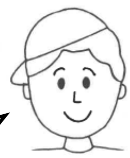
$$m_1 \cdot c \cdot (t - t_1) = m_2 \cdot c \cdot (t_2 - t)$$

$$m_1 \cdot 4{,}18 \cdot 30 = m_2 \cdot 4{,}18 \cdot 60 \quad | : 4{,}18$$

$$m_1 \cdot 30 = m_2 \cdot 60 \quad | : 30$$

$$m_1 = 2 \cdot m_2 \quad | : m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = 2$$



Do rovnice jsem postupně dosazoval známé hodnoty. Nakonec jsem určil vydělením výsledný poměr.

Studenou a vroucí vodu použiji v poměru 2 : 1.

Úloha č. 15

V prodejně cukrovinek prodávají červené bonbóny po 8 Kč za stogramový sáček. Stogramový sáček červených bonbónů je o 4 Kč levnější než stogramový sáček žlutých bonbónů. Paní prodavačka vzala 5 sáčků od každého druhu bonbónů, udělala z nich směs a prodávala ji na váhu. Kolik stálo 50 g této směsi?

BIVOJ

Cenu stogramového sáčku červených bonbónů si označím Č, stejného sáčku žlutých bonbónů Ž.

Teď udělám směs. Určím její hmotnost a cenu.

Teď vím, že 1000 gramů směsi stojí 60 Kč.

Přes přímou úměrnost určím cenu za 50 gramů.

Dostávám, že sáček bude stát 3 Kč.

cena 100 g červených .... Č

cena 100 g žlutých .... Ž

$$Č = 8$$

$$Ž = Č - 4 = 8 - 4 = 4$$

Směs:

1) hmotnost

$$5 \cdot 100 + 5 \cdot 100 = 1\,000$$

2) cena

$$5 \cdot Č + 5 \cdot Ž = 40 + 20 = 60$$

↑ 1000 g .... 60 Kč ↑

50 g .... x Kč

$$\frac{x}{60} = \frac{50}{1000} = \frac{1}{20}$$

$$x = \frac{1}{20} \cdot 60 = \frac{60}{20} = 3$$

$$x = 3$$

50 gramů směsi bonbónů stálo 3 Kč.

KAZI

Nejdřív určím, za kolik korun prodávají stogramový sáček žlutých bonbónů.

Sáček žlutých bonbónů je o 4 Kč dražší než sáček červených. Tedy stojí 12 Kč.

Ve směsi bude polovina červených a polovina žlutých bonbónů.

Tedy 50 g směsi tvoří 25 g červených a 25 g žlutých bonbónů.

25 g je jedna čtvrtina ze 100 g.

Ceny sáčků vydělím čtyřmi.

Nakonec je spolu sečtu.

červené .... 8 Kč

žluté .... ? Kč

žluté .... $8 + 4 = 12$

$$50 : 2 = 25$$

25 g je $\frac{1}{4}$ ze 100 g

červené:

$$8 : 4 = 2 \text{ Kč}$$

žluté:

$$12 : 4 = 3 \text{ Kč}$$

Cena 50 g směsi:

$$2 + 3 = 5 \text{ Kč}$$

50 gramů směsi červených a žlutých bonbónů stálo 5 Kč.

5.4 Komentáře žákovských řešení úloh

Úloha č. 1

Tristan řeší úlohu fyzikálně. Využívá faktu, že součet délek tras obou chlapců musí být roven délce celé trasy.

Izolda řeší úlohu úvahou pomocí přímé úměrnosti. Určuje, kolik kilometrů oba chlapci urazí za jednu hodinu, a následně tento údaj používá k určení času nutného pro celou trasu.

Úloha č. 2

Tristan řeší úlohu přes tabulku, ve které v závislosti na čase od tlesknutí určuje náskok, který má Ignác na Ninu. Chce zjistit, kdy bude tento náskok nulový, a namísto vypsání všech 11 řádků tabulky řeší lineární rovnici s neznámým časem.

Izolda řeší úlohu úvahou, že každou sekundu se Nina Ignácovi o nějaký kus přiblíží. Přibližuje se rychlostí, která je rovna rozdílu rychlostí obou aktérů.

Úloha č. 3

Tristan řeší úlohu pomocí nákresu. Určuje rychlosti pro obě poloviny trati a časy pro každou část zvlášť. Poté hodnoty sčítá a dostává správný výsledek.

Izolda, stejně jako Tristan, nejprve správně určuje rychlosti Jany v obou úsecích. Poté z těchto rychlostí vypočítává průměrnou rychlost, kterou ovšem chybně používá pro výpočet času.

Úloha č. 4

Izolda řeší absenci stavů (délky trasy a rychlostí) zvolením konkrétních hodnot. Na základě těchto hodnot v roli stavů určuje náskok, který musel Bedřich obdržet, a správně určuje, jakou část z celé dráhy náskok tvoří.

Tristan na základě správné úvahy o vztahu rychlostí a vzdáleností řeší úlohu bez zvolení čísel jako stavů. Přes úvahu a vhodný obrázek úlohu elegantně řeší.

Úloha č. 5

Tristan správně určuje Jirkovu průměrnou rychlost. Poté se však chybně na základě spojení „o polovinu kratší“ rozhoduje polovinu trasy odečítat namísto přičítat, čímž dostane nesprávný výsledek.

Izolda řeší úlohu pomocí obrázku, na němž vyznačuje obě trasy. Správně interpretuje spojení „o polovinu kratší“ a užívá vhodnou operaci. Čas určuje jako podíl dráhy a průměrné rychlosti.

Úloha č. 6

Olaf nejpve pro každou dívku určuje, kolik udělá sedů lehů za minutu. Potom výkony všech dívek sčítá a přes trojčlenku vyjádřuje, za jak dlouho jich udělají 120.

Elza pro každou z dívek zvlášť určuje, kolik udělá sedů lehů za sekundu. Sestavuje rovnici s neznámou x, která označuje celkový čas, který budou dívky k vykonání 120 sedů lehů potřebovat.

Úloha č. 7

Elza při řešení využívá nejmenšího společného násobku časů, za které stihnou jak tatínek, tak Jenda posekat celou zahradu. Přes přímou úměrnost zjišťuje, že za 6 hodin by společně posekali 7 zahrad, ale zajímá ji pouze jedna. To už snadno vyjádřuje opět přes přímou úměrnost.

Olaf nechává teoreticky sekat tatínka i Jendu dvě hodiny. Zjišťuje, že za tuto dobu by posekali sedm třetin zahrady. Obdobně jako Elza určuje výsledek přes přímou úměrnost vydělením dvou hodin sedmi třetinami.

Úloha č. 8

Olaf nejprve sčítá časy, za něž nasbírají Anežka i Pepa každý jeden kyblík. V jeho řešení však nepracují oba současně, ale jeden po druhém, a proto je jeho řešení chybné.

Elza řeší úlohu přes rovnici. Za neznámou x si zvolí čas, za který společně nasbírají jeden kyblík, a vyjádří si výkony obou aktérů za hodinu. Sestaví a vyřeší správně rovnici.

Úloha č. 9

Elza si za chybějící stav v úloze volí limit 20 minut a od této hodnoty správně odvíjí další řešení. Úlohu poté řeší rovnicí s neznámým časem, za jak dlouho trvalo týmu E dokončení úkolu. Vychází jí 60 minut, které správně dělí 20 minutami.

Olaf řeší úlohu pro obecný limit L. Zjišťuje, že v limitu stihl tým D dokončit dvě třetiny úkolu, a tak na tým E zbývá jedna třetina. Pro řešení používá přímou úměrnost.

Úloha č. 10

Elza správně interpretuje spojení „1,5krát víc“ a 30 součástek dělí číslem 1,5. Poté určuje, kolik součástek společně zkontrolují za jednu hodinu, a přes přímou úměrnost porovnává se 300 součástkami.

Olaf spojení interpretuje chybně a násobí. Poté vyjadřuje, kolik součástek zkontroluje každý sám za x hodin, a řeší rovnici s neznámou x.

Úloha č. 11

Kazi řeší úlohu přes tabulku, kde na základě procent určuje, kolik litrů hub nasbírala rodina Houbových. V procentech vyjadřuje, jakou část tvoří z osmilitrového košíku, a porovnává ji s houbařem.

Bivoj počítá, jaké množství hub nasbíral houbař a společně celá rodina Houbových. Při výpočtech používá trojčlenku a na konci porovnává jednotlivá množství.

Úloha č. 12

Kazi nepoužívá speciální značení proměnných a úlohu řeší substitucí. Dvakrát používá nahrazení ceny pera cenou tužky a jednou korunou. Zjišťuje cenu jedné tužky a poté Pepova nákupu. Při řešení neurčuje cenu pera.

Bivoj řeší úlohu sčítací metodou, proměnné si označuje písmeny. Zjišťuje cenu tužky a na jejím základě určuje cenu pera. S těmito konrétními hodnotami dopočítává cenu za celý nákup.

Úloha č. 13

Kazi si raději správně převádí litry na mililitry, aby nemusela pracovat s desetinnými čísly. Poté chybně násobí dvěma množství šťávy namísto vody.

Bivoj stejně jako Kazi převádí na mililitry. Následně určuje, kolik vody je ve šťávě o objemu 7 litrů, a toto množství správně násobí dvěma. Poté počítá, jaký objem má nová šťáva, a touto hodnotou dělí objem sirupu.

Úloha č. 14

Kazi řeší absenci stavu (množství vroucí vody) volbou konkrétní hodnoty. Množství studené vody označuje neznámou x a z tabulky sestavuje rovnici. Množství studené vody nezapomíná správně poměřit se svou volbou množství vroucí vody.

Bivoj řeší úlohu fyzikálně přes sestavení kalorimetrické rovnice a pro obecné hodnoty hmotností studené a vroucí vody. Při řešení rovnice správně určuje poměr množství studené a vroucí vody.

Úloha č. 15

Bivoj chybně na základě slova „levnější“ odčítá namísto přičtení. Zbytek úlohy řeší tak, že na základě hmotnosti celé směsi a její ceny určí přes trojčlenku cenu sáčku směsi o hmotnosti 50 gramů.
Kazi správně přičítá namísto odčítání. Přichází s myšlenkou, že bonbóny obou druhů budou ve směsi stejně zastoupeny, a tak určuje, kolik stojí 25 gramů od každého druhu, a tyto ceny sčítá.

5.5 Návrh na implementaci ve výuce

Na základě doporučení, jak porovnávat řešitelské strategie v řešených úlohách (viz oddíl 3.4), jsem vytvořil konkrétní návrh, jak by mohl učitel postupovat při práci s pracovními listy ve výuce:

1. Učitel vybere konkrétní typ úlohy (např. úlohu o společné práci), zadá žákům dvě úlohy tohoto typu a vyzve je, aby se je v menších skupinách nebo individuálně pokusili řešit bez jeho pomoci[15].

2. Poté, co si žáci úlohy rozmyslí a pokusí se je řešit, jim dá učitel možnost prezentovat ostatním strategie řešení některé z nich. Pokud žáci na správný postup nepřijdou sami či nechtějí své postupy prezentovat, učitel jim ukáže nějakou svoji strategii řešení.

[15] Tento přístup, kdy učitel žákům nepomáhá, nýbrž je pouze povzbuzuje, nazývá M. Kapur (2010) produktivní selhání (‚productive failure‘). Výsledky jeho studií ukázaly, že při řešení komplexních problémů jsou žáci, kteří se nejprve pokoušeli o řešení samostatně, úspěšnější než žáci, kterým učitel postup řešení představil (viz např. Kapur, 2010). Dodejme, že přestože by vytvořené úlohy na pracovních listech Kapur zřejmě označil za dobře strukturované (‚well-structured‘), a nikoli za komplexní, má přístup produktivního selhání obecně pozitivní vliv na porozumění žáků (viz např. Kapur, 2014).

3. Následně žáky rozdělí do dvojic a každé dvojici dá pracovní list pro danou úlohu. Vyzve žáky, aby jednotlivé řešitelské strategie porovnávali a všímali si, v čem se strategie liší, která z nich je lepší, zda obsahují chyby apod.
4. Poté se o strategiích bude diskutovat v rámci celé třídy. V diskuzi mohou učitelé využít návrhy otázek z oddílu 5.6.
5. Po diskuzi dostanou žáci do dvojic rozpůlené čisté papíry formátu A4 a budou jim zadány úlohy k řešení. Žáci budou vyzváni, aby ve dvojicích řešili stejnou úlohu, ale každý z nich samostatně na své polovině papíru. Papíry si žáci mohou podepsat svým nebo vymyšleným jménem, nebo se podepisovat nemusí.
6. Až bude mít některý žák vyřešeno, učitel si jeho řešení vezme s tím, že může zatím řešit další úlohu. Pokud bude mít vybráno dostatek žákovských strategii ke konkrétním úlohám, vyzve žáky, aby řešení úloh přerušili.
7. Učitel rozdá náhodně do každé dvojice dvě poloviny papíru (tedy dvě řešení) a dále pokračuje krokem 4.

Tato aktivita s velkou pravděpodobností zabere více než jednu vyučovací hodinu. Není ale problém nechat žáky vypracovat své strategie řešení doma a následně o nich diskutovat na další hodině.

5.6 Návrhy otázek s některými odpověďmi

Úloha č. 1

- Jak řešili úlohu Tristan a Izolda?
- Který ze způsobů je lepší?
- V jakém poměru jsou trasy obou kamarádů? *[Ve stejném jako jejich rychlosti, 2,6 : 10 (13 : 50).]*

Úloha č. 2

- Jak byste úlohu řešili vy?
- K jaké rovnici by došel stejným postupem Tristan pro obecné rychlosti v_1, v_2 a náskok D? *[*$D + v_1 t - v_2 t = 0$*; kde* $v_1 < v_2$*]*
- Proč lze úlohu řešit oběma způsoby?

Úloha č. 3

- Které řešení úlohy je správné? *[Tristanovo.]*
- Pokud by se tempo Jany změnilo o čtvrtinu místo o pětinu, kdo by obdržel stejný výsledek? *[Izolda.]*
- Kde se stala chyba? *[V nesprávném předpokladu, že průměrná rychlost je průměr rychlostí.]*

Úloha č. 4

- Není divné, že si Izolda mohla zvolit délku trasy i rychlost jednoho z kamarádů? Co kdyby si zvolila jinou hodnotu? *[Izolda si mohla zvolit jakoukoli jinou nenulovou délku trasy a rychlost, protože správně určuje poměr mezi náskokem a délkou celé trasy.]*
- Máte nějaký jiný způsob řešení?

Úloha č. 5

- Kdo z vás by úlohu řešil podobně jako Tristan nebo Izolda? Máte jiné způsoby řešení?
- Jak je možné, že oběma nevyšlo stejné řešení? Kde se stala chyba? *[Tristan si zřejmě přečetl úlohu nepozorně a chybně odčítá, místo aby přičítal.]*

Úloha č. 6

- Jak úlohu řešili Olaf a Elza?
- Který ze způsobů je lepší?
- Napadá vás ještě nějaký jiný způsob řešení?

Úloha č. 7

- Proč použila Elza nejmenší společný násobek? *[Je to nejkratší doba, za kterou oba zvládnou posekat určitý počet celých zahrad.]*
- V čem jsou oba způsoby podobné? *[Oba žáci počítali, kolik zahrad by teoreticky posekali za určitou dobu.]*
- Lze úlohu řešit ještě jinak?

Úloha č. 8

- Které řešení úlohy je správné? *[Elzino.]*
- Co vlastně vypočítal při svém řešení Olaf? *[Vypočítal průměrný čas, za který nasbírají jeden kyblík, pokud nepracují současně, ale po sobě.]*
- Kde se stala chyba? *[Olaf neuvažoval, že pracují společně najednou.]*

Úloha č. 9

- Jak byste úlohu řešili vy?
- Napadá vás, jak by bylo možné jinak odpovědět na otázku ze zadání? *[např. „O dva limity déle." atd.]*
- Proč Elza neodpověděla, že to týmu E trvalo 60 minut? *[V zadání se nevyskytuje limit 20 minut, jenž Elza použila.]*

Úloha č. 10

- Jak je možné, že oběma nevyšlo stejné řešení? Kde se stala chyba? *[Olaf si zřejmě přečetl úlohu nepozorně a chybně násobí, místo aby dělil.]*

- Vedl by Olafův způsob ke správnému řešení, pokud by četl zadání pozorněji? *[Pokud by neudělal početní chybu, pak ano.]*

Úloha č. 11

- Který ze způsobů řešení je lepší?
- V čem se oba způsoby shodují? *[Oba žáci vypočítali množství hub, které nasbírali Houbovi.]*
- Kolik procent košíku by musely děti naplnit, aby měly spolu s rodiči stejně hub jako houbař? *[85 %.]*

Úloha č. 12

- Jak byste úlohu řešili vy?
- V čem se jednotlivé způsoby řešení liší? *[Ve značení proměnných. Kazi určila cenu nákupu bez výpočtu ceny pera. Kazi řešila úlohu substitucí a Bivoj řešil sčítací metodou.]*
- Bylo nutné dopočítat cenu pera? *[Nebylo (viz Kazino řešení).]*

Úloha č. 13

- Které řešení úlohy je správné? *[Bivojovo.]*
- Kde se stala chyba? *[Kazi násobila dvěma objem celé šťávy namísto objemu vody.]*

Úloha č. 14

- Jak byste řešili úlohu vy?
- Proč Kazi neodpověděla, že budou potřeba 2 litry studené vody? *[Otázka je zaměřena na poměr.]*
- Dokázali byste vymyslet zadání podobné úlohy, v níž by Kazi nebo Bivojovi vyšel nesprávný výsledek? *[Př.: Kdybychom měli vroucí vodu a led, pak by postup Kazi nebyl správný, protože led má jinou měrnou tepelnou kapacitu než studená voda.]*

Úloha č. 15

- Kdo z vás by úlohu řešil podobně jako Kazi nebo Bivoj? Máte jiné způsoby?
- V jednom z řešení se musela stát chyba. Kde? *[Chyba se stala v Bivojově interpretaci slova „levnější“.]*

6 Závěr

Cílem práce bylo vytvořit pracovní listy pro žáky, které budou sestávat z concept cartoons, v nichž budou hypotetičtí žáci předkládat svá řešení typové slovní úlohy, a současně navrhnout, jak je implementovat ve výuce. Tento cíl se podařilo splnit. Originálních pracovních listů bylo vytvořeno celkem patnáct, pět pro každý druh typové slovní úlohy (viz oddíl 5.3). Konkrétní návrh jejich implementace ve výuce byl na základě prostudované literatury představen v oddílu 5.5.

Analýza vybraných českých učebnic matematiky pro 2. stupeň ZŠ v kapitole 4 ukázala, že (nejen typové) slovní úlohy řešené alespoň dvěma způsoby, které by mezi sebou žáci mohli porovnávat, se v těchto učebnicích prakticky nevyskytují. Přínos práce proto spatřuji v tom, že vytvořené pracovní listy spolu s návrhem jejich implemetace ve výuce, komentáři žákovských řešení (viz oddíl 5.4) a otázkami pro třídní diskuzi (viz oddíl 5.6) mohou nejen začínajícím učitelům poskytnout užitečný nebo motivační materiál při probírání typových slovních úloh, které patří do kritických míst matematiky.

Nabízí se několik možností, jak tuto bakalářskou práci rozšířit či jak dále pokračovat. První možnost spočívá ve vytvoření dalších slovních úloh a pracovních listů, které by poskytovaly žákům možnost jednotlivé strategie porovnávat. V metodickém materiálu (Vondrová et al., 2020) je v rámci 7. kapitoly uvedeno hned 30 úloh se dvěma žákovskými strategiemi, které tematicky pokrývají látku matematiky na 2. stupni základní školy. Myslím, že by mohlo být též přínosné zaměřit se při vypracovávání pracovních listů na další kritická místa v matematice, jako např. na zlomky[16] nebo míru v geometrii[17].

V důsledku pandemie koronaviru SARS-CoV-2 v České republice a povinností škol přejít z prezenční na distanční výuku z velké části vymizely z hodin situace, v nichž spolužáci mezi sebou navzájem sdílí svá řešení úloh a prezentují je poté zbytku třídy, která má možnost je mezi sebou porovnávat. Druhou možnost proto spatřuji v tom, že by tyto a další vytvořené pracovní listy mohly učiteli posloužit jako učební pomůcka v situacích, kdy chce třídě prezentovat více způsobů řešení jinou formou, než aby je představil např. na tabuli jednu po druhé apod. Podobně by bylo možné pomocí jednoduché animace procházet jednotlivé řešitelské kroky hypotetických žáků jeden po druhém spolu s kladením doplňujících otázek, aby tyto řešené úlohy nebyly pouze „statické“.

Konečně přirozeným pokračováním práce by bylo vyzkoušení pracovních listů přímo s žáky. To by mohlo být vhodné téma pro diplomovou práci.

[16] Viz např. článek https://www.nadacecs.cz/profesor-hejny-pripravil-online-kurz-pro-porozumeni-zlomkum, (Rendl et al., 2013, s. 73–79) nebo (Vondrová et al., 2015, s. 181–252).

[17] Viz např. (Vondrová et al., 2015, s. 253–318) nebo https://www.youtube.com/watch?v=BsnxZu8obV4.

Seznam literatury

DURKIN, Kelley, Jon R. STAR a Bethany RITTLE-JOHNSON. Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: lessons learned and next steps. *ZDM* [online]. 2017, **49**(4), 585–597 [cit. 2020-08-09]. DOI: 10.1007/s11858-017-0853-9.

GENTNER, Dedre, Jeffrey LOEWENSTEIN a Leigh THOMPSON. Learning and transfer: A general role for analogical encoding. *Journal of Educational Psychology* [online]. 2003, **95**(2), 393–408 [cit. 2020-08-07]. DOI: 10.1037/0022-0663.95.2.393.

HEJNÝ, Milan. Zmocňování se slovní úlohy. *Pedagogika* [online]. 1995, **45**(4), 386–399 [cit. 2020-08-17]. Dostupné z: https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?attachment_id=3231&edmc=3231

KAPUR, Manu. Productive failure in learning math. *Cognitive Science* [online]. 2014, **38**(5), 1008-1022 [cit. 2021-02-22]. DOI:10.1111/cogs.12107.

KAPUR, Manu. Productive failure in mathematical problem solving. *Instructional Science* [online]. 2010, **38**(6), 523-550 [cit. 2021-02-22]. DOI:10.1007/s11251-009-9093-x.

KEOGH, Brenda a Stuart NAYLOR. Concept cartoons, teaching and learning in science: an evaluation. *International Journal of Science* Education [online]. 1999, **21**(4), 431–446 [cit. 2020-09-07]. DOI: 10.1080/095006999290642.

KEOGH, Brenda a Stuart NAYLOR. *Starting Points for Science*. Cheshire: Millgate House Publishers, 1997.

KILPATRICK, Jeremy, Jane SWAFFORD a Bradford FINDEL, ed. *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press, 2001. ISBN 0-309-06995-5.

KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-04-23753-3.

NAMY, Laura L. a Dedre GENTNER. Making a silk purse out of two sow's ears: Young children's use of comparison in category learning. *Journal of Experimental Psychology: General* [online]. 2002, **131**(1), 5–15 [cit. 2020-08-07]. DOI: 10.1037/0096-3445.131.1.5.

NAYLOR, Stuart a Brenda KEOGH. Constructivism in Classroom: Theory into Practice. *Journal of Science Teacher Education* [online]. 2017, **10**(2), 93–106 [cit. 2020-09-07]. DOI: 10.1023/A:1009419914289.

NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2000. Kapitoly z didaktiky matematiky. ISBN 80-7290-011-0.

OAKES, Lisa M. a Rebecca J. RIBAR. A Comparison of Infants' Categorization in Paired and Successive Presentation Familiarization Tasks. *Infancy* [online]. 2005, **7**(1), 85–98 [cit. 2020-08-07]. DOI: 10.1207/s15327078in0701_7.

PÓLYA, György. *Jak to řešit?: překvapivé aspekty (nejen) matematických metod*. Praha: MatfyzPress, 2016. ISBN 978-80-7378-325-9.

Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000. ISBN 0-87353-480-8.

RENDL Miroslav, Naďa VONDROVÁ, Lenka HŘÍBKOVÁ, Darina JIROTKOVÁ, Jaroslava KLOBOUČKOVÁ, Ladislav KVASZ, Anna PÁCHOVÁ, Isabella PAVELKOVÁ, Irena SMETÁČKOVÁ, Eliška TAUCHMANOVÁ a Jana ŽALSKÁ. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013. ISBN 978-80-7290-723-6.

REUSSER, Kurt. From situation to equation. On formulation, understanding and solving „Situation problems“. *Technical report no. 143*. Colorado: University of Colorado, Institute of Cognitive Science, 1985.

REUSSER, Kurt. Kognitive Modellierung von Text-, Situations- und mathematischem Verständnis beim Lösen von Textaufgaben. In: REISS, K., M. REISS a H. SPANDL (Hrsg.). *Maschinelles Lernen: Modellierung von Lernen mit Maschinen* [online]. Berlin: Springer-Verlag, 1992, 225–249 [cit. 2020-09-16]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/300041570

RITTLE-JOHNSON, Bethany a Jon R. STAR. Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology* [online]. 2009, **101**(3), 529–544 [cit. 2020-08-09]. DOI: 10.1037/a0014224.

RITTLE-JOHNSON, Bethany a Jon R. STAR. Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology* [online]. 2007, **99**(3), 561–574 [cit. 2020-08-09]. DOI: 10.1037/0022-0663.99.3.561.

RITTLE-JOHNSON, Bethany, Jon R. STAR a Kelley DURKIN. The importance of prior knowledge when comparing examples: Influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology* [online]. 2009, **101**(4), 836–852 [cit. 2020-08-09]. DOI: 10.1037/a0016026.

RITTLE-JOHNSON, Bethany, Robert S. SIEGLER a Martha Wagner ALIBALI. Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology* [online]. 2001, **93**(2), 346–362 [cit. 2020-08-08]. DOI: 10.1037/0022-0663.93.2.346.

SILVER Edward A., Hala GHOUSSEINI, Dana GOSEN, Charalambos CHARALAMBOUS a Beatriz T. FONT STRAWHUN. Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *The Journal of Mathematical Behavior* [online]. 2005, **24**(3-4), 287–301 [cit. 2020-08-07]. DOI: 10.1016/j.jmathb.2005.09.009.

STAR, Jon R. a Bethany RITTLE-JOHNSON. It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology* [online]. 2009, **102**(4), 408–426 [cit. 2020-08-09]. DOI: 10.1016/j.jecp.2008.11.004.

STAR, Jon R. Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education* [online]. 2005, **36**(5), 404–411 [cit. 2020-08-14]. Dostupné z: http://www.jstor.org/stable/30034943

VONDROVÁ, Naďa, Miroslav RENDL, Radka HAVLÍČKOVÁ, Lenka HŘÍBKOVÁ, Anna PÁCHOVÁ a Jana Žalská. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3234-6.

VONDROVÁ, Naďa. *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2019. ISBN 978-80-7603-109-8.

VONDROVÁ Naďa, Radka HAVLÍČKOVÁ, Milada HIRSCHOVÁ, Martin CHVÁL, Jarmila NOVOTNÁ, Anna PÁCHOVÁ, Irena SMETÁČKOVÁ, Martina ŠMEJKALOVÁ a Veronika TŮMOVÁ. *Matematická slovní* *úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2019. ISBN 978-80-246-4516-2.

VONDROVÁ Naďa, Martina ŠMEJKALOVÁ, Jarmila NOVOTNÁ, Radka HAVLÍČKOVÁ, Anna PÁCHOVÁ, Irena SMETÁČKOVÁ, Alena SIGMUNDOVÁ, Milada HIRSCHOVÁ a Martin CHVÁL. *Slovní úlohy ve výuce matematiky a českého jazyka: Metodický materiál pro učitele* [online]. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, 2020 [cit. 2020-10-03]. Dostupné z: https://suma-jcmf-cz.webnode.cz/_files/200000134-e315ae315c/Slovn%C3%AD%20%C3%BAlohy%20-%20metodick%C3%BD%20materi%C3%A1l%20pro%20u%C4%8Ditele%20M%20a%20%C4%8CJ.pdf

WOODWARD, John, Sybilla BECKMANN, Mark DRISCOLL, Megan FRANKE, Patricia HERZIG, Asha JITENDRA, Kenneth R. KOEDINGER a Philip OGBUEHI. *Improving mathematical problem solving in grades 4 through 8* [online]. Revised. Washington, DC: Institute of Education Sciences, 2018 [cit. 2020-08-16]. Dostupné z: http://ies.ed.gov/ncee/wwc/publications_reviews.aspx#pubsearch/

Seznam použitých učebnic a příruček (knížek) pro učitele

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6: aritmetika, geometrie : příručka učitele pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2007a. ISBN 978-80-7238-658-1.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6: pro základní školy a víceletá gymnázia. Aritmetika*. Plzeň: Fraus, 2007b. ISBN 978-80-7238-654-3.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6: pro základní školy a víceletá gymnázia. Geometrie*. Plzeň: Fraus, 2007c. ISBN 978-80-7238-656-7.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 7: aritmetika, geometrie : příručka učitele pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2008a. ISBN 978-80-7238-683-3.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 7: pro základní školy a víceletá gymnázia. Aritmetika*. Plzeň: Fraus, 2008b. ISBN 978-80-7238-679-6.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 7: pro základní školy a víceletá gymnázia. Geometrie*. Plzeň: Fraus, 2008c. ISBN 978-80-7238-681-9.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 8: aritmetika, geometrie : příručka učitele pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2009a. ISBN 978-80-7238-688-8.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia. Aritmetika*. Plzeň: Fraus, 2009b. ISBN 978-80-7238-684-0.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia. Geometrie*. Plzeň: Fraus, 2009c. ISBN 978-80-7238-686-4.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: aritmetika, geometrie : příručka učitele pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2010a. ISBN 978-80-7238-693-2.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia. Algebra*. Plzeň: Fraus, 2010b. ISBN 978-80-7238-689-5.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia. Geometrie*. Plzeň: Fraus, 2010c. ISBN 978-80-7238-691-8.

HEJNÝ, Milan a Pavel ŠALOM. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda F*. Praha: H-mat, 2018. ISBN 978-80-88247-06-7.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM a Daniel VYBÍRAL. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda D*. Praha: H-mat, 2017a. ISBN 978-80-905756-8-4.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ, Anna SUKNIAK, Eva BOMEROVÁ a Kateřina EICHLEROVÁ. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda A*. Praha: H-mat, 2015a. ISBN 978-80-905756- 0-8.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ, Anna SUKNIAK a Kateřina EICHLEROVÁ. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda B*. Praha: H-mat, 2015b. ISBN 978-80-905756-1-5.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Jana HANUŠOVÁ, Darina JIROTKOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda AB, příručka učitele*. Praha: H-mat, 2015c. ISBN 978-80-905756-2-2.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Jana HANUŠOVÁ, Darina JIROTKOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda CD, příručka učitele*. Praha: H-mat, 2017a. ISBN 978-80-905756-9-1.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Jana HANUŠOVÁ, Darina JIROTKOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda EF, příručka učitele*. Praha: H-mat, 2019b. ISBN 978-80-905756-2-2.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Tatiana KÁROVÁ, Lenka VOJTEKOVÁ, Daniel VYBÍRAL, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda C*. Praha: H-mat, 2016. ISBN 978-80-905756-3-9.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Tatiana KÁROVÁ, Lenka VOJTEKOVÁ, Daniel VYBÍRAL, Jana HANUŠOVÁ a Anna SUKNIAK. *Matematika: pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia: Hejného metoda E*. Praha: H-mat, 2017b. ISBN 978-80-88247-00-5.

MOLNÁR, Josef et al. *Matematika 6: učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc: Prodos, 1998a. ISBN 80-7230-000-8.

MOLNÁR, Josef et al. *Matematika 7: učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc: Prodos, 1999a. ISBN 80-7230-031-8.

MOLNÁR, Josef et al. *Matematika 6*. Olomouc: Prodos, 1998b. ISBN 80-85806-98-3.

MOLNÁR, Josef et al. *Matematika 7*. Olomouc: Prodos, 1999b. ISBN 80-7230-032-6.

MOLNÁR, Josef et al. *Matematika 8*. Olomouc: Prodos, 2000a. ISBN 80-7230-062-8.

MOLNÁR, Josef et al. *Matematika 8: učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc: Prodos, 2000b. ISBN 80-7230-061-X.

MOLNÁR, Josef et al. *Matematika 9*. Olomouc: Prodos, 2001a. ISBN 80-7230-109-8.

MOLNÁR, Josef et al. *Matematika 9: učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc: Prodos, 2001b. ISBN 80-7230-108-X.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Knížka pro učitele k učebnicím matematiky pro 6. ročník základní školy*. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-100-0.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Knížka pro učitele k učebnicím matematiky pro 7. ročník základní školy*. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-145-0.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Knížka pro učitele k učebnicím matematiky pro 8. ročník základní školy*. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-197-3.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Knížka pro učitele k učebnicím matematiky pro 9. ročník základní školy*. Praha: Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-228-7.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy. (1), Opakování z aritmetiky a geometrie*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2010a. ISBN 978-80-7196-410-0.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy. (2), Desetinná čísla, dělitelnost*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2010b. ISBN 978-80-7196-414-8.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy. (3), Úhel, trojúhelník, osová souměrnost, krychle a kvádr*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2011a. ISBN 978-80-7196-416-2.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy. (1), Zlomky, celá čísla, racionální čísla*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2011b. ISBN 978-80-7196-423-0.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy. (2), Poměr, přímá a nepřímá úměrnost, procenta*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2011c. ISBN 978-80-7196-427-8.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy. (3), Shodnost, středová souměrnost, čtyřúhelníky, hranoly*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012a. ISBN 978-80-7196-430-8.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy. (1), Mocniny a odmocniny, Pythagorova věta, Výrazy*. 2., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012b. ISBN 978-80-7196-434-6.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy. (2), Lineární rovnice, základy statistiky*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012c. ISBN 978-80-7196-435-3.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy. (3), Kruh, kružnice, válec, konstrukční úlohy*. 2., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2013a. ISBN 978-80-7196-436-0.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník základní školy. (1), Soustavy rovnic, funkce, lomené výrazy*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2013b. ISBN 978-80-7196-439-1.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník základní školy. (2), Jehlan, kužel, koule, podobnost, goniometrické funkce*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2013c. ISBN 978-80-7196-441-4.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník základní školy. (3), Finanční matematika*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-442-1.

PŮLPÁN, Zdeněk et al. *Matematika 6 pro základní školy. Aritmetika*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007a. ISBN 978-80-7235-364-4.

PŮLPÁN, Zdeněk et al. *Matematika 6 pro základní školy. Geometrie*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007b. ISBN 978-80-7235-365-1.

PŮLPÁN, Zdeněk et al. *Matematika 7 pro základní školy. Aritmetika*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2008a. ISBN 978-80-7235-398-9.

PŮLPÁN, Zdeněk et al. *Matematika 7 pro základní školy. Geometrie*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2008b. ISBN 978-80-7235-399-6.

PŮLPÁN, Zdeněk et al. *Matematika 8 pro základní školy. Algebra*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2009a. ISBN 978-80-7235-419-1.

PŮLPÁN, Zdeněk et al. *Matematika 8 pro základní školy. Geometrie*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2009b. ISBN 978-80-7235-421-4.

PŮLPÁN, Zdeněk et al. *Matematika 9 pro základní školy. Algebra*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010a. ISBN 978-80-7235-487-0.

PŮLPÁN, Zdeněk et al. *Matematika 9 pro základní školy. Geometrie: s rozšířením o kapitoly statistika a pravděpodobnost pro zájemce*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010b. ISBN 978-80-7235-489-4.

ROSECKÁ, Zdena a Arnošt MÍČEK. *Geometrie: učebnice pro 9. ročník*. Brno: Nová škola, 2000. ISBN 80-728-9020-4.

ROSECKÁ, Zdena a Vladimíra ČUHAJOVÁ. *Aritmetika: učebnice pro 6. ročník*. Brno: Nová škola, 1997. ISBN 80-85607-54-9.

ROSECKÁ, Zdena a Vladimíra ČUHAJOVÁ. Aritmetika: učebnice pro 7. ročník. Brno: Nová škola, 1998. ISBN 80-85607-74-3.

ROSECKÁ, Zdena a Arnošt MÍČEK. *Geometrie pro 8. ročník*. Brno: Nová škola, 1999. ISBN 80-85607-93-X.

ROSECKÁ, Zdena et al. *Algebra: učebnice pro 9. ročník*. Brno: Nová škola, 2000. ISBN 80-7289-024-7.

ROSECKÁ, Zdena. *Algebra: učebnice pro 8. ročník*. Brno: Nová škola, 1999. ISBN 80-85607-92-1.

ROSECKÁ, Zdena. *Geometrie: učebnice pro 6. ročník*. Brno: Nová škola, 1997. ISBN 80-85607-53-0.

ROSECKÁ, Zdena. *Geometrie: učebnice pro 7. ročník*. Brno: Nová škola, 1998. ISBN 80-85607-75-1.

ŠAROUNOVÁ, Alena et al. *Matematika 6. I. díl*. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-022-5.

ŠAROUNOVÁ, Alena et al. *Matematika 6. II. díl.* Praha: Prometheus, 1997a. ISBN 80-7196-059-4.

ŠAROUNOVÁ, Alena et al. *Matematika 7. I. díl*. Praha: Prometheus, 1997b. ISBN 80-7196-085-3.

ŠAROUNOVÁ, Alena et al. *Matematika 7. II. díl*. Praha: Prometheus, 1998a. ISBN 80-7196-106-X.

ŠAROUNOVÁ, Alena et al. *Matematika 8. I. díl*. Praha: Prometheus, 1998b. ISBN 80-7196-124-8.

ŠAROUNOVÁ, Alena et al. *Matematika 8. II. díl*. Praha: Prometheus, 1998c. ISBN 80-7196-127-2.

ŠAROUNOVÁ, Alena et al. *Matematika 9. I. díl*. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-155-8.

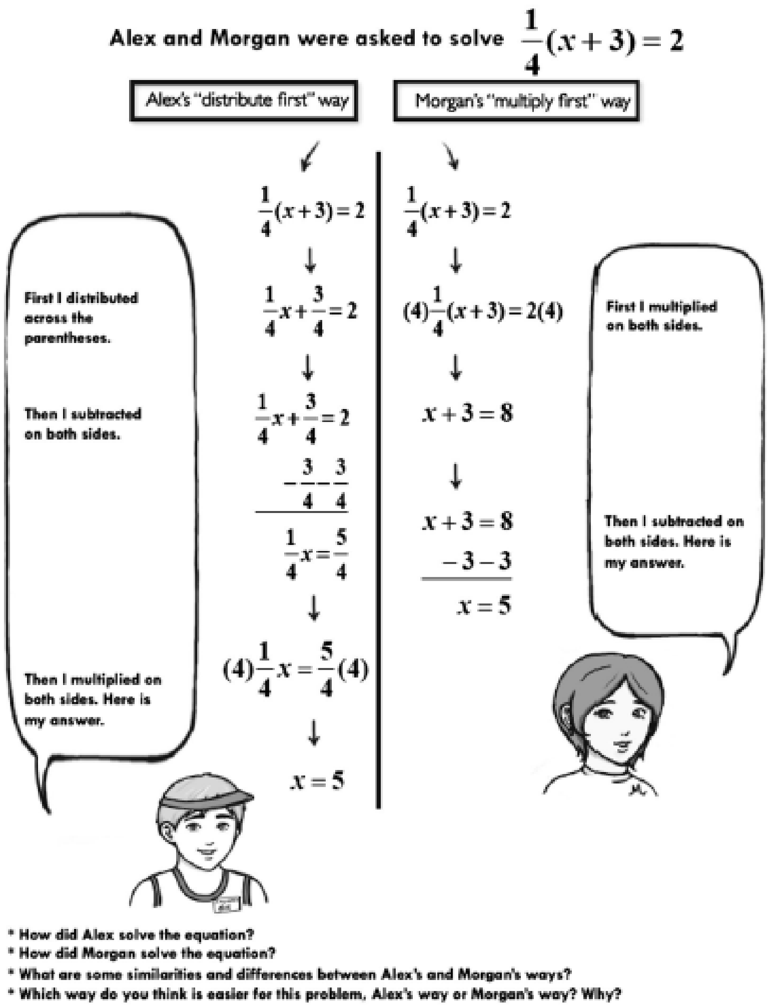
ŠAROUNOVÁ, Alena et al. *Matematika 9. II. díl*. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-175-2.

Přílohy

Příloha A

Ukázka úlohy typu *concept cartoon* na téma teplo (Keogh a Naylor, 1997)

Příloha B



Ilustrace úlohy řešené dvěma hypotetickými žáky (Durkin, Star a Rittle-Johnson, 2017, s. 590)