MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lukáš Weissgráb

Skalární součin – zavedení a aplikace

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Studijní program: Fyzika
Studijní obor: Fyzika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu práce za velmi cenné připomínky a výborné rady ke směřování mé práce. Také bych chtěl svému vedoucímu poděkovat za čas, který mojí bakalářskou prací strávil v nelehké době distanční výuky. Děkuji také své rodině za poskytnutí tolik důležité morální opory.

Název práce: Skalární součin – zavedení a aplikace

Autor: Lukáš Weissgráb

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato bakalářská práce představuje různé zavedení skalárního součinu v několika úrovních obtížnosti. V první části se věnuje zavedení skalárního součinu elementárně pouze za znalostí učiva střední školy. Pokročilejší partie této práce jsou věnovány zavedení skalárního součinu jako bilineární formy a zkoumáním vlastností této formy. Závěrečné kapitoly jsou věnovány Fourierovým řadám a 1. základní formě plochy. Všechny teoreticky vyložené poznatky jsou ilustrovány na příkladech z matematiky i fyziky.

Klíčová slova: skalární součin, bilineární forma, Fourierova řada, 1. základní forma plochy

Title: Dot product - definition and applications

Author: Lukáš Weissgráb

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This bachelor thesis presents various introductions of the dot product at several levels of difficulty. First part of the thesis deals with introduction of the dot product elementary, therefore only from knowledge of high school. The more advanced parts of this thesis are devoted to the introduction of the dot product as a bilinear form and focus on properties of this form. The final chapters are devoted to the Fourier series and the first fundamental form. All theorically explained pieces of knowledge are illustred with examples from mathematics and physics.

Keywords: dot product, bilinear form, Fourier series, first fundamental form

Obsah

Úvod

Cílem této bakalářské práce je přiblížit skalární součin různým úrovním čtenáře. Literatury přímo ke skalárnímu součinu není mnoho, a pokud se vyskytuje, je zaměřena pouze na některé partie. Jedním z dalších hlavních cílů je také ukázat, že často opomíjená složka matematiky, kterou je motivace, je při výkladu důležitá a usnadňuje čtenáři čtení a porozumění. Tento prvek je zde ukázán na výkladu skalárního součinu, který je zkonstruován od úvodních problémů, kdy řešíme elementární planimetrické úlohy a popisujeme je pomocí souřadnic, dále jsou tyto úvahy rozvíjeny zkoumáním vlastního skalárního součinu, ze kterých poté vyvozujeme jeho abstraktní definici, kde pouze klademe podmínky na skalární součin a vše, co je splňuje, můžeme považovat za skalární součin. Skalární součin je poté používán i ve vektorových prostorech funkcí, kde ukazujeme, že může být užitečný například k aproximaci funkcí. Jeho univerzální použití je poté završeno ukázkou využití k popisu vnitřní geometrie ploch v diferenciální geometrii. Snahou bakalářské práce je tedy podání uceleného výkladu, kdy čtenář plynule přejde od základních planimetrických úvah až k obtížnějšímu učivu diferenciální geometrie, čehož je docíleno pečlivou motivací a zdůvodňováním všech kroků, které jsou při odvozování podnikány.

První dvě kapitoly jsou věnovány zavedení skalárního součinu tak, jak by měl být zaváděn na střední škole a mohou sloužit učitelům i žákům právě této úrovně k většímu prohloubení svých znalostí a porozumění. Kapitoly mají za úkol motivovat čtenáře k zavedení skalárního součinu a objasňují, proč je vůbec důležité skalární součin zavádět. Formulují a také řeší základní problémy analytické geometrie, jako je vzdálenost dvou bodů a odchylka dvou vektorů.

Ve druhé kapitole se seznámíme s některými zajímavými aplikacemi skalárního součinu, se kterými se žáci můžou setkat jak na střední škole, tak na vysoké škole v případě obecné rovnice nadroviny a vzdálenosti. V této kapitole se také seznámíme s asi nejčastější fyzikální aplikací skalárního součinu, kterou je mechanická práce.

Poslední tři kapitoly jsou určené spíše vysokoškolským studentům se znalostmi lineární algebry a základů matematické analýzy, protože budují skalární součin abstraktně a ukazují výhody takovéto konstrukce. Kapitola o Fourierových řadách ukazuje, že skalární součin lze využít k aproximaci funkcí, jak je ukázáno i prakticky.

Závěrečná kapitola uzavírá celé téma skalárního součinu tím, že ho propojuje s diferenciální geometrií a umožňuje tak řešit obecné problémy křivek a ploch a popisuje vnitřní geometrii plochy.

1. Elementární zavedení skalárního součinu

Pokusme se nyní odpovědět na dvě zásadní otázky z analytické geometrie, konkrétněji z její metrické části. Tato část totiž popisuje z běžného života každému známé věci, a to: vzdálenosti, délky, velikosti úhlů a odchylky. Budeme se snažit popsat tyto základní problémy pomocí souřadnic a zaměříme se z počátku na ty nejjednodušší úlohy a uvidíme, že spoustu dalších úloh lze na ně redukovat. Vyřešme tedy níže uvedené základní úlohy:

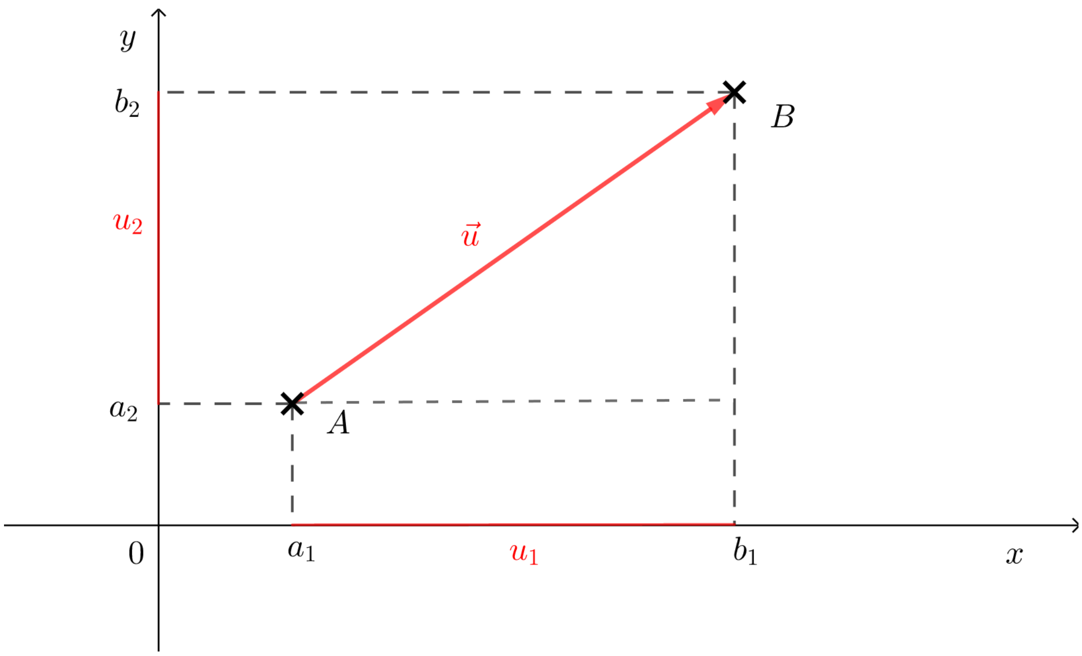
- vzdálenost dvou bodů,
- odchylku dvou vektorů,

a zapišme jejich řešení pomocí souřadnic.

1.1 Vzdálenost dvou bodů

Zvolme v soustavě souřadnic dva různé body $A = [a_1, a_2]$ a $B = [b_1, b_2]$, viz Obr. 1.1. Rozepíšeme-li si délky odvěsen v pravoúhlém trojúhelníku (Obr. 1.1), dostáváme dle Pýthagorovy věty délku přepony, která odpovídá vzdálenosti bodu A od bodu B:

$$|AB| = \sqrt{|b_1 - a_1|^2 + |b_2 - a_2|^2}.$$



Obrázek 1.1: Znázornění vzdálenosti bodů A a B v soustavě souřadnic

Na vzdálenost dvou bodů můžeme nahlížet také pomocí vyznačeného vektoru $\vec{u} = B - A$. Označíme-li rozdíly souřadnic bodů jednoduše jako $u_1 = b_1 - a_1$ a $u_2 = b_2 - a_2$, můžeme zapsat vektor $\vec{u}$ pomocí souřadnic jako $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Za pomocí vektoru $\vec{u}$ řešíme také vlastně již zmíněný problém vzdálenosti dvou bodů (bodu A a bodu B), řešíme tedy velikost vektoru $\vec{u}$. Označíme-li délku vektoru $\vec{u}$ jako $||\vec{u}||$, můžeme dle Pýthagorovy věty pro přeponu délky $||\vec{u}||$ a odvěsny délek $|u_1|$ a $|u_2|$ psát následující:

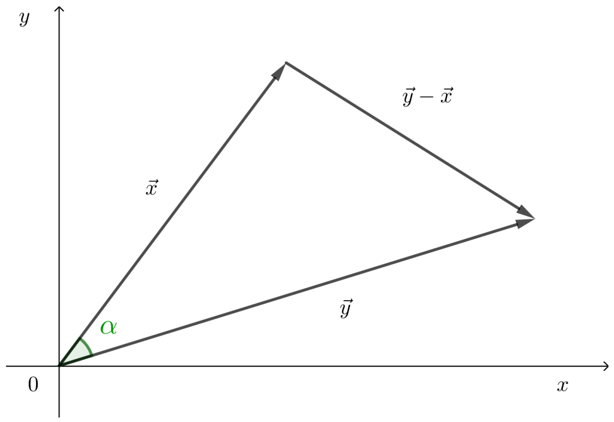
$$||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}. \tag{1.1}$$

Tuto jednoduchou formuli jsme odvodili pro všechny nenulové vektory $\vec{u}$. Uvědomíme-li si, že nulový vektor $\vec{o}$ je vlastně vektor se složkami $\vec{u} = (0, 0)$, tak dostáváme, že $||\vec{o}|| = 0$. Tím máme vztah (1.1) zobecněn pro všechny vektory v $\mathbb{R}^2$.

Výraz (1.1) nazveme **normou** vektoru $\vec{u}$. Norma vektoru je jeho délka, tím máme vyřešený problém vzdálenosti dvou bodů i normy vektoru.

1.2 Odchylka vektorů

Dalším zajímavým problémem, kterým se zabývá i středoškolská geometrie, je odchylka dvou vektorů. Označme je $\vec{x} = (x_1, x_2)$ a $\vec{y} = (y_1, y_2)$, viz Obr. 1.2.



Obrázek 1.2: Znázornění odchylky vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$

Jak je patrné z obrázku, na vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lze nahlížet jako na dvě strany trojúhelníku umístěného v soustavě souřadnic. Poslední stranu trojúhelníku lze reprezentovat vektorem $\vec{y} - \vec{x}$. Najděme nyní velikost úhlu α

.

Máme tedy obecný trojúhelník, kde známe velikost tří stran $||\vec{x}||$,$||\vec{y}||$, $||\vec{y} - \vec{x}||$ a hledáme velikost vnitřního úhlu α. Použijeme tedy kosinovou větu, dostáváme

$$||\vec{y} - \vec{x}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos\alpha. \tag{1.2}$$

Rozepíšeme-li jednotlivé normy vektorů pomocí souřadnic daných vektorů, tak dostaneme

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos\alpha,$$

umocníme závorky

$$y_1^2 - 2y_1x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2x_2 + x_2^2 = x_1^2 + {x_2}^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos\alpha,$$

kde po odečtění druhých mocnin (barevně) dostáváme

$$-2x_1y_1 - 2x_2y_2 = -2||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos\alpha.$$

Vydělíme-li celou rovnici -2, máme

$$x_1y_1 + x_2y_2 = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos\alpha, \tag{1.3}$$

a konečně vyjádříme-li kosinus hledané odchylky, dostáváme

$$\cos\alpha = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}. \tag{1.4}$$

Výraz $x_1y_1 + x_2y_2$ se zdá velmi užitečný pro výpočet odchylky vektorů, označme ho tedy jako $(\vec{x}, \vec{y})$. Díky tomuto značení potom snadno nahlédneme, že lze normu vektoru za pomocí $(\vec{x}, \vec{y})$ přepsat jako

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}. \tag{1.5}$$

Užitečnost výše uvedeného značení tkví v tom, že lze pomocí něho zapsat řešení **obou** základních úloh, kterými jsme se v této kapitole zabývali. V další kapitole tedy prozkoumáme blíže vlastnosti tohoto výrazu.

1.3 Vlastnosti skalárního součinu

Prozkoumejme nyní podrobněji vlastnosti výrazu $x_1y_1 + x_2y_2$, jenž jsme si označili jako $(\vec{x}, \vec{y})$.

- Rozepíšeme-li skalární součin $(\vec{x}, \vec{y})$ dle definice, zjistíme, že

  $$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 = y_1x_1 + y_2x_2 = (\vec{y}, \vec{x}). \tag{1.6}$$

  Náš výraz je tedy symetrický.

- Podíváme-li se také na to, jak se výraz chová při dosazení součtu vektorů do jedné ze složek (přirozená otázka, ve vektorovém prostoru je definováno sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem), tedy

  $$(\vec{x}, \vec{y}+\vec{z}) = x_1(y_1+z_1)+x_2(y_2+z_2) = x_1y_1+x_2y_2+x_1z_1+x_2z_2 = (\vec{x}, \vec{y})+(\vec{x}, \vec{z}), \tag{1.7}$$

  vidíme, že se výraz chová distributivně vzhledem ke sčítání.

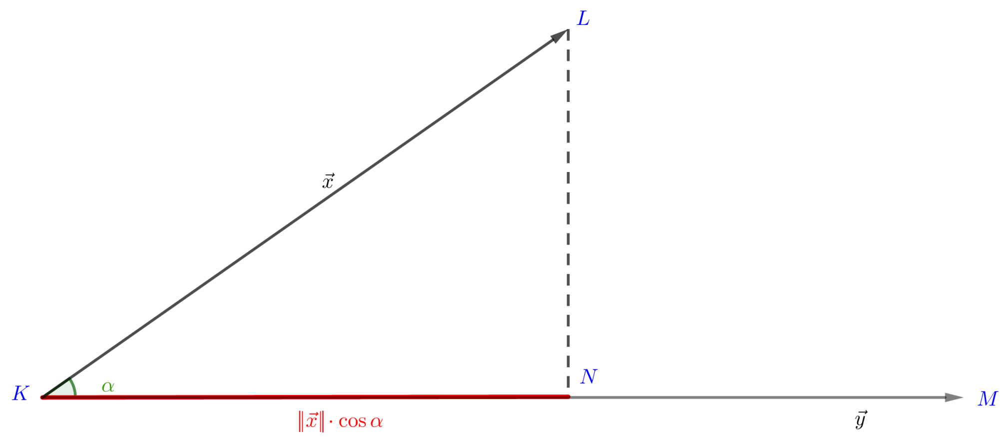
Zjistili jsme, že se zkoumaný výraz chová distributivně vzhledem ke sčítání, což je právě charakteristická vlastnost součinu. Jde tedy o **součin**. Označme ho tedy jako součin standardní tečkou $(\cdot)$, usnadní nám to práci v tom, že s ním každý bude intuitivně počítat jako se součinem a tedy v souladu s tím, co jsme zjistili. Také jsme ze symetrie zjistili, že je komutativní.

Nutno však zdůraznit, že se nejedná o součin v pravém slova smyslu. Pro součin totiž platí, že výsledkem každého součinu dvou prvků nějaké množiny by měl být opět prvek téže množiny; obecně výsledkem binární operace provedené se 2 prvky dané množiny by měl být opět prvek téže množiny, zde to však neplatí. Zatímco například u vektorového součinu, kde je součin dvou vektorů roven vektoru, je zde součin roven číslu (skaláru[1]).

Výraz $(\vec{x}, \vec{y})$ tedy budeme nazývat **skalárním součinem** a můžeme jej značit tečkou[2].

1.3.1 Geometrická interpretace skalárního součinu

Nyní se pojďme podívat na to, co vlastně skalární součin znamená geometricky. Pomůže nám k tomu Obrázek 1.3.



Obrázek 1.3: Geometrický význam skalárního součinu

Vrátíme-li se k uvedenému vztahu pro skalární součin (1.3), tedy že $\vec{x} \cdot \vec{y} = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos\alpha$, vidíme, že $||\vec{x}|| \cdot \cos\alpha$ je orientovaná délka projekce vektoru $\vec{x}$ do vektoru $\vec{y}$ (je vidět i na Obr. 1.3). Mluvíme zde o orientované délce projekce z důvodu, že kdybychom mluvili pouze o velikosti projekce, náš postup by „zhavaroval“ při tupém úhlu α, neboť $\cos\alpha$ je pro $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ záporný. Proto tedy orientovaná délka projekce.

Skalární součin $(\vec{x}, \vec{y})$ tedy udává orientovanou délku projekce vektoru $\vec{x}$ do vektoru $\vec{y}$ vynásobenou normou vektoru $\vec{y}$.

Velikost vektoru $\vec{y}$ geometrickou interpretaci komplikuje, situace bude mnohem jednodušší, bude-li vektor $\vec{y}$, do jehož směru promítáme, jednotkový. Poté člen $||\vec{y}||$ nemusíme psát a skalární součin $(\vec{x}, \vec{y})$ pak udává přímo orientovanou délku projekce vektoru $\vec{x}$ do vektoru $\vec{y}$.

[1]Z latinského scalae, v českém překladu žebřík.

[2]V anglicky mluvících zemích se proto můžeme setkat s termínem „dot product“, který naráží právě na používanou tečku.

2. Vybrané aplikace skalárního součinu

2.1 Odchylky vektorů, kolmost

V předchozích kapitolách jsme za pomocí skalárního součinu nalezli odchylku dvou vektorů. Zamysleme se nyní nad tím, co musí platit pro velikost úhlů, jestliže budeme zkoumat, jakých hodnot nabývá skalární součin. Budeme tedy zkoumat závislost skalárního součinu na velikosti úhlu, který vektory svírají. Pro ilustraci jsou níže uvedené úhly znázorněny na konci podkapitoly.

Podíváme-li se na formuli (1.3) pro odchylku dvou vektorů, vidíme, že výraz $||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$ je vždy kladný pro nenulové vektory, tedy znaménko závisí pouze na velikosti úhlu α. Zafixujeme-li tedy jeden vektor a druhým budeme otáčet, velikosti vektorů $||\vec{x}||$ a $||\vec{y}||$ se nezmění a můžeme pozorovat, že se mění pouze velikost úhlu α, tedy hodnota skalárního součinu $(\vec{x}, \vec{y})$ bude záviset pouze na $\cos\alpha$:

- $\alpha = 0 \iff (\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$,
- ostrý úhel $\quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \iff (\vec{x}, \vec{y}) > 0$,
- pravý úhel $\quad \alpha = \frac{\pi}{2}$, tj. $\vec{x} \perp \vec{y} \iff (\vec{x}, \vec{y}) = 0$,
- tupý úhel $\quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \iff (\vec{x}, \vec{y}) < 0$,
- $\alpha = \pi \iff (\vec{x}, \vec{y}) = -||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$.

Podívejme se nyní blíže na to, co platí pro skalární součin, když svírají vektory pravý úhel. Pozorný čtenář si všimne, že pro vztah $\vec{x} \perp \vec{y} \iff (\vec{x}, \vec{y}) = 0$ platí ekvivalence, nikoli pouze implikace. Je to přímý důsledek definice odchylky, která je definovaná pouze v intervalu $\alpha \in [0, \pi]$. Tento vztah lze vyjádřit například ze samotné kosinové věty.

Pro pravý úhel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ platí, že

$$\cos\alpha = 0.$$

Kosinová věta (1.3) tedy přejde ve větu Pýthagorovu

$$||\vec{y} - \vec{x}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2,$$

ze které rozepsáním levé strany pomocí formule (1.5) $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ dostáváme

$$||\vec{y} - \vec{x}||^2 = (\vec{y} - \vec{x})(\vec{y} - \vec{x}) = \vec{y} \cdot \vec{y} - 2\vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{x} = ||\vec{y}||^2 - 2\vec{y} \cdot \vec{x} + ||\vec{x}||^2,$$

a tedy celkově

$$||\vec{y}||^2 - 2\vec{y} \cdot \vec{x} + ||\vec{x}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2. \tag{2.1}$$

Snadno nahlédneme, že aby rovnost (2.1) platila, musí být $\vec{y} \cdot \vec{x} = 0$. Dostáváme tedy znovu vyjádření pro kolmost vektorů uvedené výše.

Početně jde o snadné důkazy, šlo by to ale vidět přímo, úplně bez počítání? Uveďme si nyní dva další pohledy na kolmost.

1. Pokud se vrátíme ke geometrické interpretaci skalárního součinu, stačí si uvědomit, že budou-li vektory na sebe kolmé, bude ortogonální projekce vektoru nulová.

2. Další důkaz je s využitím planimetrických vlastností obdélníku. Mějme vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, pro něž platí, že jsou na sebe kolmé, tj. $\vec{u} \perp \vec{v}$. Tyto vektory doplníme na rovnoběžník a jelikož jsou na sebe kolmé, dostáváme obdélník. U obdélníku víme, že má stejně dlouhé uhlopříčky, tedy že platí

$$||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u} - \vec{v}||,$$

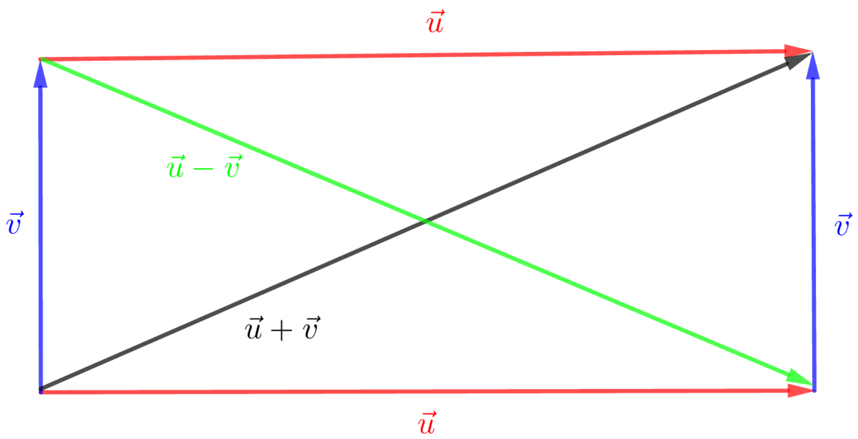
umocníme-li na druhou, dostáváme

$$||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2,$$

kde úpravou a vydělením 2 máme

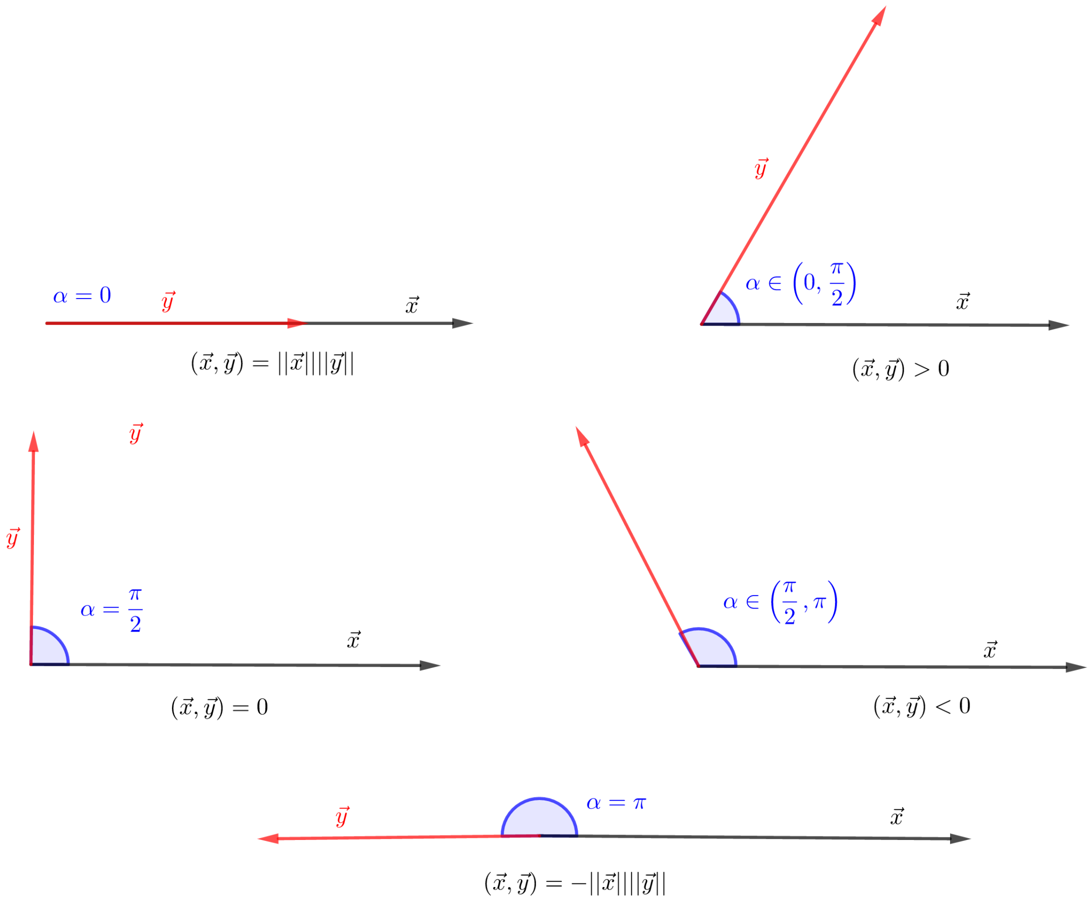
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Tato rovnice platí pouze, je-li $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Znázornění důkazu je k nahlédnutí na Obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Důkaz kolmosti s využitím vlastností obdélníku

Ilustrujme si nyní ještě prozkoumané vlastnosti na Obr. 2.2 pro význačné úhly $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ a $\alpha = \pi$.



Obrázek 2.2: Odchylky pro různé skalární součiny

Na Obr. 2.2 můžeme nahlédnout tak, že absolutní hodnota skalárního součinu $(\vec{x}, \vec{y})$ je vždy větší, nebo rovna součinu norem vektorů $||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$. Také vidíme, že rovnost nastává právě tehdy, je-li odchylka nulová (případně $\alpha = \pi$), tedy vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou lineárně závislé. Tato nerovnost se nazývá Cauchy-Schwarzova a budeme se jí zabývat později.

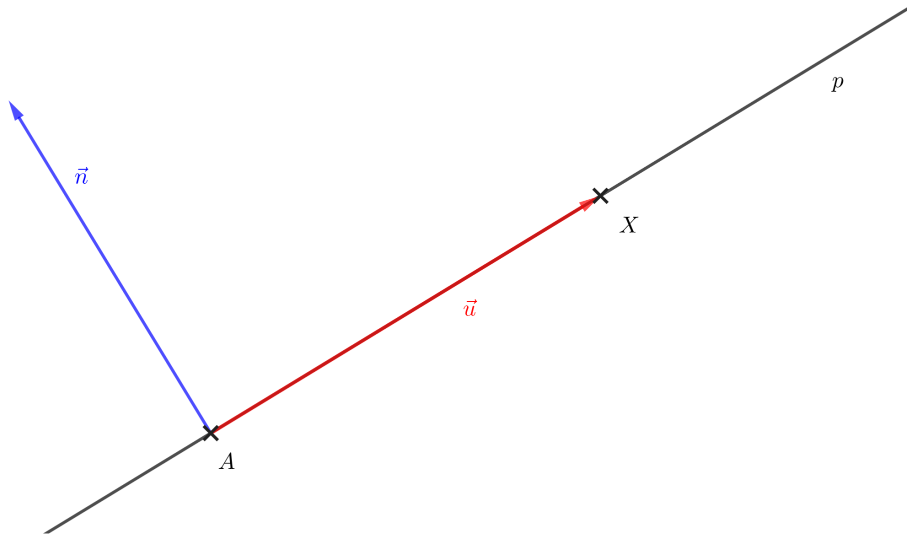
2.2 Obecná rovnice nadroviny v eukleidovském prostoru

Jedním ze základních problémů středoškolské analytické geometrie je nalezení obecné rovnice nadroviny. Nadrovinou může být například přímka (v $\mathbb{R}^2$) nebo rovina (v $\mathbb{R}^3$). Odvoďme si nyní takovou rovnici středoškolsky pouze za pomoci skalárního součinu.

Mějme přímku p zadanou parametrickým vyjádřením

$$X = A + t\vec{u},$$

kde $t \in \mathbb{R}$, X je libovolný bod přímky a A je jeden fixovaný bod přímky. Pro znázornění je situace, ze které vycházíme, narýsována na Obr. 2.3.



Obrázek 2.3: Znázornění obecné rovnice přímky v rovině

Vektor kolmý k zadané přímce p v bodě A je vektor $\vec{n}$. Dle vztahu pro kolmost $((\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} \perp \vec{y})$ můžeme psát

$$\vec{n} \cdot (X - A) = 0, \tag{2.2}$$

což je vlastně již hledaný obecný předpis pro nadrovinu.

Naše úvahy můžeme ilustrovat v kartézské soustavě souřadnic, v níž mají výše zmíněné body a vektor souřadnice $X = [x, y], A = [a_1, a_2]$ a $\vec{n} = (a, b)$. Rozepsáním souřadnic a dosazením do (2.2) můžeme psát

$$(a{,}b) \cdot (x - a_1{,}y - a_2) = 0,$$

provedeme skalární součin

$$a(x - a_1) + b(y - a_2) = 0,$$

roznásobíme závorky a konstanty označíme souhrně jako c (červeně)

$$ax + by {\color{red}- aa_1 - ba_2} = 0.$$

Dostáváme tedy obecnou rovnici přímky p v konkrétní kartézské soustavě souřadnic jako

$$p : ax + by + c = 0. \tag{2.3}$$

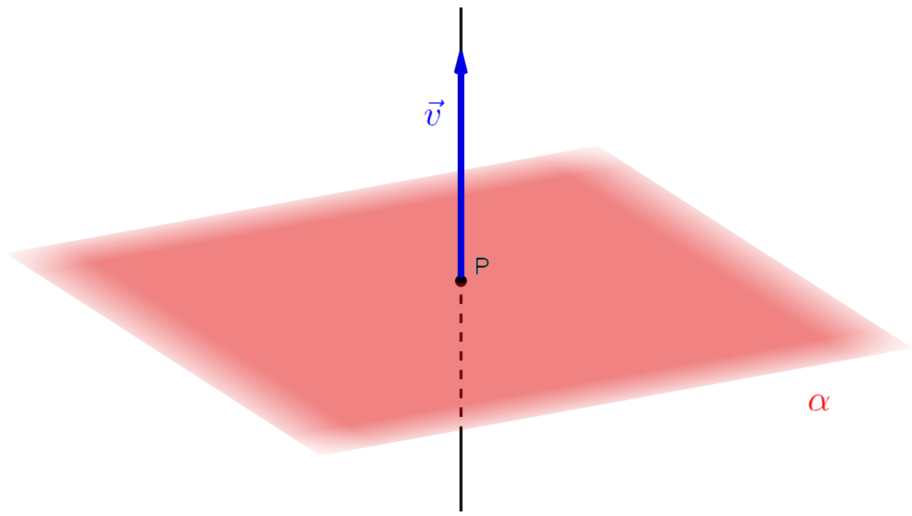
Analogicky bychom mohli odvodit obecnou rovnici roviny v prostoru.

Pojďme se nyní na tento problém podívat úplně obecně a najít obecnou rovnici nadroviny, což je podprostor dimenze $n-1$. Chceme tedy vhodně charakterizovat podprostor dimenze $n-1$ a popsat ho pomocí obecné rovnice. Využijeme k tomu znalostí z lineární algebry (ortogonální doplněk) a využijeme skalární součin. Ortogonální doplněk (budeme jej značit $V^{\perp}$) je množina všech prvků z daného vektorového prostoru, která je kolmá na určený podprostor vektorového prostoru, kterého ortogonální doplněk určujeme.

Jestliže máme vektorový prostor V^n a jeho podprostor V_k, můžeme dle věty o dimenzi ortogonálního doplňku psát

$$\dim V_k^{\perp} = n - k, \tag{2.4}$$

kde n je dimenze vektorového prostoru, k dimenze vektorového podprostoru a $\dim V_k^{\perp}$ je dimenze ortogonálního doplňku. Jak by mohl takový ortogonální doplněk vektoru $\vec{v}$ vypadat v prostoru je naznačeno na Obr. 2.4, vidíme, že doplňkem je v tomto případě červeně vyznačená rovina α.



Obrázek 2.4: Ortogonální doplněk vektoru

Jelikož nadrovina je podprostor dimenze $n-1$, můžeme položit $k = 1$ a dle (2.4) dostaneme

$$\dim V_1^{\perp} = n - 1.$$

Prostor dimenze 1 je přímka, je to tedy nenulový normálový vektor $\vec{n}$. Místo nějakého obecného vektoru $\vec{v}$ tedy můžeme psát nenulový normálový vektor $\vec{n}$ k vektoru $\vec{x}$. Máme-li tedy obecnou nadrovinu β, můžeme psát

$$\beta : \vec{n} \cdot (X - Q) = 0. \tag{2.5}$$

Tím je problém úspěšně vyřešen. Našli jsme rovnici nadroviny v eukleidovském prostoru.

Na závěr čtenáři pro porovnání připomeňme, jak vypadá obecná rovnice nadroviny v afinním prostoru. Při odvozování této rovnice není vůbec potřeba skalární součin a vystačíme si pouze se znalostí lineárních forem a homomorfismů. Rovnice má pak tvar:

$$f(X - Q) = 0, \tag{2.6}$$

kde X je libovolný bod nadroviny, Q fixovaný bod nadroviny a konečně f nenulová lineární forma. Rozepíšeme-li si vztah pro nadrovinu (2.6) v konkrétních souřadnicích (f je lineární forma)

$$f(X - Q) = a_1(x_1 - q_1) + \cdots + a_n(x_2 - q_2) = 0,$$

tak vidíme, že v tomto vztahu vystupují koeficienty $a_1, \cdots, a_n$, což jsou v naší eukleidovské obecné rovnici nadroviny (2.5) souřadnice normálového vektoru $\vec{n} = (a_1, \cdots, a_n)$. V eukleidovském prostoru jsme pomocí skalárního součinu dostali stejný výsledek, jako v prostoru afinním.

2.3 Vzdálenost bodu od nadroviny

Za pomoci geometrické interpretace skalárního součinu si nyní odvodíme vzorce pro vzdálenost bodu od nadroviny v rovině a v prostoru. Tyto vztahy nám pomohou i mnoha jiných případech, protože vzdálenost dvou podprostorů lze totiž vždy převést na vzdálenost bodu od podprostoru (pomocí přesouvání bázových vektorů zaměření).

Nadále budeme pokračovat společně pro odvození vztahu pro vzdálenost přímky v rovině a roviny v prostoru. Mějme libovolnou nadrovinu β a její odvozenou obecnou rovnici například v předchozí kapitole o obecné rovnici nadroviny, viz (2.5).

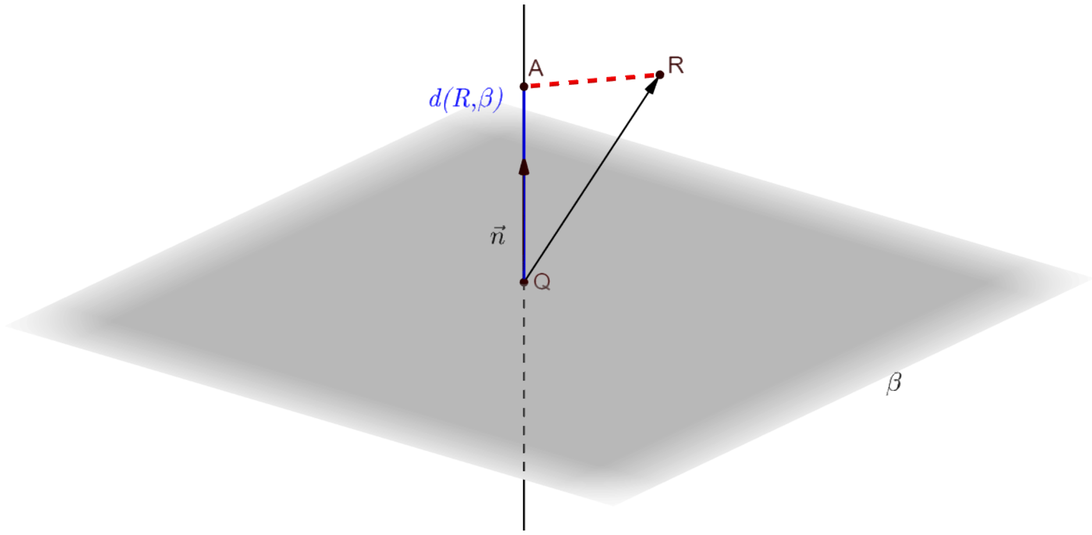
Zabývejme se nyní vzdáleností bodu R, který neleží v dané nadrovině, od nadroviny β. Tuto vzdálenost budeme značit $d(R, \beta)$. Situace je znázorněna na Obrázku 2.5.

Pohlédneme-li na Obrázek 2.5 pozorněji, tak zjistíme, že vzdálenost $d(R, \beta)$ je rovna absolutní hodnotě délky projekce vektoru $(R - Q)$ do směru normálového vektoru $\vec{n}$. Pokud vezmeme místo normálového vektoru $\vec{n}$ vektor normovaný, tedy $\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}$, bude délka ortogonální projekce vektoru $(R - Q)$ do směru jednotkového vektoru $\vec{n}$ dle odvození geometrické interpretace rovna přímo skalárnímu součinu, takže délku samotné projekce můžeme vyjádřit jako

$$d(R,\beta) = \left| \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} \cdot (R - Q) \right|.$$

Upravíme-li pravou stranu na jeden zlomek, můžeme psát

$$d(R,\beta) = \frac{|\vec{n} \cdot (R - Q)|}{||\vec{n}||}. \tag{2.7}$$



Obrázek 2.5: Vzdálenost bodu od nadroviny

Pohledem na čitatele zlomku v (2.7) a porovnáním s levou stranou obecné rovnice nadroviny vyjádřené v (2.5) zjišťujeme, že je to vlastně totožné vyjádření akorát s dosazeným konkrétním bodem R.

Rozepišme nyní rovnici (2.7) v souřadnicích nejprve v rovině a poté v prostoru.

1. V rovině zvolme souřadnice bodu $R = [r_1; r_2]$, normálový vektor $\vec{n} = (a; b)$, bod $Q = [q_1; q_2]$, bod $X = [x, y]$, přímka p tak bude mít obecné vyjádření $p : (a; b) \cdot (x - q_1; y - q_2) = 0$, tedy $p : ax + by + c = 0$, kde $c = -aq_1 - bq_2$. Potom můžeme dle (2.7) psát
$$d(R,p) = \frac{|\vec{n} \cdot (R - Q)|}{||\vec{n}||} = \frac{|ar_1 + br_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

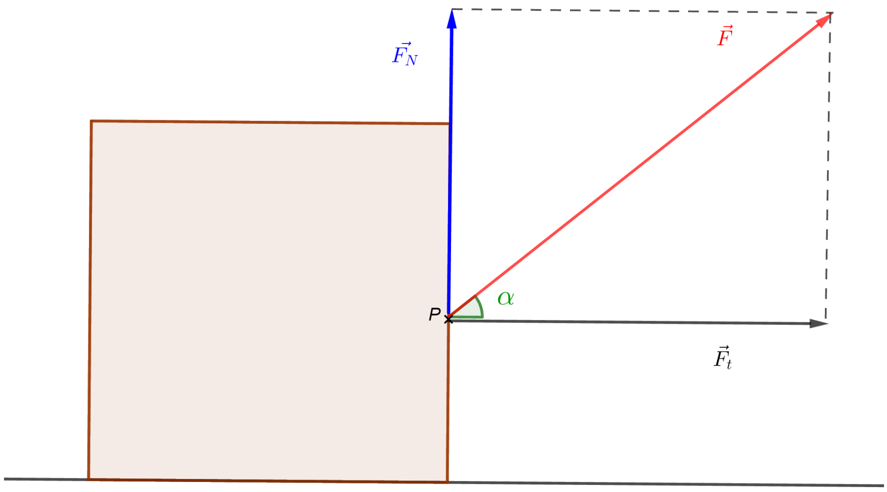
2. V prostoru zvolme souřadnice bodu $R = [r_1; r_2, r_3]$, normálový vektor $\vec{n} = (a; b; c)$, bod $Q = [q_1; q_2; q_3]$, bod $X = [x; y; z]$, rovina β tak bude mít obecné vyjádření $\beta : (a; b; c) \cdot (x - q_1; y - q_2; z - q_3) = 0$, tedy $\beta : ax + by + cz + d = 0$, kde $d = -aq_1 - bq_2 - cq_3$. Potom můžeme dle (2.7) psát
$$d(R, \beta) = \frac{|\vec{n}| \cdot (R - Q)}{||\vec{n}||} = \frac{|ar_1 + br_2 + cr_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

2.4 Práce vykonaná tělesem

Skalární součin nemá využití pouze v matematice a proto se nyní na závěr této kapitoly podívejme na využití skalárního součinu ve fyzice.

Už na základní škole se děti dozvídají, že práce W vykonaná tělesem, které se pohybuje po přímce a působí na něj konstantní síla F ve směru pohybu, se vypočítá dle vztahu
$$W = Fs, \tag{2.8}$$
kde F je velikost působící síly a s je dráha, kterou těleso urazilo.

Na střední škole se situace komplikuje, protože působící síla již nemusí nutně působit ve směru pohybu a s dráhou a silou se již pracuje jako s vektory. Jak by taková situace mohla vypadat s působící silou $\vec{F}$, je znázorněno na Obr. 2.6.



Obrázek 2.6: Znázornění sil při posouvání tělesa

Pokud například potáhneme krychli provázkem silou $\vec{F}$, která svírá s trajektorií úhel α, jak je znázorněno, bude na ní působit také normálová síla podložky $\vec{F_N}$ a samozřejmě třecí síla, kterou pro jednoduchost neuvažujeme. Ve směru pohybu nyní působí pouze síla $\vec{F_t}$ a právě ta síla tělesem hýbe po podložce po dráze $\vec{s}$.

Zamysleme se nyní nad tím, jak musíme upravit vztah (2.8) na naší situaci. Vyjádřeme si tedy sílu $\vec{F_t}$, která hýbe krychlí v závislosti na zadané síle $\vec{F}$ (tu může například způsobovat holčička, která krychli táhne po zemi). Pak stačí akorát použít goniometrické funkce pro trojúhelníček s rameny $\vec{F_t}$ a $\vec{F}$. Pro velikosti sil tedy zřejmě platí

$$F_t = F \cos \alpha.$$

Pro pohybem vykonanou práci tedy po dosazení do vztahu (2.8) platí

$$W = F s \cos \alpha. \tag{2.9}$$

Zde pozorný čtenář zbystří, protože vztah (2.9) připomíná vzorec (1.3), tedy výraz $\vec{x} \cdot y = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cos \alpha$. Síla $\vec{F}$ je v našem případě orientovaná délka projekce do vektoru $\vec{F_t}$, což je pěkně vidět i z Obr. 2.6. Označme tedy v souladu s geometrickou interpretací skalárního součinu i vztah (2.9) jako skalární součin

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Toto označení nám při výpočtech práce ulehčuje námahu tím, že stačí znát pouze vektory působící síly $\vec{F}$ a trajektorie pohybu $\vec{s}$.

3. Abstraktní zavedení skalárního součinu

Připomeňme pro začátek, že v rovině byl skalární součin dvou vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ roven výrazu

$$(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Nyní si všimněme, že do výrazu $(\vec{x},\vec{y})$ vstupují dva vektory a výsledkem je vždy číslo. To je zajímavé pozorování, protože se na výraz $(\vec{x},\vec{y})$ můžeme dívat také jako na **formu**. Z kapitoly o vlastnostech tohoto skalárního součinu a (1.6) také vidíme, že je naše forma symetrická.

Ve vektorovém prostoru máme v zásadě dvě operace: sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem. Z (1.7) jsme také zjistili, že se forma chová po dosazení součtu vektorů do jedné ze složek distributivně vzhledem ke sčítání. Prozkoumejme nyní, jak se tato forma chová vůči násobení skalárem a, kde $a \in \mathbb{R}$:

$$(\vec{x}, a\vec{y}) = x_1ay_1 + x_2ay_2 = a(x_1y_1 + x_2y_2) = a(\vec{x},\vec{y}). \tag{3.1}$$

Z rozepsání (3.1) tedy vidíme, že se forma po dosazení skaláru do jedné ze složek chová distributivně vzhledem k násobení skalárem (tuto vlastnost má díky symetričnosti). Vlastnosti (1.7) a (3.1) lze snadno aplikovat i na první složku této formy, důkazy tedy vynecháme.

Forma je tedy aditivní a homogenní v obou svých složkách, je tedy lineární v obou složkách. Budeme ji nazývat bilineární. Podívejme se nyní na definici bilineární formy, jak je například uvedena v [Be].

Definice 1. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Bilineární formou na prostoru V budeme rozumět každé zobrazení f kartézského součinu $V \times V$ do tělesa T, pro které platí:*

1. $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V \quad f(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = f(\vec{x},\vec{z}) + f(\vec{y},\vec{z})$,
2. $\forall \vec{x},\vec{y} \in V\ \forall a \in T \quad f(a\vec{x},\vec{y}) = a \cdot f(\vec{x},\vec{y})$,
3. $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V \quad f(\vec{x},\vec{y}+\vec{z}) = f(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{x},\vec{z})$,
4. $\forall \vec{x},\vec{y} \in V\ \forall a \in T \quad f(\vec{x},a\vec{y}) = a \cdot f(\vec{x},\vec{y})$.

Naše forma skalárního součinu, kterou jsme zavedli splňuje definici uvedenou výše. Jde tedy o **bilineární formu**, která je navíc **symetrická**.

Pojďme se nyní vrátit k základním problémům, které jsme řešili v úvodních kapitolách. Šlo zejména o

- vzdálenost dvou bodů, respektive normu vektoru,
- odchylku dvou vektorů.

V obou řešených problémech se objevovala norma vektoru, definovaná v (1.1) jako $||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. V této rovnosti se vyskytuje odmocnina, která má definiční obor pouze nezáporná čísla. Díky této podmínce dostáváme jednoduchou podmínku pro naší symetrickou bilineární formu, a to

$$\forall \vec{x} \in V, \vec{x} \neq \vec{o} \quad f(\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad \text{a} \quad f(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{o}. \tag{3.2}$$

Tato formule souhlasí s tím, že norma vektoru je vždy nezáporná a je nulová pouze pro nulový vektor. Z této vlastnosti (3.2) plyne, že je naše forma **pozitivně definitní**.

Až doteď jsme pracovali se skalárním součinem jako s určitým geometrickým nástrojem, u kterého jsme výše zjišťovali vlastnosti z lineární algebry. Zkusme na to nyní jít z druhé strany a zvolit ve zkoumání skalárního součinu abstraktní přístup: co kdybychom nazývali skalárním součinem všechny **symetrické, pozitivně definitní bilineární formy**? Výhodou tohoto přístupu je, že již máme předepsané podmínky a cokoli je splňuje, je automaticky skalární součin. Tímto způsobem můžeme zobecnit skalární součin a nemusíme zkoumat pouze vektory, ale například i funkce.

Můžeme tedy zformulovat obecnou definici skalárního součinu, viz. také [Be].

Definice 2. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Skalárním součinem na prostoru V nazveme každé zobrazení f množiny $V \times V$ do tělesa T, které má následující vlastnosti:*

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$,
2. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V \quad f(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = f(\vec{x}, \vec{z}) + f(\vec{y}, \vec{z})$,
3. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall a \in T \quad f(a\vec{x}, \vec{y}) = a \cdot f(\vec{x}, \vec{y})$,
4. $\forall \vec{x} \in V, \vec{x} \neq 0 \quad f(\vec{x}, \vec{x}) > 0$.

Prostor se skalárním součinem se také někdy nazývá unitární prostor. Všimněme si, že definice je postavená přesně tak, jak jsme k ní docházeli postupnými úvahami. V mnoha učebnicích se stává, že definice tzv. „spadne z nebe“. Nám se povedlo postavit definici logickým zkoumáním vlastností skalárního součinu. Často se takto definovaný skalární součin označuje jako $(\vec{x}|\vec{y})$. Budeme ho proto nadále značit právě takto.

3.1 Příklady skalárních součinů

Uveďme si nyní několik příkladů skalárních součinů, které vyhovují abstraktní definici skalárního součinu. Na začátek uvádíme jeden již známý a prozkoumaný skalární součin z první kapitoly. Příklady 3–5 jsou převzaty z [Be].

1. Ve vektorovém prostoru snadno nahlédneme, že i bilineární forma definovaná jako
$$(\vec{x}|\vec{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$
je skalárním součinem. Na tomto skalárním součinu vidíme, že závisí na konkrétní volbě báze, kterou jsme zvolili (pracuje totiž se souřadnicemi vektorů vzhledem ke zvolené bázi).

2. V souladu s (1.4) můžeme definovat skalární součin dvou nenulových vektorů jako součin jejich norem (délek) a kosinem úhlu, který svírají. Takový skalární součin je poté definován jako
$$(\vec{x},\vec{y}) = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos\alpha.$$

3. Na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ definujeme standardní skalární součin obvyklým způsobem: pro souřadnice vektorů vzhledem k nějaké bázi $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ nechť
$$(\vec{x}|\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$
U tohoto příkladu stojí za povšimnutí, že nám umožňuje definovat skalární součin i pro vícerozměrné prostory než jen dvourozměrné (rovina). Například by díky tomu bylo v souladu i stejné odvození pro odchylku vektorů v prostoru. O tomto skalárním součinu se někdy hovoří jako o standardním skalárním součinu (v rovině je to totiž už na střední škole dobře známý skalární součin $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2$).

4. V prostoru všech reálných funkcí spojitých na intervalu $\langle a,b \rangle$ můžeme definovat skalární součin rovností
$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$
kde f, g jsou dané reálné spojité funkce. Toto je jeden z možných případů definice skalárního součinu funkcí, existuje jich samozřejmě více.

5. V prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ všech čtvercových matic řádu n definujeme skalární součin rovností
$$(A|B) = \mathrm{tr}(A \cdot B^T).$$
Připomeňme, že tr$A$ je tzv. stopa matice A; je-li $A = (a_{ij})$ matice řádu n, potom $\mathrm{tr}A = \sum_{k=1}^n a_{kk}$. Tedy
$$(A|B) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{kj}.$$

6. Pojďme se nyní podívat na fyzikální příklad z kvantové mechaniky [Sk]. Tam je skalární součin dvou vlnových funkcí[2] definován jako

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int_{c.p.} \psi_1^*\psi_2 \mathrm{d}V,$$

kde ψ_1, ψ_2 jsou vlnové funkce, které integrujeme přes celý Hilbertův[3] prostor funkcí, které popisují fyzikálně přístupné stavy. V kvantové mechanice značíme symbolem * komplexní sdružení.

7. Zkusme se nyní podívat ještě na jeden příklad skalárního součinu, používaného ve fyzice, konkrétně v teorii relativity [Vo]. Tam je skalární součin dvou vektorů $u = (t, x, y, z)$ a $u' = (t', x', y', z')$[4] definován jako

$$(u|u') = tt' - xx' - yy' - zz'^5.$$

Fyzikálním významem se nyní nebudeme zabývat, všimněme si ale zajímavé věci. Proveďme takto definovaný skalární součin například s vektory $u = (0{,}1{,}0{,}0)$ a $u' = (0{,}1{,}0{,}0)$. Dostáváme potom následující

$$(u|u') = -1.$$

Z předchozích úvah, a zejména z (3.2), by měl takový skalární součin vyjít ostře větší než 0. To zde neplatí. Dostáváme tedy příklad „skalárního součinu”, který není pozitivně definitní. Nutno na závěr zdůraznit, že tento skalární součin není skalárním součinem ve smyslu Definice 2. Někdy takovouto formu označujeme jako náboj, u něhož může být „velikost“ i záporná (analogicky jako elektrický náboj může být záporný).

3.2 Vlastnosti prostorů se skalárním součinem

Normu vektoru, zavedenou v rovině jako (1.1) lze definovat i obecně v prostorech se skalárním součinem. Jedna z možných definic, je dle [Be] uvedena níže.

Definice 3. *Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Normou (též délkou) vektoru $\vec{v} \in V$ budeme rozumět reálné číslo $||\vec{v}||$ definované rovností $||\vec{v}|| = \sqrt{(\vec{v}|\vec{v})}$. Vektor $\vec{v}$ se nazývá normovaný (též jednotkový), jestliže je $||\vec{v}|| = 1$.*

Tato definice je naprosto v souladu s tím, jak jsme definovali normu vektoru v rovině. Analogicky by šla definovat norma vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ v prostoru pomocí této definice a to

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

[2]Funkce, které jsou používány pro matematický popis stavu systému.

[3]Úplný vektorový prostor se skalárním součinem.

[4]Jde vlastně o souřadnice času a prostoru.

[5]Tento skalární součin je definován tzv. metrickým tenzorem ve speciální teorii relativity.

Uveďme si nyní dvě důležité věty, jež mají široké uplatnění. První větou je Cauchy-Schwarzova nerovnost. Na tuto nerovnost jsme narazili už při zkoumání vlastností skalárního součinu v závislosti na velikosti úhlu, který svírají. Věty i s důkazy jsou převzaty z [Be].

Věta 1 (Cauchy-Schwarzova nerovnost)**.** *Pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y}$ prostoru se skalárním součinem platí nerovnost*

$$|(\vec{x}|\vec{y})| \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||. \tag{3.3}$$

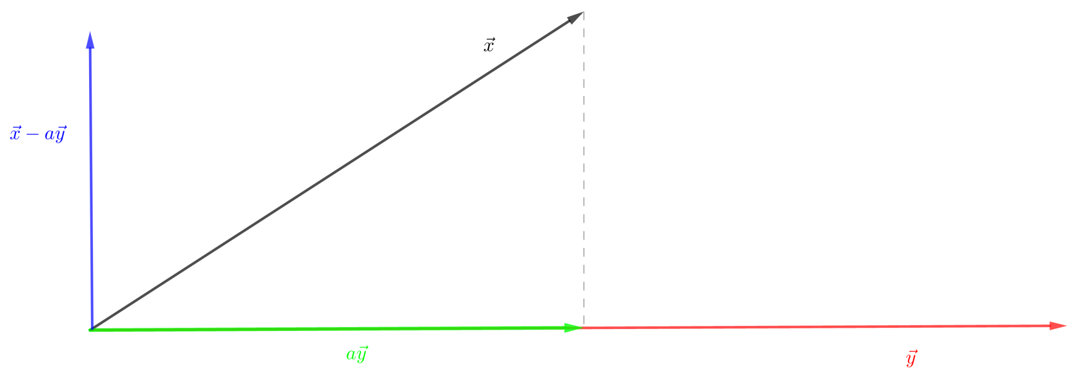
Rovnost nastane právě tehdy, když jsou vektory $\vec{x}, \vec{y}$ lineárně nezávislé.

Důkaz. Jestliže je $\vec{y}$ rovno nule, jsou obě strany rovny nule a nastává dokonce rovnost.

Předpokládejme proto, že $\vec{y} \neq \vec{o}$. Z pozitivní definitnosti platí následující:

$$(\vec{x} - a\vec{y}|\vec{x} - a\vec{y}) = ||\vec{x}||^2 - 2a(\vec{x}|\vec{y}) + a^2||\vec{y}||^2. \tag{3.4}$$

Podívejme si nyní na geometrickou interpretaci této situace, jak je znázorněna na Obr.3.1.



Obrázek 3.1: Geometrické znázornění Cauchy-Schwarzovy nerovnosti

Vektor $a\vec{y}$ je vlastně ortogonální projekcí vektoru $\vec{x}$ do vektoru $\vec{y}$. Položme nyní $a = \frac{(\vec{x}|\vec{y})}{||\vec{y}||^2}$ a dosaďme do (3.4). Teoretické podložení toho, proč dosazujeme právě tento výraz dostaneme v kapitole o Fourierových koeficientech. Dostáváme pak

$$||\vec{x}||^2 - \frac{2(\vec{x}|\vec{y})^2}{||\vec{y}||^2} + \frac{(\vec{x}|\vec{y})^2}{||\vec{y}||^2} = ||\vec{x}^2|| - \frac{(\vec{x}|\vec{y})^2}{||\vec{y}||^2}.$$

Vynásobme nyní celou rovnost $||\vec{y}||^2$ a můžeme psát

$$0 \leq ||\vec{x}||^2 \cdot ||\vec{y}||^2 - (\vec{x}|\vec{y})^2,$$

tedy

$$(\vec{x}|\vec{y})^2 \leq ||\vec{x}||^2 \cdot ||\vec{y}||^2.$$

Po odmocnění dostáváme dokazovanou nerovnost.

Pojďme nyní ještě prodiskutovat, kdy nastává rovnost:

- Jsou-li $\vec{x}, \vec{y}$ lineárně nezávislé, platí určitě $\vec{x} - a\vec{y} \neq 0$. Všude tedy můžeme psát ostrou rovnost.
- Jsou-li $\vec{x}, \vec{y}$ lineárně závislé, můžeme psát $\vec{x} = b\vec{y}$. Platí tedy $(b\vec{y}|\vec{y}) = b \cdot ||\vec{y}||^2$ a následně můžeme psát

$$\begin{aligned} ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| &= |b| \cdot ||\vec{y}|| \cdot ||\vec{y}|| \\ |(\vec{x}|\vec{y})| &= |b| \cdot ||\vec{y}||^2. \end{aligned}$$

  Zde je důkaz hotov.

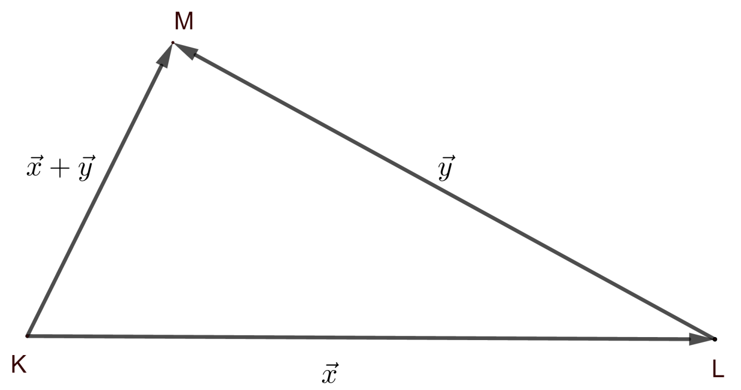
□

Pojďme se nyní ještě podívat na jednu důležitou větu, jejíž jednodušší formulace se učí již na základní škole při konstrukci trojúhelníků. Jde o **trojúhelníkovou nerovnost**. My si jí nyní uvedeme zapsanou pomocí vektorů a jejich norem.

Věta 2 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y}$ prostoru se skalárním součinem platí nerovnost*

$$||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||. \tag{3.5}$$

Důkaz. K pochopení a znázornění důkazu nám pomůže Obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Trojúhelníková nerovnost

Z definice normy a vlastností skalárního součinu plyne:

$$||\vec{x} + \vec{y}||^2 = (\vec{x} + \vec{y}|\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}|\vec{x}) + (\vec{x}|\vec{y}) + (\vec{y}|\vec{x}) + (\vec{y}|\vec{y}) = ||\vec{x}||^2 + 2 \cdot (\vec{x}|\vec{y}) + ||\vec{y}||^2,$$

neboť máme pozitivně bilineární formu. Podle (3.3) však platí:

$$(\vec{x}|\vec{y}) \leq |(\vec{x}|\vec{y})| \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||,$$

tedy

$$||\vec{x} + \vec{y}||^2 \leq ||\vec{x}||^2 + 2 \cdot ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| + ||\vec{y}||^2 = (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2$$

a po odmocnění dostáváme požadovaný výsledek. □

Tento poznatek vlastně koresponduje s jednoduchou úvahou, že má-li se člověk dostat z bodu K do bodu M, vždycky bude nejkratší přímá cesta, nikoli cesta zvolená přes bod L.

3.2.1 Konečněrozměrné prostory se skalárním součinem

Vraťme se nyní ještě k tomu, že je skalární součin symetrická, pozitivně definitní bilineární forma. Na skalární součin v konečněrozměrných prostorech tedy můžeme aplikovat veškerou teorii o bilineárních formách.

V minulé kapitole jsme zkoumáním dospěli k tomu, že je skalární součin bilineární forma. O bilineárních formách víme, že jsou to zobrazení a otázkou nyní je, jak zadat toto zobrazení. Budou nám k tomu stačit pouze obrazy bázových prvků, protože ostatní vektory lze vyjádřit jako lineární kombinace této báze. Ilustrujme si tyto úvahy na jednoduchém příkladu v $\mathbb{R}^2$.

Máme bázi prostoru $\mathbb{R}^2$ definovanou jako $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$. Pak můžeme každý vektor $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze, tj.

$$\vec{x} = x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} = \sum_{i=1}^{2} x_i\vec{v_i},$$

$$\vec{y} = y_1\vec{v_1} + y_2\vec{v_2} = \sum_{j=1}^{2} y_j\vec{v_j},$$

kde $\langle\vec{x}\rangle_B = (x_1, x_2)$ a $\langle\vec{y}\rangle_B = (y_1, y_2)$ jsou souřadnice vektorů v dané bázi. Dosaďme nyní vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ do předpisu bilineární formy, dostáváme

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\sum_{i=1}^{2} x_i\vec{v_i}, \sum_{j=1}^{2} y_j\vec{v_j}),$$

souřadnice vektorů v bázi můžeme vytknout před formu, jsou to skaláry, dostáváme tedy

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j f(\vec{v_i}, \vec{v_j}),$$

kde červeně jsou vyznačeny právě prvky matice bilineární formy. S přihlédnutím k násobení matic můžeme vztah ještě rozepsat jako

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \langle\vec{x}\rangle_B \cdot f(\vec{v_i}, \vec{v_j}) \cdot \langle\vec{y}\rangle_B^T. \tag{3.6}$$

V souladu s provedenými úvahami výše, definujme matici bilineární formy, viz [Be].

Definice 4. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $M = \{\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}\}$ jeho báze, nechť f je bilineární forma na prostoru V. Maticí bilineární formy f vzhledem k bázi M budeme rozumět čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu n, která má na místě ij hodnoty formy f v i-tém a j-tém vektoru báze M, tj. pro každé i,$j = 1, \cdots, n$ je*

$$a_{ij} = f(\vec{v_i}, \vec{v_j}).$$

Příklad. Podívejme se nyní, jak by vypadala matice standardního součinu dvou vektorů $\vec{x} = (x_1, x_2)$ a $\vec{y} = (y_1, y_2)$ v rovině, který známe již ze střední školy, definovaného jako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2$$

v kartézské soustavě souřadnic s bázovými vektory $M = \{(1,0), (0,1)\}$.
Dosazením bázových vektorů do předpisu bilineární formy a za použití definice matice bilineární formy dostáváme pro prvky matice

$$a_{11} = (1,0) \cdot (1,0) = 1,$$
$$a_{12} = (1,0) \cdot (0,1) = 0,$$
$$a_{21} = (0,1) \cdot (1,0) = 0,$$
$$a_{22} = (0,1) \cdot (0,1) = 1,$$

matice skalárního součinu má tedy tvar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice A výše je vyjádřením skalárního součinu v kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}^2$. Jak ale vyjádřit matici skalárního součinu v jiné bázi, než v té, ve které ho máme zadaný?

Zabývejme se nejprve otázkou, jak vyjádřit souřadnice vektoru v jiné bázi, známe-li jeho souřadnice v nějaké bázi. Mějme tedy vektorový prostor pro jednoduchost $\mathbb{R}^2$ a jeho báze $A = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}\}$ a $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$. Jistě lze souřadnice vektoru $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ vyjádřit v obou bázích, tedy

$$\vec{x} = x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2},$$
$$\vec{x} = y_1\vec{b_1} + y_2\vec{b_2}.$$

Nabízí se přirozeně otázka, jestli můžeme nějak získat koeficienty y_1, y_2 vzhledem k bázi B, známe-li koeficienty x_1, x_2 vhledem k bázi A? Odpověď je ano, využijeme k tomu matici přechodu.

Všechny vektory báze B lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z báze A (leží totiž ve stejném vektorovém prostoru), platí tedy

$$\vec{b_1} = p_{11}x_1\vec{a_1} + p_{12}x_1\vec{a_2},$$
$$\vec{b_2} = p_{21}x_1\vec{a_1} + p_{22}x_1\vec{a_2},$$

a napíšeme-li si koeficienty lineární kombinace do matice (do sloupců), dostáváme matici přechodu P_{AB}. Matici přechodu mezi bázemi využijeme při následujících úvahách.

Vraťme se zpět k hledání matice vůči jiné bázi, než ve které máme skalární součin zadán.
Mějme vektorový prostor V a dvě báze tohoto prostoru B a C. Pro všechny vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí dle (3.6)

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x} \rangle_B \cdot A \cdot \langle \vec{y} \rangle_B^T. \tag{3.7}$$

, kde A je matice skalárního součinu vzhledem k bázi B. Jestliže je P_{BC} matice přechodu od báze B k bázi C, pak pro souřadnice platí

$$\langle \vec{y} \rangle_B^T = P_{BC} \cdot \langle \vec{y} \rangle_C^T, \qquad \langle \vec{x} \rangle_B = \langle \vec{x} \rangle_C \cdot P_{BC}^T.$$

Dosaďme nyní souřadnice vektorů do vztahu (3.7) a dostáváme

$$f(\vec{x},\vec{y}) = \langle\vec{x}\rangle_C \cdot P_{BC}^T \cdot A \cdot P_{BC} \cdot \langle\vec{y}\rangle_C^T,$$

kde $P_{BC}^T \cdot A \cdot P_{BC}$ je hledaná matice skalárního součinu vůči bázi C. Naše pozorování si můžeme shrnout do věty níže.

Věta 3. *Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T, nechť B a C jsou jeho báze a f bilineární forma na prostoru V. Jestliže A je maticí formy f vzhledem k bázi B, potom P^TAP je maticí formy f vzhledem k bázi C, kde P je matice přechodu od báze B k bázi C.*

Příklad. Zkusme nyní zjistit matici skalárního součinu vzhledem k bázi $C = \{(2{,}3), (-1{,}1)\}$, víme-li, že vzhledem ke kanonické bázi $B = \{(1{,}0),(0{,}1)\}$ má tento součin matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Začněme výpočtem matice přechodu P_{BC}, který je ale velmi jednoduchý. Vzhledem k tomu, že je báze B kanonická, budou matici přechodu P_{BC} tvořit pouze vektory báze C zapsané do sloupců. Tedy máme

$$P_{BC} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proveďme ještě součin P^TAP, tedy

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tím je příklad úspěšně vyřešen. Maticí skalárního součinu vzhledem k bázi C je matice

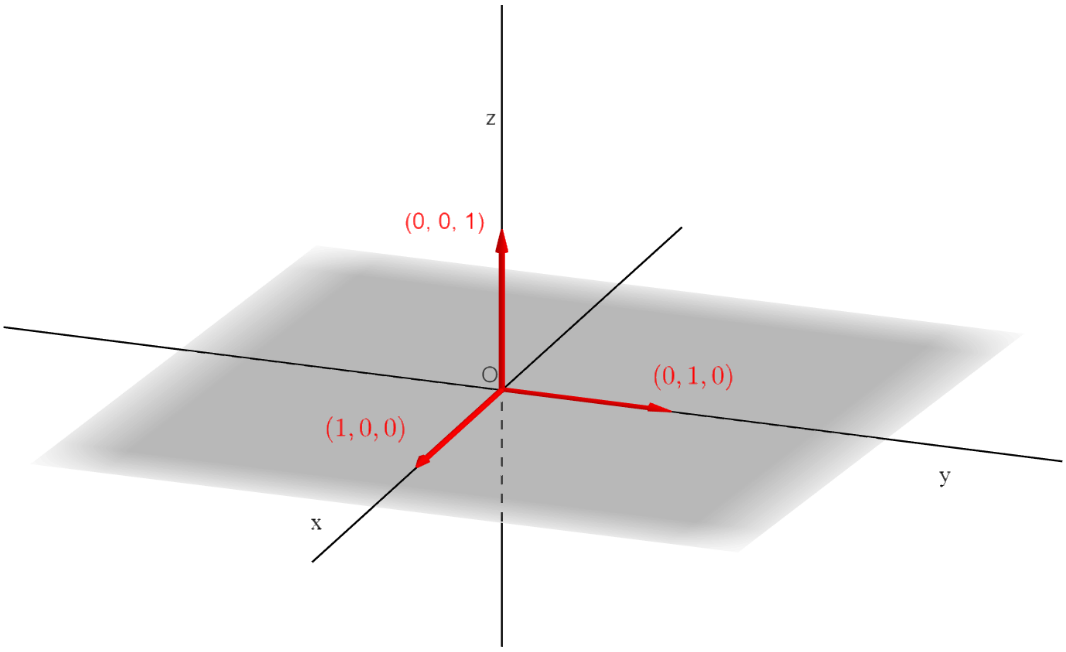
$$\begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jak jsme viděli v příkladu výše, matice skalárního součinu může vyjít velmi „ošklivá“ a na první pohled z ní nepoznáme, jestli je matice pozitivně definitní, a jedná-li se o skalární součin. Našim cílem by tedy bylo přejít k bázi, která nám toto rozhodování ulehčí. Pozitivní definitnost by šla velmi snadno poznat, pokud by byla matice diagonální a pomocí matice přechodu je takovýto přechod k diagonální matici možný. Takovouto matici budeme nazývat **polárním tvarem** tohoto skalárního součinu.

Definice 5. *Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T a f je symetrická bilineární forma na prostoru V. Budeme říkat, že báze N je polární vůči f, jestliže matice formy f vzhledem k bázi N je diagonální.*

Příklad. Mějme skalární součin dvou vektorů $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ v $\mathbb{R}^3$ standardně definovaný jako $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ a kanonickou bázi $N = \{(1{,}0{,}0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ viz. například Obr. 3.3 na další straně.
Matice A takto definované bilineární formy vzhledem k bázi N by tedy byla tvaru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 3.3: Bázové vektory v soustavě souřadnic

Na matici A vidíme, že je diagonální (na diagonále jsou čísla a všude jinde samé nuly) a tedy námi zadaná báze N je polární vůči takto definovanému skalárnímu součinu.

Otázkou nyní je, jak bychom mohli polární tvar vylepšit. V matici polárního tvaru bilineární formy se na diagonále mohou nacházet jakákoliv čísla a jinak jsou všude jinde v matici nuly, matice je tedy diagonální. Určitě by se nám hodilo, kdyby na diagonále byla pouze nějaká „hezká“ čísla, například jedničky, nuly či mínus jedničky. S nimi se totiž obecně dobře počítá. Chtěli bychom tedy diagonální matici **normalizovat**. Definujme tedy pro symetrickou bilineární formu takový tvar, že bude mít právě tuto vlastnost. Definice je k nahlédnutí také v [Be].

Definice 6. *Nechť V je reálný vektorový prostor konečné dimenze, N jeho báze a f symetrická bilineární forma na prostoru V. Jestliže analytické vyjádření formy f vzhledem k bázi N má tvar*

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_{p+n}y_{p+n},$$

kde $0 \leq p, 0 \leq n, p + n \leq \mathrm{dimV}$, pak říkáme, že báze N je normální vůči f a uvedené analytické vyjádření nazýváme normálním tvarem formy f.

Připomínáme, že u polárního tvaru byla matice formy diagonální. Normální tvar klade na podobu matice přísnější podmínky, matice formy musí být diagonální a zároveň se na diagonále musí vyskytovat pouze jedničky, minus jedničky a nuly, kde

- p značí počet jedniček,
- n značí počet minus jedniček,
- d značí počet nul.

Trojici (p, n, d) označujeme jako signaturu formy f. Pokud máme vektorový prostor $\dim V$, platí, že $p + n + d = \dim V$. Protože skalární součin je pozitivně definitní, bude n a d vždy nulové.

Matici můžeme diagonalizovat například metodou symetrických úprav. Mějme symetrickou bilineární formu f a její matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Tuto matici nyní diagonalizujeme, provedeme-li úpravu s řádkem, musíme stejnou úpravu vzápětí provést i se sloupcem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pokud bychom se nyní chtěli zbavit 6 na diagonále, snadno si rozmyslíme, že budeme muset první řádek vydělit $\sqrt{6}$ a vzápětí první sloupec vydělit $\sqrt{6}$. Symetrickou úpravou tak na diagonále získáme ze šestky jedničku. Problém nastává u záporného prvku na diagonále, museli bychom totiž dělit odmocninou ze záporného čísla, která však v $\mathbb{R}$ **neexistuje**. Záporný prvek tedy na diagonále zůstane. Jde tedy o určitou „setrvačnost" dané formy, záporné znaménko by se nám stále vracelo zpět do matice. Toto pozorování můžeme shrnout do tzv. Sylvestrova zákona o setrvačnosti, viz [Be].

Věta 4 (Sylvestrův zákon o setrvačnosti)**.** *Normální tvar symetrické bilineární formy f na reálném vektorovém prostoru V konečné dimenze je invariantní, tj. nezávisí na konkrétní volbě báze, která je vůči formě f normální.*

Normální tvar skalárního součinu je tedy vždy stejný, díky tomuto zákonu totiž nemůžeme dostat na diagonále záporné nebo nulové prvky.

Vraťme se ještě chvíli k příkladu, kde jsme hledali polární tvar. Skalární součin v $\mathbb{R}^3$ a kanonické bázi jsme měli definovaný jako

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \tag{3.8}$$

Matice formy A byla tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vypadá tedy přesně tak, jak by měla vypadat matice normálního tvaru formy. Předpis (3.8) je tedy i normálním tvarem formy.

Porovnáním definic normálního tvaru s polárním snadno nahlédneme, že normální tvar formy f vůči bázi N je vždy polárním tvarem formy f vůči stejné bázi. Opačná implikace ale v tomto případě neplatí, ne každý polární tvar formy je tvarem normálním.

Shrňme nyní na závěr kapitoly naše předešlé úvahy. Z definice skalárního součinu jako bilineární formy tedy vyplývá, že matice skalárního součinu je vždy **symetrická**. Z úvah o polárním tvaru vůči nějaké bázi vyplynulo, že právě tento tvar má pouze **diagonální** matici. A na závěr pokud najdeme nějakou bázi, vůči které je skalární součin normální, vyskytují se na diagonále pouze **jedničky** (plyne z pozitivní definitnosti).

4. Fourierovy řady

V této kapitole využijeme abstraktní definice skalárního součinu z předešlých úvah. Díky této definici totiž můžeme skalární součin zobecnit i na vektorové prostory funkcí. Při zkoumání význačných úhlů a jejich vztahu ke skalárnímu součinu ve druhé kapitole jsme dospěli ke vztahu, že jsou-li dva vektory kolmé, musí být jejich skalární součin rovný nule, tedy

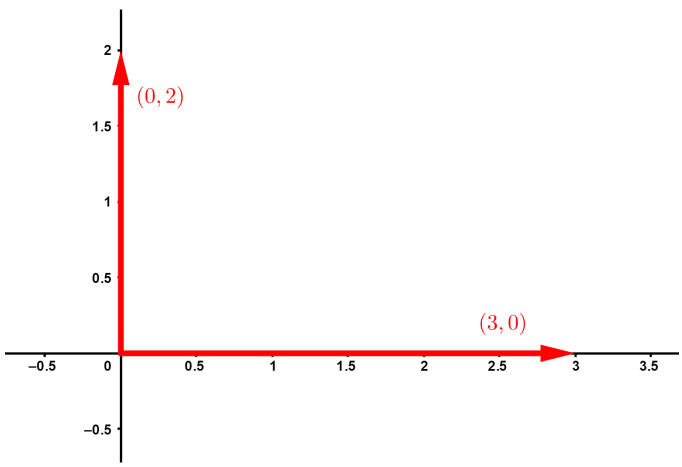
$$\vec{x} \perp \vec{y} \iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Vztah uvedený výše platí pro dva vektory, zobecněme ho tedy pro více vektorů v unitárním prostoru a ujasněme si názvosloví, které budeme v následující kapitole používat [Be].

Definice 7. *Nechť V je unitární prostor. Řekneme, že vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V$ jsou navzájem ortogonální (resp. kolmé), jestliže je jejich skalární součin roven nule. Podmnožiny M prostoru V se nazývá ortogonální, jestliže jsou každé její dva různé vektory ortogonální. Podmnožina M prostoru V se nazývá ortonormální, jestliže je ortogonální a každý její vektor je normovaný. Ortogonální, resp. ortonormální bází unitárního prostoru budeme rozumět každou bázi tohoto prostoru, která je ortogonální, resp. ortonormální.*

Z definice je zřejmé, že každá ortonormální podmnožina musí být zároveň i ortogonální. Pojďme si nyní uvést příklad jedné ortonormální a ortogonální množiny.

Příklad. Už na základní škole děti pracují s kartézskou soustavou souřadnic, kterou tvoří dva navzájem kolmé vektory (ve škole to jsou přímky) a počátek. Zvolme si bázi této soustavy jako $B = \{(3{,}0), (0{,}2)\}$. Snadným výpočtem lze ověřit, že je tato báze ortogonální. Jak taková báze může vypadat, je znázorněno na Obr. 4.1.



Obrázek 4.1: Ortogonální báze

Jak by vypadala ortonormální báze tohoto prostoru? Je jasné, že těch bází bude nekonečně mnoho, zmiňme třeba bázi kanonickou $E = \{(1,0),(0,1)\}$. Podobně by samozřejmě vypadala i ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^3$, akorát by jí tvořily tři navzájem kolmé jednotkové vektory.

Unitární prostory nám umožňují zformulovat Pýthagorovu větu v unitárních prostorech:

Věta 5. *Jsou-li $\vec{x}, \vec{y}$ navzájem ortogonální vektory unitárního prostoru, potom je*

$$||\vec{x} + \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2.$$

Zkusme nyní ortogonalizovat bázi. Princip si demonstrujeme na příkladu, jak doplnit nějakou ortogonální podmnožinu vektorového prostoru vektorem, který bude k dané podmnožině ortogonální. Proveďme to nejprve jednoduše pro dva vektory a poté obecně.

Máme nějakou ortogonální podmnožinu $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ a vektor $\vec{v}$. Chceme najít čísla c_1 a c_2, pro které bude vektor $\vec{v}$ ortogonálním doplňkem podmnožiny $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. Musí tedy platit, že vektor

$$\vec{v} - c_1\vec{a} - c_2\vec{b}$$

bude kolmý k podmnožině $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. K získání koeficientů c_1 a c_2 využijeme, že daný vektor musí být kolmý ke každému z dané množiny, pro skalární součin tedy platí

$$(\vec{v} - c_1\vec{a} - c_2\vec{b}|\vec{a}) = 0,$$

$$(\vec{v} - c_1\vec{a} - c_2\vec{b}|\vec{b}) = 0.$$

S využitím vlastností skalárního součinu (vytkneme skalár a využijeme distributivitu)

$$c - c_1(\vec{a}|\vec{a}) - c_2(\vec{b}|\vec{a}) = 0,$$
$$(\vec{v}|\vec{b}) - c_1(\vec{a}|\vec{b}) - c_2(\vec{b}|\vec{b}) = 0,$$

a protože jsme jsou na sebe vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ kolmé, jsou skalární součiny těchto vektorů rovny nule. Tedy

$$(\vec{v}|\vec{a}) - c_1(\vec{a}|\vec{a}) - c_2 \cdot 0 = 0,$$

$$(\vec{v}|\vec{b}) - c_1 \cdot 0 - c_2(\vec{b}|\vec{b}) = 0.$$

Pro koeficienty c_1 a c_2 tedy vyjádřením dostáváme

$$c_1 = \frac{(\vec{v}|\vec{a})}{(\vec{a}|\vec{a})}, \qquad c_2 = \frac{(\vec{v}|\vec{b})}{(\vec{b}|\vec{b})}.$$

Odvoďme nyní stejné koeficienty pro ortogonální podmnožiny s více vektory. Máme vektorový prostor se skalárním součinem V a vyberme z něj nějakou ortogonální podmnožinu a označme ji například
$\{\vec{w_1}, \cdots, \vec{w_m}\}$, kde $1 \leq m$. Chceme zjistit, jestli by bylo možné pro každý vektor $\vec{v} \in V$ najít čísla $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ taková, že vektor

$$\vec{v} - c_1\vec{w_1} - c_2\vec{w_2} - \cdots - c_m\vec{w_m}$$

bude kolmý k podprostoru $[\vec{w_1}, \cdots, \vec{w_m}]$. Tedy hledáme, jestli existuje nějaké univerzální číslo, kterým získáme ortogonální doplněk dané podmnožiny. Ukažme si nyní, že takováto čísla existují a mají vždy stejný tvar.

S využitím skalární součinu víme, že dva vektory jsou kolmé právě tehdy, je-li jejich skalární součin roven nule. Tedy můžeme pro vektory $\vec{v} - c_1\vec{w_1} - c_2\vec{w_2} - \cdots - c_m\vec{w_m}$ a $[\vec{w_1}, \cdots, \vec{w_m}]$ psát

$$(\vec{v} - c_1\vec{w_1} - c_2\vec{w_2} - \cdots - c_m\vec{w_m}|\vec{w_j}) = 0.$$

Tato rovnost musí platit pro všechna $j = 1, \cdots$. Z vlastností skalárního součinu můžeme výraz výše rozdělit na dva skalární součiny a vytknout konstantu c_j:

$$(\vec{v}|\vec{w_j}) - c_j \cdot (\vec{w_j}|\vec{w_j}) = 0,$$

a vyjádříme-li si koeficient c_j a použijeme-li definici normy vektoru, můžeme psát:

$$c_j = \frac{(\vec{v}|\vec{w_j})}{||\vec{w_j}||^2}.$$

Čísla $c_1, c_2, \cdots, c_m$ s výše uvedenou vlastností tedy opravdu existují a jsou určena jednoznačně. Na základě těchto úvah definujeme číslo c_j **Fourierovým koeficientem**, viz [Be].

Definice 8. *Nechť $\{\vec{w_1}, \cdots, \vec{w_m}\}$, kde $1 \leq m$, je ortogonální podmnožina unitárního prostoru V, která neobsahuje nulový vektor. Fourierovými koeficienty vektoru $\vec{v} \in V$ vůči ortogonální množině $\{\vec{w_1}, \cdots, \vec{w_m}\}$ budeme rozumět čísla*

$$c_j = \frac{(\vec{v}|\vec{w_j})}{||\vec{w_j}||^2}, j = 1, \cdots, m. \tag{4.1}$$

Fourierovy koeficienty jsou tedy souřadnice daného vektoru vzhledem ke zvolené ortonormální bázi. Pozorný čtenář si všimne, že jsme při důkazu Cauchy-Schwarzovy nerovnosti (3.3) vlastně používali Fourierův koeficient ve tvaru

$$a = \frac{(\vec{x}|\vec{y})}{||\vec{y}||^2}.$$

Ukažme si ještě nyní výpočet Fourierových koeficientů na triviálním příkladu.

Příklad. Mějme vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ a vektor $\vec{v} = (3, 4, 8)$. Určíme jeho Fourierovy koeficienty c_1, c_2, c_3 vzhledem k ortonormální bázi

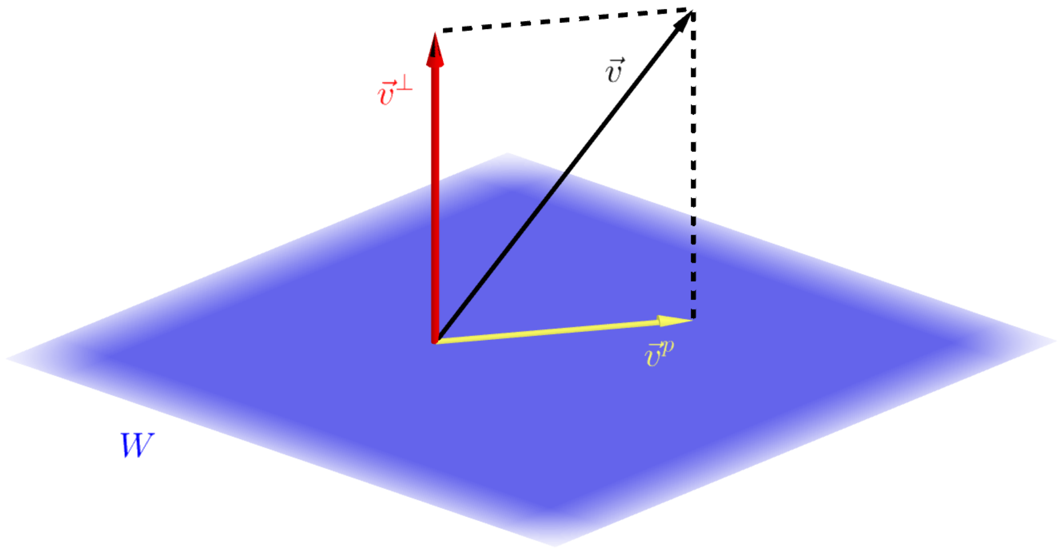
$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Stačí dle (10) jen vypočítat skalární součiny (příklad je jednodušší, protože jsou vektory normované, ve jmenovateli zlomku je tedy jednička)

$$\begin{aligned} c_1 &= (3, 4, 8) \cdot (1, 0, 0) = 3, \\ c_2 &= (3, 4, 8) \cdot (0, 1, 0) = 4, \\ c_3 &= (3, 4, 8) \cdot (0, 0, 1) = 8. \end{aligned}$$

Fourierovými koeficienty jsou tedy čísla 3, 4 a 8.

Zabývejme se nyní následující situací. Pomocí Fourierových koeficientů tedy umíme doplnit libovolný vektor $\vec{v}$ do ortogonální podmnožiny W. Nešel by tedy vektor $\vec{v}$ rozložit na součet dvou vektorů, z nichž jeden bude právě ortogonálním doplňkem? Situaci můžeme vidět znázorněnou na Obr. 4.2 na následující straně.



Obrázek 4.2: Ortogonální rozklad

Jak na Obr. 4.2 vidíme, takový rozklad je možný. Vektor $\vec{v}^{\perp}$ je právě ortogonální doplněk podprostoru W.

Zformulujme si nyní tento poznatek do věty, viz také [Be].

Věta 6. *Nechť W je podprostor konečné dimenze unitárního prostoru V. Potom je $V = W \oplus W^{\perp}$, tj. ke každému vektoru $v \in V$ existují jednoznačně určené vektory $v_p \in W$ a $\vec{v}^{\perp} \in W^{\perp}$, pro které je $\vec{v} = \vec{v}^{p} + \vec{v}^{\perp}$.*

Výraz $\vec{v} = \vec{v}^{p} + \vec{v}^{\perp}$ tedy nazýváme ortogonálním rozkladem vektoru $\vec{v}$ určený podprostorem W. Zbývá nám ještě vyřešit význam vektoru $\vec{v}^{p}$. Protože tento vektor promítáme do podprostoru W, nazveme ho **ortogonální projekcí** vektoru $\vec{v}$ do podprostoru W. Formálně ho tedy v souladu se zjištěnými poznatky definujme níže, viz [Be].

Definice 9. *Nechť W je konečně dimenzionální podprostor unitárního prostoru V. Ortogonální projekcí vektoru $\vec{v} \in V$ do podprostoru W budeme rozumět jednoznačně určený vektor $\vec{v}^{p} \in W$, pro který je $\vec{v} = \vec{v}^{p} + \vec{v}^{\perp}$, kde $\vec{v}^{\perp} \in W^{\perp}$.*

Důležitost ortogonální projekce tkví v tom, že je to nejlepší aproximace prvku daného vektorového vektoru prvkem daného podprostoru. Budeme-li mít tedy nějaký podprostor W s ortogonální bází $\{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_m\}$, pak ortogonální projekce vektoru $\vec{v}$ je vektor $\vec{v}^{p} = c_1\vec{w}_1 + \cdots + c_m\vec{w}_m$, kde $c_1, \cdots, c_m$ jsou již naše známé Fourierovy koeficienty, jejichž zjišťování tkví pouze ve výpočtu skalárních součinů.

Poslední otázka, která zbývá zodpovědět, je, jestli opravdu naše ortogonální projekce je tou nejlepší aproximací dané funkce. Neexistuje ještě nějaká lepší aproximace a my ji pouze neznáme?
Pokud je ortogonální projekce opravdu tou nejlepší aproximací, musí platit

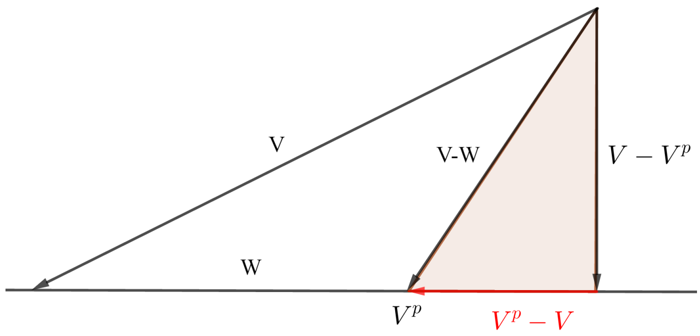
$$\forall \vec{w} \in W \quad \vec{w} \neq \vec{v}^{p} \quad ||\vec{v} - \vec{v}^{p}|| < ||\vec{v} - \vec{w}||.$$

Tedy že norma vektoru $\vec{v} - \vec{v}_p$ bude vždy menší, než norma vektoru $\vec{v} - \vec{w}$, kde $\vec{w}$ je libovolný vektor z konečně dimenzionálního podprostoru.

Jestliže vektor $\vec{w}$ z podprostoru není roven právě ortogonální projekcí $\vec{v}^p$, pak nutně musí platit, že rozdíl $\vec{v}^p - \vec{w} \neq 0$. Dostáváme, že vektory $\vec{v} - \vec{v}^p$ a $\vec{v}^p - \vec{w}$ jsou dle věty (6) navzájem ortogonální. Protože jsou ortogonální, můžeme použít Pýthagorovu větu (5):

$$||\vec{v} - \vec{w}||^2 = ||\vec{v} - \vec{v}^p||^2 + ||\vec{v}^p - \vec{w}||^2 > ||\vec{v} - \vec{v}^p||^2.$$

Dostáváme tedy, že ortogonální projekce je opravdu nejlepší aproximace. Tomuto poznatku se taktéž někdy říká věta o aproximaci [Be]. Právě provedené úvahy jsou pěkně znázorněny na Obr. 4.3.



Obrázek 4.3: Znázornění věty o aproximaci

Zdůrazněme ještě souvislost ortogonální projekce s geometrickou interpretací skalárního součinu, tam totiž také promítáme vektor do podprostoru, konkrétně do jiného vektoru. Ortogonální projekce námi zavedená výše je zobecnění elementární geometrické interpretace probírané v úvodní kapitole.

Na závěr ilustrujme právě vyloženou teorii na konkrétním příkladu.

Příklad. Určete ortogonální projekci vektoru $\vec{v} = (2, 3, 1)$ do podprostoru generovaného vektorem $\vec{p} = (1, 0, 1)$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Nalezněme nejprve Fourierův koeficient c

$$c = \frac{(\vec{v}|\vec{p})}{(\vec{p}|\vec{p})} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} = \frac{3}{2},$$

Vektor $\vec{v}^p$, bude tedy dle $\vec{v}^p = c\vec{p}$

$$\vec{v}^p = c\vec{p} = \frac{3}{2}(1, 0, 1) = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right).$$

Ortogonální projekce $\vec{v}^p$ vektoru $\vec{v}$ do podprostoru $\vec{p}$ je tedy

$$\vec{v}^p = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right).$$

Zaměřme se nyní na zkoumání unitárních prostorů funkcí, konkrétněji budeme zkoumat Fourierovy trigonometrické řady, které aproximují funkce různou kombinací sinů a kosinů. Fourierovy řady představují další možnost, jak aproximovat funkce, například vedle Taylorových řad. Jsou vhodné hlavně na aproximaci periodických funkcí, tedy ve fyzice například funkcí popisujících periodické kmitání, vlnění, nebo obvody se střídavým proudem. Zkusme tedy zvolit ortogonální bázi složenou ze sinů a kosinů s různými násobky jejich argumentů

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx.$$

Budeme tedy ortogonálně promítat funkce do báze tvořené těmito goniometrickými funkcemi.

Pro začátek nyní ověřme, že je tento systém funkcí opravdu ortogonální, ukažme si to například na funkcích $\cos(x)$ a $\sin(x)$. V předešlých kapitolách jsme definovali skalární součin funkcí jako $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Z podmínky kolmosti tedy musí platit, že tento integrál bude roven nule. Ověřme nyní výpočtem. Zbývá ještě vyřešit otázku, na jakém intervalu budeme integrál počítat. Sinus a kosinus je obvykle definovaný na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, my budeme chtít aproximovat funkce obecně na nějakém intervalu $\langle 0, l\rangle$, kde $l > 0$. Můžeme si l představit jako vlnovou délku, argumenty goniometrických funkcí poté tvoří zlomky tohoto l, protože pak velmi dobře pasují na námi zvolený interval. V souladu s výše uvedenými úvahami tedy například vypočteme integrál s funkcemi $\sin(\frac{2\pi}{l}x)$ a $\cos(\frac{2\pi}{l}x)$

$$\int_0^l \cos(\frac{2\pi}{l}x)\sin(\frac{2\pi}{l}x)\mathrm{d}x = \frac{l}{2\pi}\int_0^l u\ \mathrm{d}x = \left[\frac{lu^2}{4\pi}\right]_0^l =$$

$$= \left[\frac{l\sin^2(\frac{2\pi}{l}x)}{4\pi}\right]_0^l = \frac{l\sin^2(2\pi)}{4\pi} - \frac{l\sin^2 0}{4\pi} = 0 - 0 = 0.$$

Funkce jsou na sebe tedy opravdu kolmé. Podobně by šlo zjistit, že to platí opravdu pro libovolné různé kombinace těchto funkcí. Tvoří tedy opravdu ortogonální bázi. Nyní můžeme v souladu s úvahami výše přistoupit k definici Fourierovy řady, viz také [Ko].

Definice 10. *Buď $f \in R_{(0,l)}$. Fourierova řada této funkce (trigonometrická řada) je*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{2k\pi}{l}x + b_k \cos\frac{2k\pi}{l}x),$$

kde a_k, b_k jsou reálné Fourierovy koeficienty funkce f a jsou určeny vztahy

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{2k\pi}{l}x\,dx \quad k = 0, 1, \cdots$$
$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2k\pi}{l}x\,dx \quad k = 1, 2, \cdots$$

Předpoklad toho, že funkce f musí být riemannovsky integrovatelná, musíme v praxi často oslabit, tedy použít širší třídu funkcí, například integrovatelných lebesgueovsky. Proto je někdy tato definice uváděna rovnou s funkcemi $f \in L_{(0,l)}$. Částečné součty řady (10) nazýváme trigonometrickými polynomy. Pomocí těchto řad budeme aproximovat funkce. Jak víme, podle věty o nejlepší aproximaci (8) jsou právě tyto řady nejlepší aproximací. Naším ortogonálním podprostorem jsou funkce, kde V_n je vektorový prostor, jehož bázi funkce výše tvoří.

Ilustrujme si výpočet na konkrétním příkladu

Příklad. Rozvineme do Fourierovy řady kvadratickou funkci $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Protože funkce f je sudá, ulehčuje nám to velmi práci, protože $b_k = 0$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Počítejme tedy koeficient a_k. Pro $k = 0$ platí

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^3.$$

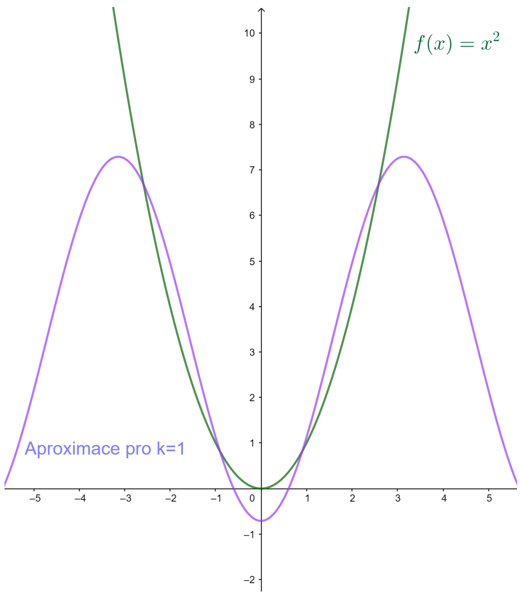
Pokračujme výpočtem a_k pro $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi} \left[x^2 \frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\sin kx}{k} \mathrm{d}x = \\ = -\frac{2}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \mathrm{d}x &= \frac{2}{k\pi} \left[x \frac{\cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos kx}{k} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{4}{k\pi} \left(\pi \frac{\cos kx}{k} \right) = (-1)^k \frac{4}{k^2}. \end{aligned}$$

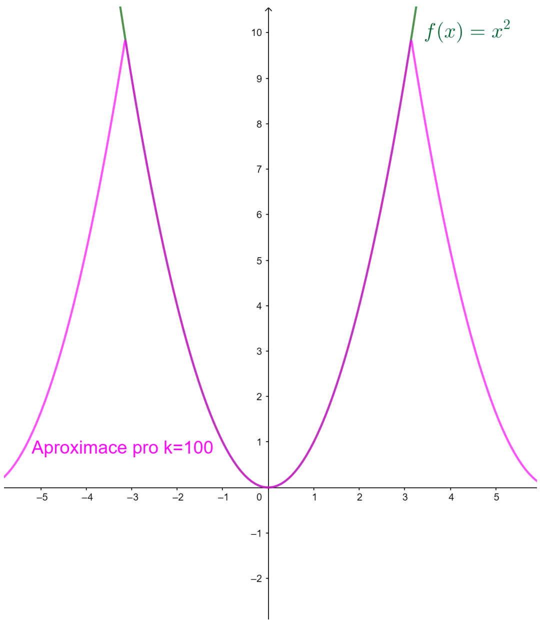
Fourierův koeficient a_k je tedy $a_k = (-1)^k \frac{4}{k^2}$. Fourierova řada funkce f na intervalu $[-\pi, \pi]$ je tedy:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx.$$

Pro porovnání přikládáme dva grafy Fourierových aproximací pro $k = 1$ a $k = 100$ na Obr. 4.4 a Obr. 4.5 na následující straně.



Obrázek 4.4: Aproximace funkce pro k=1



Obrázek 4.5: Aproximace funkce pro k=100

5. Zobecnění – 1. základní forma plochy

V úvodních kapitolách byly předmětem našeho zkoumání hlavně elementární problémy, například vzdálenost dvou bodů v rovině (1.1), nebo odchylka dvou vektorů v rovině. Na problematiku vzdálenosti dvou bodů, tedy normu vektoru, lze nahlížet i jiným způsobem. Zjistili jsme, že pomocí skalárního součinu lze zapsat normu vektoru jednoduše $||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$, také ale můžeme pomocí normy vektoru definovat skalární součin (červeně) pomocí formule

$$||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2,$$

z níž plyne

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(||\vec{u}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2 + ||\vec{v}||^2 \right).$$

Pokusme se nyní tyto problémy zobecnit a zabývat se například geometrií zakřivených ploch. Zkusíme tedy postupovat analogicky jako v úvodních kapitolách a budeme se snažit zjistit vzdálenost dvou bodů na ploše, případně odchylku. Je jasné, že vyřešením tohoto problému dostáváme možnosti široce uplatnitelné například v geografii, protože vyřešením tohoto problému zjistíme, jak se chová daná zakřivená plocha, tedy zjistíme vlastnosti vnitřní geometrie plochy.

Protože hlavním předmětem našeho zkoumání budou křivky a plochy, v diferenciální geometrii[1] definujeme parametrizovanou křivku dle [Bu] jako

Definice 11. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Parametrizovaná křivka v $\mathbb{R}^n$ je diferencovatelné zobrazení*

$$c : I \to \mathbb{R}^n, c(t) = (c^1(t), \cdots, c^n(t)).$$

Připomeňme také, jak zjistíme délku křivky, vztah je analogický vztahu pro normu vektoru, pouze využívá parametrického zadání křivky. Máme-li křivku $c(t)$ v $\mathbb{R}^3$ zadanou parametricky jako

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

můžeme pro její délku l na spojitém intervalu $[\alpha, \beta]$ psát dle [Bu]

$$l(c, [\alpha, \beta]) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{||\mathrm{c}'(\mathrm{t})||}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{c'(t) \cdot c'(t)}\, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}}. \tag{5.1}$$

Křivku jsme již úspěšně definovali, a protože chceme měřit vzdálenosti bodů na nějaké ploše, definujme nyní i parametrizovanou plochu [Bu].

Definice 12. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Parametrizovaná plocha v $\mathbb{R}^3$ je diferencovatelné zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^3$ takové, že df_u je prosté zobrazení pro každé $u \in U$, tj. f_{u^1} a f_{u^2} jsou lineárně nezávislé vektory v $T_{f_{u^3}}\mathbb{R}^3$. Tyto souřadnice nazveme souřadnicovými vektory parametrizované plochy f v bodě u.*

[1] Část geometrie, jež studuje křivky a plochy metodami diferenciálního počtu.

Nyní nám již nic nebrání tomu, pustit se do odvozování vzdálenosti dvou bodů na ploše.

Mějme parametrizovanou plochu X zadanou jako $X = f(u_1, u_2)$ a parametrizovanou křivku $Y = f(u_1(t), u_2(t))$. Pro délku křivky Y na intervalu $[\alpha, \beta]$ na ploše X platí dle (5.1):

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{\mathrm{d}f(u_1(t), u_2(t))}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}f(u_1(t), u_2(t))}{\mathrm{d}t}} \mathrm{d}t,$$

využijme vlastností derivace složené funkce

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\right)} \mathrm{d}t,$$

po roznásobení a sloučení závorek dostáváme

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1^2 + 2\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2^2}.$$

Ve vztahu pro délku křivky vystupuje skalární součin (jeho koeficienty označeny červeně).
Označíme-li

$$g_{ij} = \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial u_j},$$

tak můžeme pro celý výraz pod odmocninou, označený jako I, psát:

$$I = g_{11}\mathrm{d}u_1^2 + 2g_{12}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 + g_{22}\mathrm{d}u_2^2.$$

Tento výraz není forma bilineární, ale forma kvadratická (která je tvořena z bilineární formy). Tato kvadratická plocha má svůj speciální výraz, nazýváme ho **1. základní forma plochy**. Pozorný čtenář si všimne, že 1. základní forma plochy je vlastně skalární součin prostoru $\mathbb{R}^3$. Stejným postupem jako v úvodu jsme získali pomocí skalárního součinu nástroj, který charakterizuje danou plochu. Ani jsme k tomu nepotřebovali řešit problém odchylek.

Je zvyklostí také zapisovat 1. základní formu plochy do matice, ta má poté tvar

$$\{g_{ij}\}_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

Matici této formy je zřejmě symetrická. Proto nám stačí při výpočtu 1. formy plochy vypočítat pouze 3 prvky. Prvky, které neleží na diagonále, jsou totiž stejné.

Závěr

V naší práci jsme se zaměřili na přiblížení skalárního součinu většímu okruhu čtenářů a vzájemnému propojení různých náhledů na něj. Celou práci jsme se zaměřovali na to, aby všechny definice a úvahy byly pečlivě motivovány a poté ilustrovány na příkladech.

Nejprve jsme se zaměřili na elementární zavedení skalárního součinu a vše pečlivě motivovali tak, aby čtenářovi bylo jasné, kde se úvahy o skalárním součinu vzaly.

Následovala kapitola o aplikacích skalárního součinu, kde se kromě užitečných matematických problémů ukázalo, že skalární součin lze využít i mimo pole matematiky, a to ve fyzice. Šlo by do budoucna určitě prozkoumat další využití, například v pravděpodobnosti, kde má také své široké uplatnění.

V odborněji zaměřené kapitole jsme se zaměřili na abstraktní přístup v definici skalárního součinu a propojili ho s lineární algebrou. Ukázali jsme, že se chová jako bilineární forma, a můžeme na něj nasadit veškerou teorii o bilineárních formách. Prozkoumali jsme skalární součin v maticovém tvaru, hledali jeho normální a polární tvar.

Kapitola o Fourierových řadách nám přinesla pozorování, že skalární součin můžeme použít i k aproximaci funkcí, podobně jako Taylorovy řady.

Naše putování se skalárním součinem završila odbočka do diferenciální geometrie, kde se nám povedlo zobecnit skalární součin i na plochy a křivky a odvodili jsme si tak 1. základní formu plochy.

Seznam použité literatury

[Be] Bečvář, Jindřich: *Lineární algebra.* Matfyzpress, Praha, 2007.

[Bu] Bureš, Jarolím; Hrubčík, Karel: *Diferenciální geometrie křivek a ploch.* Karolinum, Praha, 1998.

[Ko] Kopáček, Jiří: *Příklady z matematiky pro fyziky IV.* Matfyzpress, Praha, 1997.

[Sk] Skála, Lubomír: *Úvod do kvantové mechaniky.* Academia, Praha, 2005.

[Vo] Votruba, Václav: *Základy speciální teorie relativity: vysokoškol. učebnice.* Academia, Praha, 1965.

Seznam obrázků