MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Zuzana Teichmannová

Alternativní přístup k výpočtu BEL pro životní pojištění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Michal Pešta, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Děkuji RNDr. Martinovi Janečkovi, Ph.D., za zajímavé téma a veškerou podporu při psaní mé diplomové práce a doc. RNDr. Michalovi Peštovi, Ph.D., za vstřícnost a rady při vedení mé práce.

Poděkování patří také mé rodině, která mi byla během celého studia velkou oporou a velkou pomocí, mým přátelům a především mému partnerovi Markovi za jeho podporu, pomoc a trpělivost, a to během celého studia. Také děkuji mojí mamince za její pomoc a poskytnuté zázemí a své přítelkyni Kláře za její věcné připomínky k práci.

Název práce: Alternativní přístup k výpočtu BEL pro životní pojištění

Autor: Bc. Zuzana Teichmannová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Michal Pešta, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Konzultant: RNDr. Martin Janeček, Ph.D.

Abstrakt: Tato práce představuje alternativní přístup k aproximaci hodnoty nejlepšího odhadu závazků (BEL) v životním pojištění. Práce shrnuje základní teorii týkající se rezervování v životním pojištění a deterministické či stochastické projekce budoucích finančních toků, což je metoda běžně užívaná pro modelování hodnoty BEL, a teorii věnující se duracím. Získané poznatky (konkrétně parciální key rate durace) jsou využity k vytvoření aproximace hodnoty BEL. Navržený přístup je otestován na reálném příkladu pojištění s participací na zisku. Výsledné aproximace jsou reálným hodnotám blízké a v případě využití parciálních durací získaných deterministickými výpočty není příprava aproximace výpočetně náročná.

Klíčová slova: životní pojištění, nejlepší odhad závazků, modelování finančních toků, parciální durace

Title: Alternative approach to BEL calculations for life insurance

Author: Bc. Zuzana Teichmannová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Michal Pešta, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Consultant: RNDr. Martin Janeček, Ph.D.

Abstract: This thesis presents an alternative approach for the Best Estimate of Liabilities (BEL) approximation in life insurance. The work summarizes the basic theoretical knowledge about reserving in life insurance and deterministic or stochastic projection of future cash flows which is a method commonly used to model the value of BEL. This thesis also presents the theory about durations. We use partial key rate durations to approximate the value of BEL. The proposed approach is tested on a real example life insurance product with profit share. The resulting approximations are close to real values and when partial durations obtained by deterministic calculations are used, the preparation of the approximation is not computationally demanding.

Keywords: life insurance, best estimate of liabilities, cash flow modelling, partial duration

Obsah

Úvod **2**

1 Teorie životního pojištění **3**
1.1 Životní pojištění . . . 3
1.1.1 Tradiční produkty životního pojištění . . . 4
1.2 Základní definice a značení . . . 4
1.2.1 Úroková míra a výnosové křivky . . . 5
1.2.2 Modelování úmrtnosti . . . 7
1.2.3 Ocenění kapitálového životního pojištění . . . 8
1.3 Rezervování v životním pojištění . . . 10
1.3.1 Matematická rezerva . . . 10
1.3.2 Technické rezervy v životním pojištění . . . 11

2 Nejlepší odhad závazků a jeho výpočet **13**
2.1 Projekce budoucích finančních toků v životním pojištění . . . 13
2.1.1 Předpoklady druhého řádu . . . 13
2.1.2 Projekce budoucích finančních toků . . . 15
2.1.3 Deterministický přístup . . . 15
2.1.4 Stochastický přístup . . . 19
2.2 Opce v životním pojištění . . . 20
2.3 Nejlepší odhad závazků (BEL) . . . 23
2.3.1 Definice hodnoty nejlepšího odhadu závazků . . . 24
2.3.2 Výpočet hodnoty BEL . . . 24

3 Durace, parciální durace a možnost aproximace hodnoty BEL za použití durací **27**
3.1 Durace a parciální durace . . . 27
3.1.1 Durace a citlivost ceny dluhopisu . . . 28
3.1.2 Speciální typy durací . . . 31
3.2 Aproximace hodnoty BEL užitím parciálních key rate durací . . . 36
3.2.1 Výpočet hodnoty BEL a durace . . . 36
3.2.2 Přístup k aproximaci hodnoty BEL . . . 37

4 Praktická část - testování představené aproximace **40**
4.1 Model a relevantní informace . . . 40
4.1.1 Vstupy a předpoklady . . . 40
4.1.2 Výpočet BEL . . . 42
4.2 Výsledky aproximace získané využitím key rate durací . . . 43

Závěr **50**

Seznam použité literatury **51**

Seznam obrázků **53**

Seznam tabulek **54**

Úvod

Výpočet nejlepšího odhadu závazků (BEL) v životním pojištění je proces, který musí provádět každá pojišťovna. Samotný výpočet však může být značně časově náročný. Nejlepší odhad závazků se obvykle počítá využitím projekcí finančních toků (tzv. cash flow projekcí) se stochastickým vývojem úrokových měr.

V této diplomové práci je prozkoumána a otestována možnost využití jiného přístupu k odhadu hodnoty BEL. Zkoumaný přístup využívá konceptu (parciální) durace k zachycení citlivosti hodnoty BEL na změnu úrokových měr. Hlavním cílem diplomové práce je zhodnotit, zda zvolený přístup aproximace hodnoty BEL odhaduje hodnotu dostatečně přesně a umožňuje tak získat představu o výsledné hodnotě v kratším čase.

Práce je členěna do čtyř kapitol. První kapitola představuje teoretické základy týkající se životního pojištění a základní potřebné definice z finanční a pojistné matematiky.

Cílem druhé kapitoly je představit princip modelování pomocí projekce finančních toků, definovat předpoklady a představit model projekcí finančních toků v životním pojištění a v neposlední řadě definovat nejlepší odhad závazků BEL a jeho výpočet využitím modelu projekcí finančních toků.

Třetí kapitola se věnuje definování durací a parciálních durací, jejich klasickému použití, základním vlastnostem a vztahům. V kapitole jsou rovněž rozebrány předpoklady použití durací. Součástí kapitoly je také představení možného přístupu k aproximaci hodnoty nejlepšího odhadu závazků BEL za použití parciálních durací.

Obsahem čtvrté, poslední kapitoly je demonstrace představeného přístupu na praktickém příkladu. Vzorový model projekce finančních toků v životním pojištění je implementován a použit k porovnání klasického přístupu k výpočtu nejlepšího odhadu závazků s představenou aproximací. Porovnána je přesnost výsledků a časová náročnost výpočtu.

1. Teorie životního pojištění

Cílem první kapitoly je seznámit čtenáře se základy teorie pojištění, finanční matematiky a pojistné matematiky, které budou v práci dále využity v následujících kapitolách.

První podkapitola představuje základní princip pojištění se zaměřením na životní pojištění, kterému se tato práce věnuje. Druhá podkapitola shrnuje vybrané oblasti finanční matematiky, používané v životním pojištění, konkrétně úrokové míry a výnosové křivky. Dále je tato podkapitola zaměřena na představení potřebné teorie životního pojištění, speciálně teorie oceňování životního pojištění. V rámci třetí podkapitoly je vysvětlen základní koncept rezervování v životním pojištění a jsou představeny technické rezervy životního pojištění. S rezervováním v životním pojištění je spojen nejlepší odhad závazků (BEL), jehož výpočtu a aproximaci se tato práce věnuje.

1.1 Životní pojištění

Jevy náhodného charakteru, které mohou způsobovat negativní důsledky v životě jedince, se v kontextu pojištění nazývají pojistná rizika. Pojištění slouží jako ochrana před pojistnými riziky, která mohou v budoucnu nastat. Pojistník, což je osoba kupující si pojištění, přenese konkrétní rizika na pojistitele (typicky pojišťovnu), který je při dostatečně velkém množství převzatých rizik podobného charakteru schopen tato rizika řídit a zvládat (a ideálně dosahovat zisku z poskytování této služby). Pojistník platí za tuto službu pojistiteli pojistné a naopak, v případě realizace pojistného rizika (v případě tzv. pojistné události) je pojistitel zavázán vyplatit určené osobě finanční odškodnění, které se nazývá pojistné plnění. Tato finanční náhrada pak slouží ke snižování až eliminaci následků vzniklých danou náhodnou negativní událostí.

Nejzákladnější a nejznámější dělení soukromého nebo také komerčního pojištění je dělení na dvě základní skupiny: životní pojištění a neživotní pojištění. Do životního pojištění spadá pojištění pro případ smrti, pojištění pro případ dožití, smíšené pojištění a důchodové pojištění. Do neživotního pojištění patří pojištění majetku, pojištění odpovědnosti za škody, úrazové pojištění a soukromé zdravotní a nemocenské pojištění, Cipra (2006). Práce se dále věnuje pouze životnímu pojištění.

Základní princip životního pojištění je následující: pojistník, který uzavře smlouvu s pojistitelem, platí pojistiteli pojistné a v případě smrti konkrétní pojištěné osoby[1] (tzv. pojištění smrti) nebo dožití pojištěné osoby předem daného okamžiku (tzv. pojištění dožití) pojistitel vyplatí pojistníkovi či jiné oprávněné osobě pojistné plnění.

Pro životní pojištění je typické, že životní smlouvy trvají mnoho let (může se jednat i o vyšší desítky let) a že pravděpodobnost, že nastane situace uvedená ve smlouvě (smrt nebo dožití), se v čase vyvíjí (s věkem pojištěné osoby se zvyšuje), což má vliv na ocenění tohoto pojištění.

[1] Pojistník může, ale nemusí být zároveň i pojištěnou osobou, jinými slovy lze uzavřít pojištění na život jiné osoby. Přesná pravidla pro tyto situace stanovuje v České republice *občanský zákoník*.

Tyto principy lze zachytit matematickými modely, které mohou být v praxi komplikované. V současnosti nabízené produkty kombinují pojištění s možností investovat, jsou komplexnější, různorodé či mohou nabízet různé druhy benefitů (krytí dalších pojistných rizik, garance aj.). To společně s faktem, že počet smluv v kmeni pojišťovny může být značně vysoký, vede k modelům s vysokou časovou složitostí. Příkladem takového modelu může být cash flow model pro výpočet výše závazků pojistitele, kterému se věnuje tato práce.

1.1.1 Tradiční produkty životního pojištění

Produkty životního pojištění dělí Dickson a kol. (2009) na tradiční a moderní. Pro potřeby této práce jsou níže představeny tradiční produkty životního pojištění.

Cipra (2006) uvádí tyto základní tradiční produkty:

- pojištění pro případ smrti – k výplatě pojistného plnění dochází v případě úmrtí pojištěné osoby;
- pojištění pro případ dožití – k výplatě pojistného plnění dochází, pokud se pojištěná osoba dožije předem stanoveného věku (na konci předem stanoveného období);
- smíšené pojištění či pojištění pro případ smrti nebo dožití – v tomto případě dochází k výplatě pojistného plnění v případě úmrtí pojištěné osoby nebo na konci předem daného období (podle toho, která situace nastane dříve).

Pojištění pro případ smrti, které je časově omezeno, se nazývá dočasné pojištění pro případ smrti a oproti pojištění pro případ smrti se liší předem daným počtem let platnosti.

Do tradičních produktů životního pojištění spadá také důchodové životní pojištění, které je speciálním případem životního pojištění.

Tradiční produkty mohou být nabízeny i ve formě tzv. pojištění s podílem na zisku. V takovém případě je zisk pojistitele, který je nejčastěji získaný investicí pojistného, sdílen s pojistníky.

Pro moderní produkty životního pojištění je typická větší flexibilita a kombinace pojištění pro případ smrti s nějakým investičním prvkem. Cipra (2006) uvádí jako příklad moderních produktů mimo jiné investiční životní pojištění, u kterého výše pojistného plnění závisí na výnosech z podílových jednotek zakoupených klientem v investičním portfoliu pojišťovny (klient tak nese investiční riziko), nebo univerzální životní pojištění, které spojuje životní pojištění s investicí v investičním fondu a vyznačuje se především velkou flexibilitou (např. v platbách pojistného či ve výběru z řady možných pojistných plnění).

Práce se dále zabývá tradičním pojištěním pro případ smrti nebo dožití s podílem na zisku. V rámci práce bude dále toto pojištění označováno názvem *kapitálové pojištění*.

1.2 Základní definice a značení

V této kapitole jsou představeny základy finanční matematiky používané v životním pojištění, především koncept úrokové míry a výnosových křivek. Zavedena jsou rovněž potřebná značení týkající se modelování úmrtnosti. S využitím těchto základů je představen koncept počáteční hodnoty pojištění se zaměřením na kapitálové pojištění.

1.2.1 Úroková míra a výnosové křivky

Pojistné rezervování a oceňování životního pojištění je ovlivňováno úrokovými mírami, které se liší pro různá investiční období. Úroková míra úzce souvisí s pojmem časové hodnoty peněz. Ten vysvětluje skutečnost, že peníze, které jsou k dispozici dnes, mají jinou hodnotu než peníze, které budou k dispozici v budoucnu. Pokud jedinec v současnosti půjčí částku K, dostane v budoucnu nazpět tuto částku navýšenou o úrok U. Úroková míra i je definována jako podíl tohoto úroku a vložené částky (kapitálu):

$$i = \frac{U}{K}.$$

Úroková míra se obvykle udává v procentech a za stanovené období, např. 5 % za rok. S úrokovou mírou souvisí dva pojmy – úročení a diskontování. Úročení existuje trojího typu: jednoduché, složené a spojité (případně také smíšené). Označme částku získanou v budoucnu zapůjčením kapitálu K jako FV (*future value*). Pak pro roční úrokovou míru i a počet let investiční doby t je

- jednoduché úročení $FV = K(1 + it)$,
- složené úročení $FV = K(1 + i)^t$,
- spojité úročení $FV = Ke^{it}$.

Opakem úročení je diskontování. Diskontováním budoucí částky S získáme její současnou hodnotu, značíme PV (*present value*).

Stejně jako úročení je i diskontování trojího typu. Pak pro roční úrokovou míru i a počet let investiční doby t je

- jednoduché diskontování $PV = \frac{S}{(1+it)}$,
- složené diskontování $PV = \frac{S}{(1+i)^t}$,
- spojité diskontování $PV = Se^{-it}$.

Diskontuje se použitím diskontního faktoru, který se značí v a u složeného diskontování je typicky získán z úrokové míry jako

$$v = \frac{1}{1 + i}. \tag{1.1}$$

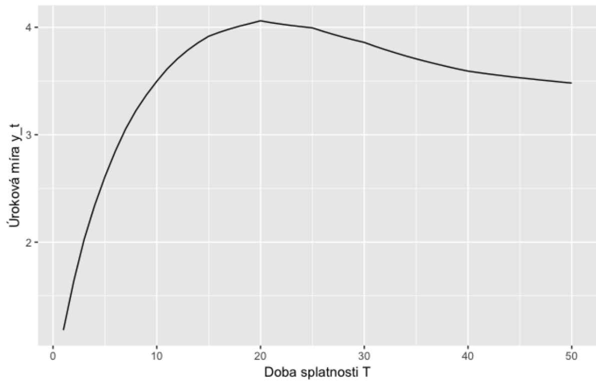
V životním pojištění se často vyskytuje pojem technická úroková míra TÚM, někdy také TIR (*technical interest rate*). Představuje takové zhodnocení, na které má pojistník smluvní právo, neboli takové, které je pojistníkovi garantované, Cipra (2006).

Spotové a forwardové úrokové míry a jejich časové struktury

Spotová úroková míra představuje současný výnos z finančního nástroje generujícího pouze jeden finanční tok, Hakala (2017). Mezi takové nástroje patří bezkupónový dluhopis, s jehož pomocí bude spotová úroková míra představena. Bezkupónový dluhopis je cenný papír, který zavazuje emitenta dluhopisu v čase splatnosti (za T let) zaplatit držiteli dluhopisu jeho nominální hodnotu. Označme $P(T)$ současnou tržní cenu T-ročního bezkupónového dluhopisu. Příslušná spotová úroková míra, značíme y_T, je výnos T-ročního bezkupónového dluhopisu za dané časové období. Bez újmy na obecnosti uvažujme časové období jeden rok, tedy

$$P(T)(1 + y_T)^T = 1 \Leftrightarrow P(T) = (1 + y_T)^{-T}.$$

Časová struktura úrokové míry popisuje vztah mezi dobou investice a úrokovou mírou investice. Graficky je zobrazena výnosovou křivkou (*yield curve*), což je graf $\{y_T\}_{T\geq 0}$ pro jednotlivé doby splatnosti $T \geq 0$. Příklad grafického zobrazení úrokové míry výnosovou křivkou můžeme vidět na Obrázku 1.1. Pokud máme k dispozici časovou strukturu, měli bychom diskontovat každý budoucí finanční tok dle příslušné spotové úrokové míry. Všimněme si, že $P(T) = 1/(1 + y_T)^T = v_T^T$, kde v_T je diskontní faktor z (1.1).



Obrázek 1.1: Příklad výnosové křivky – interpolované hodnoty z bezkupónového swapu z Deutsche Bundesbank (2020) z ledna 2010.

Ze spotové úrokové míry lze odvodit forwardovou úrokovou míru, která je platná až v nějakém budoucím termínu. Označme $f(s, T + s)$ forwardovou úrokovou míru z času s do času $T + s$, značící roční zhodnocení (složeným úročením). Forwardová úroková míra reprezentuje zhodnocení dohodnuté v čase 0, které přinese investice s počátkem v čase s a maturitou v čase $T + s$ (dobou do splatnosti T). Příslušná výnosová křivka je grafem vyjadřujícím závislost forwardové úrokové míry na čase s pro danou dobu splatnosti T.

Vztah mezi spotovou a forwardovou úrokovou mírou je následující

$$(1 + f(s,T + s))^T = \frac{(1 + y_{T+s})^{T+s}}{(1 + y_s)^s} = \frac{v_s}{v_{T+s}}. \tag{1.2}$$

Obecně platí, že smlouvy v životním pojištění jsou poměrně dlouhodobé a vyžadují znalost vývoje výnosových křivek v budoucnu. Ne vždy jsou však potřebné výnosové křivky dostupné a v praxi jsou z tohoto důvodu často modelovány na základě dostupných dat.

1.2.2 Modelování úmrtnosti

V životním pojištění, ve kterém je pojistnou událostí úmrtí nebo dožití, hraje modelování úmrtnosti významnou roli. Níže jsou zavedeny některé pojmy používané při modelování úmrtnosti.

Definice 1. *Pro osobu ve věku x náhodná veličina $\mathbf{T}_x$ představuje zbývající dobu života ve věku x za podmínky, že se daná osoba dožila věku x. Distribuční funkce náhodné veličiny $\mathbf{T}_x$ je*

$$F_x(t) = P(\mathbf{T}_x \leq t) = P(\mathbf{T}_0 \leq x + t | \mathbf{T}_0 > x),$$

kde $\mathbf{T}_0$ představuje délku života právě narozené osoby. Dále lze definovat funkci přežití jako

$$S_x(t) = P(\mathbf{T}_x > t) = P(\mathbf{T}_0 > x + t | \mathbf{T}_0 > x).$$

Pro zjednodušení se v rámci matematiky životního pojištění pracuje s následujícími symboly, Cipra (2006):

- pravděpodobnost úmrtí ve věku x, tedy pravděpodobnost, že jedinec ve věku x zemře před dosažením věku $x + 1$:

$$q_x = F_x(1) = P(\mathbf{T}_x \leq 1);$$

- pravděpodobnost dožití ve věku x, tedy pravděpodobnost, že jedinec ve věku x se dožije věku $x + 1$:

$$p_x = S_x(1) = P(\mathbf{T}_x > 1);$$

- pravděpodobnost, že jedinec ve věku x zemře před dosažením věku $x + t$:

$${}_tq_x = F_x(t) = P(\mathbf{T}_x \leq t);$$

- pravděpodobnost, že jedinec ve věku x se dožije věku $x + t$:

$${}_tp_x = S_x(t) = P(\mathbf{T}_x > t);$$

- pravděpodobnost, že jedinec ve věku x zemře ve věku $x + t$:

$${}_{t|}q_x = F_x(t + 1) - F_x(t) = P(t < \mathbf{T}_x \leq t + 1);$$

- pravděpodobnost, že se jedinec ve věku x dožije věku $x + s$, ale zemře před dosažením věku $x + s + t$:

$${}_{s|t}q_x = F_x(s + t) - F_x(s) = P(s < \mathbf{T}_x \leq s + t).$$

Mezi těmito hodnotami lze odvodit různé vztahy. Cipra (2006) uvádí mimo jiné

$${}_{s+t}p_x = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s},$$

$${}_{s|}q_x = {}_sp_x \cdot q_{x+s},$$

$${}_{s|t}q_x = {}_sp_x \cdot {}_tq_{x+s}.$$

1.2.3 Ocenění kapitálového životního pojištění

Základním principem pro výpočet pojistného v tradiční[2] matematice životního pojištění je princip ekvivalence, který požaduje, aby příjmy a výdaje pojistitele byly v rovnováze. Vzhledem k tomu, že příjmy (např. ve formě přijatého pojistného) a výdaje (např. ve formě placeného pojistného plnění) jsou náhodného charakteru, pracuje se s očekávanými hodnotami (formálně se středními hodnotami příslušných náhodných veličin). Rovněž je třeba pracovat s časovou hodnotou peněz, tedy buď s úročenými počátečními hodnotami nebo s diskontovanými koncovými hodnotami. Princip ekvivalence pak lze definovat ve tvaru

$$\begin{aligned} &\textit{očekávaná počáteční hodnota pojistného} = \\ &= \textit{očekávaná počáteční hodnota pojistného plnění.} \end{aligned}$$

Očekávanou počáteční hodnotu, zkráceně počáteční hodnotu, si níže odvodíme pro kapitálové pojištění. Kapitálové životní pojištění je takové pojištění, pro které je příslušná finanční rezerva zhodnocována technickou úrokovou mírou. Investiční riziko přebírá pojistitel a případné investiční výnosy nad rámec garancí mohou být sdíleny s pojistníky.

Jednotkové počáteční hodnoty pojištění lze získat pomocí střední hodnoty vhodné náhodné veličiny či pomocí tzv. komutačních čísel, viz Cipra (2006). Níže je představen první přístup. Pro ten je nejprve potřeba zavést celočíselnou délku života.

Definice 2. *Celočíselná zbývající doba života ve věku x, $\mathbf{K}_x$, je definována jako celá část[3] náhodné veličiny $\mathbf{T}_x$, tedy*

$$\mathbf{K}_x = [\mathbf{T}_x]. \tag{1.3}$$

Náhodná veličina $\mathbf{K}_x$ nabývá pouze celočíselných hodnot $k = 0{,}1{,}2,\dots$ s pravděpodobnostmi

$$\begin{aligned} P(\mathbf{K}_x = k) &= P(k \le \mathbf{T}_x < k+1) = F_x(k+1) - F_x(k) \\ &= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = {}_kp_x - {}_kp_x \cdot p_{x+k} = {}_kp_x \cdot q_{x+k}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pro vyjádření počátečních hodnot pojištění budeme dále používat náhodnou veličinu $\mathbf{Z}$, která představuje současnou hodnotu budoucích plnění a závisí na náhodné veličině $\mathbf{K_x}$. Bez újmy na obecnosti uvažujme výši pojistného plnění rovnu 1. Předpokládejme, že pojistné plnění je vypláceno při dožití konce celočíselné pojistné doby (tj. k datu celoročního výročí uzavření pojištění) nebo na konci pojistného období, v němž došlo k úmrtí.

Pro *pojištění pro případ smrti* pro osobu ve věku x máme

$$\mathbf{Z} = v^{\mathbf{K}_x+1}, \quad \mathbf{K}_x = 0{,}1{,}2\dots. \tag{1.5}$$

Jednotková počáteční hodnota pojištění pro případ smrti je

$$A_x = \mathbb{E}(\mathbf{Z}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot P(\mathbf{K_x} = \mathbf{k}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}.$$

[2] Přístup k výpočtům v životním pojištění představený v této kapitole budeme nazývat tradiční. Tento přístup využívá zjednodušených předpokladů, tzv. předpokladů prvního řádu. Více k těmto předpokladům lze nalézt v závěru této kapitoly.

[3] Celá část reálného čísla x je nejbližší celé číslo, které je menší nebo rovno číslu x.

Pro *pojištění pro případ dožití* pro osobu ve věku x na dobu n máme

$$\mathbf{Z} = \begin{cases} 0, & \mathbf{K}_x = 0{,}1, \dots, n-1, \\ v^n, & \mathbf{K}_x = n, n+1, \dots. \end{cases} \tag{1.6}$$

Jednotková počáteční hodnota pojištění pro případ dožití je

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \mathbb{E}(\mathbf{Z}) = v^n \cdot P(\mathbf{K_x} \geq \mathbf{n}) = v^n \cdot {}_np_x.$$

Pro *smíšené pojištění* pro osobu ve věku x na dobu n máme

$$\mathbf{Z} = \begin{cases} v^{\mathbf{K}_x+1}, & \mathbf{K}_x = 0{,}1, \dots, n-1, \\ v^n, & \mathbf{K}_x = n, n+1, \dots. \end{cases} \tag{1.7}$$

Jednotková počáteční hodnota pro smíšené pojištění je

$$A_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}(\mathbf{Z}) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot P(\mathbf{K_x} = \mathbf{k}) + v^n \cdot P(\mathbf{K_x} \geq \mathbf{n}) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x + v^n \cdot {}_np_x.$$

Pro *dočasné pojištění pro případ smrti* pro osobu ve věku x máme

$$\mathbf{Z} = \begin{cases} v^{\mathbf{K}_x+1}, & \mathbf{K}_x = 0{,}1, \dots, n-1, \\ 0, & \mathbf{K}_x = n, n+1, \dots. \end{cases} \tag{1.8}$$

Jednotková počáteční hodnota dočasného pojištění pro případ smrti je

$$A_{x:\overline{n}|}^{1} = \mathbb{E}(\mathbf{Z}) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot P(\mathbf{K_x} = \mathbf{k}) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}.$$

Pojistné

Využitím počátečních hodnot pojištění lze vypočítat výši pojistného, a to jak nettopojistného (které je vypočteno na základě principu ekvivalence), tak bruttopojistného (které je oproti nettopojistnému navýšeno o částku pokrývající správní náklady pojistitele), Cipra (2006). Princip ekvivalence pro určení nettopojistného má pro pojištění pro případ smrti tvar

$$P_x \cdot \ddot{a}_x = S \cdot A_x,$$

kde S je výše pojistné částky, $\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x \cdot v^k$ a P_x je výše ročního nettopojistného, placeného vždy na počátku dalšího roku pojištění. Lze vidět, že pro $S = 1$ je

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

Obdobným způsobem lze získat nettopojistné pro pojištění dožití

$$P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}},$$

nettopojistné pro smíšené pojištění

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

a nettopojistné pro dočasné pojištění pro případ smrti

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}},$$

kde $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x \cdot v^k$.

Bruttopojistné v životním pojištění zahrnuje navíc počáteční jednorázové náklady (nebo také získatelské náklady) α, běžné správní náklady β a inkasní náklady γ.

1.3 Rezervování v životním pojištění

K udržení solventnosti a profitability podniku musí přijaté pojistné stačit na pokrytí výplat pojistných plnění, tedy aktiva držená pojistitelem musí být postačující na placení závazků pojistitele.

Z tohoto důvodu dochází pravidelně (každý rok, kvartál, měsíc apod.) k výpočtům, které určují, kolik peněz musí pojistitel držet, aby byl schopen platit své budoucí závazky s dostatečně vysokou pravděpodobností. V rámci tohoto výpočtu se také určuje, jaká částka je sdílena s pojistníky v případě pojištění s podílem na zisku.

1.3.1 Matematická rezerva

Matematická rezerva je základní nástroj k určení výše kapitálu potřebného k udržení solventnosti pojistitele a k určení budoucího zisku či ztráty. V předchozí kapitole byla představena počáteční hodnota pojištění, níže je tento pojem rozšířen.

Definice 3. *Pro pojistnou smlouvu kapitálového životního pojištění můžeme definovat celkovou budoucí ztrátu v čase $t \geq 0$ jako náhodnou veličinu $\mathbf{L}_t$, která značí současnou hodnotu rozdílu mezi budoucím vyplaceným pojistným plněním (označme B_t) a budoucím přijatým pojistným (označme P_t), tedy*

$$\mathbf{L}_t = PV(B_t) - PV(P_t).$$

Poznámka. Princip ekvivalence používaný např. při výpočtu nettopojistného lze za použití celkové budoucí ztráty zapsat

$$\mathbb{E}(\mathbf{L}_0) = 0.$$

Pro $0 < t < T_x$ obecně $\mathbb{E}(\mathbf{L}_0) \neq 0$.

Za použití principu ekvivalence platí, že v době uzavření pojistné smlouvy je očekávané pojistné postačující na zaplacení budoucích pojistných plnění. Nicméně pro smlouvu platnou t let po sjednání již není budoucí pojistné (získané od času t dále) ve střední hodnotě dostačující k pokrytí budoucích pojistných plnění. Částka nutná na pokrytí tohoto rozdílu se nazývá *matematická rezerva* v čase t, značíme ${}_tV$. Platí, že

$${}_tV = \mathbb{E}(\mathbf{L}_t | T_x > t).$$

V praxi tato hodnota představuje *závazek* pojistitele. Pro výše uvedené typy kapitálového pojištění je matematická rezerva (někdy také nettorezerva) v čase k,

$k \in \mathbb{N}_0$, za podmínky, že je pojištěná osoba stále na živu (tedy $\mathbf{K}_x > k$), následující:

- pojištění smrti: ${}_kV = A_{x+k} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+k}$;
- pojištění dožití: ${}_kV_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = A_{x+k:\overset{1}{\overline{n-k}|}} - P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$;
- smíšené pojištění: ${}_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$;
- dočasné pojištění pro případ smrti: ${}_kV^1_{x:\overline{n}|} = A^{\ 1}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$.

Připomeňme si, že $\ddot{a}_{x+k} = \sum_{j=0}^{\infty} {}_jp_{x+k} \cdot v^j$ a $\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} = \sum_{j=0}^{n-k-1} {}_jp_{x+k} \cdot v^j$.

Pojistitel by měl během trvání smlouvy vytvořit a držet aktiva na pokrytí budoucích závazků. Pojistné v prvních letech smlouvy je více než dostačující k pokrytí očekávaného pojistného plnění v daném roce, jinými slovy, v prvních letech tvoří pojistné kladný přebytek, který lze použít k vytvoření aktiv pojistitele. Tato aktiva jsou pak potřebná v pozdějších letech, kdy pojistné není dostačující na zaplacení očekávaného pojistného plnění. Pojistitel pak drží pro velké portfolio smluv část těchto nadbytků z počátečních let smlouvy za účelem doplnění nedostatků v letech pozdějších. Aby byla pojišťovna finančně stabilní, musí mít držená aktiva větší hodnotu než celková matematická rezerva (za všechny smlouvy). Proces výpočtu součtu matematických rezerv všech platných smluv v daném čase a zároveň výpočet hodnoty aktiv pojišťovny se nazývá valuace (ocenění) pojišťovny.

${}_tV$ reprezentuje hodnotu, kterou by měl pojistitel mít pro každou pojistnou smlouvu ve svých investicích v čase t, aby tím, společně s budoucím pojistným, pokryl očekávané budoucí plnění. V praxi je tato hodnota neboli matematická rezerva součástí tzv. technických rezerv.

1.3.2 Technické rezervy v životním pojištění

V České republice jsou v životním pojištění zákonem vyžadovány následující technické rezervy, Cipra (2006):

- rezerva pojistného životních pojištění – kumulovaná částka ve výši hodnoty pojistné smlouvy a nejdůležitější rezerva pro tradiční produkty životního pojištění;
- rezerva na nezasloužené pojistné – pokrývá část pojistného, která se vztahuje až k budoucím obdobím;
- rezerva na pojistná plnění – určená ke krytí již vzniklých pojistných událostí (nahlášených nebo nenahlášených), v životním pojištění může být méně významná;
- rezerva na prémie a slevy – slouží ke krytí smlouvou určených prémií a slev;
- rezerva životního pojištění, je-li nositelem investičního rizika pojistník – představuje závazky pojistitele u produktů, kde investiční riziko nese pojistník (netýká se tradičních produktů);

- rezerva na splnění závazků z použité technické úrokové míry a ostatních početních parametrů, nedosahovala-li by výše rezervy pojistného životních pojištění vypočtená za použití původních parametrů postačitelné výše zjištěné při použití současných odhadů hodnoty technické úrokové míry a ostatních početních parametrů použitých při ohodnocení výše přijatých závazků[4];

- rezerva pojistného neživotních pojištění – vztahuje se na neživotní připojištění zahrnuté v životních produktech.

Český pojistný trh je regulován nejen českými zákony, ale i legislativou platnou v rámci Evropské unie. Příkladem takové legislativy je směrnice Solvency II, která k výpočtu výše závazků pojistitele přistupuje odlišně a zavádí *nejlepší odhad závazků* BEL (v angličtině *Best Estimate of Liabilities*). Nejlepšímu odhadu závazků BEL a možným přístupům k jeho výpočtu se věnuje následující kapitola.

Přístup k výpočtům v životním pojištění představený v této kapitole budeme nazývat jako tradiční. Tento přístup využívá zjednodušených předpokladů, tzv. předpokladů prvního řádu. Janeček (2006) uvádí tyto typické vlastnosti předpokladů prvního řádu:

- předpokládá se, že pojištěná osoba zemře přesně s pravděpodobností uvedenou v úmrtnostních tabulkách, které byly použity při uzavření smlouvy (či dokonce dříve) k výpočtu pojistného; tyto tabulky bývají konzervativnější než očekávaná realita;

- možnost storna smlouvy není obvykle uvažována;

- předpokládá se, že úrokové a diskontní míry jsou každý rok na úrovni technické úrokové míry (výnosové křivky jsou tedy ploché);

- předpokládá se, že náklady pojišťovny budou po celou dobu stejné, takové jaké byly uvažovány při vzniku smlouvy.

Přístup k výpočtům představený v následující kapitole budeme označovat jako moderní a předpoklady, které jsou využívány v rámci moderního přístupu, budeme nazývat předpoklady druhého řádu.

[4] 277/2009 Sb., zákon o pojišťovnictví, § 66.

2. Nejlepší odhad závazků a jeho výpočet

Předchozí kapitola představuje tradiční přístup k výpočtům v rámci životního pojištění. Tyto výpočty probíhají za využití předpokladů prvního řádu. V praxi se však tyto předpoklady většinou chovají jinak. Z tohoto důvodu vznikají modernější přístupy k výpočtům v životním pojištění. Tyto moderní přístupy využívají předpoklady, které se více blíží realitě, tzv. předpoklady druhého řádu.

Jedním z těchto moderních přístupů k výpočtům je také projekce budoucích finančních toků (*future cash flows*) plynoucích z pojistných smluv. Projekce budoucích finančních toků má v pojišťovně širokou škálu využití. Janeček (2006) uvádí např. následující:

- využití pro účetní účely (např. testování postačitelnosti závazků, tzv. *Liability Adequacy Test*, jehož cílem je ověřit postačitelnost účetní hodnoty technických rezerv životního pojištění);
- využití pro účel směrnice Solvency II (výpočet nejlepšího odhadu závazků a stresové testování nejlepšího odhadu závazků, což je zkoumání vývoje nejlepšího odhadu závazků za platnosti jiných než očekávaných předpokladů);
- a další využití, např. pro řízení aktiv a pasiv pojišťovny, tzv. *Asset Liability Management*, pro testování ziskovosti nových produktů či pro přípravu byznys plánů.

Výpočet nejlepšího odhadu závazků pomocí projekce budoucích finančních toků bude dále zkoumán v rámci této práce. Než bude v závěru této kapitoly představen nejlepší odhad závazků a jeho výpočet, bude diskutována související teorie týkající se projekce finančních toků pojišťovny včetně používaných předpokladů a koncept vnořených opcí. Vnořené opce, které blíže popisuje druhá podkapitola, jsou důvodem, proč je nejlepší odhad závazků často počítán stochasticky a jeho výpočet je tak časově náročný.

2.1 Projekce budoucích finančních toků v životním pojištění

První podkapitola představuje koncept projekce finančních toků plynoucích ze smluv životního pojištění. První oddíl se blíže věnuje předpokladům používaným při této projekci, tedy předpokladům druhého řadu. Druhý oddíl pak definuje samotnou projekci budoucích finančních toků a třetí, resp. čtvrtý oddíl představuje deterministický, resp. stochastický přístup k projekci budoucích finančních toků.

2.1.1 Předpoklady druhého řádu

Jak již bylo řečeno, předpoklady prvního řádu používané v rámci tradičního přístupu nemusí reflektovat realitu v dostatečné míře. V rámci tohoto oddílu budou představeny předpoklady druhého řádu. Tyto předpoklady by měly být ve formě nejlepšího odhadu (*best estimate*), jak v kontextu Solvency II uvádí také Institute and Faculty of Actuaries (2016). Za nejlepší odhad daných předpokladů budeme v práci považovat jejich střední hodnotu.

V praxi nemusí být získání nejlepších odhadů předpokladů snadnou záležitostí a v mnoha případech jsou k získaní nejlepšího odhadu předpokladů použita různá zjednodušení, Janeček (2006).

Základní používané předpoklady, které budou také uvažovány v této práci, jsou:

- pravděpodobnosti úmrtnosti – předpoklady úmrtnosti by měly být založeny na konkrétních zkušenostech dané pojišťovny. V praxi jsou pravděpodobnosti úmrtí nižší, než uvádí úmrtnostní tabulky pro celou populaci[1]. Proto je vhodné hodnoty z úmrtnostních tabulek vynásobit koeficientem, který reflektuje zkušenosti pojišťovny s reálnými hodnotami úmrtnosti.

- pravděpodobnosti storna smlouvy – pravděpodobnosti zrušení smlouvy by měly být také získány na základě zkušeností pojišťovny. Pravděpodobnost storna smlouvy se obvykle liší pro různé doby trvání smlouvy a pro různé produkty a dle toho by také měly být v rámci výpočtů modelovány.

- provize zprostředkovatelům pojištění – provize zprostředkovatelům v životním pojištění může být obvykle ve dvou formách, provize počáteční a provize obnovovací. Počáteční provize je placena v prvních pěti letech, obnovovací provize je placena po zaplacení počáteční provize. Pro výpočty je vhodné modelovat provize pro každou smlouvu a každý rok trvání smlouvy zvlášť.

- náklady včetně inflace – zbývající náklady pojišťovny lze obvykle dělit na náklady počáteční a udržovací. Počáteční náklady jsou jednorázové náklady související se vznikem smlouvy, např. zdravotní underwriting, tisk formulářů, archivace apod. Udržovací náklady jsou všechny náklady související s administrací smluv (může se jednat o náklady související s vyřizováním pojistných událostí, platy pracovníků, náklady na budovu a mnoho dalšího). Při modelování nákladů je vhodné uvažovat zvlášť náklady pro podobné typy smluv - např. mezi jednorázově a běžně placenými smlouvami lze očekávat rozdíl mezi náklady. Některé náklady je vhodnější modelovat jako fixní, některé mohou být vázány na nějakou jinou hodnotu (např. procenta z pojistného či pojistné částky). Při modelování nákladů by měl být také uvažován jejich budoucí růst. Tento růst může být způsoben více faktory, minimálně však dochází k růstu způsobenému inflací. Při projekci je tedy vhodné inflaci zohlednit.

- investiční výnos – předpoklad pro investiční výnos by měl odpovídat očekávaným budoucím výnosům v jednotlivých letech, pro které k projekci dochází. Výnos se obvykle během let mění (není tedy vhodné používat pevnou úrokovou míru pro celé projektované období).

[1]Může být způsobeno mimo jiné zdravotním underwritingem, což je proces ověření zdravotního stavu pojištěné osoby. Tímto procesem lze eliminovat osoby se špatným zdravotním stavem.

- diskontní křivka – pro předpoklad diskontní křivky platí totéž co pro investiční výnosové křivky.

Tyto předpoklady lze dále použít k projekci budoucích finančních toků plynoucích z pojistné smlouvy životního pojištění.

2.1.2 Projekce budoucích finančních toků

Pojišťovně z pojistných smluv životního pojištění vznikají závazky, které bude povinna v budoucnu dodržet. Jak uvádí Janeček (2006), pojišťovna je povinna:

- platit pojistné plnění v případě vzniku pojistné události;
- pokrýt veškeré náklady vznikající v souvislosti s pojistnou smlouvou (včetně provizí zprostředkovatelům a všech administrativních nákladů);
- investovat a valorizovat peněžní prostředky pojistníka;
- přijímat pojistné.

Hodnota těchto závazků se může během doby trvání smlouvy měnit. Také platí, že ze začátku platnosti smlouvy je pojistné, které pojišťovna obdrží, vyšší než pojistné plnění, které je pojišťovna povinna zaplatit. Toto nicméně neplatí po celou dobu platnosti smlouvy, tato situace se mění a ke konci platnosti smlouvy může být hodnota pojistného plnění k vyplacení výrazně vyšší než hodnota přijatého pojistného, viz oddíl 1.3.1.

Uvažujme nyní pojistnou smlouvu platnou v letech $1,2,\ldots,T$. Hodnota závazků $Liab_t$ (plynoucích z této smlouvy) na konci roku t, $t \in 1,2,\ldots,T$ je rovna rozdílu současné hodnoty budoucích výdajů a současné hodnoty budoucích příjmů, tedy

$$Liab_t = PV(výdaje)_t - PV(příjmy)_t.$$

Současná hodnota příjmů, resp. výdajů je diskontovaný součet budoucích přijatých, resp. vydaných finančních toků. Finanční toky (*cash flows*) v roce t budeme dále souhrnně značit jako CF_t. Celková hodnota závazků $Liab$ plynoucích z dané smlouvy je pak

$$Liab = \sum_{t=1}^{T} PV(CF_t). \tag{2.1}$$

Jako relevantní finanční toky budeme v rámci práce uvažovat pojistné, pojistná plnění, provize, náklady, investiční výnosy, podíly na zisku a změny v rezervách. Je běžnou praxí, že pojistné, provize a náklady jsou považovány za finanční toky na začátku roku, kdežto pojistná plnění, investiční výnosy, podíly na zisku a změny v rezervách za finanční toky na konci roku, Janeček (2006).

Níže si představíme dva přístupy k projekci budoucích finančních toků – *deterministický* a *stochastický*.

2.1.3 Deterministický přístup

V této kapitole si představíme deterministickou projekci budoucích finančních toků. Pro snazší pochopení bude projekce představena ve dvou fázích:

1. budeme uvažovat pouze finanční toky generované samotnou smlouvou,
2. přidáme rezervy tak, aby byla analýza finančních toků kompletní.

Deterministický přístup k projekci finančních toků je níže ilustrován na vzorovém příkladu.

Uvažujme pojištění pro případ smrti pro osobu ve věku 60 let uzavřené na 10 let. Smlouva má následující parametry:

- pojistnou částku, označme S, $S = 100000$;
- pojistné, v roční hodnotě P, $P = 1500$.

Chceme analyzovat finanční toky plynoucí z této smlouvy v diskrétních intervalech (typicky v měsíčních, protože nejtypičtěji je pojistné placeno měsíčně). Pro potřeby příkladu budeme nicméně uvažovat roční časový interval s časem uzavření smlouvy $t = 0$.

Dále je třeba vytvořit předpoklady. Pro zjednodušení příkladu ilustrujícího finanční toky jsou použity předpoklady prvního řádu, předpoklady druhého řádu jsou použity v modelu představeném v kapitole 4.

V rámci příkladu předpokládejme:

- úroková míra: $i = 4\%$ ročně na všechny finanční toky;
- počáteční náklady: 600;
- udržovací náklady: 45;
- úmrtnostní tabulky: $q_{60+t} = 0{,}01 + 0{,}001t$ pro $t = 0{,}1{,}...{,}9$.

Pro každý rok, ve kterém je smlouva stále platná, jsou modelovány finanční toky, a to konkrétně:

$$\begin{aligned} CF_t = \; & \textit{pojistné po odečtení nákladů} \\ & + \textit{úrok získaný investicí tohoto pojistného} \\ & - \textit{očekávaná výše pojistného plnění na konci daného roku.} \end{aligned}$$

Vznikající čisté finanční toky pro parametry příkladu zobrazuje Tabulka 2.1.

Pro $t = 0$ jsou jediným vstupem celkové počáteční náklady $E_0 = 600$. Tyto náklady se platí v čase 0 (při vzniku smlouvy). Příslušný finanční tok v čase $t = 0$ je $CF_0 = -E_0 = -600$.

Pro $t \geq 1$ je

- pojistné $P_{t-1} = 1500 \; \forall t$; pojistné je stanoveno fixně a každý rok je placeno ve stejné výši;
- náklady $E_t = 45 \; \forall t > 1$; každý rok kromě prvního roku smlouvy jsou strhávány obnovovací náklady, v prvním roce jsou náklady zahrnuty v počátečních nákladech, které jsou strženy v čase 0 (při vzniku smlouvy);
- úroky z investovaného pojistného $I_t = (P_t - E_t) * 0{,}04 \; \forall t$; pojistné po odečtení nákladů je na celý rok investováno za úrokovou sazbu 4 %;

- očekávaná pojistná plnění $B_t = S \cdot q_{60+t}$ $\forall t$; (střední hodnota výplaty pojistného plnění);
- čisté finanční toky $CF_t = P_{t-1} - E_t + I_t - B_t$ $\forall t$, za předpokladu, že je smlouva za začátku roku stále platná, tedy že pojištěná osoba na začátku daného roku stále žije.

t	P_{t-1}	E_t	I_t	B_t	CF_t
0		600			-600,0
1	1500	0	60,0	1000	560,0
2	1500	45	58,2	1100	413,2
3	1500	45	58,2	1200	313,2
4	1500	45	58,2	1300	213,2
5	1500	45	58,2	1400	113,2
6	1500	45	58,2	1500	13,2
7	1500	45	58,2	1600	-86,8
8	1500	45	58,2	1700	-186,8
9	1500	45	58,2	1800	-286,8
10	1500	45	58,2	1900	-386,8

Tabulka 2.1: Finanční toky generované smlouvou.

Poznámka. Vzorec pro výpočet finančních toků lze přepsat do tvaru

$$CF_t = (P_{t-1} - E_t)(1 + i) - B_t.$$

V Tabulce 2.1 je vidět typická vlastnost čistých finančních toků – ty jsou v prvních letech kladné (kromě $t = 0$) a v posledních záporné. Jak již bylo diskutováno v předchozí části, je to způsobeno tím, že je pojistné v prvních letech více než dostačující k zaplacení nákladů a očekávaných pojistných plnění, avšak s rostoucí pravděpodobností úmrtí se pojistné stává nedostatečným. Z toho důvodu si pojistitel odkládá aktiva na pokrytí budoucích záporných finančních toků a tím si tvoří rezervy. Výše těchto rezerv se v průběhu smlouvy mění. Tyto změny lze účetně[2] rovněž považovat za finanční toky. Ty jsou v rámci příkladu zahrnuty v následující části.

Finanční toky spojené s rezervami

Matematická rezerva diskutovaná v části 1.3.1 představuje částku, která by podle očekávání měla společně s budoucím pojistným stačit k pokrytí budoucích pojistných plnění (a nákladů). Rezerva je skutečná částka peněz držených pojistitelem k pokrytí budoucích závazků. Výpočet výše rezerv je obvykle oddělen od projekce finančních toků a je založen na jiném souboru předpokladů. Jak již bylo zmíněno, v praxi jsou tyto předpoklady obvykle konzervativnější než předpoklady používané pro projekce finančních toků.

Předpokládejme, že pojistitel stanoví na začátku každého roku matematickou rezervu pro danou pojistnou smlouvu spočtenou za předpokladů pro výpočet rezerv:

[2] Nejedná se o reálný peněžní příjem nebo výdaj, ale pouze o účetní změny.

- úroková míra: $i^r = 3\%$ ročně na všechny finanční toky;
- úmrtnostní tabulky: $q^r_{60+t} = 0{,}011 + 0{,}001t$ pro $t = 0{,}1,...,9$ a $p^r_{60} = 1 - q^r_{60}$, ${}_tp^r_{60} = {}_{t-1}p^r_{60}q^r_{60+t}$.

Pro tuto smlouvu s $x = 60$ a $n = 10$ je nettopojistné

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = 1469.$$

Rezervy v čase t (na rok $t+1$) jsou definovány jako

$${}_tV = {}_tV^1_{x:\overline{n}|} = A^{\ 1}_{\overline{x+t|}:n-t} - P^1_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-k}|}. \tag{2.2}$$

Tyto rezervy je třeba doplnit do analýzy finančních toků. Vznikající finanční, resp. účetní toky zahrnují také rezervy a jsou zobrazeny v Tabulce 2.2.

t	${}_{t-1}V$	P_{t-1}	E_t	I_t	B_t	${}_tV^{cost}$	PL_t
0			600				
1	0	1500	0	82,5	1000	413,80	168,70
2	417,98	1500	45	103,01	1100	744,66	131,34
3	752,94	1500	45	121,44	1200	989,92	139,46
4	1001,94	1500	45	135,13	1300	1146,55	145,53
5	1161,65	1500	45	143,92	1400	1211,11	149,45
6	1228,31	1500	45	147,58	1500	1179,74	151,15
7	1197,70	1500	45	145,90	1600	1048,08	150,52
8	1065,13	1500	45	138,61	1700	811,29	147,44
9	825,32	1500	45	125,42	1800	463,94	141,80
10	472,44	1500	45	106,01	1900	0,00	133,45

Tabulka 2.2: Finanční a účetní toky generované smlouvou a rezervami.

Hodnoty P_{t-1}, E_t a B_t jsou shodné s hodnotami v Tabulce 2.1. Hodnoty ${}_{t-1}V$ jsou získány dle (2.2). Úrok nyní vzniká investováním rezervy a pojistného po odečtení nákladů, tedy $I_t = ({}_{t-1}V + P_t - E_t) * 0{,}04$.

Mezi projektovanými toky rovněž přibyla hodnota ${}_tV^{cost}$, která reprezentuje náklady na vytvoření rezervy. Na začátku trvání smlouvy v čase $t = 0$ je hodnota rezervy nulová, po prvním roce, tedy v čase $t = 1$, máme

$${}_1V = 417{,}98.$$

Tato hodnota je vyžadována pro každou smlouvu, která je v čase $t = 1$ stále v platnosti. Těchto smluv je *(počet smluv v čase 0)* $\cdot\, p_x$, neboli počet smluv pro osoby ve věku x vynásobený pravděpodobností přežití do času $x + 1$. Pro $t = 1$ a jednu smlouvu je to $417{,}98 \cdot (1 - 0{,}01) = 413{,}80$.

Na začátku druhého roku předpokládáme, že je smlouva v platnosti, a máme rezervu ve výši ${}_1V = 417{,}98$. Na konci druhého roku, tedy v čase $t = 2$, tvoříme rezervu ve výši 752,94 pro každou smlouvu, která je v čase $t = 2$ platná, tedy *(počet smluv v čase 1)* $\cdot\, p_{x+1}$ smluv.

Obecně pro jednu smlouvu

$$_tV^{cost} = {}_tV * p_{x+t-1}.$$

Celkové modelované toky představují hospodářský výsledek PL_t (*profit and loss*) pojišťovny a jsou získány jako

$$PL_t = ({}_tV + P_{t-1} - E_t)(1+i) - B_t - {}_tV^{cost}, \quad t = 1,2,\ldots,10.$$

Toto lze přepsat do tvaru

$$PL_t = (P_{t-1} - E_t)(1+i) - B_t + \Delta_t V,$$

kde

$$\Delta_t V = (1+i)_{t-1}V - {}_tV^{cost}.$$

$\Delta_t V$ se nazývá změna rezervy v čase t. Modelované toky týkající se rezerv nereprezentují reálné peněžní toky, nýbrž účetní toky uvnitř pojišťovny.

V této kapitole jsou použity deterministické předpoklady pro všechny použité faktory. Tímto způsobem nezískáme vhled do vlivu nejistoty na výsledky. Nyní se podíváme na to, jakým způsobem lze stochastické scénáře použít pro analýzu finančních toků u smluv kapitálového životního pojištění.

2.1.4 Stochastický přístup

Použití deterministického přístupu nemusí v některých případech dostatečně reflektovat realitu. Získaná hodnota neobsahuje žádnou informaci o nejistotě investičního výnosu. Závazky (či jiné hodnoty získané projekcí finančních toků) je v některých případech vhodnější modelovat jako náhodnou veličinu a ne jako konstantu. Právě této modelace je dosaženo pomocí stochastického přístupu.

Stochastický přístup využívá principu deterministického přístupu představeného výše. Rozdíl je v tom, že v případě deterministického přístupu byly použity deterministické scénáře pro úrokové míry (tedy pevně stanovené hodnoty). V přístupu stochastickém nahradíme deterministický scénář výnosové křivky dostatečným množstvím stochastických scénářů (vhodným způsobem vygenerovaných výnosových křivek).

Tyto křivky jsou pak postupně použity místo deterministické výnosové křivky v deterministickém přístupu. Výpočet poté probíhá stejným způsobem, nicméně proběhne ne jednou, ale tolikrát, kolik máme výnosových křivek. Výsledek je náhodný výběr výsledných finančních toků pro danou smlouvu.

Generování výnosových křivek pro stochastický přístup k výpočtu

Při generování výnosových křivek se vychází z aktuálních dostupných dat, která však nemusí být úplná (neexistují například aktiva se všemi potřebnými dobami splatnosti). Tento problém se řeší interpolací výnosových křivek, použitím Nelsonova-Siegelova modelu nebo Svensonova modelu, který je jeho rozšířením, viz Turussova (2016).

Získaný ekonometrický model je potřeba dále kalibrovat, čímž se odhadnou zbývající parametry modelu. Kalibrace může být provedena pomocí dynamických metod (za použití historického vývoje dat), statických metod (za použití aktuálních dat) nebo jejich kombinací. Před použitím pro stochastické výpočty dochází k simulacím pomocí metody Monte Carlo. Tento proces se nazývá generování úrokových scénářů. Mezi nejznámější modely používané v souvislosti s generováním úrokových scénářů patří Vašíčkův model nebo Hull-Whiteův model. Problematice modelování úrokových měr se věnuje například Hakala (2017).

2.2 Opce v životním pojištění

V pojistných smlouvách existuje mnoho různých typů finančních záruk neboli garancí. Tyto záruky jsou velmi podobné zárukám vznikajícím ve finančních opcích. Pokud je finanční záruka součástí pojistného plnění, nazýváme ji vloženou opcí (*embedded option*), Dickson a kol. (2009).

Tato kapitola obsahuje potřebnou teorii pro vysvětlení principu opcí zakotvených v pojistných smlouvách. Tyto opce lze považovat za relativně přímočaré evropské put opce. Pro tuto teorii je dále předpokládáno splnění tzv. bez arbitrážového předpokladu.

Bez arbitrážový předpoklad

Předpoklad žádné arbitráže je základem moderních metod oceňování. Arbitrážní příležitost existuje, pokud může investor vytvořit portfolio, které má na počátku nulovou cenu a v budoucnu generuje kladné zisky s nenulovou pravděpodobností, aniž by v budoucnu mohlo dojít ke ztrátě.

Pokud předpokládáme, že na finančním trhu neexistují žádné arbitrážní příležitosti, pak to znamená, že jakékoli dva cenné papíry nebo kombinace cenných papírů, které poskytují přesně stejné platby, musí mít stejnou cenu. Předpokládejme například dvě aktiva, jedno s cenou A a druhé s cenou B, která produkují stejné budoucí finanční toky. Pokud $A \neq$B, pak by investor mohl koupit aktivum za nižší cenu a prodat za vyšší. Finanční toky nakoupené za nižší cenu by přesně odpovídaly prodaným finančním tokům, takže by investor bez rizika obdržel zisk z rozdílu mezi A a B.

V praxi na většině finančních trhů čas od času vznikají arbitrážní příležitosti, ty jsou nicméně velmi rychle eliminovány, protože je investoři zaznamenávají a obchodují s nimi. Protože existují pouze po velmi krátká období, je předpoklad, že vůbec neexistují, pro většinu účelů dostatečně odpovídající skutečnosti.

Opce

Opce patří k základním finančním nástrojům a jsou obchodované po celém světě. Existují dva základní typy opcí - opce *evropské* a opce *americké*. Evropské opce jsou nejjednodušším typem opcí a jejich nejzákladnějšími formami jsou evropské call opce a evropské put opce.

Držitel evropské call opce s daným podkladovým aktivem má právo (ale nikoli povinnost) nakoupit dohodnuté množství tohoto aktiva za pevnou cenu, známou jako realizační cena, k pevně stanovenému datu, známému jako datum ukončení nebo splatnosti.

Nechť S_t označuje cenu podkladového aktiva v čase t. Držitel evropské call opce na toto aktivum s realizační cenou K a datem splatnosti T uplatní opci pouze tehdy, pokud $S_T > K$. V takovém případě má opce pro držitele v den splatnosti hodnotu $S_T - K$. Naopak opce není uplatněna k datu splatnosti v případě, že platí $S_T < K$, protože v takovém případě je možné aktivum pořídit na trhu za nižší cenu. Výnos z evropské call opce v čase T je tedy

$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0). \tag{2.3}$$

Naopak držitel evropské put opce s daným podkladovým aktivem má právo (ale nikoli povinnost) prodat dohodnuté množství tohoto aktiva za pevnou realizační cenu k datu splatnosti. Držitel evropské put opce uplatní opci pouze v případě, že $S_T < K$, protože v takovém případě může držitel opce prodat aktivum za K, ale na trhu v čase T jej koupit za cenu nižší a tím získat zisk $K - S_T$. Opce není uplatněna v případě, kdy $S_T > K$, protože držitel opce by pak prodával podkladové aktivum za nižší cenu, než je možné získat prodejem na trhu. Výnos z evropské put opce v čase T je tedy

$$(K - S_T)^+ = \max(K - S_T, 0). \tag{2.4}$$

Americké opce jsou definovány podobně s tím rozdílem, že držitel opce má právo tuto opci uplatnit kdykoli před datem splatnosti. Dále se nicméně budeme zabývat pouze evropskými opcemi, které častěji odpovídají opcím vloženým ve smlouvách životního pojištění.

Opce vnořené v životním pojištění

V této kapitole budou popsány finanční opce vnořené v pojistných smlouvách. Dickson a kol. (2009) uvádí garantovaná minima v případě smrti GMDB (*guaranteed minimum death benefi*) a v čase splatnosti GMMB (*guaranteed minimum maturity benefit*). Na českém trhu je nicméně běžnější tzv. úroková opce. Ta souvisí s každoročním garantovaným zhodnocením, které má pojistník zaručeno pojišťovnou, případně s podílem na zisku. Oceňování takovýchto smluv se věnuje Bacinello (2001). Koncept vnořených opcí je níže vysvětlen pomocí GMDB a GMMB.

Uvažujme smlouvu smíšeného kapitálového životního pojištění s garantovanou minimální částkou při splatnosti (GMMB) a garantovanou minimální částkou při úmrtí (GMDB). Po odečtení nákladů je pojistné investováno do zvoleného fondu. Hodnota fondu je variabilní a pohybuje se nahoru a dolů shodně s podkladovými aktivy fondu. Pojistitel se zavazuje k tomu, že v čase splatnosti či v případě smrti pojištěného zaplatí tu vyšší z částek skutečné hodnoty fondu a pojistného plnění stanoveného ve smlouvě.

Označme F_t hodnotu fondu pojistníka v čase t. Předpokládejme, že pojistné plnění platné v čase t je $\max(G, F_t)$, kde G značí garantovanou minimální částku při splatnosti nebo v případě smrti. Protože fond pojistníka pokrývá částku F_t, zbývá pojistiteli závazek $l(t)$ ve výši

$$l(t) = \max(G - F_t, 0).$$

Celkové pojistné plnění vyplacené v čase t je

$$B_t = F_t + l(t) = F_t + \max(G - F_t, 0) \tag{2.5}$$

nebo také

$$B_t = G + \max(F_t - G, 0). \tag{2.6}$$

Kromě výplat pojistného plnění v případě smrti nebo v případě dožití může rovněž docházet k výplatě tzv. odkupného[3] (*surrender*), a to v případě předčasně ukončené smlouvy (v případě storna ze strany klienta). I pro odkupné může existovat v čase t garantovaná minimální hodnota G_t a jeho výše Sur_t je pak

$$Sur_t = F_t + \max(G_t - F_t, 0) = G_t + \max(F_t - G_t, 0).$$

Modelování a oceňování odkupného je obtížně, jelikož jeho výplata závisí na individuálním rozhodnutí klienta. Často se nicméně odkupné rovná hodnotě fondu v daný moment (tedy neobsahuje žádné záruky).

Protože proces hodnoty fondu $\{F_t\}_{t\geq 0}$ lze považovat za podobný procesu ceny podkladového aktiva a protože G je pevná známá částka, je garantovaná výplata $l(t)$ totožná s výplatou v rámci t-leté evropské put opce s realizační cenou G. Lze vidět, že vzorec pro celkové pojistné plnění (2.5) odpovídá vzorci pro výnos evropské put opce (2.4). Celkové pojistné plnění lze rovněž přepsat do tvaru (2.6) odpovídajícího výnosu evropské call opce (2.3). Garantované minimální částky při úmrtí ($t < T$) a v čase splatnosti ($t = T$) ve smlouvě kapitálového pojištění tak lze považovat za evropskou opci.

Oceňování vnořených opcí v životním pojištění

Existuje několik rozdílů mezi vnořenými opcemi ve smlouvách kapitálového pojištění a standardními opcemi obchodovanými na finančních trzích. Jedná se například o tyto rozdíly:

1. U úrokové opce není na začátku výše garance známá. Její výše totiž závisí na předchozím vývoji, protože zhodnocení může být v jednotlivých letech rovno garantovanému zhodnocení, avšak může být i vyšší.

2. Opce vnořené do smluv kapitálového pojištění mají náhodnou dobu splatnosti. Doba platnosti smlouvy je předem daná, avšak pokud pojistník zruší smlouvu předčasně nebo zemře před uplynutím doby platnosti (v obou případech se jedná o náhodné události), zaniká pojistná smlouva dříve.

3. Opce vnořené do smluv kapitálového pojištění závisí na hodnotě fondu pojistníka při úmrtí nebo v době splatnosti (případně v čase storna). Hodnota fondu v čase t, F_t, souvisí s cenou rizikového aktiva S_t, protože předpokládáme, že fond pojistníka je investován do fondu s výnosy z obchodovaných akcií, ale s důležitým rozdílem, že pravidelné poplatky za správu jsou odčítány z fondu pojistníka.

[3]Česká asociace pojišťoven definuje odkupné (někdy také odbytné) jako část nespotřebovaného pojistného ukládanou pojistitelem jako technickou rezervu vypočtenou pojistně matematickými metodami k datu zániku soukromého pojištění.

Tyto rozdíly znamenají, že musíme přizpůsobit teorii oceňování opcí tak, abychom ji mohli použít na kapitálové pojištění. Přístupů k ocenění je několik. Finkelstein a kol. (2003) uvádí následující:

- techniku replikace portfolia;
- analytický (tzv. *closed form*) přístup;
- simulační metody;
- model mříže;
- různé aproximace.

Replikace a analytický přístup nemusí být pro ocenění dostatečné, protože plně neodpovídají komplexitě situace. V praxi proto často dochází k simulaci peněžních toků, které by odpovídající derivát vytvořil, kdyby takové aktivum existovalo. Takováto simulace zahrnuje projekce peněžních toků pro několik tisíc scénářů a výpočet diskontované současné hodnoty pro každý scénář (viz představený stochastický přístup k projekci finančních toků).

Hodnota opcí a garancí v pojištění tvoří kvůli potřebě simulací výpočetně náročnou část při určovaní hodnoty nejlepšího odhadu závazků pojistitele, který si představíme v následující kapitole.

2.3 Nejlepší odhad závazků (BEL)

Cílem evropské směrnice Solvency II[4] zmíněné v části 1.3.2 je sjednotit pravidla na evropském trhu a danými pravidly zajistit větší ochranu spotřebitelů. Samotná směrnice je poměrně obsáhlá, nejlepší odhad závazků tvoří pouze malou část požadavků, které klade na pojistitele. Směrnice stojí na třech pilířích.

Pilíř 1 stanoví minimální požadavek na kapitál, který musí pojistitelé držet. Stanovuje metodiky oceňování aktiv a pasiv (včetně technických rezerv) na základě tržně konzistentních zásad. Pilíř 2 zahrnuje kontrolní proces dohledu, systémy řízení a řízení rizik. Pilíř 3 se věnuje zveřejňování informací a dohledu nad nimi, podle nichž se vyžaduje vypracování definovaných zpráv regulačním orgánům a veřejnosti. Dopadům směrnice Solvency II na životní pojištění se věnuje např. Institute and Faculty of Actuaries (2016).

První pilíř se detailně věnuje oceňování aktiv a pasiv. Součástí pasiv jsou také technické rezervy, které by dle metodiky Solvency II měly představovat částku, kterou by pojišťovna musela zaplatit, aby své závazky okamžitě převedla na jinou pojišťovnu. Dle Solvency II lze technické rezervy dělit na dvě části: nejlepší odhad závazků BEL (*best estimate of liabilities*) a rizikovou marži RM (*risk margin*), tedy

$$technické\ rezervy = BEL + RM.$$

Nejlepší odhad závazků je definován a blíže představen v první části této kapitoly. V druhé části kapitoly jsou představeny možné přístupy k jeho výpočtu.

[4]Směrnice Evropského parlamentu a rady 2009/138/ES ze dne 25. listopadu 2009.

2.3.1 Definice hodnoty nejlepšího odhadu závazků

Nejlepší odhad závazků BEL (*Best Estimate of Liabilities*) je nestranný odhad současné hodnoty očekávaných budoucích finančních toků (očekávaných ve smyslu střední hodnoty), přesněji současná hodnota očekávaných budoucích finančních toků diskontovaná pomocí bezrizikové výnosové křivky.

Definice 4. *Nechť CF_t, $t = 1,2,\dots,T$ značí budoucí finanční toky pojišťovny a $\mathbf{y}_T = (i_1, i_2, \dots, i_T)$ označuje bezrizikovou výnosovou křivku. Pak lze nejlepší odhad závazků BEL definovat jako*

$$BEL = \mathbb{E}\Big[\sum_{t=1}^{T} PV(CF_t)\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i_t)(1+i_{t-1})\dots(1+i_1)}\Big]. \tag{2.7}$$

Dle Solvency II musí BEL zahrnovat i časovou hodnotu finančních opcí a garancí TVFOG (*Time Value of Financial Options and Guarantees*). BEL lze rozdělit na

$$BEL = BEL^{[CE]} + TVFOG,$$

kde

- $BEL^{[CE]}$ představuje tzv. jistotní ekvivalent (*Certainty Equivalent*), což je současná hodnota budoucích finančních toků za očekávaného vývoje trhu (jednoho scénáře vývoje výnosové křivky);
- $TVFOG$ je časová hodnota opcí a garancí.

Jistotní ekvivalent lze dále dělit na část BE^{Gar}, tedy část pokrývající náklady, pojistné a garantovaná plnění a část $FDB^{[CE]}$, což je část pokrývající podíl pojistníka na zisku. Pak pro BEL máme

$$BEL = BE^{Gar} + FDB^{[CE]} + TVFOG.$$

Jednotlivým částem hodnoty BEL a další dekompozici se blíže věnuje Burkhart (2018). Pro naše účely je nicméně důležitý především přístup k výpočtu této hodnoty.

2.3.2 Výpočet hodnoty BEL

Nejlepší odhad závazků lze vypočítat pomocí tří různých metod (volba vhodné metody by měla proběhnout podle charakteristik portfolia smluv):

1. Deterministický přístup: v případě pojišťoven, kde peněžní toky nezávisí na pohybech trhu nebo se pohybují lineárně s trhem (tj. byznys, který není charakterizován asymetrií ve výsledcích akcionářů způsobenou hodnotou TVFOG), lze výpočet provést pomocí přístupu založeného na jistotním ekvivalentu, tedy za použití jednoho scénáře. Deterministické řešení může být přijatelné v závislosti na příslušných rizicích a významnosti daného portfolia i v případě existence opcí a garancí.

2. Analytický přístup: v případě, kdy lze peněžní toky generované finančními opcemi snadno oddělit od podkladového závazku (např. některé investiční produkty), mohou být vhodná analytická řešení (tzv. *closed form*). Jistotní ekvivalent je hodnota produktu ignorující finanční opce a k určení hodnoty TVFOG je použit analytický vzorec (např. Black-Scholes-Mertonův model). Tento přístup nicméně neumožňuje vhodně modelovat chování pojistníků a managementu.

3. Stochastický simulační přístup: pro pojišťovny, kde peněžní toky obsahují finanční opce a garance, charakterizované asymetrickým vztahem mezi aktivy a pasivy, např. tradiční smlouvy kapitálového životního pojištění. Tento přístup vyžaduje dostupnost pojistně-matematického nástroje pro projektování budoucích peněžních toků aktiv a pasiv, který je schopen provádět celou řadu ekonomických scénářů, přičemž zohledňuje chování pojistníků (storna smluv) a dostupnost aplikačního nástroje pro generování stochastických scénářů pro projekci cen aktiv a výnosů.

Solvency II určuje také podmínky týkající se předpokladů a výpočtu hodnoty BEL. Všechny předpoklady použité k výpočtu by měly být nejlepším odhadem bez konzervativních (riziku předcházejících) marží. Projekce budoucích finančních toků by měly umožňovat všechna očekávaná snížení hodnot a možná chování pojistníků, včetně storna smlouvy. Pojišťovny musí při stanovení předpokladů, které nejlépe odrážejí vlastnosti daného portfolia pojištění, brát v úvahu všechny relevantní dostupné údaje, interní i externí. Předpoklady týkající se budoucích výdajů musí zohledňovat režijní i přímo související náklady a budoucí inflaci nákladů.

Budoucí pojistné lze brát v úvahu až do tzv. „hranice smlouvy“, která je široce definována jako okamžik, kdy společnost může jednostranně ukončit smlouvu, odmítnout pojistné nebo upravit výši pojistného nebo pojistného plnění tak, aby plně odrážela příslušná rizika. V praxi to u životního pojištění obvykle znamená datum splatnosti nebo vypršení platnosti smlouvy.

Výpočet hodnoty BEL by měl probíhat zvlášť pro homogenní skupinu produktů a projekce peněžních toků by měly být v ideálním případě prováděny pro každou smlouvu individuálně. Aproximace jsou nicméně přípustné a za předpokladu, že jsou splněny určité podmínky, včetně ověření přesnosti, lze použít tzv. grupování smluv, tedy místo několika podobných smluv uvažovat jednu smlouvu s odpovídajícím nastavením.

Je možné, aby BEL vycházel záporný (neexistuje nulové „minimum“) a mohou být drženy záporné rezervy.

Stochastický výpočet hodnoty BEL

Dle (2.7) je

$$BEL = \mathbb{E}\Big[\sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i_t)(1+i_{t-1})\dots(1+i_1)}\Big].$$

Uvažujme čas ocenění $t = 0$ a projekci finančních toků na T časových období dopředu. Finanční toky jsou diskontovány k datu ocenění. Pro stochastický výpočet uvažujme J stejně pravděpodobných[5] scénářů výnosové křivky $\mathbf{y}_T^{[j]} = (i_1^{[j]}, i_2^{[j]}, \ldots, i_T^{[j]})$, $j = 1,2,\ldots,J$, vygenerovaných vhodným postupem (viz část 2.1.4). Pokud provedeme projekci všech finančních toků na T let pro každou výnosovou křivku $\mathbf{y}_T^{[j]}$, získáme hodnotu BEL jako

$$BEL = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{CF_t^{[j]}}{(1+i_t^{[j]})(1+i_{t-1}^{[j]})\ldots(1+i_1^{[j]})}\right], \tag{2.8}$$

kde $CF_t^{[j]}$ značí finanční toky v období $(t-1,t)$ za použití výnosové křivky $\mathbf{y}_T^{[j]}$. Konkrétní tvar finančních toků se liší pro každý produkt. Složkám finančních toků pro tradiční smíšené kapitálové pojištění s participací na zisku se věnuje např. Burkhart (2018).

Shrnutí

Pojišťovny musí pro produkty obsahující garance, vnořené opce či podíly na zisku provádět stochastický výpočet. V takovém případě jsou projektovány finanční toky každé smlouvy na mnoho let dopředu pro dostatečné množství scénářů (např. 1000). Takový výpočet je poměrně časově náročný (např. může trvat i několik dní). V praxi může být přínosné znát odhad hodnoty BEL dříve (pro rozhodování managementu, pro dřívější zhodnocení finanční situace pojišťovny apod.). Cílem této práce je navrhnout a ověřit možný přístup k vytvoření dostatečně přesné a časově méně náročné aproximace hodnoty BEL. Tomu se věnuje následující kapitola.

[5] V praxi je možné se setkat i s výpočty hodnoty BEL uvažující jiná pravděpodobnostní rozdělení než rovnoměrné rozdělení.

3. Durace, parciální durace a možnost aproximace hodnoty BEL za použití durací

Jak již bylo řečeno, z důvodu existence opcí a garancí v životním pojištění, a tedy potřeby využít stochastický přístup, trvá výpočet hodnoty BEL poměrně dlouho i při použití vhodného software a hardware. Uvažujme například 10 000 smluv životního pojištění a stochastický výpočet, který projektuje finanční toky pro každý měsíc na následujících 50 let. Pokud by získání hodnoty celkového finančního toku pro konkrétní měsíc vyžadovalo 100 operací, máme pro výpočet hodnoty BEL na 1 000 scénářích celkem $6 \cdot 10^{11}$ (10 000 $\cdot$ 50 $\cdot$ 12 $\cdot$ 100 $\cdot$ 1 000) operací. Z tohoto důvodu může být užitečné mít k dispozici výpočetně méně náročnou aproximaci požadované hodnoty získané projekcí finančních toků (tedy například aproximaci hodnoty BEL). Explorace takovéto aproximace je primárním cílem této práce a je prezentována v této kapitole. Konkrétně bude zkoumána možnost aproximace hodnoty BEL užitím durace používané k měření citlivosti ceny dluhopisu na změnu úrokové míry. Dalším možnostem aproximace výsledků projekce finančních toků či možnostem zrychlení této projekce se věnuje např. Janeček (2017).

Níže je v první podkapitole představena potřebná teorie k duraci a parciální duraci, jsou zavedeny potřebné předpoklady a jsou odvozeny základní vlastnosti a vztahy mezi durací a parciálními duracemi. První oddíl se věnuje duracím a jejich vztahu k citlivosti ceny dluhopisu na změnu úrokových měr. Právě k zachycení této citlivosti jsou durace primárně používány. Druhý oddíl se věnuje speciálním druhům durací, které lze použít v případě, že je porušen některý z předpokladů. Druhá podkapitola se věnuje aplikaci tohoto přístupu na problém výpočtu nejlepšího odhadu závazků BEL. V prvním oddílu této podkapitoly je zhodnocena podobnost výpočtu BEL s výpočtem současné hodnoty dluhopisů, která indikuje možnost použití durace i v souvislosti s výpočtem hodnoty BEL. První oddíl se také zabývá splněním předpokladů představených v první podkapitole. Druhý oddíl druhé podkapitoly pak prezentuje navržený postup aproximace hodnoty BEL, který bude v následující kapitole otestován na příkladu.

3.1 Durace a parciální durace

Na pojem durace lze nejčastěji narazit ve formě durace dluhopisu, která popisuje jeho citlivost. Dluhopis nebo také obligace je cenný papír, který zavazuje emitenta dluhopisu splatit v čase splatnosti držiteli dluhopisu (věřiteli) nominální hodnotu F a v předem definovaných časech t platit kupóny C_t (uvažujme dále t značící roky). Bezkupónový dluhopis zmiňovaný v první kapitole je speciálním případem dluhopisu, pro který $C_t = 0, \forall t$. Nenulové kupóny mohou být stanoveny pevně (např. procento z nominální hodnoty) nebo proměnlivě (např. navázány na nějakou veličinu, kupříkladu inflaci). Současná hodnota dluhopisu, která odpovídá jeho teoretické ceně, pro danou roční úrokovou míru i je

$$PV = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+i)^t} + \frac{F}{(1+i)^T}, \tag{3.1}$$

kde T je čas do splatnosti nebo také maturity (v letech). Cenu dluhopisu pro úrokovou míru i budeme dále značit $P(i)$ a bude odpovídat současné hodnotě dluhopisu diskontované užitím i. V souvislosti s analýzou dluhopisů je používán již výše zmíněný pojem *citlivost dluhopisu*. Citlivost dluhopisu popisuje, jak se cena dluhopisu mění v závislosti na změně úrokové míry z i_0 na i_1, tedy

$$citlivost = \frac{P(i_1) - P(i_0)}{P(i_0)}.$$

Radová (2007) uvádí následující vlivy faktorů působících na změnu ceny dluhopisu:

- citlivost ceny je přímo úměrná době splatnosti dluhopisu;
- citlivost ceny dluhopisu je tím větší, čím menší je velikost kupónové sazby, to znamená, že nejcitlivější jsou dluhopisy s nulovým kupónem;
- cena dluhopisu je citlivější na pokles úrokových sazeb než na jejich růst;
- citlivost dlouhodobého dluhopisu na změnu úrokových sazeb je větší než citlivost krátkodobého dluhopisu;
- citlivost ceny je vyšší při nižších tržních úrokových mírách než při vyšších.

3.1.1 Durace a citlivost ceny dluhopisu

Durace, někdy také střední doba splatnosti, střední doba životnosti nebo průměrná doba trvání dluhopisu, je míra, která popisuje citlivost ceny dluhopisu na změnu úrokových měr.

Duraci lze odvodit pomocí Taylorova rozvoje (viz níže) a pro její odvození předpokládejme

(1) výnosová křivka je plochá,

(2) výnosová křivka se posouvá pro všechny doby splatnosti stejně,

(3) změna úrokových sazeb je malá,

(4) finanční toky spojené s dluhopisem (kupóny a nominální hodnota) nejsou závislé na úrokové míře.

Ad (1). Výnosová křivka $\mathbf{y}_T = (i_1, i_2, \ldots, i_T)^\intercal$ je plochá, pokud i_t je konstantní, tedy pro všechna t, $t = 1{,}2, \ldots, T$ je $i_t = i$. V praxi tento předpoklad většinou neplatí a úrokové míry se liší pro různé doby splatnosti.

Ad (2). Durace sleduje změnu ceny dluhopisu při změně úrokové míry z $\mathbf{y}_T^0$ na $\mathbf{y}_T^1$. Předpokládáme, že pro všechna t, $t = 1{,}2, \ldots, T$ je $i_t^1 = i_t^0 + \Delta i$, tedy že celá výnosová křivka se posunula paralelně o Δi. Ani tento předpoklad neodpovídá praxi.

Ad (3). Předpokládáme, že změna úrokových sazeb je malá, tedy že Δi je malé. Tento předpoklad může být v praxi splněn, obzvláště pokud se díváme na měsíční změnu úrokové míry, která je obvykle menší než změna roční[1].

Ad (4). Předpokládáme, že finanční toky plynoucí z dluhopisu nezávisí na úrokové míře i a lze k nim proto přistupovat jako ke konstantě. V praxi toto nesplňují dluhopisy s kupónovou platbou, jejíž výše se odvíjí od nějaké referenční úrokové sazby.

Odvození durace

Nechť $P(i)$ je funkce vyjadřující cenu dluhopisu pro příslušnou úrokovou míru i. Taylorův rozvoj funkce $f(x)$ v bodě a má tvar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Pak Taylorův rozvoj funkce $P(i + \Delta i)$ v bodě i má tvar

$$P(i+\Delta i) = P(i) + \frac{\partial P}{\partial i}(i) \cdot \Delta i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial i^2}(i) \cdot (\Delta i)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 P}{\partial i^3}(i) \cdot (\Delta i)^3 \ldots,$$

kde Δi je malé. Úrokové míry i nabývají typicky hodnot v řádech setiny jednotky, jejich změny Δi hodnot ještě nižších. Pro dostatečně malé změny tak můžeme zanedbat všechny členy rozvoje s mocninou Δi druhého řádu a vyšší. Tedy

$$P(i+\Delta i) = P(i) + \frac{\partial P}{\partial i}(i) \cdot \Delta i. \tag{3.2}$$

Poměrnou změnu ceny dluhopisu, pokud se úroková křivka změní o Δi, lze vyjádřit jako

$$\frac{\Delta P(i)}{P(i)} = \frac{P(i+\Delta i) - P(i)}{P(i)}, \tag{3.3}$$

dosazením (3.2) do (3.3), získáme

$$\frac{\Delta P(i)}{P(i)} = \frac{P(i) + \frac{\partial P}{\partial i}(i) \cdot \Delta i - P(i)}{P(i)} = \frac{\frac{\partial P}{\partial i}(i) \cdot \Delta i}{P(i)}.$$

Definice 5. *Modifikovanou Macaulayovu duraci D_{MM} definuje vztah*

$$-D_{MM} \cdot \Delta i = \frac{\Delta P(i)}{P(i)},$$

kde

$$\frac{\Delta P(i)}{P(i)} = \frac{1}{P(i)} \cdot \frac{\partial P}{\partial i}(i) \cdot \Delta i$$

a $P(i)$ je funkce ceny dluhopisu v závislosti na úrokové míře i.

[1]Předpoklad malé změny úrokových měr je dále diskutován v rámci této kapitoly.

Tedy

$$D_{MM} = -\frac{1}{P(i)} \cdot \frac{\partial P}{\partial i}(i).$$

Mínusové znaménko v definici zaručí, že bude hodnota durace kladná (derivace cenové funkce (3.1) podle i je záporná). Pokud předpokládáme cenu dluhopisu definovanou v (3.1), můžeme následujícím způsobem upravit tvar Macaulayovy durace. Pro jednodušší značení, označme finanční toky plynoucí z dluhopisu (C_t v časech t a F v čase T) souhrnně CF_t pro $t = 1, 2, \ldots, T$. Pak $CF_t = C_t$, pro $t = 1{,}2, \ldots, T-1$ a $CF_T = C_T + F$. Pak můžeme psát

$$P(i) = \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i)^t}.$$

Protože

$$\frac{\partial P}{\partial i}(i) = \sum_{t=1}^{T} \frac{-t \cdot CF_t}{(1+i)^{t+1}}$$

máme

$$D_{MM} = -\frac{1}{\sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i)^t}} \cdot \sum_{t=1}^{T} \frac{-t \cdot CF_t}{(1+i)^{t+1}} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{t \cdot CF_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i)^t}} \tag{3.4}$$

Pro své vhodnější vyjádření je častěji používána Macaulayova durace definovaná níže. Oproti odvození D_{MM} je u Macaulayovy durace poměr $\Delta P(i)/P(i)$ vynásoben $(1+i)/(1+i)$ a při odvozování vzniká

$$\frac{\Delta P(i)}{P(i)} = \frac{1}{P(i)} \frac{\partial P}{\partial i}(i) \cdot \Delta i \cdot \frac{1+i}{1+i}.$$

Definice 6. *Macaulayovu duraci D_M definuje vztah*

$$-D_M \cdot \frac{\Delta i}{1+i} = \frac{\Delta P(i)}{P(i)},$$

kde

$$\frac{\Delta P(i)}{P(i)} = \frac{1+i}{P(i)} \cdot \frac{\partial P}{\partial i}(i) \cdot \frac{\Delta i}{1+i}$$

a $P(i)$ je funkce ceny dluhopisu v závislosti na úrokové míře i.

Tedy

$$D_M = -\frac{1+i}{P(i)} \cdot \frac{\partial P}{\partial i}(i) \quad \Big(= (1+i) \cdot D_{MM} \Big).$$

Pokud dosadíme cenovou funkci (obdobně jako pro modifikovanou Macaulayovu duraci v (3.4)), dostaneme

$$D_M = (1+i) \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{t \cdot CF_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i)^t}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{t \cdot CF_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i)^t}}. \tag{3.5}$$

Poznámka. Alternativně lze duraci dluhopisu D popsat jako vážený průměr dob splatnosti jednotlivých finančních toků CF_t, přičemž vahou každého finančního toku je poměrný příspěvek jednotlivých diskontovaných finančních toků do celkové ceny dluhopisu P, neboli

$$D = \sum_{t=1}^{T} t \cdot w_t, \tag{3.6}$$

kde váhy w_t jsou

$$w_t = \frac{\frac{CF_t}{(1+i)^t}}{P(i)}$$

a i značí příslušnou úrokovou míru. Tento tvar odpovídá tvaru (3.5).

Modifikovaná Macaulayova a Macaulayova durace vyjadřují poměr změny ceny vzhledem k původní ceně. Durace, která vyjadřuje tuto změnu v jednotkách se nazývá durace dolarová (někdy také korunová, jedná-li se o dluhopisy emitované v českých korunách).

Definice 7. Dolarová/korunová durace je definována jako

$$D_{DOL/KOR} = D_{MM} \cdot P(i) = D_M \cdot \frac{P(i)}{(1+i)} = -\frac{\partial P}{\partial i}(i).$$

3.1.2 Speciální typy durací

Výše odvozené a definované durace požadují splnění čtyř předpokladů:

(1) $i_t = i \ \forall t$,

(2) $i_t^1 = i_t^0 + \Delta i \ \forall t$,

(3) Δi je malé,

(4) $CF_t \ \forall t$ nezávisí na i.

Jak již bylo zmíněno, ne všechny předpoklady jsou v praxi reálné - především předpoklady (1), (2) a (4). Níže jsou rozebrány specifické možnosti přístupů k výpočtu durace, které lze použít v případě, že některý z předpokladů není splněn.

Nesplněn předpoklad (1)

Není splněn předpoklad (1): $i_t = i$, $\forall t$, tedy výnosová křivka $\mathbf{y}_T$ není plochá. Hodnota úrokové míry se liší pro jednotlivá t, tedy $\mathbf{y}_T = (i_1, i_2, \ldots, i_T)^\intercal$. K diskontování jednotlivých finančních toků dluhopisu můžeme uvažovat spotové úrokové míry. Cena dluhopisu (současná hodnota) má tvar

$$P(\mathbf{y}_T) = \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i_t)^t}.$$

Duraci můžeme odvodit jako vážený průměr dob splatnosti jednotlivých finančních toků s váhami

$$w_t = \frac{\frac{CF_t}{(1+i_t)^t}}{P(\mathbf{y}_T)}.$$

Dosazením těchto vah do (3.6), získáme Fisher-Weilovu duraci.

Definice 8. *Fisher-Weilova durace má tvar*

$$D_{FW} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{t \cdot CF_t}{(1+i_t)^t}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i_t)^t}}. \tag{3.7}$$

Fisher-Weilovu duraci lze vyjádřit i pro forwardové míry. Označme $f_{k-1,k}$ jednoleté forwardové míry z času $k-1$ do času k. Dle (1.2) platí

$$\begin{aligned}(1+i_t)^t &= (1+f_{t-1,t})(1+i_{t-1})^{t-1} = (1+f_{t-1,t})(1+f_{t-2,t-1})(1+i_{t-2})^{t-2} \\ &= \cdots = \prod_{k=1}^{t}(1+f_{k-1,k}).\end{aligned}$$

Pak má Fisher-Weilova durace tvar

$$D_{FW} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{t \cdot CF_t}{\prod_{k=1}^{t}(1+f_{k-1,k})}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{\prod_{k=1}^{t}(1+f_{k-1,k})}}.$$

Nesplněn předpoklad (2)

Neplatí, že se všechny úrokové míry posouvají o stejnou hodnotu (nedochází k tzv. paralelnímu posunu). Tedy $\mathbf{y}_T^1 = (i_1^0 + \Delta_1, i_2^0 + \Delta_2, \ldots, i_T^0 + \Delta_T)^\intercal$. Pro takový případ lze užít parciální durace. Uvažujme situaci, kdy se mění pouze j-tá úroková sazba i_j, ostatní zůstávají neměnné ($i_t^0 = i_t^1$, $\forall t$, $t \neq j$). Označme $\mathbf{y}_T^{(j)} = (i_1^0, \ldots, i_j^0 + \Delta i_j, \ldots, i_T^0)^\intercal$. Pokud budeme brát cenovou funkci $P(\mathbf{y}_T^{(j)})$, získáme obdobně jako v (3.3)

$$P(\mathbf{y}_T^{(j)}) = P(\mathbf{y}_T) + \frac{\partial P}{\partial i_j} \cdot \Delta i_j.$$

Z toho

$$\frac{\Delta P(i_j)}{P(\mathbf{y}_T)} = \frac{P(\mathbf{y}_T^{(j)}) - P(\mathbf{y}_T)}{P(\mathbf{y}_T)} = \frac{\frac{\partial P}{\partial i_j} \cdot \Delta i_j}{P(\mathbf{y}_T)}.$$

Obdobně jako klasickou Macaulayovu duraci, zadefinujeme níže durace parciální.

Definice 9. *Parciální durace dluhopisu jsou definovány vztahem*

$$-D_j \cdot \frac{\Delta i_j}{1+i_j} = \frac{\Delta P(i_j)}{P(\mathbf{y}_T)},$$

kde

$$\frac{\Delta P(i_j)}{P(\mathbf{y}_T)} = \frac{1+i_j}{P(\mathbf{y}_T)} \cdot \frac{\partial P}{\partial i_j} \cdot \frac{\Delta i_j}{1+i_j}.$$

Tedy

$$D_j = -\frac{1+i_j}{P(\mathbf{y}_T)} \cdot \frac{\partial P}{\partial i_j}.$$

Níže formulovaná věta popisuje vztah Fisher-Weilovy durace a parciálních durací.

Věta 1. Pro dluhopis s cenou $P(\mathbf{y}_T) = P(i_1, i_2, \ldots, i_T) = \sum_{t=1}^{T} CF_t/(1+i_t)^t$, který splňuje předpoklady

(3) Δi je malé,

(4) CF_t $\forall t$ nezávisí na i,

mějme Fisher-Weilovu duraci D_{FW} a všechny parciální durace D_j, $j = 1,2,\ldots,T$. Pak platí

$$D_{FW} = \sum_{j=1}^{T} D_j. \tag{3.8}$$

Důkaz. Parciální derivace cenové funkce má tvar

$$\frac{\partial P(\mathbf{y}_T)}{\partial i_j} = \frac{\partial}{\partial i_j}\left(\sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i_t)^t}\right) = \frac{-j \cdot CF_j}{(1+i_j)^j} = \frac{1}{1+i_j} \cdot \frac{-j \cdot CF_j}{(1+i_j)^j}.$$

Potom

$$\begin{aligned} D_j &= -\frac{\Delta P(i_j)}{P(\mathbf{y}_T)} \cdot \frac{1+i_j}{\Delta i_j} \\ &= -\frac{1+i_j}{P(\mathbf{y}_T)} \cdot \frac{\partial P(\mathbf{y}_T)}{\partial i_j} \cdot \frac{\Delta i_j}{1+i_j} \cdot \frac{1+i_j}{\Delta i_j} \\ &= -\frac{1+i_j}{P(\mathbf{y}_T)} \cdot \frac{1}{1+i_j} \cdot \frac{-j \cdot CF_j}{(1+i_j)^j}. \end{aligned}$$

Tedy

$$D_j = \frac{1}{P(\mathbf{y}_T)} \cdot \frac{j \cdot CF_j}{(1+i_j)^j}.$$

Pak pro součet parciálních durací platí

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{T} D_j &= \sum_{j=1}^{T} \frac{1}{P(\mathbf{y}_T)} \cdot \frac{j \cdot CF_j}{(1+i_j)^j} \\ &= \frac{1}{P(\mathbf{y}_T)} \cdot \sum_{j=1}^{T} \frac{j \cdot CF_j}{(1+i_j)^j} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{T} \frac{j \cdot CF_j}{(1+i_j)^j}}{\sum_{j=1}^{T} \frac{CF_j}{(1+i_j)^j}}. \end{aligned}$$

A tedy suma parciálních durací se rovná Fisher-Weilově duraci, viz (3.7), a tedy rovnost (3.8) platí.

□

Nesplněn předpoklad (4)

To, že není splněn předpoklad (4) znamená, že jsou finanční toky dluhopisu $CF_t(i_1, i_2, \ldots, i_t)$ funkcemi úrokových měr. Potom není možné jednoduše odvodit derivaci nebo parciální derivace cenové funkce dluhopisu (3.1). Pro takový případ si představíme efektivní modifikovanou duraci, která je odvozována přímo z reálných dat.

Definice 10. *Efektivní modifikovanou duraci definujeme vztahem*

$$D_{EM} = -\frac{\partial P}{\partial i} \cdot \frac{1}{P},$$

kde

$$\frac{\partial P}{\partial i} = \lim_{\Delta i \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta i}.$$

Efektivní modifikovaná durace tedy vyjadřuje procentuální změnu při velmi malé změně spotové výnosové křivky. Pokud se úrokové míry posunou o Δi a cena dluhopisu se změní o $\Delta P = P(i + \Delta i) - P(i)$, lze efektivní modifikovanou duraci vyjádřit jako

$$D_{EM} = -\frac{\Delta P}{P} \cdot \frac{1}{\Delta i}.$$

V praxi lze efektivní modifikovanou duraci numericky aproximovat

$$D_{EM} = -\Big[\frac{P(i + \Delta i) - P(i - \Delta i)}{2\Delta i P(i)}\Big]. \tag{3.9}$$

Efektivní modifikovaná durace může na rozdíl od durací definovaných výše nabývat hodnot vyšších než doba splatnosti (obecně může nabývat velice vysokých hodnot v případě, že je změna ceny velká ale změna úrokové míry malá). Efektivní modifikovaná durace může také nabývat záporných hodnot. Výhodou tohoto přístupu je, že pro výpočet stačí znát výsledné ceny a velikost změny úrokových křivek.

Obdobně můžeme odvodit alternativu k parciálním duracím, tzv. key rate durace. Opět uvažujme situaci, kdy se hodnota úrokové míry liší pro jednotlivá t, tedy $\mathbf{y}_T = (i_1, i_2, \ldots, i_T)^\intercal$ a kdy se mění pouze j-tá úroková sazba i_j, ostatní zůstávají neměnné ($i_t^0 = i_t^1$, $\forall t$, $t \neq j$). Označme $\mathbf{\Delta i_j} = (0, \ldots, 0, \Delta i_j, 0, \ldots, 0)^\intercal$. Označme $\Delta_j P = P(\mathbf{y}_T + \Delta \mathbf{i_j}) - P(\mathbf{y}_T)$. Pak má j-tá parciální key rate durace tvar

$$KRD_j = -\frac{\Delta_j P}{P} \cdot \frac{1}{\Delta i_j}. \tag{3.10}$$

a lze ji numericky aproximovat

$$KRD_j = -\Big[\frac{P(\mathbf{y}_T + \Delta \mathbf{i_j}) - P(\mathbf{y}_T - \Delta \mathbf{i_j})}{2\Delta i_j P(\mathbf{y}_T)}\Big]. \tag{3.11}$$

Stejně jako u Fisher-Weilovy durace a parciálních durací máme za splnění určitých předpokladů rovnost mezi efektivní modifikovanou durací a key rate duracemi. Mezi předpoklady patří nezávislost finančních toků na úrokových mírách, což jsme v rámci této sekce neuvažovali. Níže si nicméně pro situaci, kdy je tento předpoklad splněn, rovnost dokážeme.

Věta 2. Pro dluhopis s cenou $P(\mathbf{y}_T) = P(i_1, i_2, \ldots, i_T)$, který splňuje předpoklady

(2) $i_t^1 = i_t^0 + \Delta i \ \forall t$,

(4) $CF_t \ \forall t$ *nezávisí na* $\mathbf{y}_T$,

mějme efektivní modifikovanou duraci D_{EM} a všechny key rate durace KRD_j, $j = 1, 2, \ldots, T$. Pak platí

$$D_{EM} = \sum_{j=1}^{T} KRD_j. \tag{3.12}$$

Důkaz. Podívejme se prvně na člen $P(\mathbf{y}_T + \Delta \mathbf{i_j}) - P(\mathbf{y}_T - \Delta \mathbf{i_j})$. Dle (3.1) platí

$$\begin{aligned} P(\mathbf{y}_T + \Delta \mathbf{i_j}) - P(\mathbf{y}_T - \Delta \mathbf{i_j}) &= \sum_{t=1, t\neq j}^{T} \frac{CF_t}{1+i_t}^{t} + \frac{CF_j}{(1+i_j+\Delta i_j)^j} \\ &\quad - \left[\sum_{t=1, t\neq j}^{T} \frac{CF_t}{(1+i_t)^t} + \frac{CF_j}{(1+i_j-\Delta i_j)^j} \right] \\ &= \frac{CF_j}{(1+i_j+\Delta i_j)^j} - \frac{CF_j}{(1+i_j-\Delta i_j)^j}. \end{aligned}$$

Podle (2) je $\Delta i_j = \Delta i \ \forall j$. Pak pro key rate durace máme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{T} KRD_j &= -\sum_{j=1}^{T} \frac{P(\mathbf{y}_T + \Delta \mathbf{i_j}) - P(\mathbf{y}_T - \Delta \mathbf{i_j})}{2\Delta i P(\mathbf{y}_T)} \\ &= -\frac{1}{2\Delta i P(\mathbf{y}_T)} \sum_{j=1}^{T} \left[\frac{CF_j}{(1+i_j+\Delta i_j)^j} - \frac{CF_j}{(1+i_j-\Delta i_j)^j} \right] \\ &= -\frac{1}{2\Delta i P(\mathbf{y}_T)} \sum_{j=1}^{T} \left[\frac{CF_j}{(1+i_j+\Delta i)^j} - \sum_{j=1}^{T} \frac{CF_j}{(1+i_j-\Delta i)^j} \right] \\ &= -\left[\frac{P(\mathbf{y}_T + \Delta i) - P(\mathbf{y}_T - \Delta i)}{2\Delta i P(\mathbf{y}_T)} \right]. \end{aligned}$$

Výsledný výraz odpovídá (3.9) a tedy rovnost (3.12) platí.

□

Poznámka. Věta 2 platí i v případě, že CF_t nezávisí na i_j, $j \neq t$. Tedy CF_t může být funkcí úrokové míry i_t, ne však úrokových měr z jiných let.

Předpoklad (2) nicméně není reálný, z toho důvodu odvodíme níže jedno užitečné tvrzení.

Tvrzení 3. Buď $P(\mathbf{y}_T)$ cena dluhopisu pro úrokovou křivku $\mathbf{y}_T$ a $P(\mathbf{y}_T + \Delta \mathbf{y}_T)$ cena dluhopisu po změně křivky o $\Delta \mathbf{y}_T = (\Delta i_1, \Delta i_2, \ldots, \Delta i_T)$. Nechť pro finanční toky dluhopisu platí, že CF_t nezávisí na i_j, $j \neq t$. Pak pro změnu ceny ΔP platí

$$\Delta P = P(\mathbf{y}_T + \Delta \mathbf{y}_T) - P(\mathbf{y}_T) = -\sum_{j=1}^{T} KRD_j \cdot \Delta i_j \cdot P(\mathbf{y}_T). \tag{3.13}$$

Důkaz. Z (3.10) je

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{T} KRD_j \cdot \Delta i_j \cdot P(\mathbf{y}_T) &= \sum_{j=1}^{T} -\frac{\Delta_j P}{P(\mathbf{y}_T)} \cdot \frac{1}{\Delta i_j} \cdot \Delta i_j \cdot P(\mathbf{y}_T) \\ &= \sum_{j=1}^{T} -\Delta_j P.\end{aligned}$$

Pro $\Delta \mathbf{i_j} = (0, \ldots, 0, \Delta i_j, 0, \ldots, 0)^\intercal$ a z (3.1) máme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{T} \Delta_j P &= \sum_{j=1}^{T} P(\mathbf{y}_T + \Delta \mathbf{i_j}) - P(\mathbf{y}_T) \\ &= \sum_{j=1}^{T} \Big[\sum_{t=1, t\neq j}^{T} \frac{CF_t(i_t)}{(1+i_t)^t} + \frac{CF_j(i_j + \Delta i_j)}{(1 + i_j + \Delta i_j)^j} - \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t(i_t)}{(1+i_t)^t} \Big] \\ &= \sum_{j=1}^{T} \Big[\frac{CF_j(i_j + \Delta i_j)}{(1 + i_j + \Delta i_j)^j} - \frac{CF_j(i_j)}{(1+i_j)^j} \Big] \\ &= \Delta P.\end{aligned}$$

Z toho platí (3.13).

□

Efektivní modifikovaná durace a key rate durace jsou vhodným nástrojem při analýze finančních nástrojů obsahujících vnořené opce. Užití efektivní modifikované durace u pojištění se věnují Lee a Stock (2000) či Santomero a Babbel (1997).

3.2 Aproximace hodnoty BEL užitím parciálních key rate durací

Hlavním cílem práce je blíže prozkoumat možnost aproximace hodnoty BEL. Aproximace představená v této práci je založená na teorii durací a podobnosti výpočtu hodnoty BEL s cenovou funkcí dluhopisu. Tato podobnost je společně s předpoklady používanými při výpočtu durací v kontextu výpočtu hodnoty BEL diskutována v prvním oddílu této podkapitoly. Druhý oddíl je zaměřen na samotnou aproximaci hodnoty BEL, která bude implementována a otestována v následující kapitole.

3.2.1 Výpočet hodnoty BEL a durace

Podíváme-li se na vzorec pro stochastický výpočet hodnoty BEL (2.8), všimněme si, že obsahuje současnou hodnotu

$$PV = \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t(\mathbf{y}_T)}{(1+i_t)(1+i_{t-1})\ldots(1+i_1)}.$$

Můžeme vidět podobnost s cenovou funkcí dluhopisu (3.1), pro kterou byl v předešlé části představen koncept durace. Pro duraci dluhopisu byly uvažovány předpoklady (1) až (4), na jejichž splnění u výpočtu hodnoty BEL se podíváme níže.

V případě výpočtu BEL nejsou splněny předpoklady (1) o ploché výnosové křivce, (2) o paralelním posunu křivky a (4) o nezávislosti finančních toků na úrokových mírách.

Předpoklad (3) o malých posunech budeme považovat za splněný. Tento závěr si můžeme ověřit na dostupných datech. Podíváme-li se na interpolované hodnoty zero-coupon euro swap křivky reportované Deutsche Bundesbank (2020) za posledních 18 let (od roku 2002 do června 2020), vidíme, že se meziměsíční změna úrokové míry za posledních 18 let v absolutních hodnotách pohybuje okolo 0,1 %, tedy 0,001 (průměrná změna přes všechna sledovaná období a všechny vybrané doby splatnosti je 0,14033 %). V Tabulce 3.1 níže si můžeme prohlédnout některé základní statistiky změn úrokových křivek pro vybrané doby splatnosti T. Jak můžeme vidět, $|\Delta i_j|$ zobrazené v procentních bodech nenabývají vysokých hodnot.

T	Q1 kvantil	Medián	Průměr	Q3 kvantil	Maximum
1	0,018	0,054	0,09371	0,113	0,961
2	0,031	0,072	0,11940	0,162	0,920
3	0,043	0,084	0,12980	0,172	0,795
5	0,052	0,112	0,13860	0,198	0,610
10	0,064	0,126	0,14180	0,185	0,654
15	0,061	0,125	0,14130	0,186	0,785
20	0,052	0,120	0,14000	0,190	0,840
25	0,058	0,121	0,14200	0,190	0,824
30	0,056	0,127	0,14200	0,192	0,826
35	0,053	0,119	0,14260	0,191	0,816
40	0,049	0,120	0,14380	0,188	0,808
45	0,054	0,116	0,14430	0,190	0,851
50	0,058	0,115	0,14480	0,190	0,885

Tabulka 3.1: Základní popisné statistiky absolutních hodnot Δi v procentních bodech pro vybrané doby splatnosti od ledna 2002 do června 2020.

Co se týče ostatních předpokladů, je zřejmé, že bude nezbytné využít parciální durace nebo key rate durace a to z důvodu neparalelního posunu úrokových křivek. V praxi nejsou úrokové křivky ploché, což vede na Fisher-Weilovu duraci (pokud neuvažujeme vnořené opce). Nejvíce problematická je existence vnořených opcí (garance, participace na zisku), která způsobuje, že budoucí finanční toky CF_t závisí na vývoji úrokové křivky. V takovém případě je nejvhodnější použít efektivní modifikovanou duraci, respektive parciální key rate durace.

3.2.2 Přístup k aproximaci hodnoty BEL

Uvažujme situaci, kdy se hodnota BEL počítá každý měsíc a pro výpočet v daném měsíci je využito nejaktuálnější výnosové křivky. Na začátku měsíce k jsou známé vypočtené hodnoty BEL z předchozích měsíců (včetně příslušných výnosových křivek) a výnosová křivka z měsíce k (předpokládejme, že ostatní předpoklady se nezměnily). Hodnotu BEL pro měsíc k je třeba vypočítat za použití aktuální výnosové křivky. Jak již bylo řečeno, tento výpočet může být časově náročný. Z tohoto důvodu může být vhodné mít k dispozici rychlou aproximaci hodnoty BEL. Ta může být založena na hodnotách z předchozích období a na hodnotách výnosové křivky. K aproximaci hodnoty BEL představené v této práci bude využita změna hodnoty mezi po sobě jdoucími obdobími. Hodnotu BEL v čase k lze vyjádřit jako součet hodnoty v čase $k-1$ a změny mezi těmito období $\Delta_k BEL$. Hodnota z času $k-1$ je v čase k známá a hodnotu změny mezi obdobími budeme aproximovat využitím předem spočítaných durací a změny úrokové křivky mezi obdobími $k-1$ a k.

Níže je tento přístup podrobněji rozebrán.

Vyjádření hodnoty BEL z hodnoty v předcházejícím období

Pro výpočet hodnoty BEL prováděný v čase k a pro scénář j označme

$$BEL_k^{[j]} = \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t(\mathbf{y}_T^{[j]})}{(1+i_t^{[j]})(1+i_{t-1}^{[j]})\dots(1+i_1^{[j]})}.$$

Pak hodnota BEL v čase k (v případě stejně pravděpodobných scénářů) je

$$BEL_k = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} BEL_k^{[j]}.$$

Zároveň označme

$$\Delta_k^{[j]} BEL = BEL_k^{[j]} - BEL_{k-1}^{[j]}$$

a pro změnu hodnoty BEL při změně výnosové křivky máme

$$\Delta_k BEL = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \Delta_k^{[j]} BEL.$$

Hodnotu BEL v čase k pak lze vyjádřit jako

$$BEL_k = BEL_{k-1} + \Delta_k BEL.$$

Člen BEL_{k-1} máme k dispozici z předchozího měsíce, člen Δ_k BEL aproximujeme pomocí durace a získaná aproximace hodnoty BEL v čase k je pak

$$BEL_k \approx BEL_{k-1} + \Delta_k^D BEL. \tag{3.14}$$

Pro účely vyjádření hodnoty $\Delta_k^D BEL$ využijeme efektivní modifikovanou duraci, konkrétně key rate durace.

Využití efektivní modifikované durace pro aproximaci

Pokud by jednotlivé finanční toky CF_t v čase t nezávisely na jiných úrokových mírách než i_t, bylo by možné spočítat jednotlivé key rate durace pro BEL a celkovou změnu získat jejich sečtením dle vzorce (3.13). V praxi nicméně finanční toky ve výpočtu hodnoty BEL mohou záviset (a většinou také závisí) na předchozím vývoji, tedy

$$CF_t = f(i_1, i_2, \dots, i_t).$$

Rovnost (3.13) tedy nemusí platit. Představený postup aproximace se tímto vztahem nicméně inspiruje.

Označme aproximaci hodnoty $\Delta_k BEL$ jako $\Delta_k^D BEL$. Tuto aproximaci získáme následujícím způsobem:

$$\Delta_k^D BEL = -\sum_{t=1}^{T} KRD_t^{BEL} \cdot \Delta i_t \cdot BEL_{k-1}. \tag{3.15}$$

Hodnoty KRD_t^{BEL} reprezentují jednotlivé key rate durace pro BEL. Jejich výpočet je dle (3.11)

$$KRD_t^{BEL} = -\left[\frac{BEL_{k-1}(\mathbf{y}_{k-1} + \Delta \mathbf{i}_t) - BEL_{k-1}(\mathbf{y}_{k-1} - \Delta \mathbf{i}_t)}{2\Delta i_t BEL_{k-1}(\mathbf{y}_{k-1})}\right], \tag{3.16}$$

kde $\Delta \mathbf{i}_t = (0, \ldots, 0, \Delta i_t, 0, \ldots, 0)^\intercal$, $\mathbf{y}_{k-1}$ je křivka z předchozího období $k-1$ a hodnoty BEL $BEL_{k-1}(\mathbf{y}_{k-1} + \Delta \mathbf{i}_t), BEL_{k-1}(\mathbf{y}_{k-1} - \Delta \mathbf{i}_t)$ a $BEL_{k-1}(\mathbf{y}_{k-1})$ lze vypočítat předem za použití křivky $\mathbf{y}_{k-1}$. Tyto hodnoty BEL lze počítat stochasticky nebo deterministicky. Stochastický přístup je vhodnější, avšak časově náročný. Lze jej nicméně provést ještě před časem k. Obě tyto možnosti jsou otestovány v rámci kapitoly 4.

Hodnotu BEL v čase k pak můžeme aproximovat dle (3.14)

$$BEL_k \approx BEL_{k-1} + \Delta_k^D BEL = BEL_{k-1} - \sum_{t=1}^{T} KRD_t^{BEL} \cdot \Delta i_t \cdot BEL_{k-1}, \tag{3.17}$$

kde KRD_t^{BEL} získáme z (3.16).

Vhodnost této aproximace (z hlediska přesnosti a časové náročnosti) je třeba nyní otestovat na reálném příkladu. Tomu se věnuje následující kapitola.

4. Praktická část - testování představené aproximace

Náplní čtvrté, závěrečné kapitoly je otestování postupu aproximace, který byl navržen v předchozí kapitole, na reálném příkladu. K otestování byl zvolen modelový příklad kapitálového pojištění, pro který byl připraven model finančních toků (tzv. cash flow model). Model a relevantní vstupy a předpoklady představuje první podkapitola.

Model je následně za použití reálných dat úrokových křivek využit k výpočtu hodnot BEL ve dvou po sobě jdoucích časech, $k-1$ a k. Hodnoty BEL z času $k-1$ jsou využity k výpočtu příslušných key rate durací. Hodnoty key rate durací a hodnota BEL z času $k-1$ jsou následně využity k aproximaci hodnoty BEL v čase k. Výsledná hodnota aproximace je porovnána s klasickým výpočtem hodnoty BEL v čase k. Dále je srovnána náročnost přípravy výpočtů a časová náročnost výpočtů jako takových. Tvorbě a porovnání aproximací se věnuje druhá podkapitola.

4.1 Model a relevantní informace

V rámci vzorového příkladu uvažujeme jeden produkt tradičního kapitálového životního pojištění – pojištění pro případ smrti nebo dožití s participací na zisku. Vstupy a předpoklady modelu shrnuje první oddíl, princip modelu je představen v oddílu druhém. Třetí oddíl této podkapitoly pak shrnuje základní technické informace týkající se použití modelu.

4.1.1 Vstupy a předpoklady

Pro výpočet je potřebná celá řada vstupů a předpokladů. V rámci vzorového příkladu, na kterém je ozkoušena aproximace BEL z předchozí kapitoly, jsou využity následující vstupy a předpoklady:

- modelpointy (reprezentující jednotlivé smlouvy životního pojištění);
- úrokové míry;
- předpoklady storna smlouvy;
- předpoklady úmrtnosti;
- další předpoklady (datum ocenění, inflace, technická úroková míra, nákladové předpoklady a další).

Tyto předpoklady jsou přiblíženy níže a použité hodnoty jsou k nalezení v přiloženém .zip souboru.

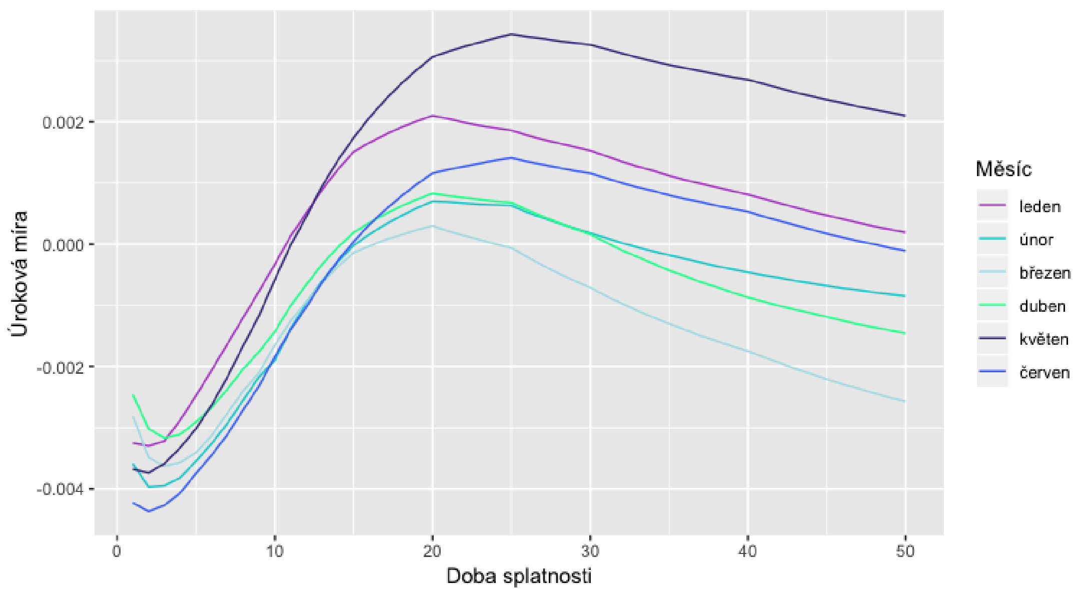
Modelpointy

Modelpointy představují jednotlivé smlouvy daného produktu životního pojištění v kmeni pojišťovny (ty, pro které chceme finanční toky projektovat). Každý modelpoint (tedy každá uzavřená smlouva) má své konkrétní charakteristiky. V modelu jsou uvažovány následující: číslo smlouvy, typ smlouvy (běžně placená nebo jednorázově placená), datum vzniku smlouvy, vstupní věk, pohlaví, pojistná doba, pojistná částka, frekvence placení (měsíčně, čtvrtletně, půlročně a ročně, případně jednorázově), výše podílu na zisku v době výpočtu, výše pojistného, současná výše rezervy a počet modelpointů s těmito charakteristikami[1]. Výše pojistného a výše rezervy jsou spočítány metodami tradiční pojistné matematiky představenými v první kapitole.

Ve vzorovém příkladu je uvažováno 2520 modelpointů. V praxi mohou být počty výrazně vyšší.

Úrokové míry

K výpočtu využíváme křivky zveřejňované Deutsche Bundesbank. Jedná se o interpolované hodnoty křivky bezkupónového euro swapu[2] v první polovině roku 2020, Deutsche Bundesbank (2020). Tyto křivky lze vidět na Obrázku 4.1. Vývoj křivek je velmi podobný a meziměsíční změny (pro danou dobu splatnosti) jsou poměrně nízké (ne vyšší než 0,003).



Obrázek 4.1: Vývoj křivek použitých k výpočtu BEL (hodnoty z bezkupónového swapu z Deutsche Bundesbank (2020)). Interpolované hodnoty z období ledna až května 2020.

[1]Budoucí finanční toky se v rámci modelu počítají pro každý modelpoint zvlášť. V případě smluv se stejnými charakteristikami tak není třeba používat dva modelpointy, ale pouze jeden modelpoint a u něj uvést příslušný počet. Za účelem snížení výpočetního času dochází v praxi také k tzv. grupování modelpointů, kdy se do skupin slučují nejen smlouvy s identickými charakteristikami (které se v praxi nemusí často vyskytovat), ale i smlouvy s podobnými charakteristikami.

[2]Měnový swap je typ finančního derivátu.

Simulace scénářů probíhá pomocí Hull-Whiteova modelu, který vytvořil Drahokoupil (2021), a za využití interpolovaných hodnot křivky bezkupónového euro swapu. Pro každý stochastický výpočet je použito 500 simulovaných scénářů. V praxi se lze nicméně u stochastických cash flow modelů setkat i s vyšším počtem scénářů.

Předpoklady storna smlouvy

V rámci modelu je uvažována možnost storna smlouvy s případným odkupným. Relevantní předpoklady (pravděpodobnosti storna pro různé typy a délky trvání smluv či poplatek strhávaný při výplatě odkupného) jsou zvoleny pouze vzorově.

Předpoklady úmrtnosti

Předpoklady úmrtnosti používané pro získání projektovaných finančních toků vycházejí z úmrtnostních tabulek z roku 2019, které zveřejňuje Český statistický úřad (2020a) a koeficientů reflektujících zkušenost pojišťovny, kterými jsou hodnoty z úmrtnostních tabulek vynásobeny. Tyto koeficienty jsou zvoleny pouze vzorově.

Další předpoklady

Kromě vstupů a předpokladů výše jsou v modelu stanoveny také následující předpoklady: datum výpočtu, inflace (pro fixní náklady) a investiční přirážka. Pro každý typ smlouvy (běžně nebo jednorázově placené) jsou určeny následující parametry: technická úroková míra, nákladové koeficienty, minimální doba pro výplatu odkupného a poplatek při výplatě odkupného, počáteční a obnovovací provize (fixní i formou procenta z pojistné částky) a počáteční a obnovovací náklady (fixní i formou procenta z pojistné částky). Technická úroková míra je zvolena ve výši 1,3 %, což je maximální výše, kterou povoluje Česká národní banka (2015) a inflace je zvolena dle průměrné inflace z roku 2019 ve výši 2,8 %, Český statistický úřad (2020b). Ostatní z uvedených předpokladů jsou zvoleny pouze vzorově.

Na základě těchto předpokladů a vstupů jsou projektovány finanční toky. Použitý způsob výpočtu těchto finančních toků představuje následující oddíl.

4.1.2 Výpočet BEL

Finanční toky jsou projektovány na 50 let dopředu a pro každý modelpoint (smlouvu) zvlášť. Celkový BEL je pak získán sečtením diskontovaných finančních toků přes všechny modelpointy. K diskontování je použita „bezriziková“ úroková míra, za kterou budeme uvažovat křivky diskutované výše.

Finanční toky jedné smlouvy v daném měsíci t jsou pak získány jako

$$CF_t = P_t - O_t - S_t - D_t - Pr_t - N_t,$$

kde

- P_t značí pojistné přijaté v daném měsíci u dané smlouvy;

- O_t značí odkupné vyplacené v daném měsíci u dané smlouvy;
- S_t značí pojistnou částku vyplacenou v daném měsíci u dané smlouvy;
- D_t značí částku vyplacenou v případě dožití v daném měsíci u dané smlouvy;
- Pr_t značí provize vyplacené v daném měsíci u dané smlouvy;
- N_t značí náklady v daném měsíci u dané smlouvy.

Tyto hodnoty jsou získány jako součin výše dané hodnoty v případě, že by smlouva byla v daném okamžiku platná (např. $S_t = 100000$ je smluvně dohodnutá pojistná částka vyplacená v případě smrti pojištěné osoby), a *počtu smluv v platnosti na konci daného měsíce* (např. 0,987). Obdobný koncept byl použit již v příkladu v oddílu 2.1.3.

Celý model je společně s předpoklady a vstupy k nalezení v příloze.

Technické parametry

Model byl implementován v programovacím jazyce *cython* a *python*. Výpočet jednoho scénáře pro 2520 modelpointů trvá u naší implementace na jednom jádře při výkonu 2,8 GHz u Intel Core i7 zhruba 3,5 minuty. Výpočty pro experimenty byly proto počítány paralelně na více jádrech v cloudu.

4.2 Výsledky aproximace získané využitím key rate durací

Cílem tohoto oddílu je provést výpočty hodnot BEL a parciální key rate durace, za jejichž použití je dále provedena aproximace hodnoty BEL po změně úrokové křivky. Ostatní předpoklady se běžně nemění tak často, případně je možné připravit je předem. Úroková křivka však může být aktualizována každý měsíc a po jejím zveřejnění je potřeba model přepočítat. Jak již bylo zmíněno, tento přepočet může být časově značně náročný, obzvlášť v případě stochastického výpočtu. Níže je na vzorovém příkladu testováno, zda může aproximace pomocí parciálních durací představená ve třetí kapitole sloužit k rychlému posouzení toho, jakým způsobem změna křivky hodnotu BEL ovlivní.

Uvažujme produkt životního pojištění, model, vstupy a předpoklady představené v předchozím oddílu. Vhodnost aproximace hodnoty BEL prozkoumáme ve třech variantách:

1. BEL vypočítáme deterministicky, stejně jako příslušné durace;
2. BEL vypočítáme stochasticky, durace však odhadneme pouze deterministicky;
3. BEL i durace vypočítáme stochasticky.

V každé variantě budou vypočteny hodnoty BEL pro 6 různých křivek (křivky z ledna až června roku 2020). Ostatní předpoklady a vstupy zůstávají nezměněny (zajímá nás především dopad změny křivky, v případě změny ostatních předpokladů a vstupů lze hodnotu spočítat předem za použití „staré“ křivky). Spočteny budou také příslušné durace. Pro ty je potřeba spočítat hodnoty BEL pro hodnoty křivek $\mathbf{y}_k = (i_1, i_2, \ldots, i_T)^\intercal$ posunuté o $+\Delta$ nebo $-\Delta$ pro jednotlivé i_t, $t = 1, 2, \ldots, T$. Bylo zvoleno $\Delta = 0{,}001$, což odpovídá průměrné meziměsíční změně, jak jsme viděli v Tabulce 3.1.

Z vypočtených hodnot získáme 50 parciálních key rate durací KRD_t^{BEL} dle vzorce (3.16). Z těchto parciálních key rate durací KRD_t^{BEL} a z meziměsíčních změn křivek získáme $-\sum_{t=1}^{T} KRD_t^{BEL} \cdot \Delta i_t$ (označme $D_k^{BEL} \cdot \Delta i$). Z toho získáme odhad meziměsíčního přírůstku BEL

$$\Delta_k^D BEL = -\sum_{t=1}^{T} KRD_t^{BEL} \cdot \Delta i_t \cdot BEL_{k-1}$$

a samotnou aproximaci

$$BEL_k \approx BEL_{k-1} + \Delta_k^D BEL = \widehat{BEL_k}.$$

Nyní se podíváme na výsledky výpočtů a příslušné aproximace.

Varianta 1

První je představen postup aproximace v případě, že se BEL nepočítá stochasticky. V takovém případě nemusí být aproximace tolik užitečná, protože výpočet BEL za užití jedné křivky nebývá obvykle časově příliš náročný. Příslušné key rate durace a přístup k aproximaci lze využít pro lepší pochopení citlivosti hodnoty BEL na změnu úrokové křivky.

Nyní se krátce podíváme na situaci, kdy je BEL počítán pouze za užití jedné křivky. Hodnoty BEL a příslušné hodnoty aproximace, případně mezikroků aproximace, jsou zobrazeny v Tabulce 4.1.

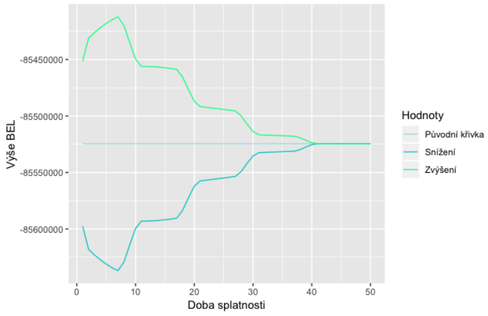
k	BEL_k	$D_k^{BEL} \cdot \Delta i_k$	$\Delta_k^D BEL$	$\widehat{BEL_k}$	**odchylka**
leden	-85 524 501	-	-	-	-
únor	-88 099 135	-0,029544	-2 526 763	-88 051 265	0,054 %
březen	-85 795 078	0,026493	2 333 973	-85 765 358	0,035 %
duben	-88 322 843	-0,028916	-799 320	-88 275 941	0,053 %
květen	-87 421 817	0,010266	906 724	-87 416 118	0,007 %
červen	-88 224 742	-0,009143	-799 320	-88 221 138	0,004 %

Tabulka 4.1: Hodnoty BEL a jejich aproximace ve Variantě 1.

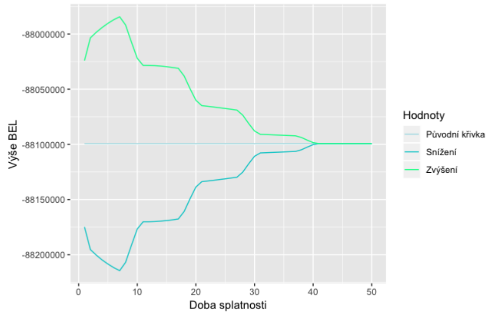
Můžeme vidět, že v případě deterministického výpočtu hodnoty BEL je aproximace užitím durací blízká reálným hodnotám (chyba je řádově v setinách či tisícinách procenta). Výpočet durací pro model s projekcí na 50 let vyžaduje celkem 101 výpočtů (běhů) – posun křivky $\mathbf{y_{50}} = (i_1, i_2, \ldots, i_{50})$ o $+\Delta$ a $-\Delta$ pro jednotlivé i_t, $t = 1{,}2, \ldots 50$ a jeden výpočet s křivkou bez posunů. Časová náročnost tedy není vysoká a získané hodnoty aproximují výsledek dostatečně dobře.

Na Obrázku 4.2 si můžeme prohlédnout, jak se mění hodnoty BEL v případě posunu křivky v bodě t o $\Delta = 0{,}001$ dolů (*Citlivost -*) nebo nahoru (*Citlivost +*). Je vidět, že v prvních letech citlivost hodnoty BEL stoupá, nicméně přibližně od 8. roku citlivost klesá až do roku 40. Od tohoto roku nemá změna křivky na hodnotu BEL žádný vliv. Důvodem je, že použité modelpointy neobsahují smlouvy s dobou trvání delší než 40 let, a po 40 letech tak již nejsou v projekci očekávané žádné finanční toky.

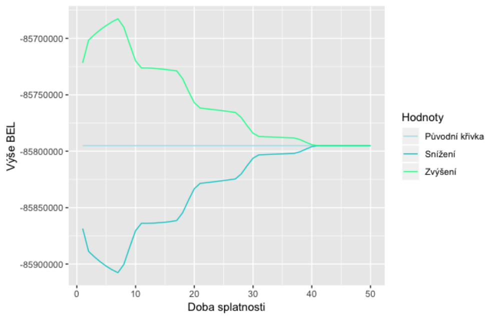
Zobrazené citlivosti jsou pouze ilustrativní a mohou se lišit dle toho, jaké pojistné produkty a smlouvy jsou v projekci uvažovány a jaké předpoklady a vstupy jsou pro výpočty používány.



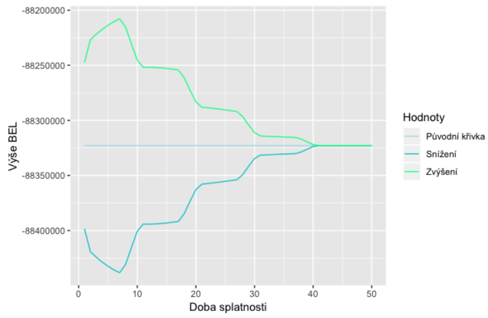
(a) Výpočet s křivkou z ledna 2020.



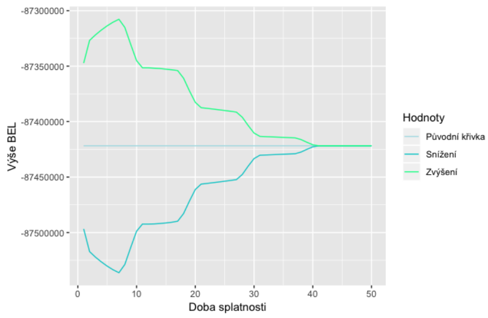
(b) Výpočet s křivkou z února 2020.



(c) Výpočet s křivkou z března 2020.



(d) Výpočet s křivkou z dubna 2020.



(e) Výpočet s křivkou z května 2020.

Obrázek 4.2: Citlivost hodnoty BEL na posun křivky v bodě t (doba splatnosti) o $\Delta = 0{,}001$ dolů (*Citlivost -*) nebo nahoru (*Citlivost +*).

Nyní využijeme vypočtené hodnoty durace (konkrétně hodnoty $D_k^{BEL} \cdot \Delta i_k$) k aproximaci hodnot BEL získaných stochastickými výpočty.

Varianta 2

Parciální durace získané ve Variantě 1 nyní použijeme k aproximaci hodnot BEL získaných stochastickým přístupem, který může být časově náročný. Příslušné hodnoty BEL a aproximace zobrazuje Tabulka 4.2 níže.

k	BEL_k	$D_k^{BEL} \cdot \Delta {i_k}^3$	$\Delta_k^D BEL$	$\widehat{BEL_k}$	**odchylka**
leden	-110 043 720	-	-	-	-
únor	-112 820 499	-0,029544	-3 251 168	-113 294 887	-0,420 %
březen	-110 390 488	0,026493	2 988 899	-109 831 599	0,506 %
duben	-113 117 793	-0,028916	-3 192 067	-113 582 555	-0,411 %
květen	-112 133 105	0,010266	1 161 270	-111 956 524	0,157 %
červen	-112 984 098	-0,009143	-1 025 262	-113 158 368	-0,154 %

Tabulka 4.2: Hodnoty BEL a jejich aproximace ve Variantě 2.

Lze vidět, že hodnoty BEL vychází výrazně vyšší než ve Variantě 1. Aproximace využívající parciální durace vypočtené v rámci Varianty 1 mají nicméně k těmto hodnotám blízko a vypočtené hodnoty a aproximace se většinou liší o méně než 0,5 %.

Vzhledem k nízké náročnosti výpočtu parciálních durací (pro jejich získání v případě projekce na 50 let potřebujeme pouze 101 deterministických výpočtů hodnoty BEL, které lze připravit předem) je možné, že by takovýto přístup umožnil získat snadnou a poměrně přesnou aproximaci toho, jak se hodnoty BEL změní v závislosti na změně úrokové křivky.

Aproximace lišící se pouze o 0,5 % lze považovat za dobré, níže je však prozkoumána také varianta stochastického výpočtu parciálních key rate durací, která by mohla aproximace reálným hodnotám ještě více přiblížit.

Varianta 3

Ve Variantě 3 je prozkoumán přístup, kdy jsou parciální key rate durace získávány ze stochastických výpočtů hodnoty BEL. Získání durací vyžaduje velký počet stochastických výpočtů, což značí velmi vysokou časovou náročnost. Pokud používáme křivku délky 50, je třeba provést 101 stochastických výpočtů, kdy v jednom výpočtu jsou pro dané t posunuty všechny křivky v bodě i_t o $+\Delta$ a $-\Delta$ (a jeden výpočet je bez posunů). V případě, že používáme 500 scénářů (křivek), to znamená 50 500 jednotlivých projekcí. Vzhledem k této výpočetní náročnosti se tato varianta nezdá být příliš vhodná, navíc lze získat poměrně přesné aproximace za použití durací získaných z deterministických běhů.

Tato varianta je v práci nicméně rovněž prozkoumána, vzhledem k časové náročnosti je výpočet proveden pouze na simulovaných scénářích získaných na základě křivky z ledna 2020. Získané parciální durace jsou poté použity pro všechny měsíce. Výsledné hodnoty si můžeme prohlédnout v Tabulce 4.3.

Přesnost aproximací se zvýšila, aproximace a reálné hodnoty se nyní liší řádově pouze o setiny procent. Výpočty neuvažují jiné změny modelu, vstupů či předpokladů, proto je možné spočtené parciální durace použít pro každý měsíc. V praxi může nicméně docházet ke změnám, které mohou ovlivňovat citlivost hodnoty BEL na změnu křivky, a to i na měsíční bázi (např. nové smlouvy apod.). Počítat v takovém případě každý měsíc nové parciální durace např. ze 100 stochastických běhů modelu nemusí být žádoucí.

k	BEL_k	$D_k^{BEL} \cdot \Delta {i_k}^4$	$\Delta_k^D BEL$	$\widehat{BEL_k}$	**odchylka**
leden	-110 043 720	-	-	-	-
únor	-112 820 499	-0,024594	-2 706 464	-112 750 184	0,062 %
březen	-110 390 488	0,021309	2 404 053	-110 416 445	-0,024 %
duben	-113 117 793	-0,023840	-2 631 710	-113 022 198	0,085 %
květen	-112 133 105	0,008467	957 785	-112 160 008	-0,024 %
červen	-112 984 098	-0,007361	-8 254 282	-112 958 534	0,023 %

Tabulka 4.3: Hodnoty BEL a jejich aproximace ve Variantě 3.

Vzhledem k tomu, že aproximace získané z deterministických výpočtů lze považovat za dostačující a výpočet parciálních durací je v takovém případě výrazně méně náročný (v našem případě 101 projekcí ve Variantě 2 oproti $101 \cdot 500 = 50500$ projekcí ve Variantě 3), lze přístup uvedený ve Variantě 2 považovat za preferovaný.

Shrnutí

V části 3.2 byl představen postup aproximace hodnoty BEL, který využívá koncept parciálních key rate durací. Tento přístup byl otestován ve třech variantách výpočtů hodnoty BEL a parciálních key rate durací.

V první variantě byl aproximován BEL spočtený deterministicky a parciální key rate durace byly získány rovněž z deterministických výpočtů. Tyto aproximace byly velmi přesné (odchylky od vypočtených hodnot byly řádově v setinách procenta a nižší), avšak u deterministického výpočtu BEL je výpočet většinou sám o sobě značně rychlý a rychlá aproximace tak nemusí být výhodou.

U druhé varianty byly využity deterministicky získané parciální key rate durace, hodnoty BEL však byly vypočítány stochasticky. Získané aproximace byly vypočteným hodnotám přesto blízké, rozdíly byly sice větší než v první variantě, avšak stále velice nízké. Tato varianta se zdá jako nejvhodnější pro praktické využití, jelikož výpočet durací není příliš výpočetně náročný a zároveň je možné rychle získat poměrně přesné aproximace.

Třetí varianta uvažuje využití stochastických výpočtů k získání parciálních key rate durací. To vyžaduje značně velký počet stochastických výpočtů a v praxi se tak tato varianta nezdá být kvůli výpočetní náročnosti vhodná. Aproximace jsou nicméně reálným hodnotám blíže než ve Variantě 2.

Model, vstupy, předpoklady, křivky a generátor simulací jsou k nalezení v přiloženém .zip souboru. Výsledky představené v této části je tak možné replikovat.

Závěr

Hlavním cílem diplomové práce je představit nový přístup k aproximaci hodnoty BEL, který využívá koncept parciálních durací, a zhodnotit, zda zvolený postup aproximace odhaduje hodnotu BEL dostatečně přesně a umožňuje tak získat představu o výsledné hodnotě v kratším čase.

Práce je členěna do 4 kapitol. Kapitoly 1, 2 a 3 shrnují potřebné teoretické poznatky a v podkapitole 3.2 je představen navržený postup aproximace. Kapitola 4 shrnuje závěry získané při praktickém otestování představeného postupu na vzorovém příkladu.

Kapitola 1 se věnuje uvedení do oblasti životního pojištění a základním definicím a značení. Shrnuty jsou především základní poznatky týkající se úrokových měr a výnosových křivek a také problematika oceňování kapitálového životního pojištění a rezervování v životním pojištění. Přístup k oceňování životního pojištění a výpočtům souvisejícím s rezervováním, který je v rámci první kapitoly představen, je v práci označován jako tradiční a využívá zjednodušené předpoklady, tzv. předpoklady prvního řádu.

Kapitola 2 představuje jeden z moderních přístupů k výpočtům v životním pojištění – projekci budoucích finančních toků pojišťovny plynoucích z pojistných smluv.

Projekce budoucích pojistných toků je blíže představena v podkapitole 2.1. Ta shrnuje základní informace týkající se předpokladů používaných u moderních přístupů, tzv. předpokladů druhého řádu. Ty jsou ve formě nejlepšího odhadu a měly by realitu reflektovat lépe než předpoklady prvního řádu. Podkapitola 2.1 také uvádí, jakým způsobem lze budoucí finanční toky projektovat a představuje deterministický a stochastický přístup k projekci budoucích finančních toků. Současnou hodnotu budoucích finančních toků lze vyjádřit jako rozdíl diskontovaného součtu budoucích přijatých finančních toků a diskontovaného součtu budoucích vydaných finančních toků. Deterministický přístup k výpočtu současných hodnot budoucích finančních toků očekává, že jsou všechny použité předpoklady deterministické. To však nemusí v některých případech dostatečně reflektovat realitu. U stochastického přístupu je současná hodnota budoucích finančních toků modelována jako náhodná veličina a výpočet probíhá pro dostatečně velké množství stochastických scénářů daného předpokladu (typicky výnosové křivky). Stochastický přístup může být vhodný mimo jiné v případě, kdy modelovaný produkt životního pojištění obsahuje tzv. vnořené opce. To, jakým způsobem jsou opce součástí životního pojištění, ukazuje podkapitola 2.2. Protože opce vnořené v životním pojištění bývají komplexní a jejich ocenění nemusí být snadné, je v případě jejich výskytu vhodné používat stochastický přístup, který může být výpočetně značně náročný. S tím také počítá evropská směrnice Solvency II, která po pojistitelích požaduje výpočet nejlepšího odhadu závazků BEL (*best estimate of liabilities*), což je nestranný odhad současné hodnoty očekávaných budoucích finančních toků (očekávaných ve smyslu střední hodnoty). Nejlepšímu odhadu závazků a jeho výpočtu se věnuje podkapitola 2.3. Jednou z možností, jak hodnotu BEL vypočítat, je právě stochastický simulační přístup. Ten je vhodný především v případě, že peněžní toky obsahují finanční opce a garance. Jeho nevýhodou je nicméně velká výpočetní náročnost, protože projekce je v takovém případě prováděna pro velké množství scénářů vývoje výnosových křivek. Cílem práce je proto navrhnout možnost rychlejší aproximace hodnoty BEL.

Kapitola 3 se věnuje konceptu durací a parciálních durací. Ty jsou v první podkapitole blíže prozkoumány a v druhé podkapitole je na základě těchto poznatků navrhnut postup aproximace hodnoty BEL užitím parciálních durací.

Durace je primárně spojována s citlivostí ceny dluhopisů na změnu úrokových měr. V oddílu 3.1.1 je tento koncept durace představen společně se čtyřmi předpoklady, které jsou pro durace vyžadovány. Základní typy durací – tzv. modifikovaná Macaulayova durace a Macaulayova durace jsou v tomto oddílu také odvozeny. Uvedené předpoklady nemusí být v praxi vždy splněny. Z tohoto důvodu existují také speciální typy durací. Tyto typy durací jsou představeny v oddílu 3.1.2. Patří mezi ně Fisher-Weilova durace, parciální durace a také efektivní modifikovaná durace a k ní příslušející parciální durace, označované také jako key rate durace. Právě tento typ parciálních durací (key rate durace) je dále využit k aproximaci hodnoty BEL.

Aproximaci hodnoty BEL za využití konceptu durací se pak věnuje podkapitola 3.2. V prvním oddílu této podkapitoly je diskutováno splnění předpokladů požadovaných pro výpočet durací. Tři z uvedených předpokladů se nedají považovat za splněné a to je důvod, proč jsou k aproximaci použity právě key rate durace. To, jak lze tyto durace k aproximaci využít, uvádí oddíl 3.2.2. Princip aproximace je založen na tom, že hodnotu BEL v daném čase k lze vyjádřit jako součet hodnoty BEL v předcházejícím čase $k - 1$ a změny hodnoty mezi těmito časy. Právě tato změna může být aproximována na základě předem vypočtených parciálních key rate durací a na základě změny výnosové křivky v daném čase k oproti křivce z předchozího času $k-1$. Součtem hodnoty z předchozího času $k-1$ a aproximace změny tak lze získat aproximaci hodnoty BEL v čase k.

Tento přístup je následně otestován na reálném příkladu. Postup testování a výsledky jsou představeny v kapitole 4. V první podkapitole je představen model, jeho vstupy a předpoklady, které jsou k výpočtům použity. Pro otestování je uvažováno pojištění pro případ smrti nebo dožití s participací na zisku. Dále jsou použity vzorové vstupy a předpoklady. Pro předpoklady úrokové a diskontní míry jsou využity interpolované křivky bezkupónového euro swapu z první poloviny roku 2020 (pro deterministické výpočty), případně na nich založené simulace (pro stochastické výpočty). Výsledky aproximace shrnuje podkapitola 4.2. Ty jsou prezentovány ve třech variantách. Varianta první uvažuje hodnoty BEL spočítané deterministickým přístupem a parciální key rate durace získané rovněž z deterministických výpočtů. Takové aproximace jsou poměrně přesné (od reálných hodnot se liší o setiny procent), avšak v praxi nemusí mít takové využití, jelikož deterministický výpočet hodnoty BEL nebývá příliš časově náročný a hodnotu tak není třeba aproximovat. Varianta druhá pak používá stejné parciální key rate durace (získané deterministickými výpočty), avšak aplikuje je na hodnoty BEL získané stochastickými výpočty. Přesnost aproximací je v takovém případě nižší než u Varianty 1, ale stále poměrně vysoká (rozdíly mezi reálnými hodnotami a aproximacemi jsou v desetinách procenta). Varianta 3 pak využívá pro aproximaci stochasticky vypočtených hodnot BEL parciální key rate durace získané ze stochastických výpočtů. Získané hodnoty aproximují reálné hodnoty lépe než v předchozí variantě, rozdíly mezi aproximacemi a vypočtenými hodnotami jsou opět v setinách procenta. Nevýhodou tohoto přístupu je však vysoká výpočetní náročnost. Pro získání všech parciálních key rate durací je u daného příkladu třeba 101 stochastických výpočtů (v případě 500 scénářů u jednoho výpočtu tedy celkem 50 500 projekcí). U parciálních key rate durací získaných deterministickými výpočty je potřebný počet projekcí pouze 101. Varianta 2, tedy použití parciálních key rate durací získaných deterministickými výpočty k aproximaci hodnot BEL získaných stochastickými výpočty se tedy zdá být pro praktické využití nejvhodnější.

Seznam použité literatury

Bacinello, A. R. (2001). Fair Pricing of Life Insurance Participating Policies with a Minimum Interest Rate Guaranteed. *Astin Bulletin*, **31**(2), 275–297.

Burkhart, T. (2018). Surrender Risk in the Context of the Quantitative Assessment of Participating Life Insurance Contracts under Solvency II. *Risks*, **6**, 66. doi: 10.3390/risks6030066.

Cipra, T. (2006). *Pojistná matematika: teorie a praxe.* Druhé vydání. EKOPRESS, s.r.o., Praha. ISBN 80-86929-11-6.

Deutsche Bundesbank (2020). *Memo item: zero-coupon euro swap curve (monthly data).* [Online]. [cit. 2020-12-07]. Dostupné z: `https://www.bundesbank.de/dynamic/action/en/statistics/time-series-databases/time-series-databases/759784/759784?listId=www_skms_it05b`.

Dickson, D. C. M., Hardy, M. R. a Waters, H. R. (2009). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.* International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511800146.

Drahokoupil, M. (2021). *Možnosti zrychlení odhadu hodnoty závazků ze životního pojištění.* Diplomová práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikalní fakulta, Praha. Nepublikovaný zdroj.

Finkelstein, G., McWilliam, E., Nagle, S., de Beus, P., van Leijenhorst, R., Maas, L. a Cui, J. (2003). *Guarantee and embedded options.* [Online]. [cit. 2020-12-28]. Dostupné z: `http://www.actuaries.org/AFIR/Colloquia/Maastricht/DeBeus.pdf`.

Hakala, B. M. (2017). *Modely úrokových měr - praktické aspekty.* Diplomová práce, Vysoká škola ekonomická, Praha.

Institute and Faculty of Actuaries (2016). *Solvency II - Life Insurance.* [Online]. [cit. 2020-12-28]. Dostupné z: `https://www.actuaries.org.uk/system/files/field/document/IandF_SA2_SolvencyII_2016.pdf`.

Janeček, M. (2006). *Metody hodnocení závazků životního pojištění.* Disertační práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikalní fakulta, Praha.

Janeček, M. (2017). *Acceleration Techniques for Life Cash Flow Projection Based on Many Interest Rates Scenarios – Cash Flow Proxy Functions.* [Online]. [cit. 2020-12-28]. Dostupné z: `https://www.actuaria.cz/uploads/cgblog/id1/Life_Cash_Flow_Proxy_Function_-_Martin_Janecek_2017_-_update.pdf`.

Lee, J. H. a Stock, D. R. (2000). Embedded options and interest rate risk for insurance companies, banks and other financial institutions. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, **40**, 169–187.

Radová, J. (2007). Měření citlivosti ceny dluhopisů. *Český finanční a účetní časopis*, **2**(3), 41–55.

Santomero, A. M. a Babbel, D. F. (1997). Financial Risk Management by Insurers: An Analysis of the Process. *The Journal of Risk and Insurance*, **64** (2), 231–270. URL http://www.jstor.com/stable/253730.

Turussova, V. (2016). *Modely úrokových měr a jejich použití v ocenění závazků z titulu životního pojištění*. Diplomová práce, Vysoká škola ekonomická, Praha.

Česká národní banka (2015). *Úřední sdělení české národní banky ze dne 14. ledna 2015*. [Online]. [cit. 2020-12-31]. Dostupné z: https://www.cnb.cz/export/sites/cnb/cs/legislativa/.galleries/Vestnik-CNB/2015/vestnik_2015_02_20215560.pdf.

Český statistický úřad (2020a). *Úmrtnostní tabulky*. [Online]. [cit. 2020-12-31]. Dostupné z: https://www.czso.cz/csu/czso/umrtnostni_tabulky.

Český statistický úřad (2020b). *Indexy spotřebitelských cen - inflace - prosinec 2019*. [Online]. [cit. 2020-12-31]. Dostupné z: https://www.czso.cz/csu/czso/cri/indexy-spotrebitelskych-cen-inflace-prosinec-2019.

Seznam obrázků

1.1 Příklad výnosové křivky – interpolované hodnoty z bezkupónového swapu z Deutsche Bundesbank (2020) z ledna 2010. 6

4.1 Vývoj křivek použitých k výpočtu BEL (hodnoty z bezkupónového swapu z Deutsche Bundesbank (2020)). Interpolované hodnoty z období ledna až května 2020. 41
4.2 Citlivost hodnoty BEL na posun křivky v bodě t (doba splatnosti) o $\Delta = 0{,}001$ dolů (*Citlivost -*) nebo nahoru (*Citlivost +*). 45

Seznam tabulek

2.1 Finanční toky generované smlouvou. 17
2.2 Finanční a účetní toky generované smlouvou a rezervami. 18

3.1 Základní popisné statistiky absolutních hodnot Δi v procentních bodech pro vybrané doby splatnosti od ledna 2002 do června 2020. 37

4.1 Hodnoty BEL a jejich aproximace ve Variantě 1. 44
4.2 Hodnoty BEL a jejich aproximace ve Variantě 2. 46
4.3 Hodnoty BEL a jejich aproximace ve Variantě 3. 47