



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Martina Nováková

**Mnohorozměrné modely zobecněné
autoregresní podmíněné
heteroskedasticity**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Michal Pešta, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická
statistika a ekonometrie

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Ráda bych poděkovala mému vedoucímu doc. RNDr. Michalovi Peštovi, Ph.D. za vstřícný přístup, vedení a odborné rady při psaní mé diplomové práce.

Název práce: Mnohorozměrné modely zobecněné autoregresní podmíněné heteroskedasticity

Autor: Bc. Martina Nováková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Michal Pešta, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato diplomová práce se věnuje představení některých přístupů k rozšíření jednorozměrného GARCH modelu do více dimenzí. Představujeme jednotlivé modely a věnujeme se metodám jejich odhadu. Dále uvádíme některé statistické testy pro kontrolu modelu. Jeden z nich, Ling-Li test, jsme naprogramovali ve statistickém softwaru R. Vybrané modely jsme aplikovali na reálná data akciových fondů S&P 500 a Russell 2000 a akcií ropy. U GO-GARCH modelu jsme porovnali všechny dostupné metody odhadu a ukázali jejich rozdíly. Výsledky všech modelů jsme porovnali mezi sebou a také s jednorozměrnými modely z hlediska odhadů podmíněných rozptylů, odhadů podmíněných korelací a také z hlediska výpočetní náročnosti.

Klíčová slova: časová řada, ARCH, mnohorozměrný GARCH, VEC, BEKK, O-GARCH, GO-GARCH, CCC, DCC

Title: Multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models

Author: Bc. Martina Nováková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Michal Pešta, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This master thesis deals with extension of the univariate GARCH model to multivariate models. We present individual models and deal with methods of their estimation. Then we describe some statistical tests for diagnosing the models. We have programmed in the statistical software R one of them – the Ling-Li test. Afterwards we apply selected models to real data of stock market index S&P 500, stock market index Russell 2000 and stocks of crude oil. For the GO-GARCH model, we compare all available estimation methods and show their differences. Then we compare the results of all models with each other and also with univariate models in terms of estimates of conditional variances, estimates of conditional correlations and also in terms of computational complexity.

Keywords: time series, ARCH, multivariate GARCH, VEC, BEKK, O-GARCH, GO-GARCH, CCC, DCC

Obsah

Úvod	3
1 Jednorozměrné modely časových řad	4
1.1 Model ARCH	4
1.2 Model GARCH	5
2 Mnohorozměrné modely časových řad	6
2.1 Přímé zobecnění jednorozměrného GARCH modelu	7
2.1.1 VEC model	7
2.1.2 BEKK model	8
2.1.3 Faktorové modely	10
2.2 Lineární kombinace jednorozměrných modelů typu GARCH	12
2.2.1 Ortogonální model	12
2.2.2 Zobecněný ortogonální model	15
2.2.3 Zobecněný ortogonální faktorový model	16
2.3 Nelineární kombinace jednorozměrných modelů typu GARCH	19
2.3.1 CCC model	19
2.3.2 DCC a VC-GARCH modely	20
2.4 Další přístupy k mnohorozměrným GARCH modelům	23
3 Odhady mnohorozměrných GARCH modelů	24
3.1 Odhady modelů 1. kategorie	24
3.1.1 Odhad VEC a BEKK modelů	24
3.1.2 Odhad full-factor modelu	24
3.2 Odhady modelů 2. kategorie	25
3.2.1 Odhad ortogonálního modelu	25
3.2.2 Odhad zobecněného ortogonálního modelu	26
3.2.3 Odhad zobecněného ortogonálního faktorového modelu	28
3.3 Odhady modelů 3. kategorie	30
3.3.1 Odhad CCC modelu	30
3.3.2 Odhad DCC modelu	30
3.3.3 Odhad VC-GARCH modelu	31
3.4 Další přístupy k odhadování mnohorozměrných GARCH modelů	31
4 Diagnostické testy	33
4.1 Testy založené na reziduích	33
4.1.1 Ling-Li test	33
4.1.2 Mnohorozměrný Ljung-Box test	34
4.2 Testy předpokladu konstantních korelací	35
5 Aplikace na reálné časové řady	37
5.1 Výnosové míry - teoretické shrnutí	37
5.2 Popis dat z uzavíracích cen akcií	37
5.3 Analýza výnosových měř	39
5.4 Odhady jednorozměrných modelů	40
5.5 Odhady mnohorozměrných modelů	42

5.5.1	BEKK model	42
5.5.2	Zobecněný ortogonální model	43
5.5.3	CCC model	47
5.5.4	DCC model	47
5.6	Porovnání modelů	48
	Závěr	53
	Seznam použité literatury	54
	Seznam obrázků	58
	Seznam tabulek	59
	Seznam použitých zkratk	60

Úvod

Modelování volatility finančních časových řad se stalo velmi žádaným při řešení různých ekonometrických problémů. Znalost společných pohybů finančních výnosů je používána například při řízení rizik, alokaci aktiv, optimalizaci portfolia nebo oceňování aktiv. Rozšíření jednorozměrných modelů ARCH a GARCH do více rozměrů ovšem zahrnuje několik problémů. V přímočarých rozšířeních se potýkáme s problémem velkého nárůstu parametrů při růstu dimenze, který velmi zvyšuje výpočetní náročnost úlohy. Pokročilejší modely se proto snaží použít takovou formulaci, která by používala nízký počet parametrů a zároveň by byla schopna vysvětlit dynamiku podmíněných rozptylů a kovariancí mezi jednotlivými aktivy. Druhým problémem je zaručení pozitivní definitnosti podmíněné varianční matice. Většina modelů používá takovou formulaci, která splnění této podmínky zaručuje, aby nebylo potřeba tuto podmínku dodatečně stanovit během odhadu modelu.

V této práci se věnujeme představení některých přístupů k rozšíření jednorozměrného GARCH modelu do více dimenzí. V každé kategorii jsme představili několik modelů a věnovali jsme se metodám jejich odhadů a diagnostickým testům. Hlavním přínosem práce je široký přehled modelů včetně metod jejich odhadu zasazených do jednotného značení. Dále jsme připravili přehled několika statistických testů určených pro diagnostiku těchto modelů a jeden z nich, kterým je Ling-Li test, jsme v rámci práce naprogramovali ve statistickém softwaru R. Představené modely jsme poté aplikovali na reálná data finančních časových řad a porovnali jsme je mezi sebou a také s jednorozměrnými modely. U zobecněného ortogonálního modelu jsme také porovnali výsledky jednotlivých dostupných metod odhadu.

V první kapitole uvádíme shrnutí modelů ARCH a GARCH v jednorozměrném případě. Ve druhé kapitole představujeme jednotlivé přístupy k jejich zobecnění do více rozměrů a představujeme konkrétní modely. Ve třetí kapitole se věnujeme metodám odhadů představených modelů. Ve čtvrté kapitole uvádíme některé statistické testy pro kontrolu modelu a ověřování předpokladů. V páté kapitole aplikujeme vybrané modely na časové řady akciových indexů S&P 500 a Russell 2000 a akcií ropy a věnujeme se porovnání jednotlivých modelů.

1. Jednorozměrné modely časových řad

V této kapitole se seznámíme s modelováním časových řad v jednorozměrném případě, abychom se v následující kapitole mohli věnovat mnohorozměrným modelům. Základním pojmem, který budeme v této práci používat, je časová řada.

Definice 1. *Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor, nechť $T \subset \mathbb{R}$. Rodina náhodných veličin $\{y_t, t \in T\}$ definovaných na (Ω, \mathcal{A}, P) se nazývá náhodný (stochastický) proces. V případě, že $T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ nebo $T = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$, mluvíme o procesu s diskrétním časem nebo o časové řadě.*

V této práci budeme uvažovat časovou řadu $\{y_t; t = 1, \dots, T\}$, kde $T > 0$ je počet pozorování dané časové řady, které máme k dispozici. Pro modelování časových řad s podmíněnou autoregresní heteroskedasticitou se často používají modely typu *Autoregressive Conditional Heteroskedastic* (zkráceně ARCH) a jeho zobecněné verze s názvem *Generalized ARCH* (zkráceně GARCH).

1.1 Model ARCH

Třída modelů ARCH byla poprvé uvedena v Engle (1982). V těchto modelech rozptyl zůstává konstantní, ale podmíněný rozptyl se mění v čase a závisí na minulých chybových členech. To je velmi výhodné pro ekonometrické časové řady, v nichž se mohou shlukovat malé nebo naopak velké výkyvy hodnot. V modelech uvažujeme podmiňování σ -algebrou \mathcal{F}_{t-1} generovanou informací do času $t - 1$.

Model ARCH řádu p , který značíme $\text{ARCH}(p)$, je tvaru

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + e_t, \\ e_t &= \sigma_t \xi_t, \\ \sigma_t^2 &= \gamma + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p e_{t-p}^2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde $p > 0$, ξ_t jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Často předpokládáme, že $\xi_t \sim N(0, 1)$. V literatuře se někdy můžeme setkat s tím, že místo rovnice (1.1) a uvedených podmínek pro ξ_t se uvádí podmínka

$$e_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2),$$

například v Engle (1982). Podmíněná střední hodnota μ_t je modelována pomocí vhodné rovnice střední hodnoty. Níže ukážeme, že σ_t^2 odpovídá podmíněnému rozptylu, a proto pro zajištění jeho kladných hodnot se požaduje postačující podmínka $\gamma > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, \dots , $\alpha_p \geq 0$.

Engle (1982) uvedl také podmínku pro slabou stacionaritu procesu $\{y_t\}$. Nutnou a postačující podmínkou je, aby kořeny polynomu $1 - \alpha_1 z - \dots - \alpha_p z^p$ ležely vně jednotkového kruhu v komplexní rovině, což nastává, pokud je splněno $\alpha_1 + \dots + \alpha_p < 1$.

Poznámka. Již jsme uvedli, že μ_t odpovídá podmíněné střední hodnotě časové řady. Dále platí, že σ_t^2 vyjadřuje podmíněný rozptyl:

$$\begin{aligned}\text{var}(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \text{var}(\mu_t + e_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \text{var}(\sigma_t \xi_t | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \sigma_t^2 \text{var}(\xi_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2.\end{aligned}$$

1.2 Model GARCH

Bollerslev (1986) uvedl zobecněný model typu GARCH, který navíc dovoluje použití zpožděných hodnot podmíněného rozptylu. Toto rozšíření často umožňuje sestavení modelu s menším počtem parametrů než by bylo nutné u modelu ARCH. Také v tomto modelu podmiňujeme σ -algebrou \mathcal{F}_{t-1} generovanou množinou všech pozorování do času $t - 1$.

Model GARCH s řády p a q , který značíme GARCH(p, q), má tvar

$$\begin{aligned}y_t &= \mu_t + e_t, \\ e_t &= \sigma_t \xi_t, \\ \sigma_t^2 &= \gamma + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2,\end{aligned}\tag{1.2}$$

kde $p > 0$, $q \geq 0$, ξ_t jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Opět často předpokládáme, že $\xi_t \sim N(0, 1)$. Také u modelu GARCH se někdy v literatuře, například v Bollerslev (1986), místo rovnice (1.2) a uvedených podmínek pro ξ_t uvádí podmínka

$$e_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2).$$

Podmíněná střední hodnota μ_t je také modelována pomocí vhodné rovnice střední hodnoty. Analogicky jako u modelu ARCH, i zde σ_t^2 vyjadřuje podmíněný rozptyl časové řady $\{y_t\}$. Pro zaručení kladných hodnot σ_t^2 platí postačující podmínka $\gamma > 0$, $\alpha_i \geq 0$ pro $i = 1, \dots, p$ a $\beta_j \geq 0$ pro $j = 1, \dots, q$. Bollerslev (1986) se také zabýval slabou stacionaritou procesu $\{y_t\}$, pro kterou stanovil nutnou

a postačující podmínku $\sum_{i=1}^{\max\{p, q\}} (\alpha_i + \beta_i) < 1$, kde $\alpha_i = 0$ pro $i > p$ a $\beta_j = 0$ pro $j > q$.

Poznámka. Někdy se místo symbolu σ_t^2 užívá symbol h_t , který poté také vyjadřuje podmíněný rozptyl časové řady $\{y_t\}$.

Modely typu ARCH i GARCH se obvykle odhadují metodou maximální věrohodnosti s použitím předpokladu normálního rozdělení odchylek $\{e_t\}$. V případě, že předpoklad normálního rozdělení není splněn, získáme odhady metodou kvazi-maximální věrohodnosti. Berkes a kol. (2003) a Francq a Zakořian (2004) dokázali, že i tento odhad je konzistentní a asymptoticky normální při splnění dodatečných podmínek.

2. Mnohorozměrné modely časových řad

Nyní se přesuneme k mnohorozměrným modelům typu GARCH. V následující části vycházíme z článku Bauwens a kol. (2006), který předkládá přehled některých typů mnohorozměrných GARCH modelů. Předpokládejme, že $N \in \mathbb{N}$. Poté N -rozměrný náhodný proces $\{\mathbf{y}_t; t = 1, \dots, T\}$ uvažujeme jako zobecnění jednorozměrných náhodných procesů, který je složen z vícerozměrných náhodných vektorů namísto náhodných veličin. Opět používáme podmiňování σ -algebrou \mathcal{F}_{t-1} generovanou množinou všech pozorování do času $t - 1$. Poté obecně definujeme mnohorozměrný GARCH model pomocí rovnic

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{e}_t, \\ \mathbf{e}_t &= \mathbf{H}_t^{1/2}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\xi}_t,\end{aligned}\tag{2.1}$$

kde $\boldsymbol{\theta}$ značí konečný vektor parametrů délky d , kde d se obecně neshoduje s dimenzí N náhodného procesu $\{\mathbf{y}_t\}$, $\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\theta})$ vyjadřuje podmíněnou střední hodnotu náhodného procesu $\{\mathbf{y}_t\}$ a $\mathbf{H}_t^{1/2}(\boldsymbol{\theta})$ pozitivně definitní matici. Dále předpokládáme, že N -rozměrné $\boldsymbol{\xi}_t$ jsou vzájemně nezávislé, stejně rozdělené a platí pro ně

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}_t) &= \mathbf{0}, \\ \text{Var}(\boldsymbol{\xi}_t) &= \mathbf{I}_N.\end{aligned}$$

Opět se často pro $\boldsymbol{\xi}_t$ předpokládá normalita. Obdobně jako v jednorozměrném případě se někdy místo rovnice (2.1) a uvedených podmínek pro $\boldsymbol{\xi}_t$ předpokládá

$$\mathbf{e}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t).$$

V dalším textu již budeme používat pouze symboly $\boldsymbol{\mu}_t$ a $\mathbf{H}_t^{1/2}$ bez zdůraznění jejich závislosti na vektoru parametrů $\boldsymbol{\theta}$. Obdobně jako v jednorozměrném případě, po zobecnění do více rozměrů platí, že matice $\mathbf{H}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} (\mathbf{H}_t^{1/2})^T$ vyjadřuje podmíněnou varianční matici náhodného procesu $\{\mathbf{y}_t\}$:

$$\begin{aligned}\text{Var}(\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \text{Var}(\boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{e}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \text{Var}(\mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\xi}_t | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \mathbf{H}_t^{1/2} \text{Var}(\boldsymbol{\xi}_t | \mathcal{F}_{t-1}) (\mathbf{H}_t^{1/2})^T = \mathbf{H}_t.\end{aligned}$$

Proto stačí, aby $\mathbf{H}_t^{1/2}$ byla jakákoliv pozitivně definitní matice řádu $N \times N$ taková, aby \mathbf{H}_t byla podmíněná varianční matice náhodného procesu $\{\mathbf{y}_t\}$. Například $\mathbf{H}_t^{1/2}$ můžeme získat Choleského faktorizací matice \mathbf{H}_t .

Různé typy mnohorozměrných GARCH modelů se liší právě ve specifikaci matice \mathbf{H}_t . Obecně je lze rozdělit do tří kategorií, které se ovšem vzájemně nevyklučují:

1. přímé zobecnění jednorozměrného GARCH modelu,
2. lineární kombinace jednorozměrných GARCH modelů a
3. nelineární kombinace jednorozměrných GARCH modelů.

O těchto skupinách modelů budeme někdy mluvit také jako o modelech 1., 2. a 3. kategorie.

V literatuře se jednotlivé modely často formulují pro časové řady s nulovou podmíněnou střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}_t$. Stejným způsobem budeme pokračovat v dalším textu práce. V případě, že $\boldsymbol{\mu}_t$ je nenulová, bývá vyjádřena jako funkce minulých hodnot, například pomocí vektorové ARMA specifikace pro úroveň \mathbf{y}_t .

2.1 Přímé zobecnění jednorozměrného GARCH modelu

Mezi modely, které vznikají jako přímé zobecnění jednorozměrného modelu GARCH, patří zejména modely VEC, BEKK a faktorové modely.

2.1.1 VEC model

VEC model poprvé uvedli Bollerslev a kol. (1988) v rámci CAPM modelu pro výnos aktiv (název tohoto modelu vznikl z anglického názvu *capital asset pricing model*). V tomto modelu jednotlivé prvky matice \mathbf{H}_t závisí na p zpožděných hodnotách druhých mocnin a křížových členů vektoru \mathbf{e}_t a na q zpožděných hodnotách prvků matice \mathbf{H}_t . Parametrizace matice \mathbf{H}_t je ve formě

$$\text{vec}(\mathbf{H}_t) = \mathbf{C}_0 + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \text{vec}(\mathbf{e}_{t-i} \mathbf{e}_{t-i}^T) + \sum_{j=1}^q \mathbf{B}_j \text{vec}(\mathbf{H}_{t-j}), \quad (2.2)$$

kde $\text{vec}(\cdot)$ značí operátor vektorizace – operátor, který poskládá prvky ze spodní trojúhelníkové části $N \times N$ matice do vektoru o délce $N(N+1)/2$. Dále \mathbf{A}_i a \mathbf{B}_j jsou čtvercové matice řádu $N(N+1)/2$ a \mathbf{C}_0 je vektor délky $N(N+1)/2$. Pro lepší ilustraci uvedeme konkrétní podobu parametrizace \mathbf{H}_t pro případ $p = q = 1$ a $N = 2$:

$$\begin{pmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{01} \\ c_{02} \\ c_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1,t-1}^2 \\ e_{1,t-1} e_{2,t-1} \\ e_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Jelikož je matice \mathbf{H}_t podmíněnou rozptylovou maticí, musí být symetrická, a proto stačí vektorizovat pouze prvky spodní trojúhelníkové části matice a zbylé členy, které v (2.3) nejsou uvedeny, je možné doplnit.

Nevýhodou této obecné formulace je vysoký počet parametrů – celkem

$$N(N+1)/2 + (p+q)N^2(N+1)^2/4,$$

což už při volbě $p = q = 1$ a $N = 3$ je rovno 78. Bollerslev a kol. (1988) tedy navrhli úpravu v *diagonální VEC model (DVEC)*, která spočívá v předpokladu, že matice \mathbf{A}_i a \mathbf{B}_j jsou diagonální. Toto zjednodušení je odůvodněno předpokladem, že každá podmíněná kovariance dvou proměnných závisí pouze na minulých hodnotách sebe sama a odpovídajících smíšených členů $e_{j,t} e_{k,t}$ a nikoliv na minulých hodnotách ostatních proměnných. V tomto případě je počet parametrů

roven $N(N+1)/2 + (p+q)N$. Pro volbu $p = q = 1$ a $N = 3$ je tedy počet parametrů roven už pouze 12.

Ve dvourozměrném případě *DVEC modelu* s $p = q = 1$ se (2.3) omezí na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} h_{11,t} &= c_{01} + a_{11} e_{1,t-1}^2 + b_{11} h_{11,t-1} \\ h_{12,t} &= c_{02} + a_{22} e_{1,t-1} e_{2,t-1} + b_{22} h_{12,t-1} \\ h_{22,t} &= c_{03} + a_{33} e_{2,t-1}^2 + b_{33} h_{22,t-1}. \end{aligned}$$

Poznámka. Matici \mathbf{H}_t lze odhadovat také s dodatečnou informací o slabě exogenních proměnných, např. podle Engle a Kroner (1995). Rovnice (2.2) matice pro parametrizaci \mathbf{H}_t se poté rozšíří o jeden člen:

$$\text{vec}(\mathbf{H}_t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 \text{vec}(\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T) + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \text{vec}(\mathbf{e}_{t-i} \mathbf{e}_{t-i}^T) + \sum_{j=1}^q \mathbf{B}_j \text{vec}(\mathbf{H}_{t-j}),$$

kde \mathbf{x}_t je vektor slabě exogenních proměnných o délce J a \mathbf{C}_1 je matice typu $N(N+1)/2 \times J(J+1)/2$.

Jak jsme již ilustrovali výše, nevýhodou modelu *VEC* je vysoký počet parametrů. Dále, protože matice \mathbf{H}_t je podmíněná rozptylová matice, musí splňovat podmínku pozitivní definitnosti. Tuto podmínku je ale obtížné ověřovat při odhadování matice \mathbf{H}_t v tomto modelu.

2.1.2 BEKK model

Na nevýhodu *VEC* modelu ohledně obtížnosti pro splnění podmínky pozitivní definitnosti matice \mathbf{H}_t reaguje model *BEKK* předložený v Engle a Kroner (1995). Název modelu vznikl z počátečních písmen jmen autorů, kteří se na modelu podíleli – Baba, Engle, Kraft a Kroner. Model *BEKK* používá pro parametrizaci matice \mathbf{H}_t následující rovnici:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \mathbf{C}_0^{*T} \mathbf{C}_0^* + \sum_{k=1}^K \mathbf{C}_{1k}^{*T} \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T \mathbf{C}_{1k}^* + \\ &+ \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_{ik}^{*T} \mathbf{e}_{t-i} \mathbf{e}_{t-i}^T \mathbf{A}_{ik}^* + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \mathbf{B}_{ik}^{*T} \mathbf{H}_{t-i} \mathbf{B}_{ik}^*, \end{aligned} \quad (2.4)$$

kde \mathbf{A}_{ik}^* a \mathbf{B}_{ik}^* jsou matice typu $N \times N$, \mathbf{C}_0^* je trojúhelníková matice typu $N \times N$, \mathbf{C}_{1k}^* je matice typu $J \times N$ a \mathbf{x}_t je vektor slabě exogenních proměnných délky J . Konstanta $K \in \mathbb{N}$ určuje obecnost procesu, ale často se uvádí vzorec s $K = 1$.

Díky této parametrizaci je již zaručena pozitivní definitnost matice \mathbf{H}_t . Výhodou modelu *BEKK* je také nižší počet použitých parametrů, který je roven

$$N(N+1)/2 + (p+q)KN^2$$

bez použití slabě exogenních proměnných a dodatečných KJN parametrů při použití exogenních proměnných. Pro volbu $p = q = 1$, $K = 1$ a $N = 3$ bez použití slabě exogenních proměnných tedy model používá pouze 24 parametrů.

Naopak nevýhodou modelu *BEKK* představuje skutečnost, že jednotlivé parametry modelu neodpovídají přímo vlivům jednotlivých zpožděných členů, což

byla naopak výhoda modelů typu *VEC*. Navíc může existovat více parametrizací stejného modelu a jednotlivé parametry nemusí být jednoznačně identifikovány. Engle a Kroner (1995) uvádějí podmínky pro jednoznačnou identifikaci parametrů. Například, pro jednoduchý model s $K = 1$ tvaru

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}_0^{*T} \mathbf{C}_0^* + \mathbf{A}_{11}^{*T} \mathbf{e}_{t-1} \mathbf{e}_{t-1}^T \mathbf{A}_{11}^* + \mathbf{B}_{11}^{*T} \mathbf{H}_{t-1} \mathbf{B}_{11}^*$$

stačí, aby diagonální členy matice \mathbf{C}_0^* a prvky a_{11}^* a b_{11}^* matic \mathbf{A}_{11}^* a \mathbf{B}_{11}^* byly kladné. Navíc tyto podmínky je snadné splnit například tím, že budeme odhadovat odmocninu těchto parametrů.

Pro porovnání parametrizací jednotlivých modelů opět uvádíme tvar rovnice (2.4) pro volbu $p = q = 1$, $K = 1$ a $N = 2$ bez použití slabě exogenních proměnných:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t = & \mathbf{C}_0^{*T} \mathbf{C}_0^* + \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} e_{1,t-1}^2 & e_{1,t-1} e_{2,t-1} \\ e_{2,t-1} e_{1,t-1} & e_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* \end{pmatrix}^T \mathbf{H}_{t-1} \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

po roznásobení získáme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} h_{11,t} = & c_{0,11}^{*2} + a_{11}^{*2} e_{1,t-1}^2 + 2a_{11}^* a_{21}^* e_{1,t-1} e_{2,t-1} + a_{21}^{*2} e_{2,t-1}^2 + \\ & + b_{11}^{*2} h_{11,t-1} + 2b_{11}^* b_{21}^* h_{12,t-1} + b_{21}^{*2} h_{22,t-1} \\ h_{12,t} = & c_{0,11}^* c_{0,12}^* + a_{11}^* a_{12}^* e_{1,t-1}^2 + (a_{11}^* a_{22}^* + a_{21}^* a_{12}^*) e_{1,t-1} e_{2,t-1} + a_{21}^* a_{22}^* e_{2,t-1}^2 + \\ & + b_{11}^* b_{12}^* h_{11,t-1} + (b_{12}^* b_{21}^* + b_{11}^* b_{22}^*) h_{12,t-1} + b_{21}^* b_{22}^* h_{22,t-1} \\ h_{22,t} = & c_{0,12}^{*2} + c_{0,22}^{*2} + a_{12}^{*2} e_{1,t-1}^2 + 2a_{12}^* a_{22}^* e_{1,t-1} e_{2,t-1} + a_{22}^{*2} e_{2,t-1}^2 + \\ & + b_{12}^{*2} h_{11,t-1} + 2b_{12}^* b_{22}^* h_{12,t-1} + b_{22}^{*2} h_{22,t-1}. \end{aligned}$$

Jak uvádí Bauwens a kol. (2006), podobně jako u modelu *DVEC*, můžeme v rámci *BEKK* modelu také přejít ke zjednodušenému diagonálnímu tvaru - tedy matice \mathbf{A}_{ik} a \mathbf{B}_{ik} budou diagonální. Díky tomu snížíme počet odhadovaných parametrů, na druhou stranu ale také obecnost modelu. Tento model je dokonce méně obecný než *DVEC* model, ale vždy zaručuje pozitivní definitnost matice \mathbf{H}_t . Dalším způsobem, jak snížit počet parametrů modelu, je použití skalárního *BEKK* modelu, tedy předpokládat, že matice \mathbf{A}_{ik} a \mathbf{B}_{ik} jsou skalárním násobkem jednotkové matice. Tento model je však již velmi zjednodušený.

Engle a Kroner (1995) se také zabývali vztahem mezi modely *VEC* a *BEKK*. Pokud model *BEKK* používá méně parametrů, zavádí nějaká omezení, které v případě *VEC* modelu nejsou kladena. V článku Engle a Kroner (1995) jsou také uvedeny podmínky, které musí platit, aby model *BEKK* byl stejně obecný jako model typu *VEC*. Například konstanta K musí být dostatečně velká a další podmínky jsou kladeny na prvky matic \mathbf{A}_{ik}^* a \mathbf{B}_{ik}^* . Obecně lze říci, že každý model *BEKK* je možné zapsat jako *VEC*, což opačně neplatí. Pokud se ale omezíme na diagonální modely, pak každý *DVEC* model lze zapsat ve tvaru modelu *BEKK*. Pokud navíc dodržíme podmínky pro jednoznačnou identifikaci parametrů, pak v rámci diagonálních modelů získáme model, který je plně obecný a navíc zaručuje pozitivní definitnost matice \mathbf{H}_t .

Vztahem modelů *VEC* a *BEKK* se také zabýval Stelzer (2008), který k danému zkoumání použil výsledky lineární algebry. V článku dokázal, že ve dvourozměrném případě jsou modely *VEC* a *BEKK* dokonce ekvivalentní. Dále ve trojrozměrném případě uvedl jednoduchý příklad matice, kterou pokud použijeme jako jednu z matic \mathbf{A}_i a \mathbf{B}_j v parametrizaci modelu *VEC*, daný model nebude možné zapsat pomocí *BEKK* parametrizace.

2.1.3 Faktorové modely

Dalším přístupem k rozšíření GARCH modelů pro vícerozměrné časové řady jsou tzv. *faktorové modely*. Podle Vrontos a kol. (2003) tyto modely reagují na dva zásadní problémy při tvorbě mnohorozměrných GARCH modelů – používají nižší počet parametrů a garantují pozitivní definitnost matice \mathbf{H}_t . Tyto modely vycházejí z předpokladu, že podmíněné rozptyly např. výnosů jednotlivých akcií se mění stejným způsobem – podle malého počtu společných proměnných nazvaných faktory. Ale pro zachycení dynamického vývoje je někdy potřeba vysoký počet těchto faktorů.

Tento přístup představili Engle a kol. (1990). Ti předpokládají, že pro časovou řadu $\{\mathbf{y}_t\}$ a její podmíněnou varianční matici \mathbf{H}_t platí

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\mu}_t + \sum_{k=1}^K \mathbf{g}_{kt} f_{kt} + \boldsymbol{\nu}_t, \\ \mathbf{H}_t &= \boldsymbol{\Omega}_t + \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\beta}_k \boldsymbol{\beta}_k^T \lambda_{kt},\end{aligned}\tag{2.5}$$

kde

- f_{kt} jsou faktory, které ovlivňují hodnoty všech složek časové řady $\{\mathbf{y}_t\}$ (tedy např. výnosy jednotlivých aktiv),
- $\boldsymbol{\nu}_t$ je vektor idiosynkratické chybové složky (nebo také idiosynkratického “šumu”) s podmíněnou varianční maticí $\boldsymbol{\Omega}_t$,
- \mathbf{g}_{kt} jsou vektory “načítacích” parametrů pro jednotlivé faktory,
- λ_{kt} jsou kladné náhodné veličiny a
- $\boldsymbol{\beta}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory.

Níže uvedeme, které z uvedených prvků jsou náhodné a které deterministické. Pro počet faktorů K je předpokládána obecná podmínka $K < N$, ale snahou je vysvětlit kovarianční strukturu časové řady $\{\mathbf{y}_t\}$ pomocí co nejmenšího počtu faktorů.

Autoři dále předkládají dvě sady podmínek, které odpovídají dvěma různým interpretacím, ale v této práci uvedeme pouze tu, která je používána častěji. Požadujeme tedy navíc $\mathbf{g}_{kt} = \boldsymbol{\beta}_k$ a $\text{var}(f_{kt} | \mathcal{F}_{t-1}) = \lambda_{kt}$. Tyto podmínky odpovídají modelu, ve kterém jsou vektory “načítacích” parametrů pro jednotlivé faktory konstantní v čase a mění se podmíněné rozptyly jednotlivých faktorů. Pro tyto faktory se poté předpokládá, že to jsou procesy typu GARCH. V tomto případě jsou tedy prvky $\mathbf{g}_{kt} = \boldsymbol{\beta}_k$ deterministické parametry, které jsou neznámé, a zbylé prvky jsou náhodné.

V literatuře je možné najít mnoho formulací a úprav faktorových modelů. V této práci uvedeme podrobně tzv. *full-factor GARCH* model, který představil Vrontos a kol. (2003), který je někdy, např. v článku Bauwens a kol. (2006), značen jako *FF-GARCH*. Tento model je oproti běžným faktorovým modelům speciální v tom, že zcela vynechává složku idiosynkratického šumu. Předpokládá tedy, že kovarianční strukturu lze kompletně vyjádřit pomocí faktorů. Na druhou stranu, v tomto modelu se používá N faktorů, tedy stejný počet jako je složek v časové řadě $\{\mathbf{y}_t\}$. V tomto ohledu tedy nesnižuje počet parametrů modelu.

Full-factor GARCH model je formulován pomocí následujících rovnic:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{e}_t, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{Z} \mathbf{f}_t,$$

$$\mathbf{f}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_t), \quad (2.7)$$

kde $\boldsymbol{\mu}$ je N -rozměrný vektor konstant, \mathbf{e}_t je N -rozměrný inovační vektor, \mathbf{Z} je matice parametrů typu $N \times N$, \mathbf{f}_t je N -rozměrný vektor faktorů s prvky $f_{i,t}$, $i = 1, \dots, N$ a \mathbf{V}_t je diagonální varianční matice typu $N \times N$ a platí

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_t &= \text{diag}(v_{1,t}, \dots, v_{N,t}), \\ v_{i,t} &= \gamma_i + \alpha_i f_{i,t-1}^2 + \beta_i v_{i,t-1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

neboli $v_{i,t}$ je podmíněným rozptylem i -tého faktoru v čase t . Dále parametry γ_i , α_i a β_i , $i = 1, \dots, N$, splňují podmínky, které byly uvedeny v části 1.2: $\gamma_i > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $\alpha_i + \beta_i < 1$. Jednotlivé faktory $f_{i,t}$ jsou tedy procesy typu GARCH(1, 1) a inovační vektor \mathbf{e}_t je lineární kombinací těchto faktorů. Tento model bychom tedy mohli v kategorizaci jednotlivých modelů zařadit také do druhé kategorie – lineární kombinace jednorozměrných GARCH modelů. Ale faktorové modely bývají řazeny do první kategorie.

Z podmínky (2.7) plyne $\mathbf{e}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$, kde

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{Z} \mathbf{V}_t \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z} \mathbf{V}_t^{1/2} \mathbf{V}_t^{1/2} \mathbf{Z}^T = (\mathbf{Z} \mathbf{V}_t^{1/2}) (\mathbf{Z} \mathbf{V}_t^{1/2})^T = \mathbf{L}_t \mathbf{L}_t^T, \quad (2.8)$$

kde $\mathbf{V}_t^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{v_{1,t}}, \dots, \sqrt{v_{N,t}})$. Tedy \mathbf{H}_t je opět podmíněná varianční matice náhodného vektoru \mathbf{e}_t , což je matice, kterou chceme parametrizovat. Aby ji bylo možné vždy rozložit na součin $\mathbf{H}_t = \mathbf{L}_t \mathbf{L}_t^T$, stačí, aby matice \mathbf{Z} byla horní trojúhelníková a $z_{ii} > 0$ pro $i = 1, \dots, N$, jelikož pozitivně definitní matici lze vždy rozložit na součin trojúhelníkové matice a její transponované podoby jednoznačně, pokud její diagonální členy jsou kladné. Pro další snížení počtu parametrů modelu se také často používá předpoklad $z_{ii} = 1$ pro $i = 1, \dots, N$. Z konstrukce je zaručeno, že podmíněná varianční matice \mathbf{H}_t je symetrická a pozitivně definitní. Poznamenejme dále, že jednotlivé faktory v modelu nejsou dány jako odhadované parametry, ale jsou dány vztahem $\mathbf{f}_t = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{e}_t$. V jednorozměrném případě se tedy model shoduje s GARCH(1, 1) modelem. Zajímavý je také fakt, že v rovnici (2.6) je uvažovaná podmíněná střední hodnota konstantní, a tedy neměnná ve všech časech $t = 1, \dots, T$.

Počet parametrů, které je nutné v *full-factor* modelu odhadovat, je bez parametrů podmíněné střední hodnoty roven $3N + N(N-1)/2$ pro parametrizaci s použitím podmínky $z_{ii} = 1$ pro všechna $i = 1, \dots, N$. V případě, že $N = 3$

je tedy počet odhadovaných parametrů roven 12, což je pouze polovina počtu parametrů potřebných v *BEKK* modelu.

Opět uvádíme konkrétní tvar parametrizace matice \mathbf{H}_t pro $N = 2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_t &= \begin{pmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \mathbf{V}_t \mathbf{Z}^T = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,t} & 0 \\ 0 & v_{2,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,t} + z^2 v_{2,t} & z v_{2,t} \\ z v_{2,t} & v_{2,t} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}v_{1,t} &= \gamma_1 + \alpha_1 f_{1,t-1}^2 + \beta_1 v_{1,t-1}, \\ v_{2,t} &= \gamma_2 + \alpha_2 f_{2,t-1}^2 + \beta_2 v_{2,t-1}.\end{aligned}$$

V tomto případě máme model pouze se 7 parametry.

Výhodou *full-factor* modelu je zaručená pozitivní definitnost podmíněné varianční matice \mathbf{H}_t . Navíc odhadování tohoto modelu je výpočetně snazší než u předchozích modelů, což umožňuje použití na časové řady vyšších dimenzí.

2.2 Lineární kombinace jednorozměrných modelů typu GARCH

Jednou z hlavních potíží při modelování mnohorozměrných časových řad a jejich podmíněných variančních matic \mathbf{H}_t je vysoký počet odhadovaných parametrů. V této části se budeme zabývat modely, které umožňují generování těchto matic pouze pomocí lineárních kombinací jednorozměrných GARCH modelů. K těmto modelům patří například ortogonální nebo zobecněný ortogonální model.

2.2.1 Ortogonální model

Ortogonální model GARCH (nebo také *O-GARCH* či *principal component GARCH*), který poprvé představili Alexander a Chibumba (1996), je založen na metodě hlavních komponent. Jedná se o zobecnění základního faktorového modelu na faktorový model s ortogonálními faktory. V této práci postupujeme podle Alexander (2000) a Alexander (2002).

Předpokládejme, že jednotlivá pozorování N -rozměrné časové řady $\{\mathbf{y}_t; t = 1, \dots, T\}$ máme uspořádány do řádků matice \mathbf{Y} typu $T \times N$. Metoda hlavních komponent je citlivá na změnu měřítka, a proto matici \mathbf{Y} normalizujeme do tvaru matice \mathbf{X} následujícím způsobem. Označme $\tilde{\mathbf{y}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_N$ sloupce matice \mathbf{Y} , tedy např. $\tilde{\mathbf{y}}_i$ tvoří jednotlivá pozorování v časech $t = 1, \dots, T$ i -té složky časové řady $\{\mathbf{y}_t\}$. Pro každé $i = 1, \dots, N$ položíme

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = (\tilde{\mathbf{y}}_i - \mu_i) / \sigma_i,$$

kde μ_i a σ_i značí střední hodnotu a směrodatnou odchylku i -té složky časové řady $\{\mathbf{y}_t\}$. V praxi se tyto hodnoty nahradí výběrovým průměrem a výběrovou směrodatnou odchylkou. Výsledné vektory $\tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_N$ poskládáme jako sloupce matice \mathbf{X} .

Následně vypočítáme vlastní čísla matice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ a k nim příslušné vlastní vektory. Jednotlivé hlavní komponenty jsou konstruovány jako lineární kombinace sloupců matice \mathbf{X} s vahami vybranými z vlastních vektorů matice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$. Označme $\mathbf{\Lambda}$ diagonální matici řádu N , která má na diagonále vlastní čísla matice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ seřazených sestupně podle jejich velikosti, a \mathbf{W} čtvercovou matici řádu N s příslušnými vlastními vektory ve sloupcích. Poté platí

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}. \quad (2.9)$$

Hlavní komponenty jsou definovány vztahem

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k &= w_{1k} \tilde{\mathbf{x}}_1 + w_{2k} \tilde{\mathbf{x}}_2 + \dots + w_{Nk} \tilde{\mathbf{x}}_N \quad \text{pro } k = 1, \dots, N, \quad \text{neboli} \\ \mathbf{p}_k &= \mathbf{X} \mathbf{w}_k, \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.10)$$

kde \mathbf{w}_k je k -tý sloupec matice \mathbf{W} , neboli vlastní vektor matice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ příslušný k -tému největšímu vlastnímu číslu. Hlavní komponenty $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$ položíme jako sloupce matice \mathbf{P} typu $T \times N$ a poté z (2.10) plyne

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}\mathbf{W}. \quad (2.11)$$

Díky seřazení vlastních čísel sestupně podle velikosti první hlavní komponenta vysvětluje největší možnou část variability obsažené v datech, druhá hlavní komponenta největší možnou část ze zbylé variability apod. Navíc z konstrukce plyne, že jednotlivé hlavní komponenty jsou vzájemně nekorelované, což ukážeme pomocí vztahu

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{W}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{W} = \mathbf{W}^T\mathbf{W}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda},$$

kde druhá rovnost plyne z (2.9) a třetí rovnost ze vztahu $\mathbf{W}^T = \mathbf{W}^{-1}$ díky ortogonalitě matice \mathbf{W} . Matice $\mathbf{P}^T\mathbf{P}$ je tedy diagonální matice, z čehož plyne, že jednotlivé sloupce matice \mathbf{P} jsou navzájem ortogonální, tedy nekorelované, a rozptyl jednotlivých hlavních komponent je roven odpovídajícím vlastním číslům v matici $\mathbf{\Lambda}$.

Díky ortogonalitě matice \mathbf{W} lze ze vztahu (2.11) vyjádřit

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{W}^T, \quad \text{nebo také} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_i &= w_{i1} \mathbf{p}_1 + w_{i2} \mathbf{p}_2 + \dots + w_{iN} \mathbf{p}_N \quad \text{pro } i = 1, \dots, N, \quad \text{neboli} \\ \tilde{\mathbf{y}}_i &= \mu_i + w_{i1}^* \mathbf{p}_1 + w_{i2}^* \mathbf{p}_2 + \dots + w_{iN}^* \mathbf{p}_N \quad \text{pro } i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.13)$$

kde $w_{ij}^* = \sigma_i w_{ij}$ pro $j = 1, \dots, N$. Vektory pozorování jednotlivých složek časové řady $\{\mathbf{y}_t\}$ jsou tedy lineární kombinací hlavních komponent. Připomeňme, že hlavní komponenty jsou seřazeny sestupně podle jejich rozptylů.

Podle Alexander (2000) je možné použít pouze prvních $m \leq N$ hlavních komponent a zbylé členy v (2.13) považovat za chybovou složku, tedy

$$\tilde{\mathbf{y}}_i = \mu_i + w_{i1}^* \mathbf{p}_1 + w_{i2}^* \mathbf{p}_2 + \dots + w_{im}^* \mathbf{p}_m + \boldsymbol{\epsilon}_i \quad \text{pro } i = 1, \dots, N.$$

Poté varianční matici časové řady $\{\mathbf{y}_t\}$ lze zapsat jako

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{A}^T + \mathbf{V}_\epsilon,$$

kde $\mathbf{A} = (w_{ij}^*)_{\substack{0 < i < N \\ 0 < j < m}}$ je matice vah, $\mathbf{V} = \text{diag}(V(\mathbf{p}_1), \dots, V(\mathbf{p}_m))$ je diagonální matice rozptylů uvažovaných hlavních komponent a \mathbf{V}_ϵ je varianční matice chybových složek $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$.

Nevýhodou použití nižšího počtu $m < N$ hlavních komponent je skutečnost, že pro matici \mathbf{H}_t poté není zaručena pozitivní definitnost. Tuto podmínku lze po výpočtu odhadů zkontrolovat pomocí výpočtu vlastních čísel varianční matice. Ovšem při použití všech N hlavních komponent je pozitivní definitnost matice \mathbf{H}_t zaručena vždy.

Hlavní komponenty jsou nekorelované pouze nepodmíněně, tedy jejich podmíněná varianční matice nemusí být nutně diagonální. Ovšem pro konstrukci ortogonálního GARCH modelu je nutné předpokládat, že i podmíněné korelace jsou nulové.

Z rovnice (2.12) můžeme přejít zpět k vektoru pozorování \mathbf{x}_t v čase t (kde \mathbf{x}_t je t -tý řádek matice \mathbf{X}), tedy k rovnici

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{W} \mathbf{f}_t,$$

kde $\mathbf{f}_t = (p_{t1}, p_{t2}, \dots, p_{tm})^T$ je vektor hodnot hlavních komponent v čase t . Následně přejdeme k původní nenormalizované časové řadě $\{\mathbf{y}_t\}$:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{A} \mathbf{f}_t,$$

kde $\boldsymbol{\mu}_t = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)^T$. Označme $\mathbf{V}_t = \text{diag}(v_{1,t}, \dots, v_{m,t})$ diagonální matici podmíněných rozptylů prvních m hlavních komponent. Předpokládáme, že $\{\mathbf{f}_t\}$ jsou náhodné veličiny, pro které platí $E(\mathbf{f}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{0}$ a $\text{Var}(\mathbf{f}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{V}_t$ či dokonce $\mathbf{f}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_m(\mathbf{0}, \mathbf{V}_t)$.

Podle ortogonálního GARCH modelu je poté podmíněná varianční matice časové řady \mathbf{H}_t rovna

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{A} \mathbf{V}_t \mathbf{A}^T, \quad \text{kde pro prvky matice } \mathbf{V}_t = \text{diag}(v_{1,t}, \dots, v_{m,t}) \text{ platí}$$

$$v_{i,t} = \gamma_i + \sum_{k=1}^p \alpha_{ik} f_{i,t-k}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} v_{i,t-j} \quad i = 1, \dots, m,$$

kde $\gamma_i > 0$ a $\alpha_{ik}, \beta_{ij} \geq 0$ pro $i, j, k = 1, \dots, m$ a $\sum_{k=1}^p \alpha_{ik} + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} < 1$ splňují podmínky dané v části 1.2.

Hlavní výhodou ortogonálního GARCH modelu je možnost aplikace na časové řady s vysokou dimenzí N . Pro generování opravdu velkých podmíněných variančních matic je možné dokonce výnosy jednotlivých aktiv rozdělit do několika vysoce korelovaných skupin, odhadnout model pro každou skupinu zvlášť a výslednou matici poskládat pomocí dílčích výsledků. Další výhodou tohoto modelu je snížení výpočetní náročnosti (vzhledem k tomu, že vyžaduje m jednorozměrných GARCH modelů místo mnohorozměrného GARCH modelu) a tedy i výpočetního času. Volba počtu používaných hlavních komponent umožňuje kontrolovat množství šumu, který považujeme za chybovou složku a který by mohl způsobovat nestabilitu odhadů.

Naopak nevýhodou ortogonálního modelu je předpoklad nulových podmíněných korelací jednotlivých hlavních komponent, který nemusí být splněn. Dále

předpoklad ortogonální transformace může být příliš omezující a snaží se jej vyřešit Van der Weide (2002) pomocí zobecněného ortogonálního modelu. Ten také demonstruje další nedostatky ortogonálního modelu - nedokáže správně modelovat nezávislá nebo pouze slabě korelovaná data a navíc pokud jednotlivé hlavní komponenty mají podobný nepodmíněný rozptyl, nastávají problémy s identifikací.

2.2.2 Zobecněný ortogonální model

Na *Ortogonalní model* navázal Van der Weide (2002), který uvedl *zobecněný ortogonální model* (tzv. *GO-GARCH*). Ortogonální model předpokládá, že existuje vektor nekorelovaných komponent, které lze pomocí ortogonální matice (pokud použijeme plný počet hlavních komponent) transformovat do podoby pozorované N -rozměrné časové řady. Tyto nepozorované komponenty mohou být interpretovány jako faktory, které řídí konkrétní trh. Zobecněný ortogonální model dovoluje místo ortogonální matice použití jakékoliv invertibilní matice.

Předpokládáme, že \mathbf{y}_t mají nulovou střední hodnotu, a tedy

$$\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t).$$

Navíc předpokládáme, že časová řada $\{\mathbf{y}_t; t = 1, \dots, T\}$ je slabě stacionární, a tedy existuje nepodmíněná varianční matice $\mathbf{H} = \mathbf{E}(\mathbf{H}_t)$.

Zobecněný ortogonální model předpokládá, že pozorovanou časovou řadu $\{\mathbf{y}_t\}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci nekorelovaných komponent $\{\mathbf{f}_t\}$:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z} \mathbf{f}_t, \quad (2.14)$$

kde \mathbf{Z} je invertibilní matice typu $N \times N$, která je konstantní pro všechny časy t a pro nepozorované $\{\mathbf{f}_t\}$ platí

$$\mathbf{f}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_t), \quad \text{kde } \mathbf{V}_t = \text{diag}(v_{1t}, \dots, v_{Nt}),$$

kde každá komponenta f_{it} je vyjádřena pomocí jednorozměrného procesu typu GARCH(p, q):

$$f_{i,t} | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, v_{i,t}),$$

$$v_{i,t} = \gamma_i + \sum_{k=1}^p \alpha_{ik} f_{i,t-k}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} v_{i,t-j}, \quad i = 1, \dots, N,$$

kde $\gamma_i > 0$ a $\alpha_{ik}, \beta_{ij} \geq 0$ pro $i, j, k = 1, \dots, N$ a $\sum_{k=1}^p \alpha_{ik} + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} < 1$ splňují podmínky představené v části 1.2.

Podmíněná varianční matice \mathbf{H}_t časové řady $\{\mathbf{y}_t\}$, jež nás zajímá, je dána vztahem

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{Z} \mathbf{V}_t \mathbf{Z}^T.$$

Bez újmy na obecnosti navíc předpokládáme, že nepozorované komponenty $\{\mathbf{f}_t\}$ mají nepodmíněně jednotkový rozptyl, a tedy nepodmíněná varianční matice procesu $\{\mathbf{y}_t\}$ je rovna

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}(\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^T) = \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T. \quad (2.15)$$

Označme $\mathbf{\Lambda}$ diagonální matici s vlastními čísly této nepodmíněné varianční matice \mathbf{H} a symbolem \mathbf{W} matici s příslušnými ortonormálními vlastními vektory. Poté ze singulárního rozkladu matice \mathbf{Z} plyne, že existuje ortogonální matice \mathbf{U}_0 taková, že platí

$$\mathbf{Z} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{U}_0^T. \quad (2.16)$$

Matice \mathbf{W} a $\mathbf{\Lambda}$ jsou odhadovány pomocí výběrové varianční matice $\overline{\mathbf{H}}$ a pro odhad matice \mathbf{U}_0 je používána podmíněná informace ze σ -algebry \mathcal{F}_{t-1} . Tento rozklad zajišťuje, že matice \mathbf{Z} je vždy dobře identifikována.

2.2.3 Zobecněný ortogonální faktorový model

Zobecněný ortogonální faktorový model, který budeme značit také pomocí *GOF-GARCH*, byl poprvé uveden v článku Lanne a Saikkonen (2007), podle kterého postupujeme v této části. Tento model navazuje na *zobecněný ortogonální model*, ale umožňuje snížit počet faktorů, ze kterých je pomocí lineární transformace generována časová řada $\{\mathbf{y}_t\}$. V *zobecněném ortogonálním modelu* byla daná časová řada vyjádřena pomocí všech N nekorelovaných komponent neboli faktorů. Autoři článku tvrdí, že tento předpoklad je omezující, jelikož neumožňuje modelování idiosynkratických šoků, které jsou spolu se systematickými šoky typické pro časové řady z oblasti financí. Proto autoři navrhli model, který může používat nižší počet faktorů.

V tomto modelu předpokládáme, že

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}\mathbf{\Sigma}_t^{1/2}\boldsymbol{\xi}_t,$$

kde \mathbf{Z} je regulární (neboli invertibilní) matice typu $N \times N$, $\mathbf{\Sigma}_t$ je pozitivně definitní diagonální matice typu $N \times N$, měřitelná vzhledem k σ -algebře \mathcal{F}_{t-1} generované pozorováními do času $t - 1$ a $\boldsymbol{\xi}_t$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných vektorů s nulovou střední hodnotou a jednotkovou varianční maticí, jejichž rozdělení má hustotu a $\boldsymbol{\xi}_t$ jsou nezávislé na \mathcal{F}_{t-1} . Poté pro podmíněnou varianční matici řady $\{\mathbf{y}_t\}$ platí

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{Z}\mathbf{\Sigma}_t\mathbf{Z}^T. \quad (2.17)$$

Prvky matice $\mathbf{\Sigma}_t$ závisí na minulých hodnotách \mathbf{y}_t , ale ne nutně všechny - autoři umožňují některé prvky nechat nezávislé na čase t , tedy konstantní. Předpokládejme tedy

$$\mathbf{\Sigma}_t = \text{diag}[\mathbf{V}_t : \mathbf{I}_{N-m}], \quad (2.18)$$

kde $\mathbf{V}_t = \text{diag}(v_{1,t}, \dots, v_{m,t})$ je matice s prvky závislými na minulých hodnotách \mathbf{y}_t a $0 \leq m \leq N$. Analogicky rozdělíme také matici parametrů \mathbf{Z} a vektor $\boldsymbol{\xi}_t$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= [\mathbf{Z}_1 : \mathbf{Z}_2], & \text{kde } \mathbf{Z}_1 \text{ je typu } N \times m \text{ a } \mathbf{Z}_2 \text{ typu } N \times (N - m), \\ \boldsymbol{\xi}_t &= [\boldsymbol{\xi}_{1t}^T : \boldsymbol{\xi}_{2t}^T]^T, & \text{kde } \boldsymbol{\xi}_{1t} \text{ je vektor délky } m \text{ a } \boldsymbol{\xi}_{2t} \text{ délky } (N - m), \\ \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{B}^T &= [\mathbf{B}_1 : \mathbf{B}_2]^T, & \text{kde } \mathbf{B}_1 \text{ je typu } N \times m \text{ a } \mathbf{B}_2 \text{ typu } N \times (N - m). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Díky těmto rozkladům můžeme psát

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_1 \mathbf{V}_t^{1/2} \boldsymbol{\xi}_{1t} + \mathbf{Z}_2 \boldsymbol{\xi}_{2t}$$

nebo také

$$\mathbf{B}_1^T \mathbf{y}_t = \mathbf{V}_t^{1/2} \boldsymbol{\xi}_{1t} \quad \text{a} \quad \mathbf{B}_2^T \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\xi}_{2t}. \quad (2.20)$$

Zatímco $\mathbf{B}_2^T \mathbf{y}_t$ jsou nezávislé, stejně rozdělené, se střední hodnotou $\mathbf{0}$ a jednotkovou varianční maticí, jednotlivé komponenty $\mathbf{B}_1^T \mathbf{y}_t$ jsou nekorelované, jednorozměrné podmíněně heteroskedastické procesy s podmíněnými rozptyly

$$v_{i,t} = \left(1 - \sum_{k=1}^p \alpha_{ik} - \sum_{j=1}^q \beta_{ij} \right) + \sum_{k=1}^p \alpha_{ik} (\mathbf{b}_{1i}^T \mathbf{y}_{t-k})^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} v_{i,t-j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.21)$$

kde \mathbf{b}_{1i}^T značí i -tý řádek matice \mathbf{B}_1^T a pro parametry opět platí podmínky představené v části 1.2: $\alpha_{ik} \geq 0$, $\beta_{ij} \geq 0$ a $\sum_{k=1}^p \alpha_{ik} + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} < 1$ pro všechna $i = 1, \dots, m$.

Podmíněná varianční matice \mathbf{H}_t tedy závisí pouze na m faktorech, kterými jsou jednotlivé komponenty vektoru $\mathbf{V}_t^{1/2} \boldsymbol{\xi}_{1t}$. Navíc z (2.21) platí, že $E(\mathbf{V}_t) = \mathbf{I}_m$, díky čemuž

$$\text{Var}(\boldsymbol{\Sigma}_t) = \mathbf{I}_N. \quad (2.22)$$

Matice $\boldsymbol{\Sigma}_t$ je podle konstrukce \mathbf{V}_t diagonální matice s kladnými prvky na diagonále. Z (2.17) tedy plyne, že pro matici \mathbf{H}_t je zaručena pozitivní definitnost.

Pro odhad matice \mathbf{Z} se využívají vlastnosti následujících rozkladů. Pro matici \mathbf{Z} uvažujeme polární rozklad

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}\mathbf{R}, \quad (2.23)$$

kde \mathbf{C} je symetrická, pozitivně definitní matice typu $N \times N$ a \mathbf{R} je ortogonální matice typu $N \times N$. Pozitivní definitnost matice \mathbf{C} je zaručena regularitou matice \mathbf{Z} , která také zajišťuje jednoznačnost tohoto rozkladu. Poté se podíváme na nepodmíněnou varianční matici časové řady \mathbf{y}_t , pro kterou z (2.23) a (2.22) platí

$$\mathbf{H} = \mathbf{Z} \text{Var}(\boldsymbol{\Sigma}_t) \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{C}\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{C}^T, \quad (2.24)$$

kde čtvrtá rovnost plyne z ortogonality matice \mathbf{R} . Poté pro nepodmíněnou varianční matici \mathbf{y}_t uvažujeme spektrální rozklad, tedy

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^T,$$

kde $\boldsymbol{\Lambda}$ je diagonální matice s vlastními čísly matice \mathbf{H} na diagonále a \mathbf{P} je ortogonální matice s příslušnými vlastními vektory. Z toho plyne následující vyjádření pro matice \mathbf{C} a \mathbf{R} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}^{1/2} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\mathbf{P}^T \quad \text{a} \quad \mathbf{R} = \mathbf{H}^{-1/2}\mathbf{Z}.$$

Matice \mathbf{C} poté může být odhadnuta pomocí spektrálního rozkladu výběrové varianční matice a tento odhad bude konzistentní. Místo polárního rozkladu matice \mathbf{Z} lze také alternativně použít QR rozklad.

Nyní uvažujme dělení matice $\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1 : \mathbf{R}_2]$, kde \mathbf{R}_1 je typu $N \times m$ a \mathbf{R}_2 typu $N \times (N - m)$, analogicky podle dělení matice Σ_t na \mathbf{V}_t a \mathbf{I}_{N-m} , tak aby

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{C}\mathbf{R}_1 \quad \text{a} \quad \mathbf{Z}_2 = \mathbf{C}\mathbf{R}_2. \quad (2.25)$$

Poté podmíněnou varianční matici časové řady $\{\mathbf{y}_t\}$ můžeme vyjádřit také pomocí

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \mathbf{Z}\Sigma_t\mathbf{Z}^T = \mathbf{C}\mathbf{R}\Sigma_t\mathbf{R}^T\mathbf{C}^T \\ &= \mathbf{C} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1^T \\ \mathbf{R}_2^T \end{pmatrix} \mathbf{C}^T \\ &= \mathbf{C} (\mathbf{R}_1\mathbf{V}_t\mathbf{R}_1^T + \mathbf{R}_2\mathbf{R}_2^T) \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{Z}_1\mathbf{V}_t\mathbf{Z}_1^T + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_2^T \\ &= \mathbf{H}^* + \sum_{i=1}^m v_{it} \mathbf{z}_{1i} \mathbf{z}_{1i}^T, \end{aligned} \quad (2.27)$$

kde $\mathbf{H}^* = \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_2^T$ a \mathbf{z}_{1i} je i -tý sloupec matice \mathbf{Z}_1 . Nebo můžeme z (2.26) postupovat následujícím způsobem s využitím rovnosti $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1^T + \mathbf{R}_2\mathbf{R}_2^T = \mathbf{I}_N$ a získat další vyjádření pro matici \mathbf{H}_t :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \mathbf{C} (\mathbf{R}_1\mathbf{V}_t\mathbf{R}_1^T - \mathbf{R}_1\mathbf{R}_1^T + \mathbf{R}_1\mathbf{R}_1^T + \mathbf{R}_2\mathbf{R}_2^T) \mathbf{C}^T \\ &= \mathbf{C}\mathbf{R}_1 (\mathbf{V}_t - \mathbf{I}_m) \mathbf{R}_1^T \mathbf{C}^T + \mathbf{C}\mathbf{I}_N \mathbf{C}^T \quad \text{a z (2.24) plyne} \\ &= \mathbf{H} + \mathbf{C}\mathbf{R}_1 (\mathbf{V}_t - \mathbf{I}_m) \mathbf{R}_1^T \mathbf{C}^T. \end{aligned}$$

Počet parametrů *GOF-GARCH* modelu je dán

$$m(p + q) + N(N + 1)/2 + Nm - m(m + 1)/2.$$

Tedy například v případě $N = 3$, při plném počtu faktorů ($m = 3$) a $p = q = 1$ je počet parametrů roven 15.

Tento model je, jak jsme již uvedli, zobecněním *zobecněného ortogonálního modelu* autora Van der Weide (2002). Zároveň, díky možnosti nechat některé prvky Σ_t konstantní, model navazuje na obvyčejné faktorové modely. Také je možné ukázat, že *zobecněný ortogonální faktorový model* je možné brát jako speciální případ *BEKK modelu*: z (2.20) plyne, že $v_{it} = \mathbf{b}_{1i}^T \mathbf{H}_t \mathbf{b}_{1i}$, a poté můžeme (2.27) napsat jako

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \mathbf{H}^* + \sum_{i=1}^m v_{it} \mathbf{z}_{1i} \mathbf{z}_{1i}^T \\ &= \mathbf{H}^{**} + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^p \alpha_{ik} \mathbf{b}_{1i}^T \mathbf{y}_{t-k} \mathbf{y}_{t-k}^T \mathbf{b}_{1i} \right) \mathbf{z}_{1i} \mathbf{z}_{1i}^T + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^q \beta_{ij} \mathbf{b}_{1i}^T \mathbf{H}_{t-j} \mathbf{b}_{1i} \right) \mathbf{z}_{1i} \mathbf{z}_{1i}^T, \end{aligned} \quad (2.28)$$

kde $\mathbf{H}^{**} = \mathbf{H}^* + \sum_{i=1}^m \left(1 - \sum_{k=1}^p \alpha_{ik} - \sum_{j=1}^q \beta_{ij} \right) \mathbf{z}_{1i} \mathbf{z}_{1i}^T$. Tvar (2.28) je obdobný jako u parametrizace podmíněné varianční matice \mathbf{H}_t v (2.4). Díky tomu je možné využívat asymptotické výsledky odvozené pro odhady *BEKK modelu*.

2.3 Nelineární kombinace jednorozměrných modelů typu GARCH

V této části si představíme modely, které pro modelování podmíněné varianční matice používají nelineární kombinace jednorozměrných GARCH modelů. K nejznámějším modelům patří CCC model nebo DCC model. Tyto modely upouštějí od snahy modelovat celou podmíněnou varianční matici jako celek a místo toho se soustředí na modelování podmíněných rozptylů jednotlivých složek a podmíněných korelací mezi nimi, ze kterých je poté možné podmíněnou varianční matici složit.

2.3.1 CCC model

Prvním modelem je *CCC model* představený v článku Bollerslev (1990). Název modelu je odvozený jako zkratka pojmu *constant conditional correlation*, protože hlavní myšlenkou tohoto modelu je uvažování konstantních podmíněných korelací mezi jednotlivými složkami časové řady $\{\mathbf{y}_t\}$. Opět uvažujeme, že pro časovou řadu a její podmíněnou varianční matici platí

$$\mathbf{H}_t = \text{var}(\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \text{var}(\mathbf{e}_t | \mathcal{F}_{t-1}).$$

Model využívá vyjádření podmíněné kovariance mezi dvěma složkami pomocí podmíněné korelace a odmocnin z odpovídajících podmíněných rozptylů daných složek

$$h_{ij,t} = \varrho_{ij,t} \sqrt{h_{ii,t}} \sqrt{h_{jj,t}},$$

kde $\varrho_{ij,t}$ je podmíněná korelace mezi $y_{i,t}$ a $y_{j,t}$ v čase t . Jak jsme již uvedli, základní předpoklad *CCC modelu* je uvažování konstantních podmíněných korelací ve všech časech t , tedy

$$\varrho_{ij,t} = \varrho_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N \quad \text{pro všechna } t.$$

Podmíněnou varianční matici \mathbf{H}_t poté lze zapsat jako součin matic

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t,$$

kde $\mathbf{D}_t = \text{diag}(\sqrt{h_{11,t}}, \dots, \sqrt{h_{NN,t}})$ je diagonální matice řádu N a $\mathbf{R} = (\varrho_{ij})_{i,j=1}^N$ je symetrická, časově invariantní matice řádu N , kde platí $-1 \leq \varrho_{ij} \leq 1$ a $\varrho_{ii} = 1$ pro všechna $i, j = 1, \dots, N$. Aby matice \mathbf{H}_t byla pozitivně definitní, musí být podmíněné rozptyly správně definovány, tedy $h_{ii,t} > 0$ pro všechna $i = 1, \dots, N$, a matice \mathbf{R} musí být také pozitivně definitní.

Podmíněné rozptyly jednotlivých složek jsou opět modelovány pomocí jednorozměrných GARCH modelů:

$$h_{ii,t} = \gamma_i + \sum_{k=1}^p \alpha_{ik} y_{i,t-k}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} h_{ii,t-j}, \quad i = 1, \dots, N,$$

kde $\gamma_i > 0$ a $\alpha_{ik}, \beta_{ij} \geq 0$ pro $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, q, k = 1, \dots, p$ a $\sum_{k=1}^p \alpha_{ik} +$

$\sum_{j=1}^q \beta_{ij} < 1$ jsou podmínky představené v části 1.2.

Nakatani a Teräsvirta (2009) představili rozšířený *CCC model* (*ECCC* z názvu *Extended CCC*), ve kterém je vektor podmíněných rozptylů modelován maticově pomocí

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{c} + \sum_{k=1}^p \mathbf{A}_k \mathbf{y}_{t-k}^{(2)} + \sum_{j=1}^q \mathbf{B}_j \mathbf{h}_{t-j},$$

kde $\mathbf{h}_t = (h_{11,t}, \dots, h_{NN,t})^T$, $\mathbf{y}_t^{(2)} = (y_{1,t}^2, \dots, y_{N,t}^2)^T$ a parametry jsou \mathbf{c} , vektor délky N s kladnými prvky, a matice typu $N \times N$ \mathbf{A}_k a \mathbf{B}_j s nezápornými prvky.

Počet parametrů základního *CCC modelu* je roven $N(p+q+1) + (N-1)N/2$, tedy v případě $N = 3$ a $p = q = 1$ potřebujeme odhadnout 12 parametrů. Pro ilustraci opět předvedeme, jak model vypadá ve dvourozměrném případě:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \begin{pmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varrho_{12} \\ \varrho_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_{11,t} & \varrho_{12} \sqrt{h_{11,t}} \sqrt{h_{22,t}} \\ \varrho_{12} \sqrt{h_{11,t}} \sqrt{h_{22,t}} & h_{22,t} \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \end{aligned}$$

$$h_{11,t} = \gamma_1 + \sum_{k=1}^p \alpha_{1k} e_{1,t-k}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{1j} h_{11,t-j} \quad \text{a}$$

$$h_{22,t} = \gamma_2 + \sum_{k=1}^p \alpha_{2k} e_{2,t-k}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{2j} h_{22,t-j}.$$

Výhodou *CCC modelu* je výrazné snížení počtu odhadovaných parametrů oproti klasickým přístupům v modelech *vec*, *BEKK* nebo *faktorových modelech*. Zároveň podmínka pozitivní definitnosti matice \mathbf{H}_t je snadno ověřitelná a je snadné ji splnit. Nevýhodou tohoto modelu může být naopak právě předpoklad konstantních podmíněných korelací, který nemusí odpovídat vývoji dat.

2.3.2 DCC a VC-GARCH modely

Modely *DCC* a *VC-GARCH* značí zobecnění *CCC modelu*, které umožňují matici podmíněných korelací \mathbf{R} záviset na čase t . Toto zobecnění bylo představeno hned ve dvou článcích - svou verzi představili Engle a Sheppard (2001) a také Tse a Tsui (2002). Model představený v Engle a Sheppard (2001) je nazýván jako *DCC model* z pojmu *dynamic conditional correlation*, zatímco Tse a Tsui (2002) svůj model nazývají jako *GARCH model with time-varying correlations*, nebo zkráceně *VC-GARCH*. Formulace těchto dvou modelů se liší právě ve specifikaci matice podmíněných korelací \mathbf{R}_t .

V obou případech uvažujeme

$$\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t),$$

kde pro podmíněnou varianční matici \mathbf{H}_t platí

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t,$$

kde matice $\mathbf{D}_t = \text{diag}(\sqrt{h_{11,t}}, \dots, \sqrt{h_{NN,t}})$ je stejná jako v *CCC modelu* a \mathbf{R}_t je časově proměnná podmíněná korelační matice časové řady $\{\mathbf{y}_t\}$ a zároveň také podmíněná varianční matice procesu $\{\boldsymbol{\eta}_t\}$, kde $\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{y}_t$.

Podmíněné rozptyly jednotlivých složek, jejichž odmocniny jsou prvky matice \mathbf{D}_t , jsou opět modelovány pomocí jednorozměrných GARCH modelů, kde nyní dovolujeme, aby řady p, q byly různé pro každou složku:

$$h_{ii,t} = \gamma_i + \sum_{k=1}^{p_i} \alpha_{ik} y_{i,t-k}^2 + \sum_{j=1}^{q_i} \beta_{ij} h_{ii,t-j}, \quad i = 1, \dots, N,$$

kde platí podmínky $\gamma_i > 0$ a $\alpha_{ik}, \beta_{ij} \geq 0$ pro $i = 1, \dots, N$ a $\sum_{k=1}^{p_i} \alpha_{ik} + \sum_{j=1}^{q_i} \beta_{ij} < 1$ obdobně jako v části 1.2.

Engle a Sheppard (2001) v *DCC modelu* formulují podmíněnou korelační matici \mathbf{R}_t následujícím způsobem:

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{Q}_t^{*-1} \mathbf{Q}_t \mathbf{Q}_t^{*-1}, \quad (2.29)$$

kde pro jednotlivé matice platí

- $\mathbf{Q}_t = \left(1 - \sum_{k=1}^K \alpha_k - \sum_{l=1}^L \beta_l\right) \bar{\mathbf{Q}}_t + \sum_{k=1}^K \alpha_k (\boldsymbol{\eta}_{t-k} \boldsymbol{\eta}_{t-k}^T) + \sum_{l=1}^L \beta_l \mathbf{Q}_{t-l}$,
- $\bar{\mathbf{Q}}_t$ je odhad nepodmíněné varianční matice standardizovaných residuí, který je výstupem prvního kroku odhadu, a
- $\mathbf{Q}_t^* = \text{diag}(\sqrt{q_{11,t}}, \dots, \sqrt{q_{NN,t}})$ je matice s odmocninami z diagonálních prvků matice \mathbf{Q}_t na diagonále.

Prvky výsledné matice \mathbf{R}_t jsou poté tvaru $\rho_{ij,t} = \frac{q_{ij,t}}{\sqrt{q_{ii,t}} \sqrt{q_{jj,t}}}$. Díky tomuto škálování jsou všechny prvky matice \mathbf{R}_t v absolutní hodnotě menší než 1, a tedy matice \mathbf{R}_t může být korelační maticí.

Podle této konstrukce je celá podmíněná varianční matice \mathbf{H}_t pozitivně definitní, pokud jednotlivé $h_{ii,t} > 0$ a pokud matice \mathbf{R}_t je pozitivně definitní, což platí, pokud \mathbf{Q}_0 je pozitivně definitní a pro parametry platí: $\alpha_k \geq 0$ pro $k = 1, \dots, K$, $\beta_l \geq 0$ pro $l = 1, \dots, L$ a $\sum_{k=1}^K \alpha_k + \sum_{l=1}^L \beta_l < 1$. Tyto podmínky opět odpovídají podmínkám pro jednorozměrné GARCH modely uvedeným v části 1.2.

Tse a Tsui (2002) v *modelu VC-GARCH* pro formulaci podmíněné korelační matice \mathbf{R}_t používají vyjádření ve smyslu ARMA modelů:

$$\mathbf{R}_t = (1 - \theta_1 - \theta_2) \mathbf{R} + \theta_1 \mathbf{R}_{t-1} + \theta_2 \boldsymbol{\Psi}_{t-1},$$

kde $\theta_1, \theta_2 \geq 0$, $\theta_1 + \theta_2 \leq 1$ a

- \mathbf{R} je časově invariantní pozitivně definitní matice parametrů s jednotkami na diagonále a

- Ψ_{t-1} je matice závisající na zpožděných hodnotách $\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{y}_t$ s prvky

$$\psi_{ij,t-1} = \frac{\sum_{h=1}^K \eta_{i,t-h} \eta_{j,t-h}}{\sqrt{\left(\sum_{h=1}^K \eta_{i,t-h}^2\right) \left(\sum_{h=1}^K \eta_{j,t-h}^2\right)}} \quad \text{pro } 1 \leq i, j \leq N.$$

Matice \mathbf{R}_t je správně definovaná korelační matice, pokud \mathbf{R}_0 a Ψ_{t-1} jsou správně definované korelační matice – tedy tyto matice musí být symetrické, pozitivně definitní s jednotkami na diagonále. Nutnou podmínkou pro pozitivní definitnost matice Ψ_{t-1} je $K \geq N$.

V modelu *DCC* je třeba odhadnout celkem

$$\frac{N(N+1)}{2} + \sum_{k=1}^K \alpha_k + \sum_{l=1}^L \beta_l + \sum_{i=1}^N (1 + p_i + q_i)$$

parametrů a v modelu *VC-GARCH*

$$\frac{(N-1)N}{2} + 2 + \sum_{i=1}^N (1 + p_i + q_i)$$

parametrů. V případě $N = 3$, $p_i = q_i = 1$ a $K = L = 1$ tedy potřebujeme v modelu *DCC* odhadnout 17 parametrů a v modelu *VC-GARCH* 14 parametrů. Model *DCC* vyžaduje více parametrů, jelikož k parametrizaci matice \mathbf{R}_t používá varianční matici, kterou poté transformuje na korelační matici, zatímco *VC-GARCH* používá přímo korelační matici a ušetří tedy parametry na diagonálních prvcích, které musí být rovny 1.

Pro porovnání opět ukážeme, jak tyto modely vypadají ve dvourozměrném případě (s $K = L = 1$):

$$\mathbf{H}_t = \begin{pmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} \end{pmatrix} \mathbf{R}_t \begin{pmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} \end{pmatrix}, \quad \text{kde}$$

$$h_{11,t} = \gamma_1 + \sum_{k=1}^p \alpha_{1k} y_{1,t-k}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{1j} h_{11,t-j} \quad \text{a}$$

$$h_{22,t} = \gamma_2 + \sum_{k=1}^p \alpha_{2k} y_{2,t-k}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{2j} h_{22,t-j}.$$

V modelu *DCC* poté

$$\mathbf{R}_t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{q_{11,t}} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{q_{22,t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11,t} & q_{12,t} \\ q_{12,t} & q_{22,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{q_{11,t}} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{q_{22,t}} \end{pmatrix}, \quad \text{kde}$$

$$\mathbf{Q}_t = \begin{pmatrix} q_{11,t} & q_{12,t} \\ q_{12,t} & q_{22,t} \end{pmatrix}$$

$$= (1 - \alpha_1 - \beta_1) \bar{\mathbf{Q}}_t + \alpha_1 \begin{pmatrix} \frac{(y_{1,t-1})^2}{h_{11,t-1}} & \frac{y_{1,t-1} y_{2,t-1}}{\sqrt{h_{11,t-1} h_{22,t-1}}} \\ \frac{y_{1,t-1} y_{2,t-1}}{\sqrt{h_{11,t-1} h_{22,t-1}}} & \frac{(y_{2,t-1})^2}{h_{22,t-1}} \end{pmatrix} + \beta_1 \mathbf{Q}_{t-1},$$

zatímco v modelu *VC-GARCH*

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_t &= \begin{pmatrix} 1 & \varrho_{12,t} \\ \varrho_{12,t} & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 - \theta_1 - \theta_2) \begin{pmatrix} 1 & \varrho_{12} \\ \varrho_{12} & 1 \end{pmatrix} + \theta_1 \begin{pmatrix} 1 & \varrho_{12,t-1} \\ \varrho_{12,t-1} & 1 \end{pmatrix} + \theta_2 \begin{pmatrix} 1 & \psi_{12,t-1} \\ \psi_{12,t-1} & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Hafner a Franses (2009) navrhli zobecnění *DCC modelu*, ve kterém při modelování podmíněné korelační matice \mathbf{R}_t v (2.29) používají matici \mathbf{Q}_t ve formě

$$\mathbf{Q}_t = (1 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) \bar{\mathbf{Q}}_t + \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \odot \boldsymbol{\eta}_{t-1} \boldsymbol{\eta}_{t-1}^T + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \odot \mathbf{Q}_{t-1},$$

kde \odot značí Hadamardův součin (neboli součin po složkách), $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ vektory parametrů délky N , $\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i$, $\bar{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \beta_i$. Tento model tedy umožňuje korelace modelovat pomocí parametrů specifických pro jednotlivé složky \mathbf{y}_t . Pro parametry jsou kladeny podmínky $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ a $\alpha_i^2 + \beta_i^2 < 1$, $i = 1, \dots, N$.

2.4 Další přístupy k mnohorozměrným GARCH modelům

V této části se zmíníme o dalších přístupech k mnohorozměrným GARCH modelům, které byly představeny v literatuře.

Prvním modelem je *matrix exponential GARCH*, který byl představen v článku Kawakatsu (2006). Jedná se o nový model, který zaručuje pozitivní definitnost podmíněné varianční matice s využitím maticové exponenciály. Jednotlivé prvky podmíněné varianční matice specifikují v transformovaném prostoru – v logaritmu podmíněné varianční matice. V této fázi nemusí klást žádné podmínky na pozitivní definitnost, jelikož následná exponenciální transformace symetrické matice zajišťuje pozitivní definitnost. K odhadování tohoto modelu se také používá metoda maximální věrohodnosti.

Na faktorové modely navázali Santos a Moura (2014) se svým *dynamic factor GARCH*, zkráceně také *DF-GARCH*. Hlavní změnou oproti běžným faktorovým modelům je, že “načítací” vektory pro jednotlivé faktory se mění v čase a nejsou tedy časově invariantní jako v původních modelech. Tyto vektory se řídí modelem *náhodné procházky* a nebo dalším popsaným modelem v článku Santos a Moura (2014). Pro podmíněnou varianční matici faktorů poté předpokládají parametrizaci podle *DCC modelu*.

GO-GARCH modely rozvíjejí Zhang a Chan (2009), kteří představují tři úpravy modelu, které vycházejí z některých vlastností *GO-GARCH* modelu – *independent-factor GARCH* používá faktory, které jsou vzájemně nezávislé; *best-factor GARCH model* se snaží najít faktory, u kterých druhé mocniny jejich hodnot budou vysoce autokorelované, a *conditional-decorrelation GARCH model* předpokládá faktory, které budou podmíněně nekorelované. Autoři v článku dále také uvedli *faktorový DCC model*, který pro podmíněnou varianční matici uvažovaných faktorů již nepředpokládá diagonalitu, ale používá pro ni DCC model.

3. Odhady mnohorozměrných GARCH modelů

V této kapitole se budeme věnovat metodám odhadů modelů, které jsme představili v minulé kapitole.

3.1 Odhady modelů 1. kategorie

3.1.1 Odhad VEC a BEKK modelů

V této části vycházíme z Bollerslev a kol. (1988) a Engle a Kroner (1995). Pro oba modely se používá metoda maximální věrohodnosti, kterou můžeme sepsat shodným způsobem, jelikož modely *VEC* a *BEKK* se liší pouze v konkrétní parametrizaci podmíněné varianční matice \mathbf{H}_t .

Předpokládáme, že $\mathbf{e}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$ pro $t = 1, \dots, T$. Poté podmíněná logaritmická věrohodnostní funkce pro jedno pozorování má tvar

$$\ell_t(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{H}_t| - \frac{1}{2} \mathbf{e}_t^T \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{e}_t \quad (3.1)$$

a pro celkovou logaritmickou věrohodnostní funkci podmíněnou na počátečních hodnotách poté platí

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \ell_t(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.2)$$

kde $\boldsymbol{\theta}$ je vektor parametrů modelu. Jeho odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ je definován standardně pomocí

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \ell(\boldsymbol{\theta}).$$

Oba modely bohužel vyžadují odhadnutí velkého počtu parametrů, což je výpočetně velmi náročné. Navíc matici \mathbf{H}_t musíme v každém čase t invertovat. Odhadování může vyžadovat použití iterativních metod.

3.1.2 Odhad full-factor modelu

Full-factor GARCH model podle Vrontos a kol. (2003) je také odhadován pomocí metody maximální věrohodnosti, stejně jako předchozí modely. V tomto modelu také vycházíme z předpokladu $\mathbf{e}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$, $t = 1, \dots, T$. Opět předpokládáme, že $\boldsymbol{\theta}$ je vektor všech parametrů modelu. Konkrétně pro *full-factor* model lze poté rovnice (3.1) a (3.2) rozepsat s použitím vztahů (2.6) a (2.8):

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{ZV}_t\mathbf{Z}^T| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{ZV}_t\mathbf{Z}^T)^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}).$$

Nyní použijeme vztah $|\mathbf{ZV}_t\mathbf{Z}^T| = |\mathbf{Z}| |\mathbf{V}_t| |\mathbf{Z}^T|$ a fakt, že matice \mathbf{Z} je trojúhelníková matice s jednotkami na diagonále, a tedy $|\mathbf{Z}| = 1$. Dále vyjádříme faktory

pomocí $\mathbf{f}_t = \mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu})$. Poté

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{V}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{f}_t^T \mathbf{V}_t^{-1} \mathbf{f}_t \\ &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \ln(v_{i,t}) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \frac{f_{i,t}^2}{v_{i,t}}.\end{aligned}$$

Počáteční hodnoty pro $t = 0$ pro odhad $v_{i,t}$, které jsou modelovány pomocí GARCH struktury, bývají voleny jako $v_{i,0} = 0$ a \mathbf{f}_0 se spočte pomocí napozorovaných dat. Odhad parametrů $\boldsymbol{\theta}$ je definován jako $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \ell(\boldsymbol{\theta})$.

Při odhadování autoři modelu doporučují použití iterační metody *Fisherova skórového algoritmu*, který v jednotlivých iteracích počítá maximálně věrohodný odhad parametrů pomocí vztahu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)} + \left\{ -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] \right\}^{-1} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}},$$

kde $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}$ je odhad $\boldsymbol{\theta}$ po $k - 1$ iteracích algoritmu, $-\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]$ je Fisherova informační matice v bodě $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}$ a $\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ je skórová funkce v bodě $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k-1)}$. Podrobný rozpis tvaru Fisherovy informační matice i jednotlivých skórových funkcí lze nalézt v článku Vrontos a kol. (2003).

Poznámka. Další možností výpočtu odhadů *full-factor* modelu je použití Bayesovského přístupu, který je popsán v článku Vrontos a kol. (2003).

3.2 Odhady modelů 2. kategorie

3.2.1 Odhad ortogonálního modelu

Odhadování *ortogonálního* modelu je výpočetně jednoduché, což umožňuje použití modelu na časové řady s velmi vysokou dimenzí N . Nejprve jsou pomocí *metody hlavních komponent* identifikovány jednotlivé hlavní komponenty a transformační matice \mathbf{A} podle postupu popsaného v kapitole 2.2.1. Následně použijeme předpoklad, že pro všechna $i = 1, \dots, m$ platí

$$f_{i,t} | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, v_{it}),$$

kde

$$v_{it} = \gamma_i + \sum_{k=1}^p \alpha_{ik} f_{i,t-k}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} v_{i,t-j},$$

pro odvození odhadů parametrů těchto jednorozměrných GARCH modelů s použitím standardní metody maximální věrohodnosti jako v jednorozměrném případě.

Iqbal (2013) navrhl další způsob odhadování *ortogonálního modelu* s využitím M-odhadů, který je robustní proti porušení předpokladu normálního rozdělení. Podle empirických zjištění mají modely odhadnuté touto metodou lepší prediktivní schopnosti například v případech, kdy skutečné rozdělení má těžké chvosty nebo je asymetrické.

3.2.2 Odhad zobecněného ortogonálního modelu

K odhadování *zobecněného ortogonálního modelu* se používá dvoukrokový postup navržený v článku Van der Weide (2002). V prvním kroku využijeme rozkladu transformační matice \mathbf{Z} na součin matic

$$\mathbf{Z} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{U}_0^T,$$

který jsme uvedli již v kapitole 2.2.2. Připomeňme, že nepodmíněná varianční matice $\{\mathbf{y}_t\}$ je rovna $\mathbf{H} = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^T$ a matice $\mathbf{\Lambda}$ je diagonální matice s vlastními čísly této nepodmíněné varianční matice a \mathbf{W} je matice s příslušnými ortonormálními vlastními vektory. K odhadu matic \mathbf{W} a $\mathbf{\Lambda}$ je tedy možné použít nepodmíněnou informaci ve formě výběrové varianční matice $\bar{\mathbf{H}}$. Výhoda tohoto postupu je snížení počtu parametrů nutných pro odhad matice \mathbf{Z} , které by bylo třeba odhadovat pomocí metody maximální věrohodnosti.

Druhým krokem je odhad zbývajících parametrů pomocí metody maximální věrohodnosti. Vektor neznámých parametrů $\boldsymbol{\theta}$ nyní obsahuje parametry nutné k určení matice \mathbf{U}_0 a parametry jednorozměrných GARCH modelů pro podmíněné rozptyly jednotlivých komponent \mathbf{f}_t . V tomto kroku využíváme faktu, že součin matic $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^T$ lze vyjádřit bez matice \mathbf{U}_0 , která se odhaduje až ve druhém kroku. Pro lepší znázornění nezávislosti této matice na vektoru neznámých parametrů $\boldsymbol{\theta}$ budeme níže znázorňovat tuto matici symbolem $\mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_0^T$.

V modelu máme předpoklad $\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$. Logaritmicou věrohodnost pro tento model lze pak rozepsat následovně

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{H}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t^T \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{y}_t \\ &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{Z}_0 \mathbf{V}_t \mathbf{Z}_0^T| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{f}_t^T \mathbf{Z}_0^T (\mathbf{Z}_0 \mathbf{V}_t \mathbf{Z}_0^T)^{-1} \mathbf{Z}_0 \mathbf{f}_t \\ &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln |\mathbf{Z}_0 \mathbf{Z}_0^T| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{V}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{f}_t^T \mathbf{V}_t^{-1} \mathbf{f}_t \\ &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln |\mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^T| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \ln(v_{i,t}) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \frac{f_{i,t}^2}{v_{i,t}}. \end{aligned}$$

Pro počáteční hodnoty matice \mathbf{V}_t volíme jednotkovou matici. I při středně vysokých dimenzích časové řady $\{\mathbf{y}_t\}$ by nemělo docházet k výpočetním problémům s maximalizací této logaritmicke věrohodnosti díky rozdělení postupu odhadování do dvou kroků.

Velkou výhodou metody pro odhadování *ortogonálního modelu* ovšem bylo rozdělení odhadů do dvou kroků, kde ve druhém kroku zbývalo již pouze vypočítat odhady jednorozměrných GARCH procesů pro podmíněné rozptyly komponent. V představené metodě u *zobecněného ortogonálního modelu* ale ve druhém kroku musíme odhadovat také matici \mathbf{U}_0 . Boswijk a van der Weide (2006) tedy navrhli novou metodu pro odhadování *zobecněného ortogonálního modelu*, ve které se matice \mathbf{U}_0 odhaduje samostatně ve druhém kroku a ve třetím kroku již zbývá odhadnout pouze jednorozměrné GARCH modely, díky čemuž získáme například více robustní odhad matice \mathbf{U}_0 . Navíc je tato metoda více praktická z hlediska implementace a také mívá menší problémy s konvergencí ve velmi vysokých dimenzích. Na druhou stranu, odhady již nejsou eficientní.

Tato metoda autorů Boswijk a van der Weide (2006) je založena na metodě nelineárních nejmenších čtverců a využívá autokorelační strukturu $\mathbf{s}_t \mathbf{s}_t^T$, kde

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{W}^T \mathbf{y}_t$$

jsou standardizovaná a ortogonalizovaná pozorování \mathbf{y}_t a navíc díky vztahům (2.14), (2.16) a ortogonalitě matice \mathbf{W} platí také

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{W}^T \mathbf{y}_t = \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{W}^T \mathbf{Z} \mathbf{f}_t = \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{U}_0 \mathbf{f}_t = \mathbf{U}_0 \mathbf{f}_t.$$

Pokud tedy využijeme stejných odhadů matic $\mathbf{\Lambda}$ a \mathbf{W} jako u předchozí metody a ve druhém kroku získáme konzistentní odhad matice \mathbf{U}_0 , můžeme z nich složit konzistentní odhad $\hat{\mathbf{Z}}$ matice \mathbf{Z} . Poté vyjádříme odhad $\hat{\mathbf{f}}_t = \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{y}_t$ a ve třetím kroku můžeme již pouze odhadnout parametry γ_i a α_{ik}, β_{ij} jednorozměrných GARCH modelů pro $\{\hat{\mathbf{f}}_t\}$.

Boswijk a Van der Weide (2011) následně uvedli další tříkrokovou metodu pro odhadování *zobecněného ortogonálního modelu*. V prvních dvou krocích se opět odhaduje lineární transformace, ale tentokrát metoda nepoužívá optimalizaci Newtonova typu, ale pouze výpočet vlastních vektorů a iterované maticové rotace. Ani při velmi vysokých dimenzích tedy nenastávají problémy s konvergencí. Ve třetím kroku opět odhadujeme již pouze parametry jednorozměrných GARCH modelů pro jednotlivé komponenty.

V této metodě používají autoři mírně odlišný postup pro odhad matice \mathbf{Z} . Místo singulárního rozkladu používají polární rozklad

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S} \mathbf{U}, \quad (3.3)$$

kde \mathbf{S} je pozitivně definitní symetrická matice a \mathbf{U} je ortogonální. Poté z (2.15) platí

$$\mathbf{H} = \text{Var}(\mathbf{y}_t) = \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T = \mathbf{S} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{S}^T = \mathbf{S}^2. \quad (3.4)$$

Platí tedy $\mathbf{S} = \mathbf{H}^{-1/2}$. Když poté uvažujeme spektrální rozklad nepodmíněné varianční matice \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^T,$$

kde \mathbf{P} je ortogonální a $\mathbf{\Lambda}$ diagonální matice s vlastními čísly \mathbf{H} na diagonále, z (3.4) plyne

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{P}^T.$$

Opět tedy můžeme část matice \mathbf{Z} , matici \mathbf{S} , identifikovat pouze pomocí nepodmíněné informace z nepodmíněné varianční matice \mathbf{H} . Matici \mathbf{U} opět budeme odhadovat z podmíněné informace. V metodě se dále používají standardizované hodnoty časové řady $\{\mathbf{y}_t\}$ definované pomocí

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{H}^{-1/2} \mathbf{y}_t.$$

Tento vztah opět můžeme rozepsat pomocí (2.14) a (3.3)

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{f}_t = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{U} \mathbf{f}_t = \mathbf{U} \mathbf{f}_t.$$

Časová řada $\{\mathbf{s}_t\}$ je tedy také GO-GARCH proces s ortogonální transformací danou maticí \mathbf{U} . Poté definujeme

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_t &= \mathbf{s}_t \mathbf{s}_t^T - \mathbf{I}_N \quad \text{a} \\ \mathbf{F}_t &= \mathbf{f}_t \mathbf{f}_t^T - \mathbf{I}_N\end{aligned}$$

a matici \mathbf{U} identifikujeme pomocí autokorelačních matic těchto procesů.

3.2.3 Odhad zobecněného ortogonálního faktorového modelu

K odhadování *zobecněného ortogonálního faktorového modelu* podle autorů Lanne a Saikkonen (2007) používáme opět metodu maximální věrohodnosti. Vycházíme z předpokladu

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1} &\sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t), \quad \text{kde} \\ \mathbf{H}_t &= \mathbf{Z}\boldsymbol{\Sigma}_t\mathbf{Z}^T.\end{aligned}$$

Podmíněná hustota pro jedno pozorování \mathbf{y}_t je tedy rovna

$$\begin{aligned}f_{t-1}(\mathbf{y}_t) &= (2\pi)^{-N/2} |\mathbf{H}_t|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{y}_t^T \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{y}_t\right\}, \quad \text{kde} \\ |\mathbf{H}_t| &= |\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T| |\boldsymbol{\Sigma}_t| = |\mathbf{C}|^2 \cdot v_{1,t} \cdot \dots \cdot v_{m,t} \quad \text{ze vztahů (2.24), (2.18) a} \\ \mathbf{y}_t^T \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{y}_t &= \mathbf{y}_t^T (\mathbf{Z}\boldsymbol{\Sigma}_t\mathbf{Z}^T)^{-1} \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t^T \mathbf{B}_1 \mathbf{V}_t^{-1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{y}_t + \mathbf{y}_t^T \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{y}_t \quad \text{z (2.19)} \\ &= \mathbf{y}_t^T \mathbf{C}^{-1T} \mathbf{R}_1 \mathbf{V}_t^{-1} \mathbf{R}_1^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y}_t + \mathbf{y}_t^T \mathbf{C}^{-1T} \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y}_t \\ &= \mathbf{y}_t^T \mathbf{C}^{-1T} \left[\mathbf{R}_1 \mathbf{V}_t^{-1} \mathbf{R}_1^T - \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1^T \right] \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y}_t + \mathbf{y}_t^T \mathbf{C}^{-1T} \mathbf{I}_N \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y}_t \\ &= \mathbf{y}_t^T \mathbf{C}^{-1T} \mathbf{R}_1 \left[\mathbf{V}_t^{-1} - \mathbf{I}_m \right] \mathbf{R}_1^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y}_t + \mathbf{y}_t^T \mathbf{C}^{-1T} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y}_t,\end{aligned}$$

kde jsme využili vztah $\mathbf{B}_i = \mathbf{Z}_i^{-1T} = \mathbf{C}^{-1T} \mathbf{R}_i$, $i = 1, 2$, plynoucí z (2.25) a rovnost $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1^T + \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T = \mathbf{I}_N$.

Věrohodnostní funkce tedy bude záviset pouze na maticích \mathbf{C} , \mathbf{R}_1 a parametrech α_{ik} a β_{ij} pro jednorozměrné vyjádření podmíněných rozptylů $v_{i,t}$ pomocí GARCH modelů. Navíc si všimněme, že matici \mathbf{C} stačí použít v invertované podobě, definujeme tedy $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{C}^{-1}$. Poté lze logaritmickou věrohodnostní funkci podmíněnou na počátečních hodnotách vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) + \sum_{t=1}^T \ln |\boldsymbol{\Phi}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m \ln v_{it} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t^T \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{R}_1 \left[\mathbf{V}_t^{-1} - \mathbf{I}_m \right] \mathbf{R}_1^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_t.\end{aligned} \quad (3.5)$$

Pokud ještě označíme symbolem \mathbf{r}_{1i} i -tý sloupec matice \mathbf{R}_1 a $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\delta}_1^T, \dots, \boldsymbol{\delta}_m^T)^T$, kde $\boldsymbol{\delta}_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ip}, \beta_{i1}, \dots, \beta_{iq})^T$, jako vektor všech parametrů pro jednoroz-

měrné GARCH modely, lze (3.5) rozepsat do tvaru

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{TN}{2}\ln(2\pi) + \sum_{t=1}^T \ln|\boldsymbol{\Phi}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_t \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln v_{it} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (v_{it}^{-1} - 1)(\mathbf{r}_{1i}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_t)^2 \right) \\ &= -\frac{TN}{2}\ln(2\pi) + \sum_{t=1}^T \ln|\boldsymbol{\Phi}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_t + \sum_{i=1}^m \ell_{iT}(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{r}_{1i}, \boldsymbol{\delta}_i).\end{aligned}$$

Tuto logaritmickou věrohodnostní funkci musíme maximalizovat za podmínek

$$\mathbf{r}_{1i}^T \mathbf{r}_{1i} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

protože matice \mathbf{R}_1 je ortogonální. K maximalizování věrohodnostní funkce se používají numerické optimalizační metody. Pro jejich správnou konvergenci je potřeba začínat s vhodnými počátečními hodnotami.

V následující části se pro jednoduchost značení omezíme na případ, kdy jednotlivé komponenty jsou procesy typu GARCH(1,1), tedy pro jejich podmíněné rozptyly platí

$$v_{i,t} = (1 - \alpha_i - \beta_i) + \alpha_i (\mathbf{b}_{1i}^T \mathbf{y}_{t-1})^2 + \beta_i v_{i,t-1}, \quad i = 1, \dots, m,$$

a tedy $\boldsymbol{\delta}_i = (\alpha_i, \beta_i)^T$ pro $i = 1, \dots, m$.

Jak jsme ukázali již v kapitole 2.2.3, matici \mathbf{C} lze konzistentně odhadnout pomocí výběrové nepodmíněné varianční matice $\bar{\mathbf{H}}_t = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^T$. Z té pak získáme konzistentní odhad matice $\boldsymbol{\Phi}$ například jako matici $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$, která splňuje $\bar{\mathbf{H}}_t^{-1} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^T \tilde{\boldsymbol{\Phi}}$. Pro určení počátečních hodnot matice \mathbf{R}_1 a parametrů $\boldsymbol{\delta}_i$ definujeme množiny

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \{(\mathbf{r}_{11}, \boldsymbol{\delta}_1) : \mathbf{r}_{11}^T \mathbf{r}_{11} = 1\} \quad \text{a} \\ \Delta_i &= \{(\mathbf{r}_{1i}, \boldsymbol{\delta}_i) : \mathbf{r}_{1i}^T \mathbf{r}_{1i} = 1, \mathbf{r}_{1i}^T \mathbf{r}_{1j} = 0, 1 \leq j \leq i-1\}, \quad i = 2, \dots, m.\end{aligned}$$

Množina Δ_1 představuje množinu možných parametrů \mathbf{r}_{11} a $\boldsymbol{\delta}_1$ takových, že vektor \mathbf{r}_{11} má jednotkovou normu. Množiny Δ_i jsou poté množiny možných parametrů \mathbf{r}_{1i} a $\boldsymbol{\delta}_i$ takových, aby každý z vektorů \mathbf{r}_{1i} měl také jednotkovou normu a navíc byl ortogonální s předcházejícími vektory \mathbf{r}_{1j} , $j < i$.

Počáteční hodnoty \mathbf{R} a $\boldsymbol{\delta}_i$ jsou poté řešením m samostatných maximalizačních úloh

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathbf{r}}_{11}, \tilde{\boldsymbol{\delta}}_1) &= \arg \max_{(\mathbf{r}_{11}, \boldsymbol{\delta}_1) \in \Delta_1} \ell_{iT}(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}, \mathbf{r}_{11}, \boldsymbol{\delta}_1) \quad \text{a} \\ (\tilde{\mathbf{r}}_{1i}, \tilde{\boldsymbol{\delta}}_i) &= \arg \max_{(\mathbf{r}_{1i}, \boldsymbol{\delta}_i) \in \tilde{\Delta}_i} \ell_{iT}(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}, \mathbf{r}_{1i}, \boldsymbol{\delta}_i) \quad i = 2, \dots, m, \quad \text{kde} \\ \tilde{\Delta}_i &= \{(\mathbf{r}_{1i}, \boldsymbol{\delta}_i) : \mathbf{r}_{1i}^T \mathbf{r}_{1i} = 1, \mathbf{r}_{1i}^T \mathbf{r}_{1j} = 0, 1 \leq j \leq i-1\}, \quad i = 2, \dots, m.\end{aligned}$$

3.3 Odhady modelů 3. kategorie

3.3.1 Odhad CCC modelu

CCC model odhadujeme podle Bollerslev (1990) také metodou maximální věrohodnosti, která vychází z předpokladu podmíněné normality

$$\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$$

a rozkladu podmíněné variační matice $\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t$. Podmíněná logaritmičká věrohodnostní funkce je poté rovna

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{H}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t^T \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{y}_t \\ &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t^T \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{y}_t \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{D}_t|^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{R}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\eta}_t^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\eta}_t \\ &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \ln(h_{ii,t}) - \frac{T}{2} \ln |\mathbf{R}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\eta}_t^T \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\eta}_t, \end{aligned} \quad (3.7)$$

kde $\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{y}_t$ jsou standardizovaná rezidua a podmíněné rozptyly $h_{ii,t}$ jsou modelovány pomocí

$$h_{ii,t} = \gamma_i + \sum_{k=1}^p \alpha_{ik} e_{i,t-k}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} h_{ii,t-j}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Tato logaritmičká věrohodnostní funkce je nelineární v parametrech, k její maximalizaci se tedy používají iterativní metody. Ovšem výhodou tvaru (3.7) je skutečnost, že díky časově invariantní matici \mathbf{R} je nutné její inverzní matici počítat pouze jednou místo pro každý čas t .

3.3.2 Odhad DCC modelu

Model *DCC* vychází opět z předpokladu

$$\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$$

a matice $\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t$ se od situace uvažované v *CCC modelu* liší pouze v matici \mathbf{R}_t , která již závisí na času t . Vyjdeme tedy z (3.6) a rozepíšeme logaritmičkou věrohodnostní funkci pro *DCC model*:

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t^T \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{y}_t \\ &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \ln(h_{ii,t}) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{R}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\eta}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \boldsymbol{\eta}_t \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \ln(h_{ii,t}) + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t^T \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{y}_t \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\eta}_t^T \boldsymbol{\eta}_t - \frac{T}{2} \ln |\mathbf{R}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\eta}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \boldsymbol{\eta}_t, \end{aligned} \quad (3.9)$$

kde opět $\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{D}_t^{-1}\mathbf{y}_t$ jsou standardizovaná rezidua. Jak uvádí Engle (2002), odhadování je možné rozdělit do dvou kroků. Vektor parametrů $\boldsymbol{\theta}$ rozdělíme na $\boldsymbol{\lambda}$ a $\boldsymbol{\varphi}$ tak, aby prvky matice \mathbf{D}_t , kterými jsou podmíněné rozptyly $h_{ii,t}$, $i = 1, \dots, N$, závisely pouze na parametrech ve vektoru $\boldsymbol{\lambda}$ a ve vektoru $\boldsymbol{\varphi}$ byly parametry, které se vyskytují pouze v matici \mathbf{R}_t . Matice \mathbf{R}_t poté závisí na parametrech v $\boldsymbol{\lambda}$ i $\boldsymbol{\varphi}$. Věrohodnostní funkci (3.9) lze poté rozdělit na dvě části

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varphi}) &= \ell_V(\boldsymbol{\lambda}) + \ell_C(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varphi}), \quad \text{kde} \\ \ell_V(\boldsymbol{\lambda}) &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \ln(h_{ii,t}) + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t^T \mathbf{D}_t^{-2} \mathbf{y}_t \\ &= -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \ln(h_{ii,t}) + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{y_{i,t}^2}{h_{ii,t}} \quad \text{a} \\ \ell_C(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varphi}) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\eta}_t^T \boldsymbol{\eta}_t - \frac{T}{2} \ln |\mathbf{R}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\eta}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \boldsymbol{\eta}_t.\end{aligned}$$

V prvním kroku odhadování maximalizujeme $\ell_V(\boldsymbol{\lambda})$, kde odhadujeme pouze jednotlivé podmíněné rozptyly $h_{ii,t}$, $i = 1, \dots, N$, tato část logaritmičké věrohodnostní funkce se tedy zabývá volatilitou. Získáme odhad parametrů $\boldsymbol{\lambda}$

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg \max \ell_V(\boldsymbol{\lambda}).$$

Tento odhad poté použijeme ve druhém kroku, kde odhad parametrů $\boldsymbol{\varphi}$ počítáme pomocí

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \arg \max \ell_C(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\varphi}),$$

Zde již odhadujeme pouze parametry týkající se korelační struktury.

3.3.3 Odhad VC-GARCH modelu

VC-GARCH model podle Tse a Tsui (2002) má stejné předpoklady jako *DCC model*, liší se pouze v parametrizaci podmíněné korelační matice \mathbf{R}_t . Podmíněná věrohodnostní funkce závislá na zvolených počátečních hodnotách je tedy stejná jako v případě (3.8):

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \ln(h_{ii,t}) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{R}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t^T \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{y}_t$$

a lze použít také odhadování pomocí dvukrokové metody popsané v části 3.3.2.

3.4 Další přístupy k odhadování mnohorozměrných GARCH modelů

Jak jsme uvedli v předcházejících částech, většina modelů je odhadována pomocí metody maximální věrohodnosti s předpokladem normálního rozdělení. V případě, že tento předpoklad není splněný, získáme odhady metodou kvazi-maximální věrohodnosti, které jsou také konzistentní a asymptoticky normální. Někteří autoři přicházejí s dalšími metodami odhadů mnohorozměrných GARCH

modelů. Například Hafner a Rombouts (2007) představují semiparametrický odhad. V tomto případě předpokládají pouze základní předpoklad jako v (2.1), kde podmíněná varianční matice \mathbf{H}_t závisí na konečném počtu parametrů, ale neomezuje se na konkrétní parametrizaci matice. Pro $\boldsymbol{\xi}_t$ nepředpokládají žádné specifické rozdělení. K jeho odhadu se poté používá jádrový odhad hustoty. Výhodou tohoto přístupu jsou více eficientní odhady než při použití metody kvazi-maximální věrohodnosti v případě, kdy předpoklad normálního rozdělení není splněn. Navíc tuto metodu lze použít i při vysokých dimenzích zkoumané časové řady.

4. Diagnostické testy

V této kapitole představíme některé z testů, které se používají pro kontrolu modelů a ověřování platnosti předpokladů.

4.1 Testy založené na reziduích

Připomeňme, že v jednotlivých testech uvažujeme pro $t = 1, \dots, T$ situaci

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{e}_t, \\ \mathbf{e}_t &= \mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\xi}_t,\end{aligned}$$

kde všechny symboly jsou definované jako doposud. Získané odhady budeme značit symboly $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t$ pro odhad $\boldsymbol{\mu}_t$, $\hat{\mathbf{e}}_t$ pro \mathbf{e}_t a $\hat{\mathbf{H}}_t$ pro \mathbf{H}_t .

4.1.1 Ling-Li test

Ling a Li (1997) uvedli test založený na autokorelaci reziduí, který testuje platnost modelu z hlediska heteroskedasticity. Za nulové hypotézy standardizovaná rezidua modelu nemají žádnou dodatečnou ARCH strukturu. Výhodou tohoto testu je robustnost vůči podmíněnému rozdělení inovační složky \mathbf{e}_t , které nemusí splňovat normalitu. Autoři definují výběrový l -zpožděný součet čtvercových autokorelací vypočtených reziduí jako

$$\hat{R}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^T \left(\hat{\mathbf{e}}_t^T \hat{\mathbf{H}}_t^{-1} \hat{\mathbf{e}}_t - N \right) \left(\hat{\mathbf{e}}_{t-l}^T \hat{\mathbf{H}}_{t-l}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_{t-l} - N \right)}{\sum_{t=1}^T \left(\hat{\mathbf{e}}_t^T \hat{\mathbf{H}}_t^{-1} \hat{\mathbf{e}}_t - N \right)^2} \quad l = 1, \dots, M,$$

kde M bývá voleno jako $M = p + q + 1$ při použití GARCH modelů řádu p a q . Jednotlivé statistiky poté složíme do vektoru $\hat{\mathbf{R}} = (\hat{R}_1, \dots, \hat{R}_M)^T$. Poté Ling a Li (1997) dokázali, že za podmínek regularity a platnosti modelu platí

$$\sqrt{T} \hat{\mathbf{R}} \xrightarrow{D} N_M(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}),$$

kde $\boldsymbol{\Omega}$ je matice typu $M \times M$, pro kterou je v článku Ling a Li (1997) uveden vzorec. Poté platí

$$Q(M) = T \hat{\mathbf{R}}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \hat{\mathbf{R}} \xrightarrow{D} \chi_M^2,$$

pokud model platí. Po získání konzistentního odhadu $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ pro matici $\boldsymbol{\Omega}$ lze tedy statistiku $\hat{Q}(M) = T \hat{\mathbf{R}}^T \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \hat{\mathbf{R}}$ použít jako nástroj pro kontrolu modelu.

Bauwens a kol. (2006) uvedli druhou variantu Ling-Li testu, jehož testová statistika $LL(M) = T \sum_{l=1}^M \hat{R}_l^2$ má za platnosti nulové hypotézy asymptoticky χ_M^2 rozdělení. Nulovou hypotézu na hladině $\alpha \in (0,1)$ tedy zamítáme, pokud

$$LL(M) > \chi_M^2(1 - \alpha),$$

kde $\chi_M^2(1 - \alpha)$ je $(1 - \alpha)$ -kvantil χ_M^2 rozdělení.

4.1.2 Mnohorozměrný Ljung-Box test

Mnohorozměrná verze Ljung-Box testu byla představena v článku Hosking (1980). V této práci použijeme formulaci podle Tsay (2010). Ljung-Box test testuje, zda jsou jednotlivé prvky N -rozměrné časové řady vzájemně korelované nebo autokorelované. Test aplikujeme na vypočtená standardizovaná rezidua $\hat{\mathbf{z}}_t = \hat{\mathbf{D}}_t^{-1} \hat{\mathbf{e}}_t$, kde $\hat{\mathbf{D}}_t = \text{diag} \left(\sqrt{\hat{h}_{11,t}}, \dots, \sqrt{\hat{h}_{NN,t}} \right)$.

Předpokládejme, že máme N -rozměrnou, slabě stacionární časovou řadu $\{\mathbf{z}_t\}$ se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}_z$. Poté pro ni definujeme její vzájemnou kovarianční matici se zpožděním $l \geq 0$ pomocí

$$\boldsymbol{\Gamma}_l = [\Gamma_{ij}(l)] = \mathbf{E} \left[(\mathbf{z}_t - \boldsymbol{\mu}_z) (\mathbf{z}_{t-l} - \boldsymbol{\mu}_z)^T \right],$$

kde například prvek $\Gamma_{ij}(l)$ tvoří kovariance mezi členy $z_{i,t}$ a $z_{j,t-l}$. Speciálně pro $l = 0$ je matice $\boldsymbol{\Gamma}_0$ běžná kovarianční matice procesu $\{\mathbf{z}_t\}$. Poté označíme

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left(\sqrt{\Gamma_{11}(0)}, \dots, \sqrt{\Gamma_{NN}(0)} \right)$$

matici se směrodatnými odchylkami $\{\mathbf{z}_t\}$ na diagonále a můžeme definovat vzájemnou korelační matici se zpožděním l jako

$$\boldsymbol{\varrho}_l = [\varrho_{ij}(l)] = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_l \mathbf{D}^{-1}, \quad \text{kde}$$

$$\varrho_{ij}(l) = \frac{\text{cov}(z_{i,t}, z_{j,t-l})}{\sqrt{\text{var}(z_{i,t})} \sqrt{\text{var}(z_{j,t-l})}}.$$

Opět speciálně pro $l = 0$ je matice $\boldsymbol{\varrho}_0$ rovna běžné korelační matici procesu $\{\mathbf{z}_t\}$.

Pro pozorované či odhadnuté hodnoty procesu $\{\hat{\mathbf{z}}_t\}$, $t = 1, \dots, T$ poté definujeme výběrovou vzájemnou kovarianční matici se zpožděním l

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l = \frac{1}{T} \sum_{t=l+1}^T (\hat{\mathbf{z}}_t - \bar{\mathbf{z}}) (\hat{\mathbf{z}}_{t-l} - \bar{\mathbf{z}})^T,$$

kde $\bar{\mathbf{z}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\mathbf{z}}_t$ je vektor výběrových průměrů, a dále definujeme výběrovou vzájemnou korelační matici se zpožděním l

$$\hat{\boldsymbol{\varrho}}_l = \hat{\mathbf{D}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l \hat{\mathbf{D}}^{-1},$$

kde $\hat{\mathbf{D}} = \text{diag} \left(\sqrt{\hat{\Gamma}_{11}(0)}, \dots, \sqrt{\hat{\Gamma}_{NN}(0)} \right)$ je matice s výběrovými směrodatnými odchylkami na diagonále.

Ljung-Box test poté testuje

$$H_0 : \boldsymbol{\varrho}_1 = \dots = \boldsymbol{\varrho}_M = \mathbf{0} \quad \text{proti}$$

$$H_1 : \boldsymbol{\varrho}_i \neq \mathbf{0} \quad \text{pro nějaké } i \in \{1, \dots, M\}.$$

Testová statistika je rovna

$$HM(M) = T^2 \sum_{l=1}^M \frac{1}{T-l} \text{tr} \left(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l^T \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_l \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{-1} \right)$$

a za platnosti H_0 a podmínek regularity

$$HM(M) \xrightarrow{D} \chi_{N^2M}^2.$$

Nulovou hypotézu H_0 na hladině $\alpha \in (0,1)$ tedy zamítáme, pokud

$$HM(M) > \chi_{N^2M}^2(1 - \alpha),$$

kde $\chi_{N^2M}^2(1 - \alpha)$ je $(1 - \alpha)$ -kvantil $\chi_{N^2M}^2$ rozdělení.

Dalším možným testem je Box-Pierce test, jehož mnohorozměrnou verzi uvádí např. Tse a Tsui (1999).

4.2 Testy předpokladu konstantních korelací

Pro ověřování předpokladu konstantních korelací, který je základem *CCC* modelu, navrhl Tse (2000) test založený Raově skórovém testu. V testu předpokládáme rozšířený model, kde pro jednotlivé podmíněné korelace platí

$$\varrho_{ij,t} = \varrho_{ij} + \delta_{ij}y_{i,t-1}y_{j,t-1} \quad 1 \leq i < j \leq N$$

a tyto podmíněné korelace poté ovlivňují podmíněné kovariance následujícím způsobem

$$h_{ij,t} = \varrho_{ij,t}\sqrt{h_{ii,t}}\sqrt{h_{jj,t}} \quad 1 \leq i < j \leq N.$$

Tento test testuje nulovou hypotézu

$$\begin{aligned} H_0 : \delta_{ij} &= 0 && \text{pro všechna } 1 \leq i < j \leq N && \text{proti} \\ H_1 : \delta_{ij} &\neq 0 && \text{pro nějaké } 1 \leq i < j \leq N. \end{aligned}$$

Pro definici testové statistiky je třeba spočítat logaritmickou věrohodnostní funkci rozšířeného modelu:

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}^*) &= -\frac{TN}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \ln|\mathbf{D}_t\mathbf{R}_t\mathbf{D}_t| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \mathbf{y}_t^T \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{y}_t \\ &= -\frac{TN}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \ln(h_{ii,t}) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \ln|\mathbf{R}_t| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \boldsymbol{\eta}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \boldsymbol{\eta}_t, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{D}_t^{-1}\mathbf{y}_t$ jsou standardizovaná rezidua a $\boldsymbol{\theta}^*$ je vektor neznámých parametrů původního modelu s dodatečnými parametry $\delta_{1,2}, \dots, \delta_{N-1,N}$. Dále označíme

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_T(\boldsymbol{\theta}^*) &= \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}^*), \\ \mathbf{J}_T(\boldsymbol{\theta}^*) &= \frac{-1}{T} \frac{\partial \mathbf{U}_n(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial \boldsymbol{\theta}^{*T}}. \end{aligned}$$

Poté definujeme testovou statistiku

$$LMC = \frac{1}{T} \mathbf{U}_T^T(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*) \mathbf{J}_T^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*) \mathbf{U}_T(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*),$$

kde $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*$ je odhad $\boldsymbol{\theta}^*$ za platnosti H_0 . Poté za platnosti H_0 a běžných podmínek regularity

$$LMC \xrightarrow{D} \chi_{N(N-1)/2}^2.$$

Nulovou hypotézu H_0 na hladině $\alpha \in (0,1)$ tedy zamítáme, pokud

$$LMC > \chi_{N(N-1)/2}^2(1 - \alpha),$$

kde $\chi_{N(N-1)/2}^2(1 - \alpha)$ je $(1 - \alpha)$ -kvantil $\chi_{N(N-1)/2}^2$ rozdělení. V tom případě je předpoklad konstantních podmíněných korelací nevyhovující a měli bychom přejít k modelu, který umožňuje časově proměnné podmíněné korelace, například k modelu *DCC* či *VC-GARCH*.

Engle a Sheppard (2001) navrhli další test předpokladu konstantních korelací, který využívá vektorové autoregrese. Tento test testuje

$$\begin{aligned} H_0 : \mathbf{R}_t &= \bar{\mathbf{R}} \quad \text{pro všechna } t = 1, \dots, T \quad \text{proti} \\ H_1 : \text{vec}(\mathbf{R}_t) &= \text{vec}(\bar{\mathbf{R}}) + \beta_1 \text{vec}(\mathbf{R}_{t-1}) + \dots + \beta_p \text{vec}(\mathbf{R}_{t-p}) \quad \text{pro nějaké } t. \end{aligned}$$

Nejprve je zapotřebí odhadnout jednorozměrné GARCH modely pro zkoumané časové řady a vypočítat standardizovaná rezidua $\mathbf{D}_t^{-1}\mathbf{r}_t$. Poté se pro tato standardizovaná rezidua odhadne korelační matice $\bar{\mathbf{R}}$ a matice $\bar{\mathbf{R}}^{1/2}$ tak, aby $\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}^{1/2}\bar{\mathbf{R}}^{1/2}$. Touto maticí $\bar{\mathbf{R}}^{1/2}$ znovu společně standardizujeme standardizovaná rezidua jednorozměrných GARCH modelů, která poté za platnosti nulové hypotézy jsou nezávislé, stejně rozdělené, s jednotkovou varianční maticí. Tato rezidua jsou rovna $\bar{\mathbf{R}}^{-1/2}\mathbf{D}_t^{-1}\mathbf{r}_t$. Definujeme

$$\mathbf{Y}_t = \text{vec} \left[\left(\bar{\mathbf{R}}^{-1/2}\mathbf{D}_t^{-1}\mathbf{r}_t \right) \left(\bar{\mathbf{R}}^{-1/2}\mathbf{D}_t^{-1}\mathbf{r}_t \right)^T - \mathbf{I}_N \right]$$

a na těchto vektorech provedeme vektorovou autoregresi

$$\mathbf{Y}_t = \alpha + \beta_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \dots + \beta_s \mathbf{Y}_{t-s} + \boldsymbol{\eta}_t.$$

Za platnosti H_0 by všechny tyto parametry měly být nulové. Pokud označíme \mathbf{X} matici všech regresorů včetně konstanty a $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ odhad regresních parametrů, poté testová statistika $\hat{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{X}^T\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\delta}}^T/\sigma^2$ má za platnosti H_0 asymptoticky rozdělení χ_{s+1}^2 .

5. Aplikace na reálné časové řady

V této kapitole aplikujeme představené modely na reálné hodnoty časových řad. Nejprve odhadneme jednorozměrné GARCH modely a následně je porovnáme s modely typu *BEKK*, *zobecněným ortogonálním modelem*, *CCC* a *DCC*.

Pro aplikaci jsme zvolili tři časové řady - akciové indexy S&P 500 a Russell 2000 a akcie ropy. Pro časové řady jsme uvažovali denní uzavírací ceny z časového období od počátku roku 2012 do konce roku 2019, tedy pozorování z 8 let. Celkový počet pozorování je roven 1992, jelikož ne všechny dny jsou obchodními. Snahou bylo zahrnout i pozorování z roku 2020, ale z důvodu koronavirové krize nastávaly v jednotlivých časových řadách velmi velké propady a některé modely nebyly schopny na tyto extrémní změny reagovat a nebylo možné je odhadnout, například z důvodu singulární varianční matice.

Pro analýzu dat a odhady jednotlivých modelů jsme používali statistický software R (R Core Team, 2020) a dodatečné balíčky *rugarch* (Ghalanos, 2020) pro jednorozměrné modely, *mgarchBEKK* (Schmidbauer a kol., 2016) pro model typu *BEKK*, *gogarch* (Pfaff, 2012) pro *zobecněný ortogonální model*, *ccgarch* (Nakatani, 2014) pro model typu *CCC* a *rmgarch* (Ghalanos, 2019) pro model typu *DCC*.

5.1 Výnosové míry - teoretické shrnutí

Pro aplikaci modelů na dostupná data jsme museli uzavírací ceny akciových indexů S&P 500 a Russell 2000 a akcií ropy převést na výnosové míry. V této části představíme shrnutí těchto výpočtů. Vycházíme z Tsay (2010).

Označme symbolem P_t cenu aktiva v čase t . Poté *jednoduchá výnosová míra* v čase t je dána vztahem

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$

Touto výnosovou mírou měříme zisk za jedno časové období. Můžeme definovat také *k-krokovou výnosovou míru*

$$R_t[k] = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}},$$

která měří zisk za k přecházejících období (kde $k \in \mathbb{N}$). Někdy se také uvažuje *logaritmická výnosová míra*, která je daná vztahem

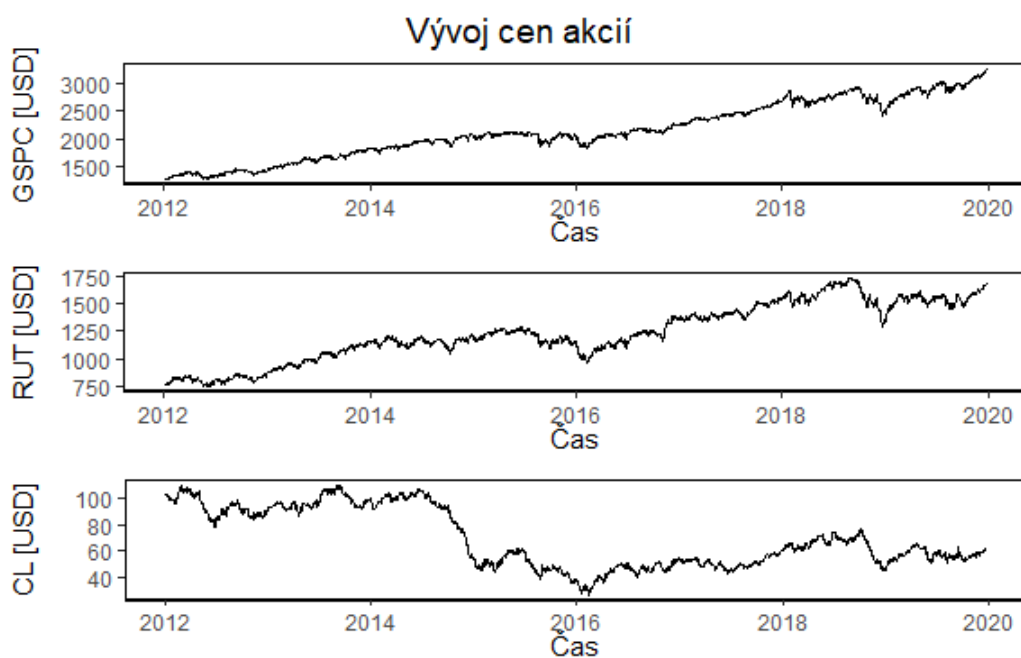
$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1},$$

kde $p_t = \ln P_t$ je logaritmická cena aktiva v čase t .

V této práci budeme pro data používat jednoduché výnosové míry.

5.2 Popis dat z uzavíracích cen akcií

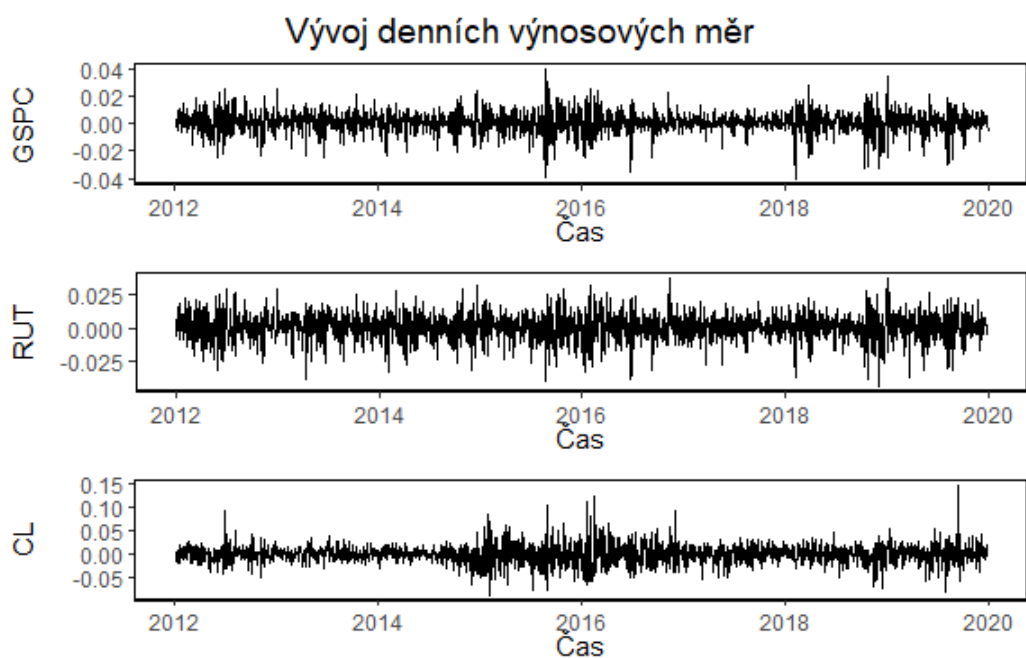
Jak jsme již uvedli, pro aplikaci modelů jsme vybrali tři časové řady, které uvádíme pod zkratkami, které jsou pro ně používány na akciových trzích:



Obrázek 5.1: Vývoj denních uzavíracích cen jednotlivých akcií v letech 2012 – 2019.

- *GSPC* – akciový index S&P 500, který obsahuje akcie 500 největších společností obchodovaných na burzách v USA,
- *RUT* – akciový index Russell 2000, který naopak obsahuje akcie 2000 malých amerických společností,
- *CL* – akcie ropy.

Veškerá uvažovaná data jsou dostupná z Yahoo Finance (2020). Na vývoj hodnot těchto akcií v čase se můžeme podívat na obrázku 5.1. Můžeme si všimnout, že akciové indexy GSPC a RUT nabývaly v daném období nejnižších hodnot již na počátku roku 2012, kdy se trh ještě zotavoval z velké krize z roku 2008. Od té doby byly ceny akciových indexů ovšem na vzestupu. Další snížení cen nastalo na počátku roku 2016, kdy nastalo zpomalení čínské ekonomiky, což ovlivnilo i významné světové burzy. Naopak akcie ropy měly největší cenu na počátku uvažovaného období a jejich cena prudce klesla v roce 2015 z důvodu přebytku ropy na trhu. Na počátku roku 2016 jejich cena opět klesla jako u uvažovaných akciových indexů. Další společný pokles nastal na konci roku 2018. Můžeme si všimnout, že akciové indexy GSPC a RUT se vyvíjely velmi podobně v celém uvažovaném období. Akcie ropy měly v první polovině časového úseku spíše opačný vývoj, ale po roce 2016 se vyvíjely také podobně jako akciové indexy. Z toho vyplývá, že použití mnohorozměrných modelů oproti samostatnému odhadování jednotlivých časových řad by mohlo vést k lepším výsledkům, jelikož dané časové řady mohou být vzájemně korelované.



Obrázek 5.2: Vývoj denních výnosových měr jednotlivých akcií v letech 2012 – 2019.

	průměr	medián	směrod. odchylka	minimum	maximum
GSPC	0,000497	0,000574	0,008017	-0,040979	0,039033
RUT	0,000452	0,000874	0,010261	-0,044036	0,037543
CL	-0,000044	0,000582	0,020686	-0,086710	0,146764

Tabulka 5.1: Základní charakteristiky výnosových měr uvažovaných akcií.

5.3 Analýza výnosových měr

Pro použití dat v rámci GARCH modelů jsme převedli hodnoty denních uzavíracích cen na jednoduché výnosové míry. Na jejich průběh se můžeme podívat na obrázku 5.2. Všimněme si, že hodnoty jsou rozprostřeny kolem 0, což odpovídá tomu, že střední hodnota výnosových měr nabývá hodnot blízkých 0 a často je statisticky nevýznamná. Díky tomu budeme při odhadování jednotlivých modelů předpokládat nulovou střední hodnotu, jinak by v případě mnohorozměrných modelů bylo třeba použít dalších metod pro odhadování mnohorozměrné střední hodnoty. V této práci ovšem klademe důraz na modelování volatility časových řad. Dále si můžeme všimnout shlukování volatility, což je častý jev u finančních časových řad, a také větší volatility v případě poklesu cen akcií, známé jako pákový efekt.

Shrnutí základních charakteristik uvažovaných výnosových měr nalezneme v tabulce 5.1. Průměr i medián výnosových měr jsou velmi blízké 0, což je v souladu s tvrzením, že střední hodnota bývá často statisticky nevýznamná, a podle směrodatné odchylky usuzujeme, že nejvíce se mění výnosy akcií ropy (CL), čehož si lze všimnout i na obrázku 5.2, zatímco nejméně volatilní jsou výnosy akciového indexu S&P 500 (GSPC).

V tabulce 5.2 se můžeme podívat na výběrovou korelační matici tří uvažova-

	GSPC	RUT	CL
GSPC	1,000000	0,871241	0,308571
RUT	0,871241	1,000000	0,293571
CL	0,308571	0,293571	1,000000

Tabulka 5.2: Výběrová korelační matice výnosových měř uvažovaných akcií.

	γ	α_1	β_1
GSPC	$4,761904 \cdot 10^{-6}$	$1,673900 \cdot 10^{-1}$	$7,617167 \cdot 10^{-1}$
RUT	$7,515494 \cdot 10^{-6}$	$9,252999 \cdot 10^{-2}$	$8,375647 \cdot 10^{-1}$
CL	$3,158812 \cdot 10^{-6}$	$6,995937 \cdot 10^{-2}$	$9,250053 \cdot 10^{-1}$

Tabulka 5.3: Odhadnuté koeficienty jednorozměrných GARCH modelů pro uvažované časové řady v období 2012–2019.

ných výnosových měř. Akciové indexy S&P 500 (GSPC) a Russell 2000 (RUT) mají vysoký výběrový korelační koeficient zhruba 0,87. Naproti tomu výnosová míra akcií ropy s nimi vykazuje nižší korelaci s hodnotami okolo 0,30. Hodnoty vzájemných podmíněných korelací poté budeme zkoumat ještě v rámci mnohorozměrných modelů, s jejichž pomocí je lze také odhadnout.

5.4 Odhady jednorozměrných modelů

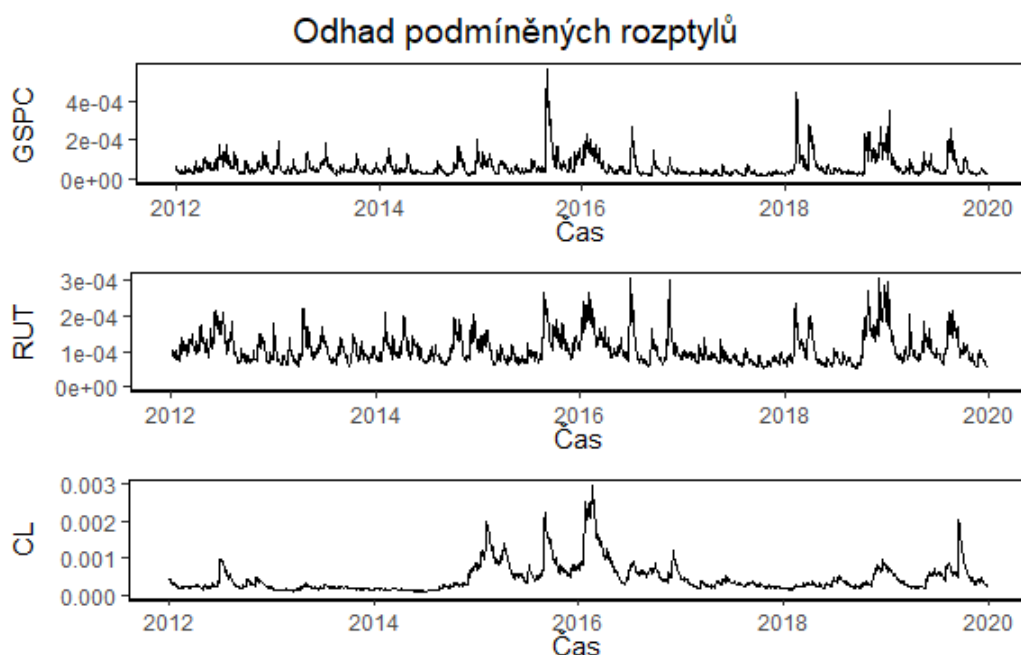
Nejprve jsme všechny tři uvažované časové řady výnosových měř odhadli pomocí jednorozměrných GARCH modelů představených v části 1.2 s předpokladem nulové střední hodnoty. Odhadovali jsme modely typu GARCH(1,1), které zachytí dostatečnou část podmíněné volatility. K odhadnutí modelů jsme použili funkci *ugarchfit* z balíčku *rugarch* (Ghalanos, 2020). Na odhadnuté koeficienty jednotlivých modelů se můžeme podívat v tabulce 5.3. Všechny tyto modely byly velmi rychle odhadnuté, jejich odhad trval méně než vteřinu.

Na obrázku 5.3 si můžeme prohlédnout odhadnuté podmíněné rozptyly jednotlivých časových řad. Všimáme si, že vývoj těchto odhadů u prvních dvou řad GSPC a RUT je velmi podobný. Pokud porovnáme tyto odhady s volatilitou časových řad na obrázku 5.2, můžeme říci, že odhady dobře popisují skutečnost, jelikož odhadnuté podmíněné rozptyly jsou velké v obdobích, kdy časové řady byly hodně volatilní. Stejně tak odhady nepodmíněných směrodatných odchylek, které najdeme v tabulce 5.4, velmi dobře odpovídají výběrovým odchylkám v tabulce 5.1.

Na odhadnuté modely jsme použili několik diagnostických testů, jejichž výsledky můžeme vidět v tabulce 5.5. Nejprve jsme použili Ljung-Box test pro tes-

	Odhad σ
GSPC	0,008196
RUT	0,010369
CL	0,025047

Tabulka 5.4: Odhady nepodmíněných směrodatných odchylek σ na základě jednorozměrných GARCH modelů pro časové řady v časovém období 2015–2019.



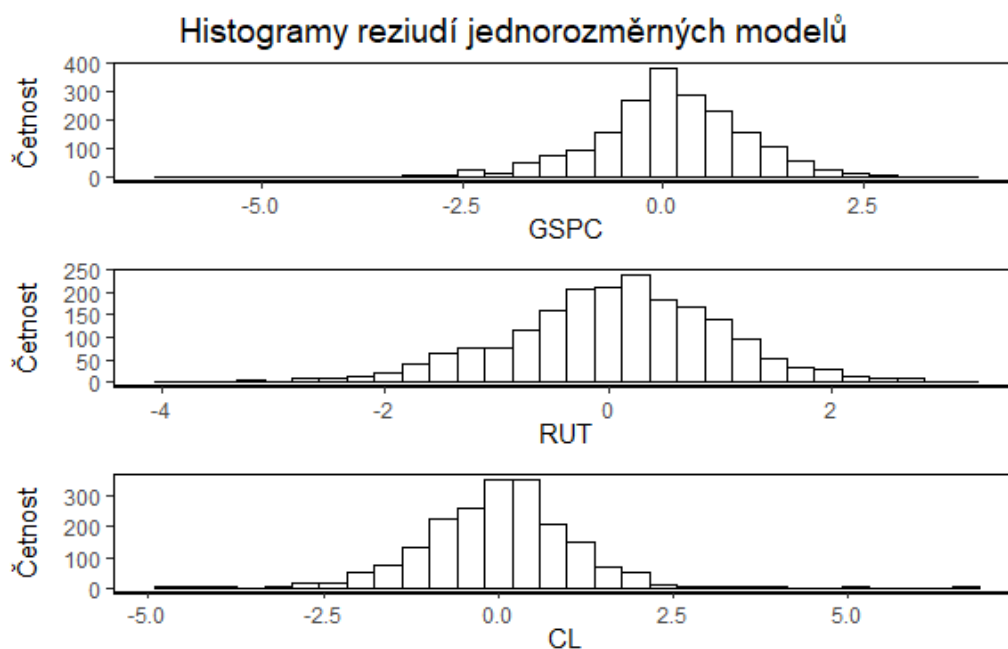
Obrázek 5.3: Odhadnuté podmíněné rozptyly v jednorozměrných GARCH modelech pro časové řady denních výnosů v období 2012–2019.

tování, zda jsou standardizovaná rezidua autokorelovaná. Nulovou hypotézu nekorelovanosti jsme na hladině $\alpha = 0,05$ nezamítli ve všech případech použitých zpoždění, v případě časových řad GSPC a RUT s pomocí vysokých p-hodnot, v případě časové řady CL již pouze s nízkými p-hodnotami pouze lehce vyššími než je daná hranice. Můžeme tedy říci, že modely i s předpokladem nulové střední hodnoty nevykazují problémy s autokorelovaností reziduí.

Pro testování odhadnuté podmíněné volatility jsme použili ARCH-LM test, který testuje, zda standardizovaná rezidua nemají dodatečnou, modelem nevyvětlenou ARCH strukturu. Nulovou hypotézu žádné ARCH struktury pro standardizovaná rezidua opět podle výsledných p-hodnot na hladině $\alpha = 0,05$ nezamítáme. Pomocí jednorozměrných GARCH modelů jsme tedy dobře vysvětlili

	Vážený Ljung-Box test			Vážený ARCH-LM test		
	zpoždění	test. stat.	p-hodnota	zpoždění	test. stat.	p-hodnota
GSPC	1	0,93	0,3351	3	0,02	0,8987
	2	1,02	0,4932	5	1,03	0,7228
	5	2,53	0,4993	7	2,33	0,6468
RUT	1	1,32	0,2506	3	0,41	0,5233
	2	1,32	0,4046	5	1,40	0,6197
	5	2,46	0,5141	7	2,18	0,6796
CL	1	2,91	0,0880	3	0,34	0,5608
	2	4,47	0,0565	5	1,40	0,6190
	5	5,99	0,0902	7	1,69	0,7816

Tabulka 5.5: Výsledky diagnostických testů pro jednorozměrné GARCH modely.



Obrázek 5.4: Histogramy vypočtených reziduí jednorozměrných modelů pro časové řady denních výnosů v období 2012–2019.

podmíněnou volatilitu daných časových řad.

Pro testování předpokladu normality reziduí jsme použili Jarque-Bera test, s jehož pomocí ovšem nulovou hypotézu normality reziduí zamítáme pro všechny časové řady na hladině $\alpha = 0,05$, jelikož výsledné p-hodnoty byly fakticky rovny 0. Ovšem toto porušení není natolik závažné, jelikož odhady jsou konzistentní i bez splnění předpokladu normality. Na obrázku 5.4 si můžeme prohlédnout histogramy vypočtených reziduí těchto modelů. Vidíme, že jejich rozdělení jsou mírně zešíkmená a vyskytují se zde odlehlé hodnoty.

5.5 Odhady mnohorozměrných modelů

V této části jsme uvažované časové řady odhadli pomocí vybraných mnohorozměrných GARCH modelů, konkrétně pomocí modelů *BEKK*, *zobecněného ortogonálního modelu*, *CCC* a *DCC* modelu. Pro zjednodušení jsme ve všech modelech opět předpokládali nulovou střední hodnotu. Odhadovali jsme modely s řády $p = 1$ a $q = 1$, jelikož vyšší řády nejsou například pro *CCC* model implementovány. Pro lepší porovnatelnost mnohorozměrných modelů tedy odhadujeme všechny modely se stejnými řády.

5.5.1 BEKK model

Jako první jsme odhadli model $BEKK(1,1)$ s obecností $K = 1$ pomocí funkce *BEKK* z balíčku *mgarchBEKK* (Schmidbauer a kol., 2016). Model jsme zkoušeli odhadnout s více možnostmi počátečních hodnot parametrů a jako výsledný model jsme zvolili model s nejnižší hodnotou Akaikeho informačního kritéria. Odhadnuté parametry výsledného modelu najdeme v tabulce 5.6. Odhadnuté

C_0^*		
0,007267825	0,008580523	0,004037740
0,000000000	0,004929639	0,001153951
0,000000000	0,000000000	0,002776869
A_{11}^*		
0,67387317	0,44884937	0,5259524
-0,22937024	-0,06551464	-0,4999294
0,02662947	0,05405530	0,4352710
B_{11}^*		
-0,001052368	0,012256661	0,031634721
-0,004068888	0,008449946	-0,009121757
0,031608672	0,029620423	0,869712086

Tabulka 5.6: Odhadnuté parametry BEKK modelu pro časové řady v období 2012–2019.

zpoždění	Ljung-Box test		Box-Pierce test	
	test. stat.	p-hodnota	test. stat.	p-hodnota
1	10,57	0,3061	10,56	0,3073
2	19,57	0,3574	19,54	0,3594
3	29,32	0,3458	29,26	0,3485
4	40,18	0,2901	40,09	0,2935
5	56,07	0,1246	55,93	0,1274
10	92,43	0,4095	92,10	0,4187
15	139,81	0,3707	139,13	0,3863
20	197,50	0,1765	196,23	0,1933
25	239,58	0,2406	237,79	0,2666
30	289,95	0,1931	287,40	0,2231

Tabulka 5.7: Výsledky diagnostických testů pro BEKK model.

podmíněné rozptyly pro jednotlivé řady budeme porovnávat až s ostatními mnohorozměrnými modely v další části.

Pro testování autokorelace reziduí jsme použili mnohorozměrný Ljung-Box test, jehož výsledky lze najít v tabulce 5.7. Na hladině $\alpha = 0,05$ přesvědčivě nezamítáme nekorelovanost reziduí pro všechna testovaná zpoždění. V tabulce 5.7 můžeme najít také výsledky Box-Pierce testu, se kterým nulovou hypotézu nekorelovanosti reziduí na hladině $\alpha = 0,05$ také nezamítáme. Dále jsme testovali platnost modelu z hlediska odhadnuté kovarianční struktury pomocí Ling-Li testu, který jsme sami naprogramovali. Bohužel nulovou hypotézu žádné dodatečné ARCH struktury na hladině $\alpha = 0,05$ zamítáme s téměř nulovou p-hodnotou. Tento model tedy nebyl schopen plně vysvětlit kovarianční strukturu časových řad. Pro lepší výsledky bychom mohli přejít k modelu s vyššími řády.

5.5.2 Zobecněný ortogonální model

V další části jsme odhadli *zobecněný ortogonální model* GO-GARCH(1,1) pomocí funkce *gogarch* z balíčku *gogarch* (Pfaff, 2012). K odhadu *zobecněného ortogonálního modelu* je možné použít několik metod - metoda maximální věrohod-

Metoda	Log. věrohodnost	Čas odhadu
ICA	-263787929	0,41 sec
ML	-118908235	25,05 sec
MM	-113549716	0,35 sec
NLS	-123732925	7,30 sec

Tabulka 5.8: Hodnota logaritmičké věrohodnostní funkce a doba odhadu v závislosti na použité metodě odhadu zobecněného ortogonálního modelu pro časové řady v letech 2012–2019.

nosti (ML), metody s využitím nelineárních nejmenších čtverců (NLS), metody momentů (MM) a metody FastICA (ICA) (analýza nezávislých komponent), které se liší způsobem výpočtu komponent a transformační matice. Provedli jsme odhad modelu s použitím všech dostupných metod. Poté jsme pro každý model spočetli hodnotu logaritmičké věrohodnostní funkce. Tyto hodnoty můžeme najít v tabulce 5.8. Nejvyšší hodnotu nabývá model odhadnutý metodou MM. Naopak nejnižší hodnotu nabývá model odhadnutý metodou ICA, která je přitom výchozí metodou.

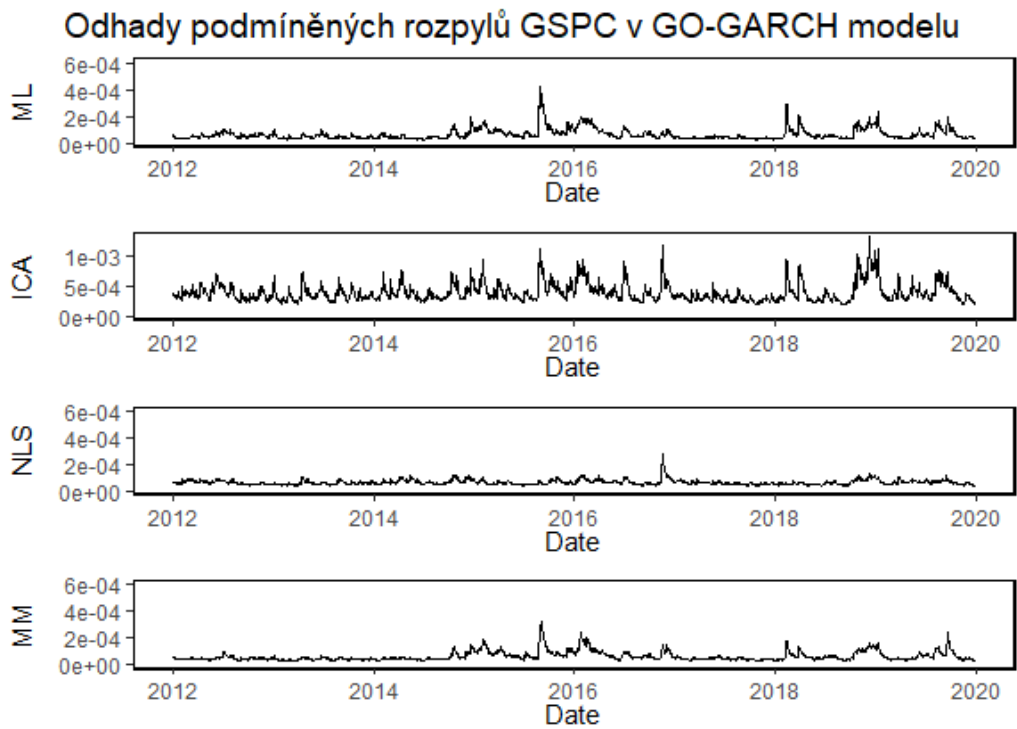
Zajímavé je také porovnání z hlediska časové náročnosti modelu. Doby odhadu v závislosti na použité metodě najdeme také v tabulce 5.8. Nejrychlejšími metodami jsou metody ICA a MM, s jejichž použitím odhad trval méně než vteřinu. Naopak s použitím metody ML odhad trval 25 vteřin, což je znatelné prodloužení doby odhadu. V případě aplikování modelu na časové řady s vyšší dimenzí by rozdíl mohl být mnohem větší, a tedy by bylo možné vybírat metodu odhadu i podle časové náročnosti.

Na obrázcích 5.5, 5.6 a 5.7 si můžeme prohlédnout rozdíly v odhadnutých podmíněných rozptylech pro jednotlivé časové řady. Odhady s použitím metody ICA jsou mnohem více volatilní než při použití jiných metod. Nejvíce se odhady liší u časových řad GSPC a RUT. Můžeme si všimnout, že u časové řady GSPC model s metodou NLS na rozdíl od ostatních metod vůbec neodhalil zvýšenou podmíněnou volatilitu okolo roku 2016. Je tedy velmi důležité vybírat odhadovací metodu pečlivě.

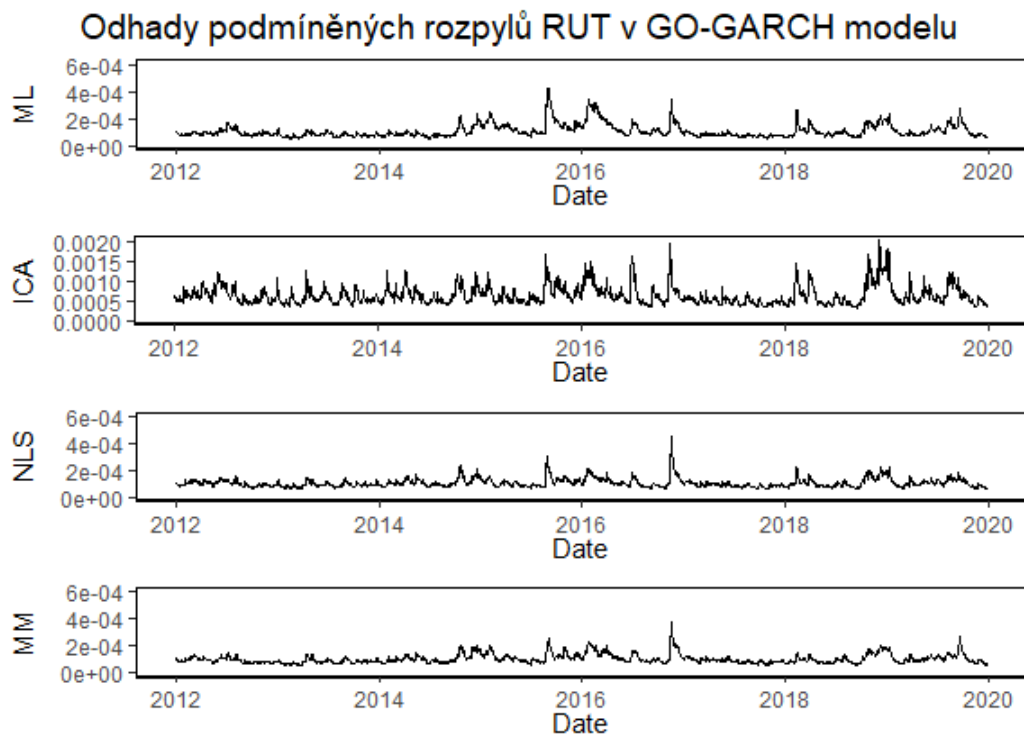
Odhadnuté parametry výsledného modelu s použitím metody MM včetně transformační matice \mathbf{Z} najdeme v tabulce 5.9. Odhadnuté podmíněné rozptyly pro jednotlivé řady budeme zkoumat v další části společně s ostatními mnoho-rozměrnými modely.

\mathbf{Z}			γ	α_1	β_1
0,003852	0,004239	0,005629	0,041304	0,125148	0,834629
0,001722	0,008841	0,004929	0,056488	0,062069	0,881817
-0,011510	-0,000294	0,017179	0,025815	0,099314	0,877217

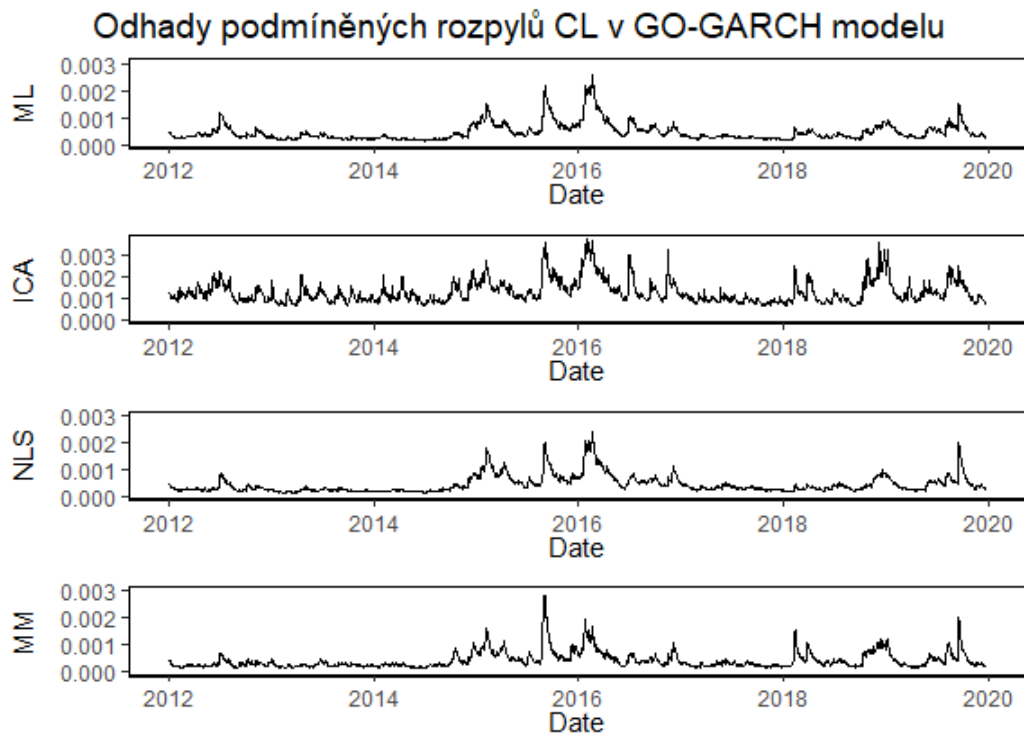
Tabulka 5.9: Odhadnuté parametry GO-GARCH modelu s použitím metody MM pro časovou řadu v období 2012–2019.



Obrázek 5.5: Odhad podmíněných rozptylů časové řady GSPC v období 2012–2019 v závislosti na použité metodě odhadu.



Obrázek 5.6: Odhad podmíněných rozptylů časové řady RUT v období 2012–2019 v závislosti na použité metodě odhadu.



Obrázek 5.7: Odhad podmíněných rozptylů časové řady CL v období 2012–2019 v závislosti na použité metodě odhadu.

I v tomto případě jsme pro testování autokorelace reziduí použili mnohorozměrný Ljung-Box test, jehož výsledky lze najít v tabulce 5.10. Také nyní na hladině $\alpha = 0,05$ přesvědčivě nezamítáme nulovou hypotézu nekorelovanosti reziduí. Dále jsme použili Box-Pierce test, se kterým nulovou hypotézu nekorelovanosti reziduí taktéž nezamítáme. Platnost modelu z hlediska odhadnuté kovarianční struktury jsme opět testovali pomocí Ling-Li testu. I v tomto případě však nulovou hypotézu žádné dodatečné ARCH struktury na hladině $\alpha = 0,05$ zamítáme s téměř nulovou p-hodnotou.

zpoždění	Ljung-Box test		Box-Pierce test	
	test. stat.	p-hodnota	test. stat.	p-hodnota
1	8,27	0,5067	8,26	0,5080
2	15,74	0,6107	15,71	0,6126
3	26,38	0,4974	26,33	0,5003
4	38,97	0,3375	38,88	0,3413
5	52,95	0,1942	52,81	0,1979
10	88,89	0,5133	88,57	0,5229
15	130,05	0,6041	129,42	0,6194
20	184,96	0,3844	183,76	0,4083
25	229,45	0,4052	227,71	0,4370
30	280,20	0,3219	277,70	0,3606

Tabulka 5.10: Výsledky diagnostických testů pro výsledný GO-GARCH model.

\mathbf{R}			γ	α	β
1,000000	0,886367	0,336503	$5,214708 \cdot 10^{-5}$	0,112139	0,061622
0,886367	1,000000	0,320796	$1,047866 \cdot 10^{-4}$	0,011730	0,096103
0,336503	0,320796	1,000000	$4,275802 \cdot 10^{-7}$	0,061622	0,943931

Tabulka 5.11: Odhady parametrů CCC modelu pro časové řady v období 2012–2019.

5.5.3 CCC model

Dále jsme odhadli model CCC(1,1) pomocí funkce *ecc.estimation* z balíčku *ccgarch* (Nakatani, 2014). V této funkci se vždy musí volit počáteční hodnoty parametrů. Zkoušeli jsme různé sady výchozích parametrů a nakonec jsme vybrali model s nejvyšší dosaženou logaritmicou věrohodností. V tomto modelu jsme jako počáteční matici \mathbf{R} zvolili výběrovou korelační matici časových řad, pro počáteční hodnoty parametrů γ_i jsme volili odpovídající parametry z odhadnutého jednorozměrného modelu, pro parametry α_i čísla 0,1 a pro parametry β_i čísla 0,5. Bohužel se ale výsledky modelu často velmi lišily v závislosti na zvolených počátečních hodnotách. Pro co nejlepší výběr modelu je tedy nutné vyzkoušet velmi rozmanitou sadu počátečních hodnot.

Na odhadnuté parametry modelu včetně podmíněné korelační matice \mathbf{R} se můžeme podívat v tabulce 5.11. Odhadnuté podmíněné rozptyly těchto časových řad budeme opět zkoumat v další části společně s ostatními mnohorozměrnými modely.

K otestování předpokladu konstantních podmíněných korelací jsme použili test podle Engle a Sheppard (2001), jehož testová statistika je rovna 9,31 a s p-hodnotou rovnou 0,0095 tedy na hladině $\alpha = 0,05$ zamítáme nulovou hypotézu konstantních podmíněných korelací. Model CCC tedy klade příliš restriktivní předpoklad a měli bychom dát přednost jiným modelům, které tento předpoklad nepožadují.

Dále jsme pro testování autokorelace reziduí použili mnohorozměrný Ljung-Box test a také Box-Pierce test, jejichž výsledky lze najít v tabulce 5.12. Na hladině $\alpha = 0,05$ opět přesvědčivě nezamítáme nulovou hypotézu nekorelovanosti reziduí pro všechna uvažovaná zpoždění. Dále jsme použili Ling-Li test pro testování odhadnuté kovarianční struktury. Nulovou hypotézu žádné dodatečné ARCH struktury na hladině $\alpha = 0,05$ zamítáme s téměř nulovou p-hodnotou.

5.5.4 DCC model

Jako poslední model jsme odhadli DCC(1,1) model funkcí *dccfit* z balíčku *rmgarch* (Ghalanos, 2019). Odhadnuté parametry modelu najdeme v tabulce 5.13. I u tohoto modelu jsme pro testování autokorelace reziduí použili mnohorozměrný Ljung-Box test, jehož výsledky lze najít v tabulce 5.14 spolu s výsledky Box-Pierce testu. I zde na hladině $\alpha = 0,05$ přesvědčivě nezamítáme nulovou hypotézu nekorelovanosti reziduí pro všechna uvažovaná zpoždění. Pro testování platnosti modelu z hlediska odhadnuté kovarianční struktury jsme použili také Ling-Li test, se kterým nulovou hypotézu žádné dodatečné ARCH struktury na hladině $\alpha = 0,05$ zamítáme s p-hodnotou 0,0127. Mohli bychom tedy zkusit přejít k vyšším řádům modelu.

zpoždění	Ljung-Box test		Box-Pierce test	
	test. stat.	p-hodnota	test. stat.	p-hodnota
1	10,36	0,3223	10,34	0,3235
2	22,41	0,2143	22,38	0,2159
3	33,66	0,1762	33,59	0,1782
4	44,73	0,1508	44,63	0,1533
5	56,52	0,1164	56,38	0,1190
10	94,67	0,3476	94,34	0,3564
15	150,22	0,1752	149,47	0,1864
20	201,03	0,1351	199,76	0,1490
25	245,15	0,1700	243,34	0,1913
30	285,22	0,2510	282,80	0,2841

Tabulka 5.12: Výsledky diagnostických testů pro výsledný CCC model.

γ	α_1	β_1	DCC α_1	DCC β_1
0,000005	0,167390	0,761717	0,035519	0,918204
0,000008	0,092530	0,837565	–	–
0,000003	0,069959	0,925005	–	–

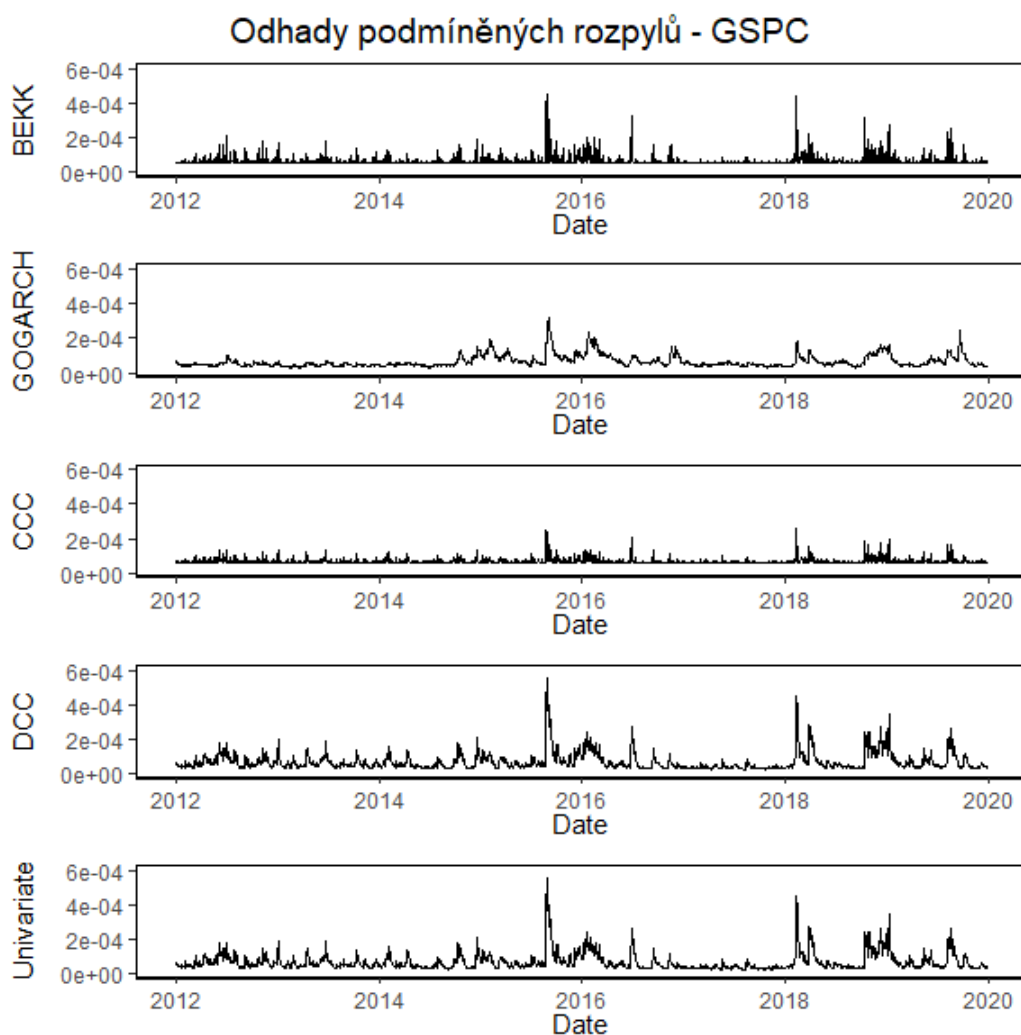
Tabulka 5.13: Odhadnuté parametry DCC modelu pro uvažované časové řady v období 2012–2019.

5.6 Porovnání modelů

V této části porovnáme výsledky uvažovaných modelů pro jednotlivé časové řady. Odhady podmíněných rozptylů jednotlivých akciových indexů či akcií v různých modelech jsou vykresleny na obrázcích 5.8, 5.9 a 5.10. Výsledky jednotlivých modelů jsou velmi rozdílné. Můžeme si všimnout, že model CCC podmíněné rozptyly oproti jiným modelům velmi podhodnocuje. Srovnatelné výsledky má pouze u časové řady CL. Může to být zapříčiněno nesprávným předpokladem konstantních podmíněných korelací, jehož platnost jsme zamítli pomocí diagnostického testu, a který tvoří omezení při odhadu podmíněné varianční matice \mathbf{H}_t . Pokud porovnáme výsledky s DCC modelem, který tento předpoklad uvolňuje, vidíme,

zpoždění	Ljung-Box test		Box-Pierce test	
	test. stat.	p-hodnota	test. stat.	p-hodnota
1	10,33	0,3247	10,31	0,3259
2	19,20	0,3795	19,17	0,3815
3	29,46	0,3388	29,40	0,3416
4	38,60	0,3531	38,51	0,3567
5	49,39	0,3022	49,26	0,3065
10	89,23	0,5030	88,91	0,5125
15	143,06	0,3010	142,33	0,3161
20	192,34	0,2512	191,11	0,2713
25	233,15	0,3406	231,41	0,3704
30	273,13	0,4354	270,79	0,4751

Tabulka 5.14: Výsledky diagnostických testů pro odhadnutý DCC model.

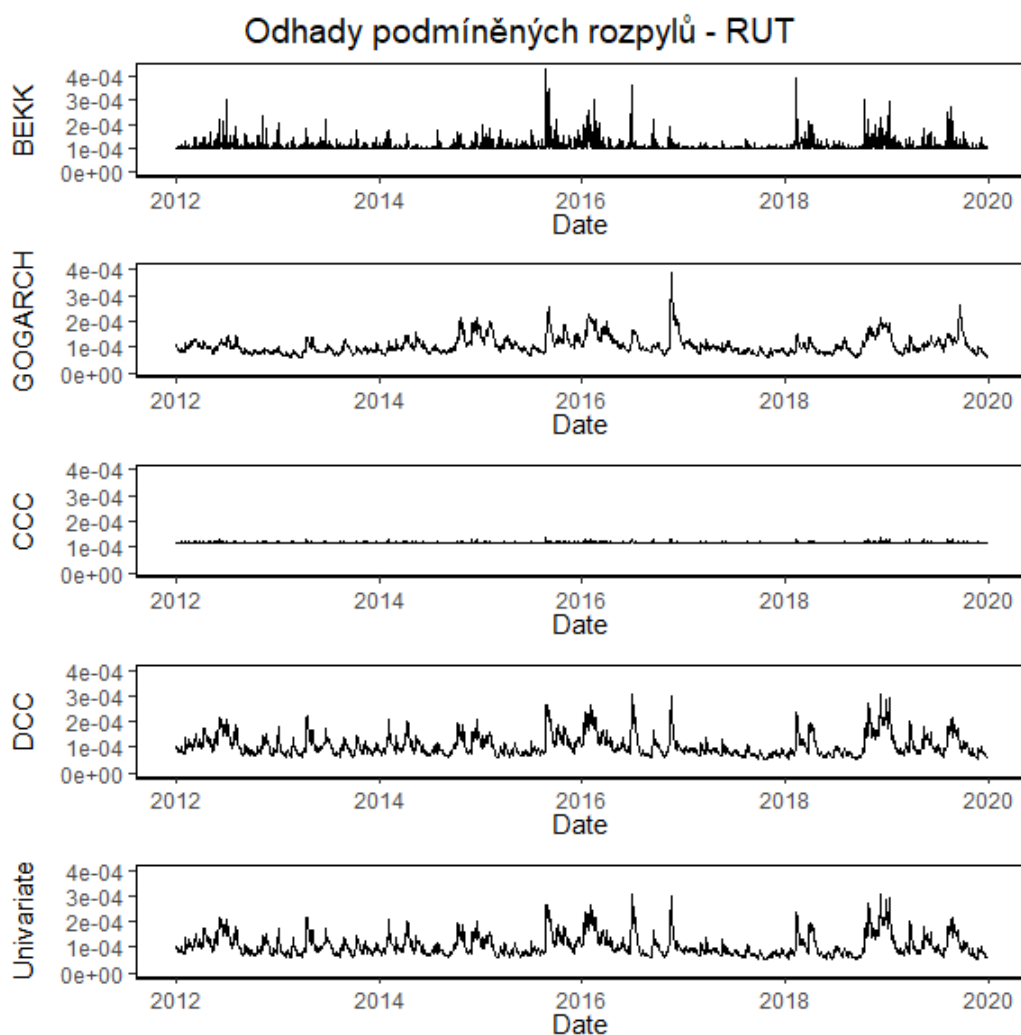


Obrázek 5.8: Odhadnuté podmíněné rozptyly časové řady denních výnosů GSPC v letech 2012–2019 pomocí mnohorozměrných GARCH modelů.

že výsledné odhady se vzájemně velmi liší (kromě řady CL). Výsledky odhadnutého CCC modelu byly také velmi nestabilní z hlediska zvolených počátečních hodnot parametrů. Model má tedy problémy s konvergencí do lokálních maxim logaritmicke věrohodnostní funkce. Pro získání lepších výsledků by bylo možné zkusit odhadovat model na velmi velké množině počátečních parametrů a výsledný model vybrat pomocí zvoleného kritéria.

Výsledky modelu GO-GARCH jsou podobné výsledkům modelů DCC a jednorozměrných modelů, ale to platí díky vhodně zvolené metodě odhadu. Jak jsme již ukázali dříve, výsledky GO-GARCH modelu se pro jednotlivé metody mohou velmi lišit, jelikož závisí na zvolených komponentách, jejichž lineární transformací se vyjadřují modelované časové řady. A právě výpočet těchto komponent se liší pro jednotlivé metody odhadu. Jako výsledný GO-GARCH model jsme zvolili ten, který měl nejvyšší hodnotu dosažené logaritmicke věrohodnosti (model s metodou MM).

Naproti tomu výsledky DCC modelů se téměř neliší od výsledků jednorozměrných modelů. Je to dáno způsobem odhadu modelu, kde podmíněné rozptyly



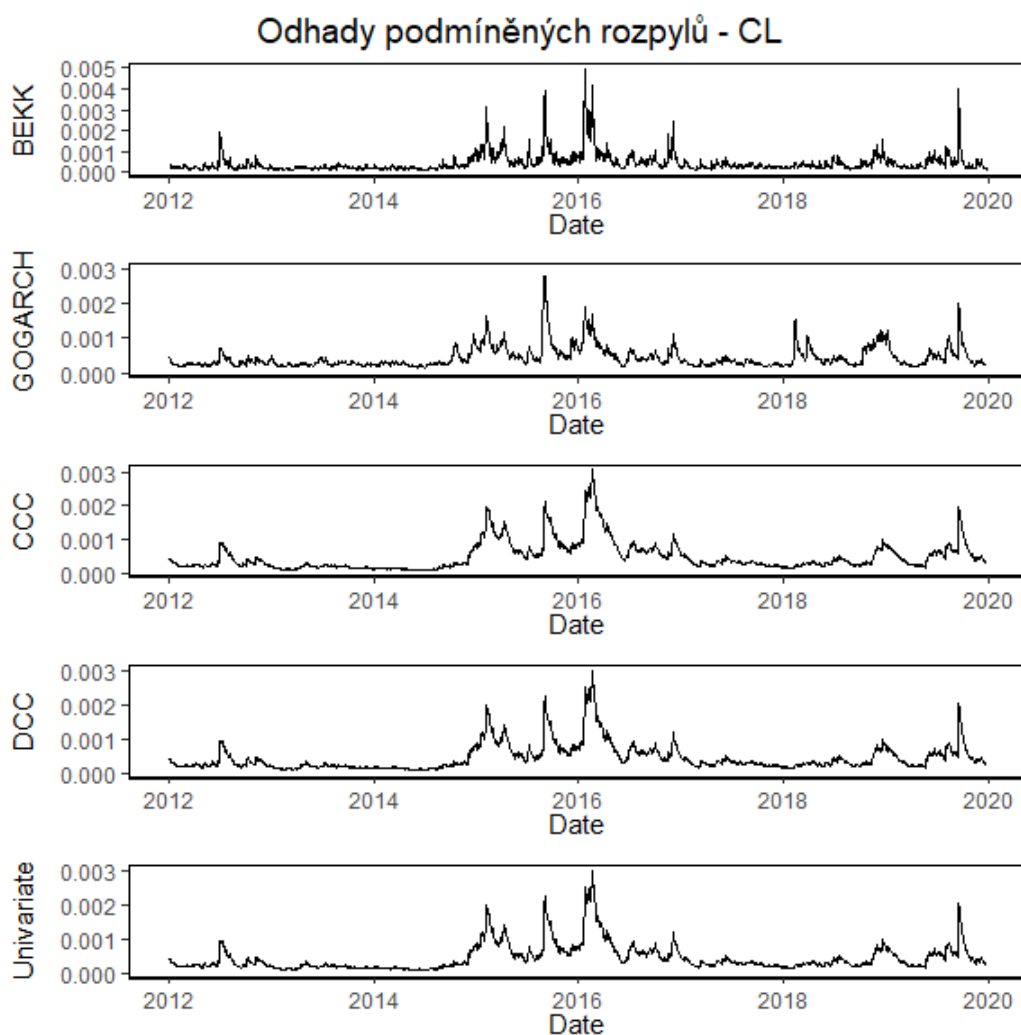
Obrázek 5.9: Odhadnuté podmíněné rozptyly časové řady denních výnosů RUT v letech 2012–2019 pomocí mnohorozměrných GARCH modelů.

jednotlivých časových řad jsou modelovány pomocí jednorozměrných GARCH modelů a výsledná podmíněná varianční matice \mathbf{H}_t závisí na těchto podmíněných rozptylech a podmíněné korelační matici \mathbf{R}_t , která je také modelována v čase.

Výsledné odhady pomocí BEKK modelu jsou velmi podobné výsledkům DCC modelu a jednorozměrných modelů, ale v některých případech podmíněnou volatilitu oproti nim nadhodnocují. Model BEKK má také větší počet parametrů, což může způsobovat větší kolísání odhadnutých podmíněných rozptylů.

Dále jsme zkoumali odhady podmíněných korelací mezi jednotlivými časovými řadami v závislosti na použitém modelu. Tyto odhady jsou znázorněny na obrázku 5.11. Zatímco model CCC předpokládá konstantní podmíněné korelace, u ostatních modelů se mění v čase. U modelu BEKK jsou tyto odhady podmíněných korelací velmi volatilní, zatímco u modelů DCC a GO-GARCH se kromě občasných výkyvů v čase vyvíjejí plynuleji.

Poslední porovnání modelů je z hlediska dob odhadu jednotlivých modelů. Doby odhadu našich modelů najdeme v tabulce 5.15. Nejdéle trval odhad modelu BEKK (39 vteřin), což jsme očekávali kvůli vysokému počtu parametrů.



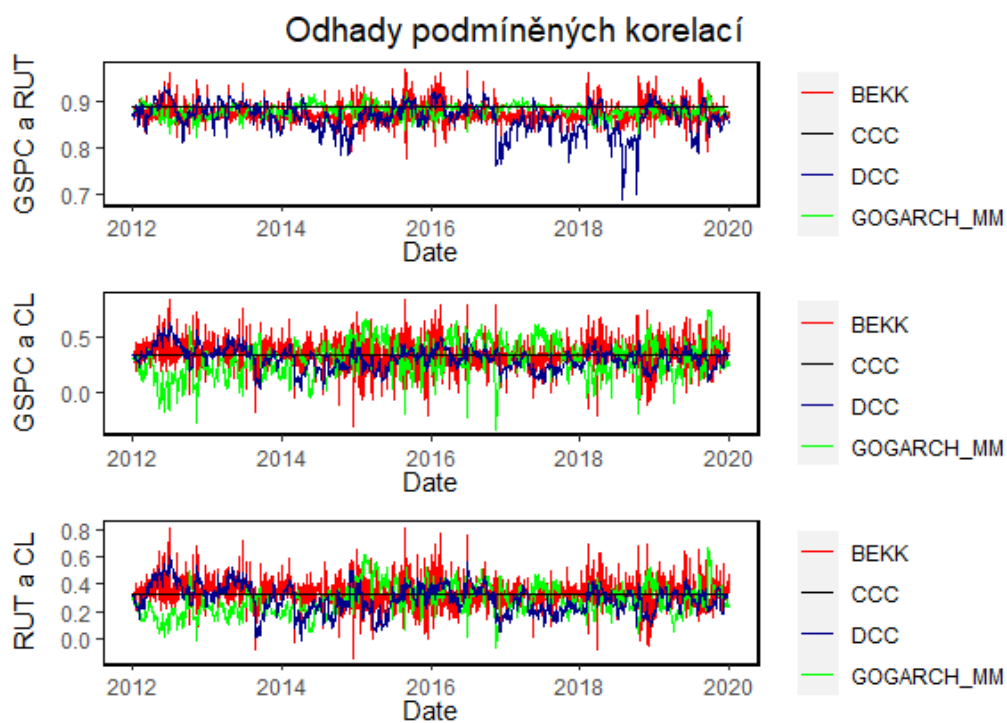
Obrázek 5.10: Odhadnuté podmíněné rozptyly časové řady denních výnosů CL v letech 2012–2019 pomocí mnohorozměrných GARCH modelů.

V našem trojrozměrném případě nejsou rozdíly tolik znatelné, ale s vyššími dimenzemi rozdíly narůstají. Pro čtyřrozměrné řady už odhad takového modelu trvá přes 10 minut a v případě pěti uvažovaných časových řad již model není možné na běžné výpočetní technice odhadnout v rozumném čase.

Modely CCC a DCC byly odhadnuty za dobu zhruba 2 vteřin, jejich odhad je tedy velmi rychlý. Navíc s narůstající dimenzí počet jejich parametrů nenarůstá nepřiměřeně rychle, a je tedy možné je používat i ve vyšších dimenzích.

Odhad zobecněného ortogonálního modelu s metodou MM trval méně než půl vteřiny a byl tedy nejrychlejší. Jak jsme ale ukazovali již v předchozí části, doba odhadu tohoto modelu závisí na zvolené metodě odhadu.

V námi studovaném případě tří časových řad denních výnosových měř GSPC, RUT a CL v letech 2012 – 2019 se jako nejlepší volba z uvažovaných mnohorozměrných GARCH modelů jeví model DCC, jak z hlediska odhadů podmíněných rozptylů jednotlivých řad, podmíněných korelací mezi nimi a stabilních výsledků, tak z hlediska výpočetní náročnosti modelu. Model GO-GARCH by mohl dávat také dobré výsledky, ale je nutné dávat pozor na použitou metodu odhadu.



Obrázek 5.11: Odhady podmíněných korelací časových řad denních výnosů v letech 2012–2019 v jednotlivých mnohorozměrných GARCH modelech s použitím metody MM u GO-GARCH modelu.

Model	Čas
BEKK	38,7409 sec
GO-GARCH (MM)	0,3478 sec
CCC	2,2616 sec
DCC	1,9449 sec

Tabulka 5.15: Doba odhadu vybraných třírozměrných GARCH modelů pro časové řady v letech 2012–2019.

Závěr

V této práci jsme se zabývali mnohorozměrnými modely podmíněného rozptylu ARCH a GARCH. Nejprve jsme shrnuli základní poznatky pro modelování podmíněného rozptylu časových řad v jednorozměrném případě. Následně jsme uvedli různé přístupy k rozšíření modelů GARCH do více dimenzí a v každé kategorii jsme představili několik modelů. Tyto modely se snaží co nejlépe řešit problémy s velkým nárůstem počtu parametrů při přechodu do vyšších dimenzí a také s podmínkou pozitivní definitnosti pro varianční matice.

Ve třetí kapitole jsme se zabývali metodami odhadu představených modelů, které byly často založeny na metodě maximální věrohodnosti. Pro některé modely ovšem autoři navrhli více metod odhadu, mezi kterými je možné volit. Jmenujme například metodu založenou na metodě nelineárních nejmenších čtverců.

Ve čtvrté kapitole jsme představili některé testy, které se používají pro kontrolu modelu a ověřování platnosti předpokladů. Pro kontrolu modelu z hlediska heteroskedasticity jsme uvedli dvě varianty Ling-Li testu, z nichž jednu jsme naprogramovali ve statistickém softwaru R. Pro kontrolu předpokladu neautokorelovanosti reziduí jsme uvedli mnohorozměrný Ljung-Box test. Speciálně pro použití CCC modelu existují testy předpokladu konstantních korelací. V naší práci jsme představili dva z nich.

V páté kapitole jsme provedli aplikaci některých z představených modelů na reálná data tří časových řad uzavíracích cen akcií. Tato data jsme převedli na výnosové míry a nejdříve jsme na ně aplikovali jednorozměrné GARCH modely. Následně jsme pro všechny tři časové řady zároveň provedli odhad modelů BEKK, zobecněného ortogonálního modelu, modelů CCC a DCC. U zobecněného ortogonálního modelu jsme provedli srovnání několik dostupných metod odhadů a jako finální jsme vybrali model s nejvyšší dosaženou logaritmicou věrohodností. U ostatních modelů jsme modely odhadovali s různými počátečními hodnotami parametrů a výsledné modely vybírali podle obdobných kritérií. Modely jsme verifikovali pomocí testů představených ve čtvrté kapitole. Platnost předpokladu neautokorelovanosti reziduí jsme nezamítli, ale zjistili jsme, že modely nedostatečně popisují celkovou kovarianční strukturu. Řešením by mohl být například přechod k vyšším řádům modelu, který ale u některých modelů může znamenat zhoršení výpočetní náročnosti modelu. Pro model CCC jsme ověřovali platnost předpokladu konstantních podmíněných korelací, který jsme zamítli.

Následně jsme porovnali odhady podmíněných rozptylů pro jednotlivé časové řady získané pomocí různých modelů a také odhady podmíněných korelací mezi nimi. Jako nejlepší model se jeví model DCC, který dává dobré a stabilní výsledky, není nutné u něj dávat pozor na použitou metodu odhadu a navíc má dobrou výpočetní náročnost.

Součástí práce je také elektronická příloha R skriptů s použitým kódem pro aplikaci modelů na reálná data a dodatečných naprogramovaných funkcí.

Seznam použité literatury

- ALEXANDER, C. a CHIBUMBA, A. (1996). Multivariate orthogonal factor GARCH models. *Discussion Papers in Mathematics. University of Sussex*.
- ALEXANDER, C. (2000). A primer on the orthogonal GARCH model. *Manuscript ISMA Centre, University of Reading*.
- ALEXANDER, C. (2002). Principal component models for generating large GARCH covariance matrices. *Economic Notes*, **31**(2), 337–359. doi: 10.1111/1468-0300.00089.
- BAUWENS, L., LAURENT, S. a ROMBOUTS, J. V. K. (2006). Multivariate GARCH models: a survey. *Journal of Applied Econometrics*, **21**(1), 79–109. doi: 10.1002/jae.842.
- BERKES, I., HORVÁTH, L. a KOKOSZKA, P. (2003). GARCH processes: structure and estimation. *Bernoulli*, **9**(2), 201–227. ISSN 1350–7265.
- BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**(3), 307–327. ISSN 0304-4076. doi: 10.1016/0304-4076(86)90063-1.
- BOLLERSLEV, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model. *The Review of Economics and Statistics*, **72**(3), 498–505. doi: 10.2307/2109358.
- BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. F. a WOOLDRIDGE, J. M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, **96**(1), 116–131. doi: 10.1086/261527.
- BOSWIJK, H. P. a VAN DER WEIDE, R. (2006). Wake me up before you GO-GARCH. Tinbergen Institute Discussion Paper 06-079/4, Tinbergen Institute, Amsterdam and Rotterdam.
- BOSWIJK, H. P. a VAN DER WEIDE, R. (2011). Method of moments estimation of GO-GARCH models. *Journal of Econometrics*, **163**(1), 118–126. ISSN 0304-4076. doi: 10.1016/j.jeconom.2010.11.011.
- ENGLE, R. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, **20**(3), 339–350. doi: 10.1198/073500102288618487.
- ENGLE, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, **50**(4), 987–1007. doi: 10.2307/1912773.
- ENGLE, R. F. a KRONER, K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory*, **11**(1), 122–150. doi: 10.2307/3532933.

- ENGLE, R. F. a SHEPPARD, K. (2001). Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate GARCH. Working Paper 8554, National Bureau of Economic Research.
- ENGLE, R. F., NG, V. K. a ROTHSCILD, M. (1990). Asset pricing with a factor-ARCH covariance structure: Empirical estimates for treasury bills. *Journal of Econometrics*, **45**(1-2), 213–237. ISSN 0304-4076. doi: 10.1016/0304-4076(90)90099-F.
- FRANCQ, C. a ZAKOÏAN, J.-M. (2004). Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes. *Bernoulli*, **10**(4), 605–637. doi: 10.3150/bj/1093265632.
- GHALANOS, A. (2019). *rmgarch: Multivariate GARCH models*. URL <https://CRAN.R-project.org/package=rmgarch>. R package version 1.3-7., cit. 28. 12. 2020.
- GHALANOS, A. (2020). *rugarch: Univariate GARCH models*. URL <https://CRAN.R-project.org/package=rugarch>. R package version 1.4-4., cit. 28. 12. 2020.
- HAFNER, C. M. a FRANSES, P. H. (2009). A generalized dynamic conditional correlation model: simulation and application to many assets. *Econometric Reviews*, **28**(6), 612–631. doi: 10.1080/07474930903038834.
- HAFNER, C. M. a ROMBOUTS, J. V. K. (2007). Semiparametric multivariate volatility models. *Econometric Theory*, **23**(2), 251–280. ISSN 02664666, 14694360. doi: 10.2307/4126557.
- HOSKING, J. R. M. (1980). The multivariate portmanteau statistic. *Journal of the American Statistical Association*, **75**(371), 602–608. doi: 10.1080/01621459.1980.10477520.
- IQBAL, F. (2013). Robust estimation for the orthogonal GARCH model. *The Manchester School*, **81**(6), 904–924. doi: 10.1111/j.1467-9957.2012.02315.x.
- KAWAKATSU, H. (2006). Matrix exponential GARCH. *Journal of Econometrics*, **134**(1), 95–128. ISSN 0304-4076. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2005.06.023>.
- LANNE, M. a SAIKKONEN, P. (2007). A multivariate generalized orthogonal factor GARCH model. *Journal of Business & Economic Statistics*, **25**(1), 61–75. doi: 10.1198/073500106000000404.
- LING, S. a LI, W. K. (1997). Diagnostic checking of nonlinear multivariate time series with multivariate ARCH errors. *Journal of Time Series Analysis*, **18**(5), 447–464. doi: 10.1111/1467-9892.00061.
- NAKATANI, T. (2014). *ccgarch: An R Package for Modelling Multivariate GARCH Models with Conditional Correlations*. URL <https://cran.r-project.org/src/contrib/Archive/ccgarch/>. R package version 0.2.3, cit. 28. 12. 2020.

- NAKATANI, T. a TERÄSVIRTA, T. (2009). Testing for volatility interactions in the Constant Conditional Correlation GARCH model. *The Econometrics Journal*, **12**(1), 147–163. ISSN 1368-4221. doi: 10.1111/j.1368-423X.2008.00261.x.
- PFUFF, B. (2012). *gogarch: Generalized Orthogonal GARCH (GO-GARCH) models*. URL <https://CRAN.R-project.org/package=gogarch>. R package version 0.7-2, cit. 28. 12. 2020.
- R CORE TEAM (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <http://www.R-project.org/>. cit. 28. 12. 2020.
- SANTOS, A. A. a MOURA, G. V. (2014). Dynamic factor multivariate GARCH model. *Computational Statistics and Data Analysis*, **76**, 606 – 617. ISSN 0167-9473. doi: <https://doi.org/10.1016/j.csda.2012.09.010>.
- SCHMIDBAUER, H., ROESCH, A. a TUNALIOGLU, V. S. (2016). *mgarchBEKK: Simulating, Estimating and Diagnosing MGARCH (BEKK and mGJR) Processes*. URL <https://CRAN.R-project.org/package=mgarchBEKK>. R package version 0.0.2, cit. 28. 12. 2020.
- STELZER, R. (2008). On the relation between the vec and BEKK multivariate GARCH models. *Econometric Theory*, **24**(4), 1131–1136. ISSN 0266-4666. doi: 10.1017/S0266466608080456.
- TSAY, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. 3. vydání. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey. ISBN 978-0-470-41435-4.
- TSE, Y. K. a TSUI, A. K. C. (1999). A note on diagnosing multivariate conditional heteroscedasticity models. *Journal of Time Series Analysis*, **20**(6), 679–691. ISSN 0143-9782. doi: <https://doi.org/10.1111/1467-9892.00166>.
- TSE, Y. K. (2000). A test for constant correlations in a multivariate GARCH model. *Journal of Econometrics*, **98**(1), 107–127. ISSN 0304-4076. doi: 10.1016/S0304-4076(99)00080-9.
- TSE, Y. K. a TSUI, A. K. C. (2002). A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations. *Journal of Business & Economic Statistics*, **20**(3), 351–362. ISSN 1537-2707. doi: 10.1198/073500102288618496.
- VAN DER WEIDE, R. (2002). GO-GARCH: A multivariate generalized orthogonal GARCH model. *Journal of Applied Econometrics*, **17**(5), 549–564. doi: 10.1002/jae.688.
- VRONTOS, I. D., DELLAPORTAS, P. a POLITIS, D. N. (2003). A full-factor multivariate GARCH model. *The Econometrics Journal*, **6**(2), 312–334. ISSN 1368-4221. doi: 10.1111/1368-423X.t01-1-00111.
- YAHOO FINANCE (2020). Yahoo Finance. <https://finance.yahoo.com/>. [Online; cit. 12.12.2020].

ZHANG, K. a CHAN, L. (2009). Efficient factor GARCH models and factor-DCC models. *Quantitative Finance*, **9**(1), 71–91. ISSN 1469-7696. doi: 10.1080/14697680802039840.

Seznam obrázků

5.1	Vývoj denních uzavíracích cen jednotlivých akcií v letech 2012 – 2019.	38
5.2	Vývoj denních výnosových měr jednotlivých akcií v letech 2012 – 2019.	39
5.3	Odhadnuté podmíněné rozptyly v jednorozměrných GARCH modelech pro časové řady denních výnosů v období 2012–2019. . . .	41
5.4	Histogramy vypočtených reziduí jednorozměrných modelů pro časové řady denních výnosů v období 2012–2019.	42
5.5	Odhad podmíněných rozptylů časové řady GSPC v období 2012–2019 v závislosti na použité metodě odhadu.	45
5.6	Odhad podmíněných rozptylů časové řady RUT v období 2012–2019 v závislosti na použité metodě odhadu.	45
5.7	Odhad podmíněných rozptylů časové řady CL v období 2012–2019 v závislosti na použité metodě odhadu.	46
5.8	Odhadnuté podmíněné rozptyly časové řady denních výnosů GSPC v letech 2012–2019 pomocí mnohorozměrných GARCH modelů. . .	49
5.9	Odhadnuté podmíněné rozptyly časové řady denních výnosů RUT v letech 2012–2019 pomocí mnohorozměrných GARCH modelů. . .	50
5.10	Odhadnuté podmíněné rozptyly časové řady denních výnosů CL v letech 2012–2019 pomocí mnohorozměrných GARCH modelů. . .	51
5.11	Odhady podmíněných korelací časových řad denních výnosů v letech 2012–2019 v jednotlivých mnohorozměrných GARCH modelech s použitím metody MM u GO-GARCH modelu.	52

Seznam tabulek

5.1	Základní charakteristiky výnosových měř uvažovaných akcií.	39
5.2	Výběrová korelační matice výnosových měř uvažovaných akcií.	40
5.3	Odhadnuté koeficienty jednorozměrných GARCH modelů pro uvažované časové řady v období 2012–2019.	40
5.4	Odhady nepodmíněných směrodatných odchylek σ na základě jednorozměrných GARCH modelů pro časové řady v časovém období 2015–2019.	40
5.5	Výsledky diagnostických testů pro jednorozměrné GARCH modely.	41
5.6	Odhadnuté parametry BEKK modelu pro časové řady v období 2012–2019.	43
5.7	Výsledky diagnostických testů pro BEKK model.	43
5.8	Hodnota logaritmické věrohodnostní funkce a doba odhadu v závislosti na použité metodě odhadu zobecněného ortogonálního modelu pro časové řady v letech 2012–2019.	44
5.9	Odhadnuté parametry GO-GARCH modelu s použitím metody MM pro časovou řadu v období 2012–2019.	44
5.10	Výsledky diagnostických testů pro výsledný GO-GARCH model.	46
5.11	Odhady parametrů CCC modelu pro časové řady v období 2012–2019.	47
5.12	Výsledky diagnostických testů pro výsledný CCC model.	48
5.13	Odhadnuté parametry DCC modelu pro uvažované časové řady v období 2012–2019.	48
5.14	Výsledky diagnostických testů pro odhadnutý DCC model.	48
5.15	Doba odhadu vybraných třírozměrných GARCH modelů pro časové řady v letech 2012–2019.	52

Seznam použitých zkratek

\mathbf{y}	vektor
\mathbf{y}^T	transponovaný vektor
\mathbf{A}	matice
\mathbf{A}^T	transponovaná matice
\mathbf{A}^{-1}	inverzní matice
\mathbf{I}_N	jednotková matice řádu N
$ \mathbf{A} $	determinant matice \mathbf{A}
$E(\boldsymbol{\xi}_t)$	střední hodnota $\boldsymbol{\xi}_t$
$E(\boldsymbol{\xi}_t \mathcal{F}_{t-1})$	střední hodnota $\boldsymbol{\xi}_t$ za podmínky \mathcal{F}_{t-1}
$\text{Var}(\boldsymbol{\xi}_t)$	rozptyl $\boldsymbol{\xi}_t$
$\text{Var}(\boldsymbol{\xi}_t \mathcal{F}_{t-1})$	rozptyl $\boldsymbol{\xi}_t$ za podmínky \mathcal{F}_{t-1}
\mathcal{F}_{t-1}	σ -algebra generovaná množinou všech pozorování do času $t - 1$.
vec	operátor, který skládá prvky ze spodní trojúhelníkové části matice do vektoru
$\boldsymbol{\theta}$	vektor parametrů
$\ell(\boldsymbol{\theta})$	logaritmická věrohodnostní funkce
$N_N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$	N -rozměrné normální rozdělení se střední hodnotou $\mathbf{0}$ a varianční maticí $\boldsymbol{\Omega}$
χ_M^2	χ^2 rozdělení s M stupni volnosti