# Posudek oponenta na bakalářskou práci
## Autor: Lukáš Weissgráb

Název práce: *Skalární součin – zavedení a aplikace*

---

Bakalářská práce pana Weissgrába se zabývá pojmem skalárního součinu. Hlavním cílem autora bylo tento důležitý matematický koncept přiblížit čtenářům různých úrovní znalostí, a to pokud možno metodou „od speciálního případu k obecnému“ a od „konkrétního k abstraktnímu“. V souladu s tímto vytyčeným cílem je práce vcelku logicky uspořádána do pěti kapitol: v *první kapitole* se vychází ze základních úloh analytické geometrie v rovině, z nichž pojem skalárního součinu přirozeně vyplyne; *druhá kapitola* představuje několik konkrétních úloh souvisejících se skalárním součinem; *třetí kapitola* podává částečný úvod do obecnější teorie; a *zbývající dvě kapitoly* jsou věnovány Fourierovým řadám a první fundamentální formě plochy, tedy pojmům se skalárním součinem hluboce souvisejícím. Volbu tématu považuji za vhodnou a zcela adekvátní nárokům kladeným na bakalářskou práci.

Přestože se práce dotýká i trochu pokročilejších partií (poslední dvě kapitoly), je její obsah v zásadě elementární a je v podstatě pokryt učivem bakalářského studia. Smysl této práce tedy (nejspíše v souladu s autorovým záměrem) vnímám zejména v rovině didaktické: ukázat pojem skalárního součinu v souvislostech, které odhalí, proč je tento koncept tak mocným nástrojem. K dosažení tohoto cíle byly použity dvě hlavní ingredience: (1) v elementárních případech přesvědčivě vysvětlit, proč to funguje: například nejprve v rovině – a pak ukázat, proč analogický koncept funguje i ve vyšší dimenzi; (2) ukázat na složitějších příkladech (s případným použitím obecnější teorie), že pojem skalárního součinu se může vyskytovat v různých kontextech a má nečekaně různorodé aplikace.

Podle mého názoru tento záměr dává dobrý smysl, ani jeden z obou uvedených bodů však nebyl příliš dobře naplněn. Domnívám se přitom, že hlavním důvodem, proč práce působí nedotaženě, je, že byla psána ve spěchu, patrně na poslední chvíli; vysvětlovalo by to počet i charakter nedostatků, kterými tato práce trpí (z nichž některé podrobněji zmiňuji níže). Obecně vzato jsou zmíněné chyby často typickými příklady chyb, které lze snadno najít po jediném přečtení: občasné překlepy, drobné chyby v rovnicích, podivné formulace apod. Některé zvlášť podivné jevy vznikly prostým opisem ze skript *Lineární algebra* od doc. Bečváře: v těchto skriptech je trochu jiné značení, jiná struktura textu a další odlišnosti; ty však byly do textu práce převzaty bez větší snahy je přizpůsobit stylu textu[1].

Z kladných stránek práce bych vyzdvihl vcelku kvalitní (i když ne bezvadné) zpracování v TEXu a podobně dobrou štábní kulturu; souvisejícím formálním nedostatkem je poněkud rozostřená a nekonzistentní struktura[2]. I po stránce jazykové je práce na velmi dobré, ale ne výborné, úrovni (obsahuje drobnější chyby, slohové nedostatky apod.). Text je na několika místech doplněn obrázky, které (až na jednu do očí bijící výjimku – viz níže) čtenáři velmi usnadní porozumění.

---

[1]Protože například doc. Bečvář používá jiné značení pro skalární součin, v práci se náhle toto značení objeví. Správně by mělo být přizpůsobeno konvencím v práci. V textu této práce o cca 35 stranách se tak vyskytují tři různá značení pro skal. součin.

[2]Například Definice 1 je až ve třetí kapitole, přičemž až do tohoto bodu text vůbec nepůsobí dojmem, že se v něm nějaká standardní formální struktura může objevit.

**Obecné připomínky**

- Autor si měl promyslet, které pojmy bude potřebovat, a ve vhodných okamžicích tyto pojmy čtenáři představit. Nestalo se tak například ve věci kolmosti vektorů atd. V kombinaci s nedostatečným členěním textu tak práce působí chaoticky. Někdy se odvolává na dřívější znalost čtenáře, v jiných případech pojmy podrobně zavádí.
- Práce je určena „čtenářům různých úrovní“, to by však nemělo znamenat, že se úrovně výkladu budou libovolně střídat. Někde jsou vysvětleny i jednoduché věci, jinde se předpokládá znalost pokročilejších konceptů atd.
- Značení je nekonzistentní: kolísá značení skal. součinu, použití středníků a čárek, značení uzavřeného intervalu apod. Podobně nekonzistentní je i členění a styl práce.
- Většina zajímavějších aplikačních částí je dost odbytá a čtenáři neumožní nahlédnout do praktického využití. Například poslední kapitola obsahuje vcelku srozumitelné heuristické odvození pojmu první základní formy plochy, čtenář se však už nedozví nic dalšího. Nezdůrazňuje se (ani intuitivně), že parametrizovaná plocha má „v různých částech různé metriky“, neukáže se, jak s pomocí 1.ZF něco vypočítat, aplikovat ji.

**Seznam konkrétních připomínek:** Neuvádím překlepy, chybějící interpunkci a jiné drobné gramatické chyby. Připomínky nejsou seřazeny podle závažnosti, nýbrž podle výskytu v práci. Závažnější připomínky jsou označeny ■.

- Str. 4: „Norma vektoru je jeho délka“: Co je to délka vektoru? Formálně vzato je vektor pouze bod, takže je zbytečné hovořit o jeho délce (v libovolném rozumném smyslu toho slova je nulová). Norma vektoru není jeho délka, nýbrž jeho vzdálenost od počátku. Intuitivně vzato je pohled na věc v práci správný, čtenář by však měl být upozorněn na to, že jde pouze o nepřesnou představu.

■ Rovnice (1.2): Použití kosinové věty bez důkazu podle mého názoru jen převede jednu „černou skříňku“ (skal. součin) na jinou (kosinová věta). Skutečné vysvětlení funkčnosti skalárního součinu tedy v práci vlastně nenajdeme.

- Str. 5: „Jde tedy o součin“: Hned v následujícím odstavci je vysvětleno, že o součin ve skutečnosti nejde. Podle mého názoru by jakýkoliv matematický text – i když je psán méně formálně, což je samo o sobě zcela v pořádku – měl obsahovat minimum nejasných formulací, tím méně by měl obsahovat kontradiktorické výroky.

■ Str. 6: „... budeme nazývat skalárním součinem...“: Myslím si, že takto důležitý bod v celé práci by si zasloužil přehlednější označení (třeba Definice 1). Důležitější připomínka však je, že zde skalární součin definujeme pouze v $\mathbb{R}^2$. V následujícím textu ho však bez vysvětlení používáme v jiných dimenzích.

- Str. 6, první rovnost pod obrázkem: Zdá se, že by zde bylo lépe držet se značení skal. součinu pomocí závorky (tak jako na následujících řádcích). V této rovnosti má symbol „·“ dva různé významy a neznalý čtenář by to mohl přehlédnout.

- O tři řádky níže: slovíčko „zhavaroval“ ve slovníku spisovné češtiny patrně nenajdeme. Jistě by se našlo vhodnější slovo se stejným významem.

- Str. 7 nahoře: „V předchozích kapitolách“: byla jen jedna. (Další úrovně členění textu se nenazývají „kapitoly“.)

- Str. 7 – seznam pěti ekvivalencí: V zájmu větší jasnosti textu by mělo být nejprve uvedeno, že $\alpha \in [0, \pi]$. Bez tohoto předpokladu pro prostřední tři tvrzení platí jen jedna implikace. Skutečnost, že $\alpha$ je z uvedeného intervalu sice nepřímo vyplývá z textu předchozí kapitoly ($\alpha$ je vnitřní úhel trojúhelníka), nikde před tímto místem v textu to však není explicitně napsáno, což je chyba. V každém případě to zde mělo být jasně uvedeno.

  V tomto kontextu tedy poznámka o „pozorném čtenáři“ působí zvláštně.

■ V souvislosti s předchozím bodem je důležité poznamenat, že kolmost vektorů zatím nebyla nikde definována (poprvé je tak učiněno jakoby mimochodem až na straně 10). Přitom definice (správná) použitá dále v práci (pomocí nulovosti skal. součinu) implikuje poněkud neintuitivní fakt, že nulový vektor je kolmý na všechny vektory. Je důležité si toto uvědomit: odkazy na intuici a dřívější znalosti čtenáře jsou samozřejmě v pořádku, máloktorý čtenář neznalý věci si však při diskusi o kolmosti představí nulový vektor. Intuitivní pohled na kolmost zkrátka předpokládá, že oba zúčastněné vektory jsou nenulové a svírají úhel $\pi/2$. Při takové (intuitivní) definici však uvedená ekvivalence $x \perp y \Leftrightarrow (x, y) = 0$ obecně neplatí, resp. platí pouze pro nenulové vektory $x, y$. Pozorný čtenář tedy s největší pravděpodobností bude v tomto bodě zmaten.

  Nejasnosti s definicí kolmosti pokračují i na začátku Kapitoly 4, kde se patrně předpokládá ona intuitivní definice a píše se, že v případě kolmosti dvou vektoru *musí* (tedy platí jedna implikace) být jejich skal. součin roven 0.

  Je potřeba si jednoznačně zvolit jednu definici kolmosti a vzhledem k ní pak formulovat příslušná tvrzení. To se v práci nestalo, a tak je potřeba na mnoha místech mlžit a spoléhat se na to, že čtenář to už v podstatě ví.

- Str. 9 dole: „... větší, nebo rovna...“: má být „menší, nebo rovna“.

  Mohl by být uveden odkaz na Cauchy-Schwarzovu nerovnost v dalším textu.

- Str. 10 pod obrázkem: „Vztah pro kolmost“ (správněji: „definice kolmosti“) se na tomto místě objevuje poprvé a je to jen tak mimochodem. Proč nikde není uvedena definice?

■ O řádek níže: Skalární součin ve vyšší dimenzi nebyl definován. Toto je zásadní problém. Nikde nebylo vysvětleno, že funguje stejně jako v dimenzi 2. Zejména čtenáři zůstává skryto, proč i ve vyšší dimenzi jsou dva vektory na sebe kolmé, právě když jejich skal.

součin je roven nule. Podle mého názoru je tato otázka velmi důležitá a v práci mi její vysvětlení dost chybí.

- Str. 11 pod rovnicí (2.3): Chybí vysvětlení, proč uvedenou rovnici splňují právě všechny body dané roviny (je dokázána pouze jedna inkluze). Myslím, že jde o promarněnou příležitost k didaktickému momentu: čtenáři zde bylo možno ukázat přesnou matematickou argumentaci, což se nestalo.

- O odstavec níže, věta začínající „Ortogonální doplněk..." je nejasná, krkolomná a gramaticky pochybná. Proč se vyhýbat značení? Stačilo by napsat: Ortogonální doplněk podmnožiny $M$ eukleidovského prostoru $V$ je množina $M^{\perp} = \{v \in V : v \perp m \text{ pro všechna } m \in M\}$. Toto by byla jednoduše srozumitelná definice (podle stylu autora by bylo možné ji stručně dovysvětlit například v poznámce pod čarou), a to navíc ve formě, v jaké ji později skutečně používáte.

- Str. 11, popisek k obr.: Podle Vaší definice se ortogonální doplněk dělá k podprostoru; vektor není podprostor. Takovéto nepřesnosti nebrání v porozumění čtenáři s problematikou už obeznámenému; v tomto počtu však mohou výrazně zkomplikovat čtení začátečníkovi (jemuž především je text určen). Měla by být podána přesná definice ort. doplňku a ta pak přísně dodržována. Matematika je dost těžká i bez toho, aby si čtenář musel neustále domýšlet, co měl autor na mysli.

- Na téže stránce se píše, že „prostor dimenze 1 [...] je [...] nenulový normálový vektor". Takováto nepravdivá vyjádření nejsou v učebním textu přijatelná.

  O dva řádky níže se píše cosi o vektoru $x$, který nikde výše ani níže není definován.

  Celkově toto odvození (resp. vysvětlení) obecné rovnice nadroviny nepovažuji za uspokojivé. Podle mého názoru text pochopí jen ten, kdo už věc zná.

- Rovnice (2.5): má být asi $P$ místo $Q$.

- Str. 12, druhá vysazená rovnice: špatně indexy.

  Část o afinním prostoru by zasloužila podrobnější vysvětlení. (Např. co je to afinní prostor, nebo že vyhodnotit lineární formu vlastně v těchto konkrétních případech znamená vypočítat skalární součin, že každý vektor v eukl. (obecně Hilbertově) prostoru lze pomocí skal. součinu interpretovat jako lin. formu atd.)

- Druhý odstavec sekce 2.3: „vzdálenost přímky v rovině a roviny v prostoru": vzdálenost je vztahem dvou objektů, v porozumění tomuto vyjádření mi tedy zabránila absence informace, od čeho vzdálenost měříme.

- 4. odstavec téže sekce: dosud nikde nebylo vysvětleno, co je to normovaný vektor. Je sice uvedeno, že pro vektor $n$ jde o $\frac{n}{\|n\|}$, to však začátečníkovi nemusí stačit. Lépe by bylo dodat, že jde o vektor normy 1, který má stejný směr jako $n$.

- Str. 13: náhodně se střídá oddělování souřadnic vektoru čárkami a středníky. Výše byly obvykle čárky. Ve věci značení chci také poznamenat, že vektor a bod jedno jsou, takže formálně vzato je nesmysl značit jedno tak a druhé onak. Z didaktických důvodů je samozřejmě v pořádku zavést konvenci, že používáme dvě různá značení (hranaté vs. kulaté závorky) podle toho, jestli se na danou uspořádanou $n$-tici zrovna chceme dívat jako na vektor, nebo jako na bod.

- Sekce 2.4 by se měla trochu více rozvést; nenahraditelné použití skal. součinu ve fyzice podle mého názoru příliš neosvětluje.

- Str. 16 pod rovnicí (3.2): „Z této vlastnosti (3.2) plyne...“: tato vlastnost je přímo definicí pozitivní definitnosti. Přestože je to nejspíš myšleno jako definice, z textu to není jasné. Čtenář si snadno může myslet, že pozitivní definitnost je definována jinak a (3.2) ji pouze implikuje (a že s ní není nezbytně ekvivalentní). Pokud chcete vyjádřit ekvivalenci, nestačí napsat, že něco z něčeho „plyne“.

  Kromě toho ovšem nechápu, proč vlastnost být PD není definována v rámci Definice 1 – společně s případnými dalšími pojmy, které v textu využíváte bez pořádné definice, například symetrie bilineární formy, o níž se bez vysvětlení píše nahoře i dole na str. 15. O symetrii se sice píše už výše, ovšem pouze v souvislosti se skal. součinem a nikoliv v souvislosti s právě zavedeným pojmem bilineární formy. V tento moment čtenář ještě vlastně neví, že skal. součin je vlastně bilin. forma. A i kdyby to tušil, stále by znal pouze definici symetrie pro speciální případ bilin. formy, nikoliv v plné obecnosti.

  Tyto (a podobné) nedostatky nejsou pouze formální, podle mého názoru významně snižují čitelnost textu.

- Str. 17, první příklad: „vidíme, že závisí na konkrétní volbě báze, kterou jsme zvolili“: Pominu-li nešťastnou formulaci, i tak mi není jasné, co se tím vlastně myslí. Na první pohled přece není vůbec jasné, že pojem skalárního součinu (tak jak se o něm psalo v práci do tohoto bodu) s volbou báze vůbec nějak souvisí. Zapojím-li fantazii a domyslím-li si (na základě zkušeností, které čtenáři-začátečníkovi pravděpodobně chybí) význam tohoto vyjádření, ani tak se mi věc nezdá tak docela jasná. Níže se ovšem vysvětlují související věci (třeba matice bilin. formy a vyjádření vzhledem k různým bázím), takže se zdá, že tento příklad by měl přijít až po této teorii. Přijde-li před ní, měl by tam aspoň být odkaz na související pozdější text.

- Str. 17, příklad 3: Zde se poprvé objevuje formální definice skal. součinu v eukl. prostoru dimenze $\geqslant 3$. Přitom už byla implicitně použita mnohokrát.

  Dále by mělo být uvedeno, že příklady 2. a 3. jsou pouze jiná vyjádření téhož skal. součinu.

- Příklad 6: Myslím, že pokročilejší příklady by se měly nějak jasně oddělit od zbytku, aby bylo jasné, že to je „navíc“. Když už jsou uvedeny (a to je v pořádku), měly by být jasněji vysvětleny, aby to čtenáři přineslo alespoň nějakou představu. (Kromě slovního komentáře mi chybí třeba i vysvětlení integračního oboru.)

- Str. 18, Definice 3: Při dřívějších výskytech těchto pojmů bylo možné (a mělo se to stát) čtenáře odkázat na tuto definici.
- Str. 18, pozn. pod čarou 3: Málokdo ví, co je to úplný prostor, a neví, co je prostor Hilbertův.
- Str. 19: Chyba ve formulaci Věty 1: poslední slovo má být „závislé“, nikoliv „nezávislé“.
- Str. 19 nad rovnicí (3.4): „Z pozitivní definitnosti platí následující:“ Uvedená rovnice neplatí díky poz. def. Místo toho má být uvedeno, že výraz v rovnici je nezáporný, což se později používá.
- Str. 20, ř.2. Má být „nerovnost“.
- Str. 22 vyjádření bázových vektorů $b_{1,2}$: ve všech sčítancích přebývá činitel $x_1$.
- Str. 24, Definice 6: Nikde není vysvětleno, co je analytické vyjádření bilineární formy.
- Str. 25, poslední věta zakončená na stránce: Nechápu toto vyjádření. Není diagonální matice z definice charakteristickou vlastností polárního tvaru?
- Str. 26: Chtělo by to konstatovat, že takovou bázi najít můžeme.
- Str. 27 dole: „Je jasné, že těch bází bude nekonečně mnoho, zmiňme třeba bázi kanonickou...“: Pro leckterého čtenáře-začátečníka bude právě báze kanonická jediná, která ho napadne, případně jedna z konečně mnoha. Proč neuvést, že libovolné otočení ortonormální báze dá opět ortonormální bázi? Z toho je už skutečně „zřejmé“, že je jich nekonečně mnoho.
- Str. 28, ř. 9: „podmnožinu“ čeho?
- ř. 19: místo $c$ má v rovnici být $(v|a)$.
- Str. 28: Mělo by se zmínit, co se stane, když vektor $v$ bude prvkem $[a, b]$, resp. prvkem $[w_1, \ldots, w_m]$. (Značení pro lin. obal mimochodem nebylo nikde zavedeno.)

  Dále by mě zajímalo, co se dole na stránce míní výrazem „univerzální číslo“. Těch koeficientů je víc a jsou různé pro různé vektory $v$. Co je spojuje, je jeden vzorec pro jejich výpočet. Při odvozování vzorců se však o „univerzálních číslech“ obvykle nemluví.

  Na této stránce jsou i další podivné formulace.
- Str. 29 dole: „... doplnit libovolný vektor $v$ do ortogonální podmnožiny $W$“: Co to vůbec znamená? Přes upřímnou snahu to nechápu. Mimochodem lineární kombinace určená Four. koef. naopak bude prvkem toho podprostoru, nikoliv jeho ort. doplňku.

  O řádek níže: Vektor nemůže být ortogonálním doplňkem. Tím je podprostor.

- Str. 30 pod obrázkem: „Vektor $v^\perp$ je právě ortogonální doplněk $W$." Opět: není to pravda.

■ Str. 31, Obrázek 4.3: Tento obrázek je nestydatě překreslený ze skript doc. Bečváře, a to i s chybným značením (které ve skriptech zřejmě vzniklo z technických důvodů práce s grafickým programem). V textu se píše, že úvahy jsou „pěkně znázorněny na Obr 4.3". Já bych to z toho obrázku ale určitě nepochopil.

  Tento případ ukazuje, že zde došlo k opisu, ba i k obkreslení, bez většího přemýšlení o obsahu.

- Str. 32: Na začátku stránky se začíná nový myšlenkový celek, možná by si tedy zasloužil vlastní oddíl.

■ Výpočet integrálu na téže straně vůbec nedává smysl. Není vysvětleno, co je $u$, navíc se po substituci nezměnil diferenciál ani integrační meze. Z druhého řádku se zdá, že $u = \sin(\frac{2\pi}{l}x)$, což je nesmysl.

- Str. 32, 2 řádky nad Definicí 10: Čeho bázi tvoří? To není jasné a mělo by se to uvést s odkazem na literaturu.

- Definice 10: špatně Fourierova řada. Definice bez vysvětlení používá značení $R_{(0,l)}$.

■ Str. 33 nahoře: „jsou právě tyto řady nejlepší aproximací". V jakém smyslu (existuje řada možností)? V jakém prostoru? Jaké funkce můžeme takto aproximovat? Toto vyjádření je velmi pochybné.

- Str. 33: chybně spočtený Fourierův koeficient $a_0$.

  V dalším výpočtu se počítá určitý integrál podle proměnné $x$ a $x$ figuruje v uvedeném výsledku.

- Str. 35 nahoře: „můžeme pomocí normy definovat skal. součin pomocí formule..." Takto to lze provést pouze ve velmi speciálních případech normovaných lineárních prostorů. Obvykle nám uvedený vzorec nedá nic, co by se podobalo skalárnímu součinu.

  O něco níže se zmiňují aplikace v geografii. Aplikace ve fyzice (která je autorovi blízká) jsou však jistě zajímavější.

- Rovnice (5.1) první řádek: v posledním výrazu chybí u normy pod odmocninou druhá mocnina.

- V Definici 12 se používá značení pro tečný prostor k prametrizované ploše. To by možná stálo za stručné vysvětlení (když už se autor obtěžuje uvést formální definici, což je asi vzhledem ke komplexitě dalšího potřeba).

- Str. 36: Z formálního pohledu mi není jasné značení $X = f(u_1, u_2)$ a $Y = \ldots$. Myslím, že by to šlo napsat lépe.

- Níže na této stránce se píše, že první základní forma se dá chápat jako skal. součin v $\mathbb{R}^3$. Má ale matici $2 \times 2$. Správnější je samozřejmě v $\mathbb{R}^2$, ale ve skutečnosti by čtenáři dala lepší představu jiná interpretace.

  Poslední věta na stránce je (vlivem nepřesné formulace) zavádějící, neboť je pravdivá pouze pro plochy dimenze 2. Podstatné zde je, že matice je symetrická.

**Závěr:** Tato práce má i své světlé stránky (jak jsem uvedl v první části posudku), celkově však působí dosti nepromyšleným dojmem, části s největším potenciálem (a nejzajímavějším tématem - zejména poslední dvě kapitoly) jsou nedotažené a odbyté. Celkově práce působí poněkud nekonzistentně a zanechává jasný dojem promarněné příležitosti, protože patrně „byla šita horkou jehlou“. Ačkoliv práci podle mého názoru lze uznat jako bakalářskou, vzhledem k velkému množství problémů všech druhů a nenaplněnému didaktickému cíli pro ni bohužel musím navrhnout hodnocení *dobře*.

Martin Rmoutil