



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Radek Chalupa

Rubikova kostka a její varianty

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika se zaměřením na
vzdělávání – Informatika se
zaměřením na vzdělávání

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 4. 6. 2020

Radek Chalupa v. r.

Chtěl bych na tomto místě poděkovat všem mým nejbližším, kteří mě nejen během tvorby této práce, ale během celých mých dosavadních studií v plné míře podpořovali. Speciální poděkování patří vedoucímu této práce za trpělivost a spoustu cenných rad. Za námět a inspiraci k této práci musím poděkovat členům mé rodiny.

Název práce: Rubikova kostka a její varianty

Autor: Radek Chalupa

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato práce pojednává o Rubikově kostce z matematického hlediska. Řešíme matematické zákonitosti tohoto proslulého hlavolamu i hlavolamů příbuzných. Zabýváme se především otázkou, jaké tvary Rubikovy kostky jsme schopni vyřešit. K tomu používáme matematických nástrojů. Dozvídáme se o různých problémech, které mohou znemožnit řešení hlavolamu. Řešíme tyto problémy přehledně, každý zvlášť a ukazujeme si je na konkrétních příkladech. Také ukazujeme, kolik různých tvarů vůbec na hlavolamu můžeme získat.

Klíčová slova: Rubikova kostka, řešitelnost, permutace, orientace

Title: Rubik's cube and related puzzles

Author: Radek Chalupa

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This thesis deals with the Rubik's Cube from the viewpoint of mathematics. We look into the mathematical rules concerning this famous puzzle and other similar puzzles. Using mathematical tools, we try to answer the question of which Rubik's Cube scrambles can possibly be solved. We learn about various problems preventing us from successfully solving the puzzle. We demonstrate the solution to these problems in a systematic way, separately and using examples. We also find out how many different possible Rubik Cube scrambles exist.

Keywords: Rubik's cube, solvability, permutations, orientations

Obsah

Úvod	3
1 Terminologie	4
1.1 Použité termíny	4
1.2 Slovníček zajímavých pojmů	6
2 Značení	7
3 Řešitelné tvary Rubikovy kostky	8
4 Permutace na Rubikově kostce	9
4.1 3×3 kostka	9
4.2 2×2 kostka	9
4.3 4×4 kostka	10
5 Otáčení kostiček	11
5.1 Orientace hran	11
5.2 Orientace rohů	13
6 Řešitelné tvary Rubikovy kostky podruhé	16
6.1 Permutace	16
6.1.1 3×3 kostka	16
6.1.2 2×2 kostka	17
6.2 Orientace	17
6.2.1 3×3 kostka	18
6.2.2 2×2 kostka	19
6.3 Shrnutí	20
7 Metody skládání Rubikovy kostky	22
7.1 Běžná jednoduchá metoda	22
7.2 Metoda sexy	23
7.2.1 Použití sexy metody	24
7.2.2 Vysvětlení sexy metody	24
8 Kolik rozházení má Rubikova kostka	28
8.1 3×3 kostka	28
8.2 2×2 kostka	29
8.3 4×4 kostka	29
8.4 5×5 kostka	30
8.5 Pyraminx	31
9 Božské číslo	33
10 Příklady	34
10.1 Je kostka složitelná?	34
10.2 Pojďme si kostku složit	37

Úvod

Rubikova kostka je jednou z nejprodávanějších hraček všech dob. Řadit tento hlavolam mezi hračky je však trochu zavádějící, přestože vypadá velmi jednoduše. Vždyť i maďarský architekt Ernő Rubik, který tento hlavolam vymyslel v roce 1974, údajně neočekával přílišnou složitost řešení, načež prý potřeboval celý jeden měsíc, než se mu povedlo kostku poprvé vyřešit.

V následujících letech si tento hlavolam získal obrovskou popularitu a to i v akademických kruzích. Byly sepsány dokonce celé knihy, pojednávající o matematických zákonitostech tohoto hlavolamu. Mnozí matematici se léta věnovali některým otázkám o Rubikově kostce.

Tato práce pojednává o matematických principech, které můžeme pozorovat nebo demonstrovat na Rubikově kostce a příbuzných hlavolamech.

Cílem je ukázat, jak můžeme hlavolam matematicky popsat, jak můžeme pomocí matematických zákonitostí odůvodnit řešitelnost hlavolamu, nebo jaké matematické principy mohou být schované za metodami řešení.

Budeme potřebovat použít některé poznatky z lineární algebry, zejména vlastnosti permutací. Také představíme vhodný popis orientace kostiček.

Existuje celá řada příbuzných hlavolamů, my v této práci pojednáváme o původní verzi Rubikovy kostky a nejpodobnějších, převážně rozměrových variantách.

1. Terminologie

1.1 Použité termíny

Ujasníme si nyní terminologii, kterou budeme používat. Protože se budeme bavit o kostkách, vypůjčíme si některé termíny z geometrie, některé termíny budou oproti tomu použité v trochu pozměněném významu a některé zavedeme pro naše potřeby. Tyto poslední jsou většinou používány ve světě speedcubingu (soutěžní skládání Rubikovy kostky a příbuzných hlavolamů).

$N \times N$ verze Rubikovy kostky s rozměry $N \times N \times N$, jedná se o běžně užívané označení, pokud tedy není řečeno jinak, jedná se o třírozměrný hlavolam

Stěna stěna krychle (z geometrie)

Samolepka nikoliv „barevná lepivá část hlavolamu“, ale celý 1×1 čtvereček

Kostička nikoliv zdrobnělina, ale jeden dílek hlavolamu, spojující vzájemně neoddělitelné samolepky

Roh kostička, na níž se sbíhají tři stěny, sestávající ze tří samolepek

Hrana kostička mezi rohy, sestávající ze dvou samolepek

Pevný střed středová kostička uprostřed stěny, která nemůže měnit svou polohu, na kostce 3×3 je to jediná středová kostička

Střed kostička zasahující jen do jedné stěny sestává z jedné samolepky (tedy střed je sám o sobě samolepkou), na kostce 3×3 tímto termínem označujeme pevný střed

Barva stěny barva, kterou má stěna ve složeném stavu, identifikujeme ji podle pevného bodu kostky - pevné středy, nebo u některých rozměrů pevný roh

Vrstva (nebo vnější vrstva) nejmenší množina kostiček, které dohromady pokrývají celou stěnu

Vnitřní vrstva nejmenší množina kostiček, kterými můžeme pohnout současně a která není vnější vrstvou

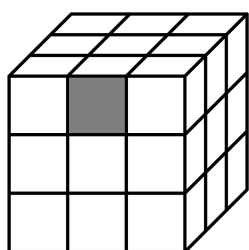
Tah jedno otočení jedné vrstvy o 90° , 180° nebo 270°

Algoritmus konkrétní posloupnost tahů

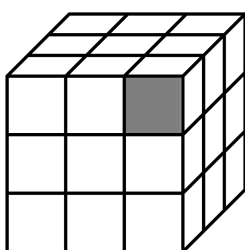
Metoda postup pro složení hlavolamu, sestává z množiny algoritmů, popisu jejich použití na konkrétní stavy hlavolamu, případně rady k intuitivním krokům řešení

Tvar hlavolamu uspořádání samolepek na hlavolamu, na rozdíl od permutace hlavolamu zahrnuje i nedosažitelné stavy

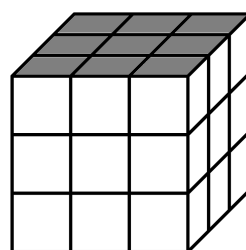
Složení kostičky umístění kostičky na správnou pozici a to se správnou orientací



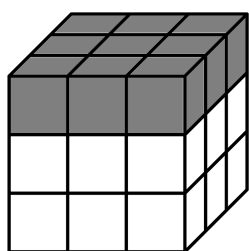
(a) samolepka hrany



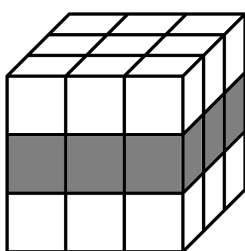
(b) samolepka rohu



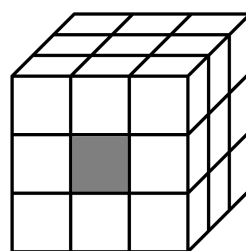
(c) stěna



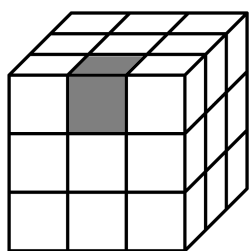
(d) vrstva



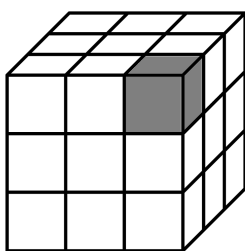
(e) vnitřní vrstva



(f) střed



(g) hrana



(h) roh

Obrázek 1.1: Ukázka některých pojmů

1.2 Slovníček zajímavých pojmů

Speedcubing soutěžní skládání Rubikovy kostky a příbuzných hlavolamů, navzdory názvu zahrnuje i disciplíny nepoměřující rychlost, přestože většina disciplín měří čas potřebný ke složení

Blindfolded tento termín v názvu disciplíny značí, že soutěžící se nejprve podívá na hlavolam a poté ho celý se zakrytými očima vyřeší, čas se měří od zahájení prohlížení (tzv. inspection time)

Multi-Blind disciplína, ve které si soutěžící nejprve prohlédne jím předem zvolený počet Rubikových kostek, které následně všechny skládá se zakrytými očima. Hodnotící kritérium je rozdíl počtu zvolených kostek a správně vyřešených kostek v časovém limitu jedné hodiny (do nějž se počítá i čas prohlížení)

Rubikova kostka běžně užívané označení hlavolamu, které je ovšem mezi speedcubery zpravidla nahrazováno označením 3×3 a označení Rubikova kostka je vyhrazeno pro hlavolam od originálního výrobce

CFOP nejčastěji používaná metoda pro skládání kostky 3×3 na čas

2. Značení

Použité značení vychází z oficiálních regulí organizace WCA. Viz [1].

Zde se budeme bavit o označení jednotlivých vrstev a především tahů. Vrstvy budeme značit podle jejich pozice vzhledem k směru, z jakého se na vrstvy díváme. V případě otočení celého hlavolamu se toto označení změní.

Pro vrstvy budeme používat označení U – horní (up), D – dolní (down), R – pravá (right), L – levá (left), F – přední (front), B – zadní (back).

Můžeme se někdy setkat také se značením prostředních vrstev. To však nebudeme potřebovat (viz značení tahů).

Tahy budeme značit písmeny podle toho, jakou vrstvou táhneme. Samotné písmeno pak znamená otočení příslušnou vrstvou o 90° ve směru hodinových ručiček, při pohledu na vrstvu, jako kdybychom se na ni dívali přímo zepředu. Pokud k písmenu přidáme apostrof, pak rozumíme otočení o 90° opačným směrem. Pokud za písmeno přidáme číslo 2, rozumíme otočení o 180° . Například L je tedy otočení levou vrstvou o 90° ve směru hodinových ručiček, U' je otočení horní vrstvou o 90° proti směru hodinových ručiček a $F2$ je otočení přední vrstvou o 180° .

Někdy používané tahy prostředními vrstvami budeme nahrazovat otočeními vnějších vrstev v opačném směru. Krom toho máme ještě nepravé tahy pro otočení celým hlavolamem. Písmeno x znamená otočení přední stěnou nahoru, písmeno y znamená otočení přední stěny doleva a písmeno z znamená otočení horní stěny doprava. Samozřejmě zase platí stejné doplňující značení pro otáčení v opačném směru, nebo dvojitě otočení.

Podívejme se ještě na značení jednotlivých kostiček. Každé kostičce přiřadíme seskupení písmen podle stěn, ke kterým patří nálepky tvořící tuto kostičku. Roh nahoře vpředu vpravo tak označíme písmeny UFR , hranu vpředu vlevo zase FL a například střed zadní stěny budeme značit B . Toto značení nám dává výhodu, že hned víme, zda se bavíme o rohu, nebo hraně. Pro některé naše potřeby si můžeme kostičky označit například čísly, v tom případě se na značení dohodneme v rámci konkrétního použití.

Pořadí písmen u značení kostiček není z principu důležité pro pojmenování kostičky, protože záměna pořadí nemůže znamenat jinou kostičku. My se ale budeme držet přesného pořadí, které vychází z dominancí jednotlivých stěn (viz orientace kostiček). Vzájemné pořadí písmen ve jménu kostičky by tedy mělo být shodné se vzájemným pořadím v posloupnosti $UDFBRL$.

Uvedené značení můžeme použít také při práci s webovou aplikací dostupnou na adrese <https://alg.cubing.net>, ve které můžeme sledovat efekty různých tahů.

3. Řešitelné tvary Rubikovy kostky

V této kapitole se podíváme na řešitelnost různých myslitelných tvarů Rubikovy kostky a příbuzných hlavolamů. Budeme posuzovat řešitelnost nejprve podle jednoduchých poznatků. Musíme si tedy nyní představit, že barvy nálepek na Rubikově kostce umístíme všemožnými způsoby.

Shrneme si zde tedy jednoduché problémy, které není potřeba matematicky nijak komentovat.

Jedním z těchto problémů je ten, pokud se neshoduje počet nálepek nějaké barvy na zkoumaném tvaru s počtem nálepek na složeném hlavolamu. Pokud na tvaru 3×3 kostky napočítáme více než devět červených nálepek, je jisté, že nám červená přebývá. Naopak, pokud nalezneme méně než devět modrých nálepek, je samozřejmé, že nedokážeme poskládat modrou stěnu.

O něco méně nápadný je problém s poskládáním kostiček z jednotlivých nálepek. Bavíme se tedy o nějaké permutaci nálepek. Zde může nastat problém, že budeme mít na nějakém tvaru kostičku, složenou z nesmyslné množiny nálepek. Například roh, který bude složen ze dvou červených nálepek, je jistě špatná kostička, protože takový roh se na složeném hlavolamu nevyskytuje.

Také musíme dát pozor na méně viditelný typ tohoto problému. I pokud máme na jedné kostičce různě barevné nálepky, nemusíme mít vyhráno. Typické barevné schéma Rubikovy kostky například umísťuje bílou stěnu naproti žluté stěně. Nemůže se tedy vyskytovat žádná kostička, která by se skládala z bílé a zároveň žluté nálepky, protože žádná kostička nezasahuje do obou protilehlých stěn.

Ještě chvíli se zdržíme u problému špatně poskládané kostičky, tentokrát u toho nejhůře viditelného. Tento problém se týká pouze rohů, protože se skládají ze tří nálepek. Tři nálepky můžeme totiž seskládat do dvou různých rohů. Máme-li roh bílo-červeno-zelený, může se ve směru hodinových ručiček po bílé nálepce vyskytovat červená, nebo zelená. Pokud nějaký roh uspořádáme jinak, než jak je uspořádaný na složeném hlavolamu, opět nedokážeme tento tvar složit.

Další problémy jsou už hůře průhledné a potřebujeme nejprve učinit některé matematické poznatky o Rubikově kostce.

4. Permutace na Rubikově kostce

Podívejme se nyní na chování permutací kostiček na Rubikově kostce. Na kostce máme základní tah otočení jedné vrstvy, což je permutace o trochu složitější, než prohození dvou kostiček. Sudost a lichost můžeme zkoumat na jakékoli permutaci. Zda jsme skutečně schopni docílit vzájemného prohození menšího počtu dílků budeme odvozovat právě z parit permutací, popřípadě skládáním permutací v další kapitole o řešitelných tvarech Rubikovy kostky.

O této problematice se můžeme dočíst v [2] na stranách 59 – 76, 82 – 90, nebo v přehlednější, ale zkrácené verzi můžeme zhlédnout video [3].

4.1 3×3 kostka

Nejprve rozhodneme o paritě otočení jedné vrstvy, tedy tahu. Aniž bychom potřebovali systematický zápis této permutace, dokážeme snadno říct, o jakou permutaci se jedná. Pokud otočíme vrstvou, vymění si v cyklu pozice čtyři hrany a stejně tak i čtyři rohy, zatímco ostatní kostičky zůstanou na svých místech. Z tohoto popisu je zřejmé, že permutace obsahuje dva cykly o délce čtyři, tedy sudý počet sudých cyklů. Ze základních znalostí o permutacích víme, že to znamená sudou permutaci.

Pokud budeme provádět více tahů, bude se jednat o skládání permutací. A budeme dohromady skládat právě permutace odpovídající jednotlivým tahům. Také víme, že složením sudých permutací vznikne opět sudá permutace. To znamená, že všechny permutace dosažitelné na hlavolamu jsou sudé.

Pokud se podíváme podrobněji na chování hlavolamu, uvědomíme si, že rohy a hrany tvoří vlastně dvě nezávislé množiny, mezi nimiž nemůže probíhat výměna prvků. Z toho nám vyplývá, že bychom se měli dívat zvlášť na permutaci na množině rohů a zvlášť na permutaci na množině hran.

Při otočení jednou vrstvou tedy máme jeden cyklus délky čtyři v permutaci množiny rohů a jeden cyklus délky čtyři v permutaci množiny hran. Což, jak víme z poznatků o permutacích, znamená lichou permutaci na rozích a lichou permutaci na hranách. Protože nemáme na hlavolamu jinou možnost základní permutace, než otočení vrstvy, plyne z toho, že parita permutací rohů a parita permutací hran musí být shodná. Pokud se budeme na tyto dvě permutace dívat jako na jednu, jsme opět u prvního pohledu na problém. Ve výsledku jsme tak dostali vlastně stejný poznatek, jako při předchozím pohledu.

4.2 2×2 kostka

Na této jednodušší variantě se při jednom tahu permutují pouze rohy, a to stejně jako na kostce 3×3 . Jak už jsme si řekli, permutace rohů je pro jeden tah lichá. Jak víme, složením dvou lichých permutací vznikne sudá permutace. Tudíž všechny permutace 2×2 kostky jsou buď liché, nebo sudé, a tedy nemůžeme na základě tohoto poznatku vyloučit žádné představitelné permutace.

4.3 4×4 kostka

Na 4×4 kostce máme možnosti dvou různých typů tahů. Za prvé je to otočení vnější vrstvou, za druhé je to otočení vnitřní vrstvou. Každý z těchto tahů pohybuje různým množstvím různých kostiček, takže musíme posoudit nejprve každý zvlášť.

Tah vnější vrstvou nám vzájemně permutuje čtyři rohy, což je stejné pro všechny kostky. To je opět lichá permutace na rozích. Kromě rohů se permutují také středy. Středové kostičky se také permutují v cyklu délky čtyři a tedy se jedná také o lichou permutaci. Zároveň se během tohoto tahu permutují hranové kostičky a to tak, že v této permutaci nalezneme dva cykly délky čtyři. To znamená sudou permutaci na hranových kostičkách. Pokud tyto permutace složíme dohromady, získáme sudou permutaci.

Nyní se podívejme na tah vnitřní vrstvou. Při tomto tahu se hrany permutují v jednom cyklu délky čtyři a středy se permutují ve dvou cyklech délky čtyři, což nám dává dohromady lichou permutaci.

Dohromady to tedy znamená, že permutace kostiček na 4×4 kostce může být sudá i lichá.

5. Otáčení kostiček

V této kapitole se budeme bavit o tom, jak mohou být jednotlivé kostičky orientovány, to znamená, že neřešíme jejich pozici, ale jejich otočení.

Budeme se odkazovat nejen na práce [2], kde se toto řeší na stranách 173 – 188, [4], str. 869, 870 ale také na stručné, ale dobře srozumitelné video [3].

V celé kapitole se budeme věnovat pouze 3×3 kostce, protože pro jiné varianty budou použitelné stejné poznatky.

Pozici kostiček dokážeme vztáhnout vůči pevným bodům. Musíme něco podobného vymyslet i pro orientaci.

Pro určení barev stěn se budeme dívat na složenou kostku. Nejprve se dohodneme, z jakého směru se na kostku budeme dívat. Zvolíme následnou orientaci: horní stěna bude bílá, dolní stěna bude mít žlutou barvu, přední stěna bude červená, zadní stěna oranžová, levá stěna bude zelená a pravou budeme mít modrou.

Pokud nebude kostka složená, poznáme barvy stěn podle pevného bodu. Pevným bodem může být buď pevný střed, nebo na kostkách bez pevného středu volíme za pevný bod jeden z rohů. Jak jsme zmínili, máme ke každé barvě přesně danou i barvu protilehlé stěny, takže dokážeme z jednoho rohu určit barvy všech stěn.

Musíme také dokázat posoudit orientaci kostičky, která se nachází na špatné pozici.

Z tohoto důvodu zavedeme pojem *dominance barev*. Protože některé barvy spolu nesousedí, můžeme mít barvy protilehlých stěn ohodnocené stejnou dominancí. Barvy budou mít dominanci od nejvyšší po nejnižší v tomto pořadí: bílá a žlutá dostanou dominanci 3, červená a oranžová budou mít dominanci 2 a na zelenou a modrou zbyde dominance 1.

O kostičce řekneme, že je *správně orientovaná*, pokud bude její nálepka s nejdominantnější barvou (budeme jí říkat *dominantní* barva kostičky) ve stěně s nejdominantnější barvou ze stěn, do kterých kostička zasahuje. Pokud tedy budeme mít kostičku bílo-červenozelenou mezi stěnami žlutou, zelenou a oranžovou, bude tato kostička správně orientována, pokud její bílá nálepka bude směřovat na žlutou stěnu.

Pro všechny typy kostiček zavedeme pojem *orientace*, který bude pomocí číselné hodnoty reprezentovat orientaci kostičky.

Rozebereme si chování při otáčení a orientaci jednotlivých kostičky zvlášť pro různé typy kostiček.

5.1 Orientace hran

Poznatky z této části můžeme najít v [2], str. 173 – 181, nebo [3].

Nejprve se podíváme na hrany, které budou jednodušší, neboť mají jen dvě nálepky a tedy dvě možné orientace. Hrana je buď správně orientována, pak jí přiřadíme orientaci 0, nebo nebude správně orientována, pak jí přiřadíme orientaci 1.

Není třeba vysvětlovat, že ve složeném stavu mají všechny hrany orientaci 0. Podívejme se nyní, jak nám budou jednotlivé tahy měnit orientace kostiček.

Začneme tahem U , tedy otočením horní vrstvy o 90° ve směru hodinových ručiček. Protože horní vrstva je bílá a tedy nejdominantnější, sledujeme jen dominantní barvy na hranách. Pokud byla hrana dominantní barvou nahoru, po tahu U se na tom nic nezmění. Pokud hrana nebyla dominantní barvou nahoru, tak po tahu U tomu také tak nebude. To znamená, že tah U nám nijak nezmění orientaci hran.

Stejně jako tah U se samozřejmě zachová i tah D , neboť na dolní stěně máme také nejdominantnější barvu. Obdobně bychom mohli uvažovat tahy U' , $U2$, D' a $D2$, nebo můžeme říci, že například tah $D2$ se složí ze dvou tahů D a tah D' ze tří tahů D , které nemění orientaci.

Podívejme se dále na tah R , tedy otočení pravou vrstvou o 90° . Bude zde platit poněkud podobná úvaha, jako u tahu U , jen s orientací na druhém konci škály dominancí. Pravá stěna, která je modrá, má totiž nejmenší dominanci. Pokud tedy byla hrana otočená dominantní barvou doprava, a tedy měla orientaci 1, nic se na tom nezmění, pokud ji otočíme, protože bude stále směřovat do stěny s menší dominancí. Pokud bude situace taková, že bude směřovat dominantní barvou mimo pravou stěnu, což pro ni znamená orientaci 0, opět se otočením nic nezmění, protože horní (dolní) i přední (zadní) stěna mají větší dominanci, než pravá stěna.

Stejná úvaha nás pochopitelně povede ke stejnému výsledku také pro tah L , neboť levá stěna má také dominanci 1, stejně jako pravá stěna. Protože můžeme tahy R' a $R2$ (L' a $L2$) poskládat opakováním tahu R (L), platí pro ně stejný výsledek.

Zatím jsme tedy zjistili, že otáčení horní a dolní, ani pravé a levé vrstvy nám orientaci hran nemění. Očekáváme tedy, že orientace hran se bude měnit otáčením přední, nebo zadní vrstvou. Pojdme se na to tedy podívat.

Podívejme se nejprve na přední vrstvu. Přední stěna má dominanci 2. Vrchní a spodní stěna mají dominanci 3. Boční stěny mají dominanci 1. Všechny hrany přední vrstvy zasahují do přední stěny. Necht jsou všechny hrany orientovány dominantní barvou do přední stěny. Pokud zasahují také do vrchní, nebo spodní stěny, mají špatnou orientaci, tedy orientaci 1. Pokud tyto hrany zasahují do jedné z bočních stěn, mají orientaci správnou, tedy s hodnotou 0.

Podívejme se nyní na tah F a předpokládejme výše řečenou orientaci hran. Hrany, které měly orientaci 0, získají orientaci 1 a naopak.

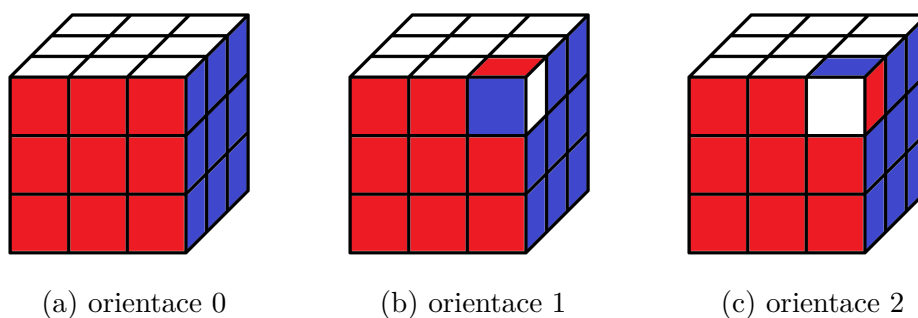
Předpokládejme nyní opačný případ, tedy že všechny hrany budou svojí dominantní barvou otočeny do ostatních stěn. Pak budou mít jen opačné orientace, ale situace bude jinak shodná s předchozí situací.

Co se stane, pokud bude libovolná hrana otočená dominantní barvou libovolně? V předchozí úvaze jsme zjistili, že budou-li všechny hrany orientovány správně, změní všechny svoji orientaci, budou-li všechny hrany orientovány špatně, taktéž změní orientaci. Protože změna orientace jedné hrany se děje bez ohledu na orientaci ostatních hran, můžeme se podívat v každém z uvedených případů jen na jednu hranu. Pokud se podíváme na jakoukoliv hranu, z kteréhokoliv z případů (tedy s libovolnou orientací), vždy se orientace této hrany změní.

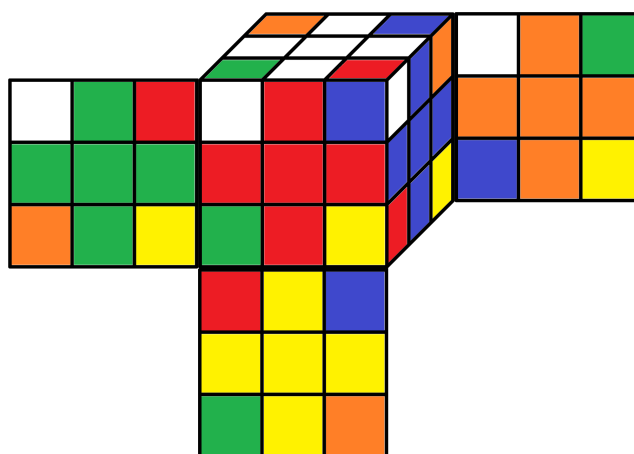
To znamená, že tah F nám mění orientace všech čtyř hran, které ovlivňuje.

Tah B dopadne zřejmě podobně jako tah F . Stejně tak i tahy B' a F' .

Ušetřeme si nyní trochu práce s formální stránkou těchto poznatků. Orientace hran může nabývat hodnot 0 a 1. To jsou prvky tělesa \mathbb{Z}_2 . Můžeme tedy říci, že



Obrázek 5.1: Orientace rohů



Obrázek 5.2: Orientace 1 na všech rozích

tahy B a F zvýší orientaci příslušných hran o jedna, počítáno nad tělesem \mathbb{Z}_2 .

Nyní se vraťme k tahům $B2$ a $F2$. Tyto tahy získáme dvojím použitím tahů B nebo F . To znamená, že se orientace každé hrany zvýší postupně o dva, což ale nad tělesem \mathbb{Z}_2 znamená, že zůstanou stejné.

Podívejme se nyní na orientaci všech hran dohromady. Protože měníme orientaci vždy čtyř hran najednou, můžeme součet orientací zvýšit/snížit o čtyři, o dva (např. tři hrany zvýší orientaci, jedna ji sníží), nebo zůstane součet nezměněn. Víme tedy, že součet orientací musí být na složitelném tvaru sudé číslo, nejméně 0, nejvíce 12.

5.2 Orientace rohů

Když už máme vyřešenou orientaci hran, podívejme se na orientaci rohů.

Poznatky z této části lze najít v [2], str. 173 a 181–188, nebo [3].

Orientace rohů bude složitější v tom smyslu, že každý roh může být orientován třemi způsoby (vzájemné pořadí barev je totiž neměnitelné). To znamená, že rohu musíme přiřadit orientaci 0, 1 nebo 2.

Orientace 0 bude samozřejmě znamenat, že roh je správně orientován. Musíme však ještě rozlišit co znamená orientace 1 a co znamená orientace 2.

Představme si nyní, že máme roh špatně orientován. Díváme se na roh tak, že vidíme všechny tři jeho nálepky. Aby byl roh správně orientován, musíme ho otočit. Pokud jsou jeho nálepky od správné orientace otočeny o jednu pozici

ve směru hodinových ručiček, přiřadíme rohu orientaci 1. Pokud budou nálepky takto otočeny o dvě pozice (stačí jedno pootočení ve směru hodinových ručiček, aby byl roh správně orientován), pak přiřadíme rohu orientaci 2.

Můžeme si nyní opět říci, že budeme orientace rohů počítat nad tělesem \mathbb{Z}_3 a ušetřit si tak problémy, kdy k orientaci přičítat, kdy odčítat.

Nyní se podívejme na jednotlivé tahy.

Začněme tahem U . Při aplikaci tahu U zůstávají všechny rohy ve vrchní vrstvě otočeny do vrchní stěny, která má nejvyšší dominanci, stále stejnou barvou, jako předtím. To znamená, že jejich orientace zůstává nezměněná.

Stejně jako tah U se zachová i tah D , protože i spodní stěna má nejvyšší dominanci. Stejně samozřejmě dopadnou i tahy U' , $U2$, D' , $D2$, které se dají složit vícenásobným aplikováním tahů U , nebo D .

Jako další prozkoumejme vliv tahu R . Při tahu R už si můžeme všimnout, že se orientace rohů mění. Pro lepší popis orientací si zavedeme matematický popis.

Značení: Necht X je roh Rubikovy kostky, T je tah na Rubikově kostce, O je orientace rohu X . Potom zápisem $T(X,O)$ rozumíme zobrazení představující tah T , aplikované na roh X s orientací O . Výsledkem tohoto zobrazení je uspořádaná dvojice (X_1, O_1) . Zápis $T(X,O) = (X_1, O_1)$ tedy znamená, že tah T přemístí roh z pozice X na pozici X_1 a změní jeho orientaci z O na O_1 .

Tah R popíšeme takto:

$$\begin{array}{l} (X,O) : \quad (UFR,a) \quad (UBR,a) \quad (DBR,a) \quad (DFR,a) \\ R(X,O) : \quad (UBR,a+1) \quad (DBR,a+2) \quad (DFR,a+1) \quad (UFR,a+2) \end{array}$$

Podívejme se nyní na tah $R2$. Ten můžeme získat dvojnásobným aplikováním tahu R .

$$\begin{array}{l} (X,O) : \quad (UFR,a) \quad (UBR,a) \quad (DBR,a) \quad (DFR,a) \\ R(X,O) : \quad (UBR,a+1) \quad (DBR,a+2) \quad (DFR,a+1) \quad (UFR,a+2) \\ R(R(X,O)) : \quad (DBR,a+1+2) \quad (DFR,a+2+1) \quad (UFR,a+1+2) \quad (UBR,a+2+1) \end{array}$$

Protože sčítání orientací provádíme nad tělesem \mathbb{Z}_3 můžeme psát:

$$\begin{array}{l} (X,O) : \quad (UFR,a) \quad (UBR,a) \quad (DBR,a) \quad (DFR,a) \\ R2(X,O) : \quad (DBR,a) \quad (DFR,a) \quad (UFR,a) \quad (UBR,a) \end{array}$$

Tah $R2$ tedy nemění orientaci rohů, jak vidíme z výsledku složení dvou tahů R , jen samozřejmě mění pozici rohů.

Podívejme se ještě na tah R' . Můžeme ho složit trojnásobným použitím tahu R . Protože $R2$ nemění orientaci, má třetí tah R stejný vliv na orientaci, jako první tah R . Proto tah R' mění orientaci stejně jako tah R . Tento závěr platí, pokud se bavíme o tom, jakou orientaci bude mít po tahu roh na určité pozici (kde po tahu bude ale roh jiný).

Podívejme se ještě, jak se změní orientace konkrétních rohů, nikoliv orientace na pozicích:

$$\begin{array}{l} (X,O) : \quad (UFR,a) \quad (UBR,a) \quad (DBR,a) \quad (DFR,a) \\ R'(X,O) : \quad (DFR,a+1) \quad (UFR,a+2) \quad (UBR,a+1) \quad (DBR,a+2) \end{array}$$

Samozřejmě opět je výsledek stejný jako po aplikaci tahu R . To si můžeme také zdůvodnit tím, že po tahu R provedeme tah $R2$, abychom dostali tah R' . Ale tah $R2$ nám nemění orientaci vůbec, tedy musí být orientace konkrétních rohů stejná po R , jako po R' .

Dále se podíváme na tah L , který vypadá následovně:

$$\begin{array}{l} (X,O) : \quad (UBL,a) \quad (UFL,a) \quad (DFL,a) \quad (DBL,a) \\ L(X,O) : \quad (UFL,a+1) \quad (DFL,a+2) \quad (DBL,a+1) \quad (UBL,a+2) \end{array}$$

Obdobně jako u tahu R dojdeme k závěru, že tah $L2$ orientaci nemění a tah L' mění orientaci stejně jako tah L .

Podívejme se ještě na tah F :

$$\begin{array}{l} (X,O) : \quad (UFL,a) \quad (UFR,a) \quad (DFR,a) \quad (DFL,a) \\ F(X,O) : \quad (UFR,a+1) \quad (DFR,a+2) \quad (DFL,a+1) \quad (UFL,a+2) \end{array}$$

Tah F pochopitelně opět nebude měnit orientaci a tah F' bude mít stejný vliv na orientaci jako tah F .

Pro pořádek uvedme ještě tah B , s tím že nás nepřekvapí, že tah $B2$ orientaci nemění a tah B' ovlivňuje orientaci stejně jako tah B .

$$\begin{array}{l} (X,O) : \quad (UBR,a) \quad (UBL,a) \quad (DBL,a) \quad (DBR,a) \\ B(X,O) : \quad (UBL,a+1) \quad (DBL,a+2) \quad (DBR,a+1) \quad (UBR,a+2) \end{array}$$

Nyní si můžeme všimnout obecné zákonitosti, která platí pro všechny tahy. Pokud bereme vrcholy v pořadí po směru hodinových ručiček a začínáme rohem, který je ve stěně vlevo nahoře (při pohledu zpřítma na stěnu). Pak první roh zvýší vždy svou orientaci o 1 a pravidelně se střídá zvýšení orientace o 1 a zvýšení orientace o 2.

6. Řešitelné tvary Rubikovy kostky podruhé

Nyní už máme dostatek matematických znalostí o Rubikově kostce a můžeme se podívat na další problémy, které nám mohou znemožnit řešení hlavolamu. Protože se tyto problémy mohou lišit nebo vyskytovat podle toho, na který hlavolam se díváme, podíváme se na jednotlivé hlavolamy zvlášť.

Můžeme se odkázat opět na práce [2] na strany 59 – 76, 83 – 90, a 173 – 188, [4] na strany 871 – 876 nebo na stručnější [3]. Na obecné základní poznatky o permutacích se odkažme na práci [5].

6.1 Permutace

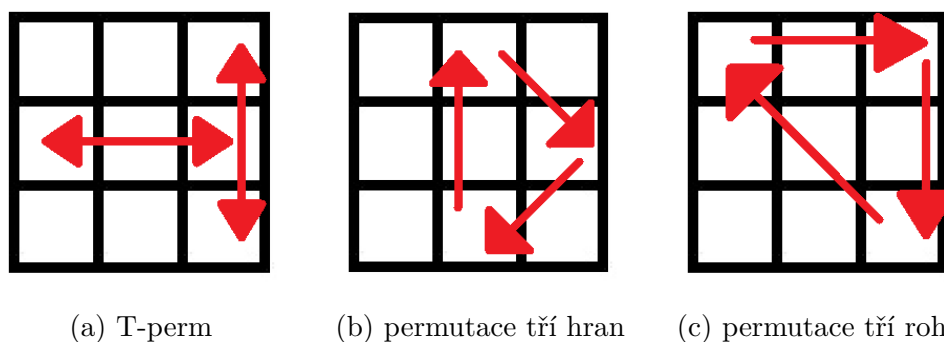
V této části budeme řešit pouze problém pozice kostiček a nebude nás vůbec zajímat, zda jsou kostičky správně orientovány.

Zde se opět odkažeme na [2], konkrétně na strany 59 – 76, 83 – 90.

6.1.1 3×3 kostka

Začněme co nejmenším počtem prohození kostiček, tedy prohozením dvou kostiček. Protože otočení vrstvy má sudou paritu a permutace prohození dvou prvků má lichou paritu, můžeme říci, že tohoto docílit nelze.

Pokud budeme chtít prohodit jen dva rohy, tak nám v tom parity nebrání, protože otočení vrstvy má lichou paritu na rozích. Ovšem zároveň má tento tah také lichou paritu na hranách. Nemůžeme tedy prohodit dva rohy, aniž bychom permutovali hrany, neboť identita má sudou paritu. V metodě známé jako CFOP nalezneme algoritmy, které dokáží prohodit dva rohy a zároveň dvě hrany (poznámka: dokonce bez změny jejich orientace). Jako příklad uveďme jeden z algoritmů nazývaný T-perm [6]: $RUR'U'R'FR2U'R'U'RUR'F'$ (obr. 6.1a). Tímto jsme zároveň vyřešili otázku, zda dokážeme prohodit jen dvě hrany – dokážeme, ovšem zároveň s tím musíme prohodit alespoň dva rohy.



Obrázek 6.1: Permutace podle uvedených algoritmů - ovlivňují pouze vrchní vrstvu

Další otázka je, zda dokážeme prohodit jen tři rohy, aniž bychom prohodili hrany. Parity tomu nebrání, protože prohození tří kostiček je sudá permutace. Protože identita je sudá, může nastat situace, že na rozích by byla permutace s cyklem délky tři a na hranách identita, čímž by se neporušila shodnost znaménka permutace rohů a permutace hran. Opět platí, že dokážeme nalézt algoritmus, který prohodí tři rohy a vše ostatní nechá na původních pozicích. Vypůjčíme si opět jeden z algoritmů z metody CFOP [6]: $R'FR'B2RF'R'B2R2$ (obr. 6.1c).

Pokud se budeme ptát na možnost prohození tří hran bez prohození rohů, dostáváme z obdobných důvodů stejný výsledek jako při prohození tří rohů. Tedy parity tomu nikterak nebrání a jsme schopni nalézt algoritmus, který požadovaný efekt má, například [6]: $RU2R'U'RU'R'UL'U2LUL'ULU'$ (obr. 6.1b).

Pokud bychom chtěli prohodit mezi sebou dva a dva rohy, dokážeme tuto permutaci poskládat trojím aplikováním algoritmu permutace tří rohů. Totéž platí samozřejmě pro hrany.

Výše uvedené algoritmy dokáží permutovat kostičky na konkrétních pozicích. Podívejme se nyní, jak můžeme mezi sebou permutovat libovolné kostičky. Chceme tedy vzájemně permutovat tři libovolné kostičky, aniž bychom změnili cokoli na ostatních kostičkách.

Za tímto účelem provedeme posloupnost „nastavovacích“ tahů, kterými dosáhneme toho, že budeme mít kostičky, které chceme prohodit, na pozicích, které jsou ovlivněné efektem algoritmu. Po provedení algoritmu provedeme inverzní posloupnost „nastavovacích“ tahů.

Uvedme si příklad: Chceme permutovat hrany na pozicích UF , UR a DR . Uvedli jsme si už algoritmus, který permutuje hrany na pozicích UF , UR a UB . Nyní musíme hrany z pozic UF , UR a DR přesunout na pozice UF , UR a UB . To můžeme snadno zařídit například posloupností „nastavovacích“ tahů $DB2$. Poté provedeme už známý algoritmus. Poté provedeme inverzní posloupnost tahů k posloupnosti „nastavovacích“ tahů, tedy $B2D'$. Tím jsme tento problém vyřešili.

Toto funguje, protože provedení posloupnosti tahů a následné provedení posloupnosti inverzních tahů nemá na kostce žádný efekt. Pokud mezi tyto dvě posloupnosti vložíme nějaký algoritmus, pak všechny kostičky, které algoritmus ponechává na svém místě, se po provedení inverzní posloupnosti „nastavovacích“ tahů vrátí na své původní pozice. Všechny ostatní kostičky se po provedení inverzní posloupnosti „nastavovacích“ tahů vrátí na původní pozice.

6.1.2 2×2 kostka

Podívejme se, kolik nejméně kostiček jsme schopni mezi sebou prohodit. Zkusíme se zamyslet nad dvěma kostičkami. Parity nám tuto možnost nevyklučují. Pokud se vrátíme zpět k algoritmům na 3×3 kostce, měli jsme algoritmus, který prohazoval dva rohy a dvě hrany. Pokud stejný algoritmus použijeme na 2×2 kostce, prohodíme tím dva rohy a hrany na 2×2 kostce nejsou. Dokážeme tedy prohodit dvě kostičky a tedy dokážeme permutovat kostičky libovolně.

6.2 Orientace

Nyní se podívejme na problematiku orientace kostiček. Nebude nám vadit špatné umístění kostičky, ale pouze její špatná orientace.

Zde se odkážeme konkrétně na [2] na strany 173 – 188.

6.2.1 3×3 kostka

Podívejme se nejprve na kostku 3×3 a začneme od hran.

Už víme, že orientaci hran mění pouze tahy F a B a od nich odvozené tahy. Tyto tahy nám vždy změni orientaci všech čtyř hran v dané vrstvě. Ostatní tahy můžeme beztréstně provádět a dostat do vrstvy F nebo B hranu, kterou chceme otočit (rozumějme změnit orientaci).

Podívejme se nyní, kolik nejméně hran může být orientováno špatně, respektive kolik nejméně hran můžeme nějakým algoritmem otočit.

Pokusme se o otočení pouze jedné hrany. Ve složeném tvaru má kostka součet orientací na hranách samozřejmě 0. Musíme tedy nejprve najít způsob, jak změnit součet orientací o lichou hodnotu. To ale bohužel nepůjde.

Pokud budeme mít ve vrstvě F čtyři správně (špatně) orientované hrany, po tahu F se zvětší (zmenší) součet o 4. Pokud zde budeme mít tři správně (špatně) orientované hrany a jednu špatně (správně) orientovanou hranu, pak se po tahu F zvýší (sníží) součet orientací o 2. Pokud budeme mít dvě správně a dvě špatně orientované, pak tah F nezmění součet orientací.

Pro tah B samozřejmě platí totéž, stejně jako pro tahy F' a B' . Jinou možnost, jak měnit orientaci nemáme, proto nemůžeme dosáhnout lichého součtu orientací a nemůžeme tedy ani změnit orientaci pouze u jedné hrany, a to jakýmkoliv algoritmem.

Zkusme tedy změnit součet orientací alespoň o 2. To by jít teoreticky mělo, ukažme si to na matici, kde máme v každém řádku uvedeny orientace zatím nspecifikovaných jednotlivých hran po každé změně orientací. Ve sloupci se nachází orientace konkrétní hrany. Pro lepší přehlednost se nebudeme dívat na všechny hrany, ale jen na ty, u kterých dojde ke změně orientace – stačí nám jich sedm:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pokud nám půjde jen o změnu orientace pouze u dvou hran a vše ostatní bude podružné, můžeme zkusit postupovat například podle uvedené matice a vymyslet, jakými tahy dosáhnout požadovaného výsledku, jako uvádí matice. Můžeme provést například takovýto algoritmus: FRF , kde tahy F nám měni orientaci hran. Dotčenými hranami pak budou hrany zasahující do přední a pravé stěny. To bude mít, mimo jiné, tento efekt: $(UF,a) \mapsto (UR,a+1)$; $(DR,a) \mapsto (DF,a+1)$. U ostatních hran se orientace nezmění

Podívejme se ještě na nějaký algoritmus z praxe, který nám na kostce mnoho nezmění a také změni orientaci jen na dvou hranách. Kromě toho nám jen permutuje tři hrany. Ten algoritmus vypadá následovně: $R'LFRL'U2R'LFRL'$

Umíme tedy změnit součet orientací o 2. To znamená, že součet orientací hran může nabývat jakékoliv sudé hodnoty, nejvýše samozřejmě 12. Můžeme tedy součet orientací počítat nad tělesem \mathbb{Z}_2 , pak součet 0 bude znamenat, že je vše v pořádku, zatímco součet 1 bude značit, že máme nesložitelný tvar.

Nyní se podívejme na rohy. Opět víme, že složený tvar má součet orientací rohů 0. Pokud provedeme jakýkoliv tah, kromě tahů U , D a z nich odvozených

tahů, měníme orientaci na čtyřech rozích, a to na dvou rozích o hodnotu 2, na dvou rozích o hodnotu 1, vše počítáno nad \mathbb{Z}_3 .

Protože počítáme orientace rohů nad \mathbb{Z}_3 , podívejme se, jak se nám mění orientace rohů, pokud mají konkrétní orientace:

$$0 + 1 = 1; 1 + 1 = 2; 2 + 1 = 0$$

$$0 + 2 = 2; 1 + 2 = 0; 2 + 2 = 1$$

Z toho vidíme, že zvýšení orientace rohu o 1 může znamenat buď zvýšení součtu o 1, nebo snížení součtu o 2. Zvýšení orientace rohu o 2 může znamenat zvýšení součtu o 2, nebo snížení součtu o 1.

Podívejme se na možné kombinace změn orientací rohů a jejich vliv na součet orientací. Počítáme samozřejmě s tím, že u dvou rohů měníme orientaci o 1 a u dvou rohů měníme orientaci o 2.

	(+2, - 1)	(+2, + 2)	(-1, - 1)
(+1, - 2)	+0	+3	-3
(+1, + 1)	+3	+6	+0
(-2, - 2)	-3	+0	-6

Z tohoto přehledu vidíme, že nemůžeme nikdy aplikovat takový tah, který by nám změnil součet orientací rohů o jiné hodnoty než 0, 3 nebo 6. Součet tedy určitě musí být dělitelný třemi. Zatím s jistotou víme, že taková situace, při které se součet zvýší o 6, může nastat (kupříkladu tah F na složené kostce).

Nyní musíme vyřešit ještě otázku, zda je možno změnit orientaci rohů jen o 3. To skutečně můžeme udělat. Poslouží nám k tomu například tento algoritmus: $RUR'URU2R'$. Tento algoritmus má opět vedlejší efekty, ale pokud si všimáme jen vlivu na rohy, na kterých se změnila orientace, uvidíme toto: $(UBL, a) \mapsto (UFR, a + 1); (UBR, a) \mapsto (UFL, a + 1); (UFR, a) \mapsto (UBL, a + 1)$

Protože můžeme měnit součet orientací rohů nejméně o 3, bude tento součet vždy dělitelný třemi. Můžeme tedy i součet rohů počítat nad tělesem \mathbb{Z}_3 . Pokud bude součet roven 0, bude vše v pořádku, pokud bude součet jiný, bude to znamenat, že máme nevyřešitelný tvar hlavolamu.

Pro úplnost uvedme, že pokud budeme chtít řešit orientaci jen konkrétních kostiček, aniž bychom učinili změny na jiných kostičkách, můžeme podobně jako u permutací použít kombinaci algoritmů a „nastavovacích“ tahů. Konkrétní algoritmy můžeme čerpat například z [7, 2]. Tyto algoritmy mohou mít vedlejší efekt v podobě permutace kostiček horní vrstvy, což můžeme opravit algoritmy z [6, 2].

Uvedeme si zde dva příklady: Otočení dvou rohů bez dalších efektů lze zařídit algoritmem $RUR'URU2R'L'U'LU'L'U2L$ [7], který mění orientaci rohů na pozicích UFL (o 2) a UBL (o 1). Na změnu orientace u dvou hran můžeme použít složení algoritmů $R'LFRL'U2R'LFRL'$, poté aplikovat tah U a následně dvakrát zopakovat $RU2R'U'RU'R'UL'U2LU'LU'$ a nakonec ještě U' . Tímto postupem změníme orientaci hran na pozicích UB a UL .

6.2.2 2×2 kostka

A jak se bude chovat orientace rohů na 2×2 kostce? Samozřejmě nás napadne, že se jedná vlastně jen o rohy, takže to bude stejné jako na 3×3 kostce. Nezapom-

mínejme však, že na 2×2 kostce nemáme pevné středy, vůči kterým posuzujeme orientaci. Orientaci posuzujeme vůči jednomu pevnému rohu.

Zvolme za pevný roh například roh DBL . Pak vlastně můžeme provádět pouze tahy U , R a F a tahy z nich odvozené. Jinak bychom museli přepočítávat orientace složitěji.

Protože poznatky o možnostech změn v součtu orientací rohů na 3×3 byly nezávislé na tazích, budou platit i na 2×2 kostce. K dokázání, že můžeme změnit součet orientací o 3, jsme použili algoritmus $RUR'URU2R'$. Tento algoritmus můžeme provést i na 2×2 kostce, takže nenastává žádný problém. Opět tedy platí o součtu orientací rohů totéž co u 3×3 kostky.

6.3 Shrnutí

Shrňme si nyní poznatky z této kapitoly.

Definice 1. Tvar T hlavolamu H nazveme **řešitelný**, jestliže existuje konečná posloupnost tahů P taková, že po aplikování P na T získáme vyřešený tvar hlavolamu H .

Definice 2. Necht M je množina všech kostiček, ze kterých se skládá vyřešený hlavolam H . Říkáme, že tvar hlavolamu H je **korektní**, pokud se skládá z množiny kostiček M .

Věta 1. Necht T je libovolný řešitelný tvar 3×3 kostky. Pak platí:

1. Součet všech orientací rohů tvaru T je $0 \pmod{3}$.
2. Součet všech orientací hran tvaru T je $0 \pmod{2}$.
3. Permutace hran a permutace rohů mají stejné znaménko.

Důkaz. Viz tato kapitola. □

Věta 2. Necht T je libovolný korektní tvar 3×3 kostky. Necht navíc platí:

1. Součet všech orientací rohů tvaru T je $0 \pmod{3}$.
2. Součet všech orientací hran tvaru T je $0 \pmod{2}$.
3. Permutace hran a permutace rohů mají stejné znaménko.

Potom je tvar T řešitelný.

Důkaz. Potřebné poznatky jsme si ukázali v této kapitole a odkázat se můžeme opět i na poznatky v [2, 5]. Zbývá tyto poznatky ucelit.

Tvar T je řešitelný, pokud můžeme nalézt posloupnost tahů, které transformují T na vyřešený tvar. Pojdme tedy hledat tuto posloupnost tahů.

V této kapitole jsme si uvedli algoritmy a postupy, pomocí kterých dokážeme:

- (i) permutovat rohy v trojcyklu
- (ii) permutovat hrany v trojcyklu

- (iii) měnit orientaci dvou hran o 1 bez změn v pozicích
- (iv) měnit orientaci dvou rohů (jednoho rohu o 1 a druhého o 2) bez změn v pozicích
- (v) prohodit současně 2 rohy a 2 hrany

Zkontrolujeme paritu permutace rohů (nebo hran). Je-li permutace lichá, použijeme (v), čímž získáme sudé permutace na rozích i hranách.

Nyní máme rohy (hrany) v sudé permutaci. Sudá permutace se dá rozložit na sudý počet transpozic. Složení dvou transpozic lze vyjádřit jako trojcyklus $((a,b)(b,c) = (b,c,a)$, nebo $(a,b)(c,d) = (a,b,c)(b,c,d)$). Můžeme tedy permutaci rozložit na trojcykly a pomocí (i) ((ii)) umístit všechny rohy (hrany) na správné pozice.

Zbývá vyřešit orientaci. Součet orientací rohů (hran) je nyní 0 (předchozí postup nezměnil součet orientací). Můžeme tedy použít (iv) ((iii)) na správné orientování rohů (hran), protože vyřešený tvar má také součet orientací rohů (hran) 0.

Tím jsme našli posloupnost tahů, které převedou tvar T na vyřešený tvar. □

Věta 3. *Nechť T je libovolný korektní tvar 2×2 kostky. Pak platí, že součet všech orientací rohů tvaru T je 0 právě tehdy, když je tvar T řešitelný.*

Důkaz. Postupujeme obdobně jako v důkazech vět 1 a 2. □

7. Metody skládání Rubikovy kostky

Většina lidí jistě někdy obdivovala někoho, kdo jim před očima dokázal tento legendární hlavolam vyřešit. Poučenější lidé vědí, že na řešení existuje metoda, kterou v dnešní době najdou běžně na internetu. Naučit se takovou metodu je pak záležitost, kterou zvládne bez velkých obtíží téměř každý.

My si nyní tyto informace trochu upřesníme.

V první řadě je skutečně velmi složité Rubikovu kostku složit bez znalosti metody řešení. Samozřejmě je možné (a nejspíše nevyhnutelné) metodu řešení vymyslet, což je ale dost obtížné.

Tím se dostáváme k faktu, že metod řešení je ve skutečnosti celá řada a mohou se lišit jen v malých detailech, použitých algoritmech, nebo mohou být naopak zcela odlišné. První důvod pro existenci mnoha metod je ten, že mnozí lidé nezávisle na sobě vymysleli různé metody. Další důvod je ten, že různé metody slouží různým účelům (i když všechny mají jeden společný cíl – složení hlavolamu). Existují metody pro začátečníky, které mají za cíl být snadno naučitelné, metody pro rychlé složení kostky, které se snaží ušetřit čas při skládání, metody pro efektivní skládání, které se snaží kostku řešit na nízký počet tahů (tato skupina se neshoduje s tou předcházející!), pak dokonce metody umožňující kostku složit poslepu poté, co si ji důkladně prohlédneme a pak snad ještě metody, které mají být hlavně zajímavé.

Po výčtu metod se sluší zmínit, že poskládat Rubikovu kostku se může naučit asi opravdu každý. Už není tak docela pravda, že každá metoda je jednoduchá na naučení. Metody určené pro rychlé nebo efektivní skládání se dají vylepšovat neustále.

My se zde nebudeme učit různé metody, to není cílem této práce. Přesto si alespoň dvě metody ukážeme, z nichž jedna bude zajímavá po své funkční stránce a tu si více popíšeme.

7.1 Běžná jednoduchá metoda

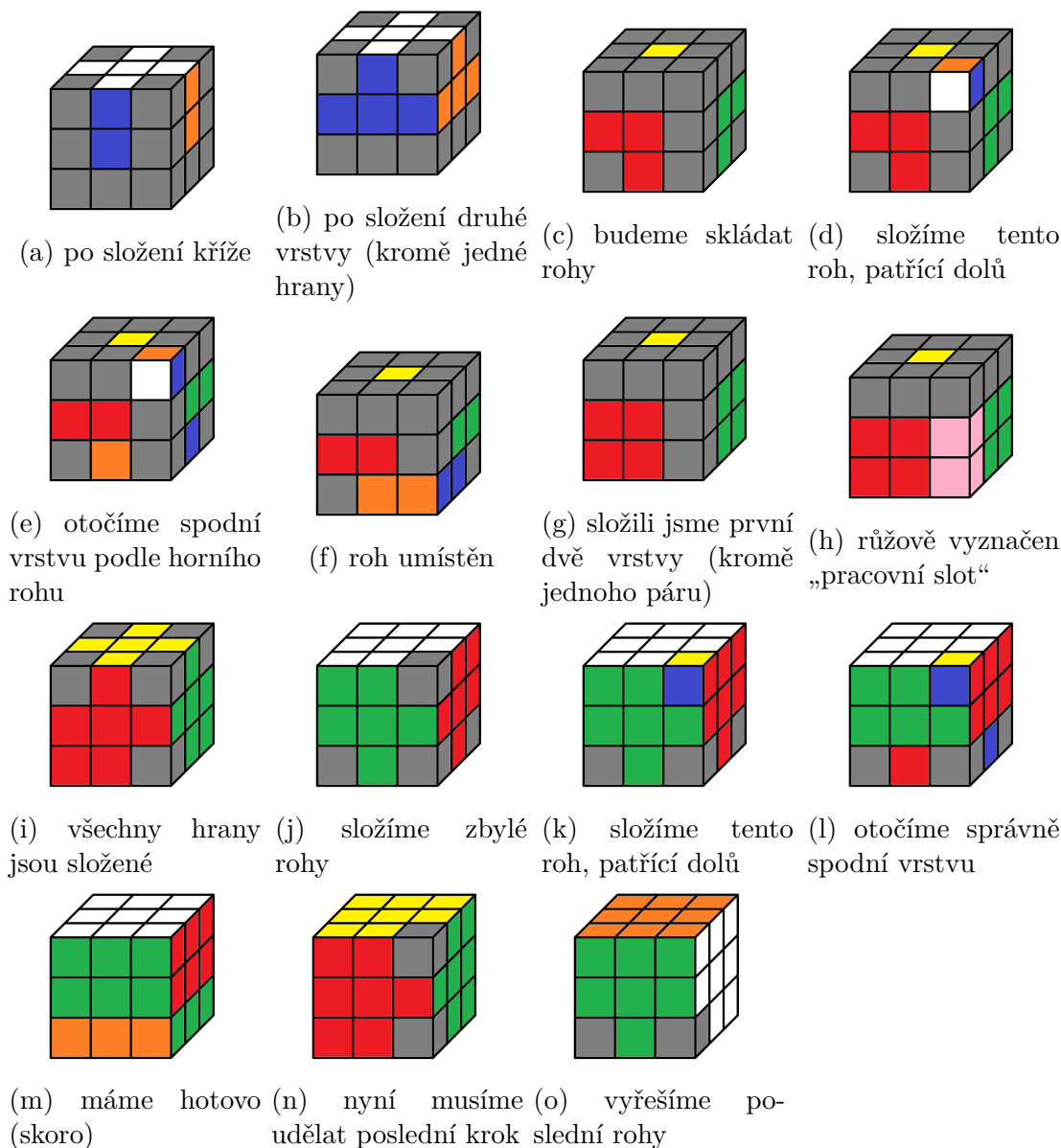
Protože další popisovanou metodu mnoho lidí nepoužívá a radí se spíše do zajímavostí, uvedeme zde jen velmi stručně a obecně jednoduchou metodu určenou pro začátečníky, se kterou se můžete setkat v různých drobných obměnách.

Prvním krokem je složení první vrstvy kostky. Tento krok je intuitivní a doporučuje se, aby si ho každý zkusil sám objevit. Někdy se dělí na složení kříže a poté složení rohů, ale není nutné toto rozdělení dodržovat.

Druhý krok je pak složení druhé vrstvy, což se provádí pomocí algoritmu, který může být různý.

Třetí krok je složení třetí vrstvy, které se dělí na tři podkroky, jejichž pořadí se pak podle konkrétní metody liší. Každému podkroku patří jeden algoritmus, který se musí podle konkrétní situace třeba i několikrát zopakovat. Tyto podkroky jsou: orientace hran, permutace hran, permutace rohů, orientace rohů.

Konkrétní metoda je popsána například ve videu [8].



Obrázek 7.1: Ukázka tvaru kostky mezi jednotlivými kroky

7.2 Metoda sexy

Popis této metody je dostupný například v [9, 10].

Název této metody jistě zaujme. Tento název metoda převzala z pojmenování algoritmu, který je jako jediný nutný ke složení celé kostky. Tento algoritmus se nazývá sexy move a vypadá následovně: $RUR'U'$.

Tato metoda je z velké části intuitivní a potřebujeme se naučit jen jeden, a to ještě jednoduchý, algoritmus. A v tom je právě zajímavost této metody. Její funkčnost se totiž opírá o některé základní principy Rubikovy kostky, ať už jednodušší, snadno pozorovatelné, nebo ty podepřené matematikou.

7.2.1 Použití sexy metody

První krok této metody je složení takzvaného kříže (obr. 7.1a). To znamená, že budeme mít na jedné stěně kříž jedné barvy (barvy středu), krom toho budou hrany, tvořící tento kříž, správně spárované i svou druhou stěnou se středy bočních hran.

Druhý krok je pak složení tří hran ve druhé vrstvě (obr. 7.1b), což je také poměrně jednoduchá záležitost, zvládnutelná intuitivně.

Třetím krokem je složení tří rohů v první vrstvě (obr. 7.1g), kde už použijeme algoritmus sexy move. Za tím účelem si kostku otočíme stěnou s křížem dolů a otočíme ji tak, abychom na čelní straně vpravo měli jediné nesložené místo hrany ve druhé vrstvě (obr. 7.1c). Pak nalezneme na vrchní vrstvě libovolný roh patřící do spodní vrstvy a otočíme ho dopředu doprava (obr. 7.1d). Ve spodní vrstvě pak nalezneme místo, kam tento roh patří, a to otočíme také dopředu doprava (obr. 7.1e). Pak provádíme algoritmus, dokud se nám nalezený roh nesloží, včetně správné orientace (obr. 7.1f). Tento postup poté opakujeme s dalšími rohy, dokud jediný nesložený bude ten roh, který patří pod nesloženou hranu – dostaneme situaci jako na obrázku 7.1g.

Čtvrtý krok je složení hran ve třetí vrstvě (obr. 7.1i), tento krok je intuitivní, avšak už trochu složitější, pokusíme se ho tedy trochu více vysvětlit. Využíváme nesloženého rohu a hrany (obr. 7.1h) z prvních dvou vrstev jako pracovního prostoru, do kterého si odkládáme hrany z horní vrstvy a poté je vracíme zpět tak, jak potřebujeme. Přitom si nesmíme porušit složený zbytek kostky. Používáme tedy vlastně posloupnosti tahů $R(U/U2/U')R'$ nebo $F'(U/U2/U')F$.

V pátém kroku zbývá poskládat rohy (máme už kostku ve stavu jako na obrázku 7.1i): čtyři ve vrchní vrstvě a jeden ve spodní. Za tímto účelem si kostku opět otočíme tak, abychom měli dosavadní spodní stěnu nahore (obr. 7.1j) a nesložený roh vpravo vpředu (obr. 7.1k). Spodní vrstvou otočíme tak, abychom měli vpředu vpravo místo, na které patří náš horní roh (obr. 7.1l). Pak začneme provádět sexy move, dokud nebude roh složený. Tento postup aplikujeme na další rohy. Nyní mohou nastat dvě situace. Jedna z nich je ta, že už máme kostku složenou, nebo máme jen pootočenou spodní vrstvu (obr. 7.1m). Druhá situace vyžaduje další krok řešení.

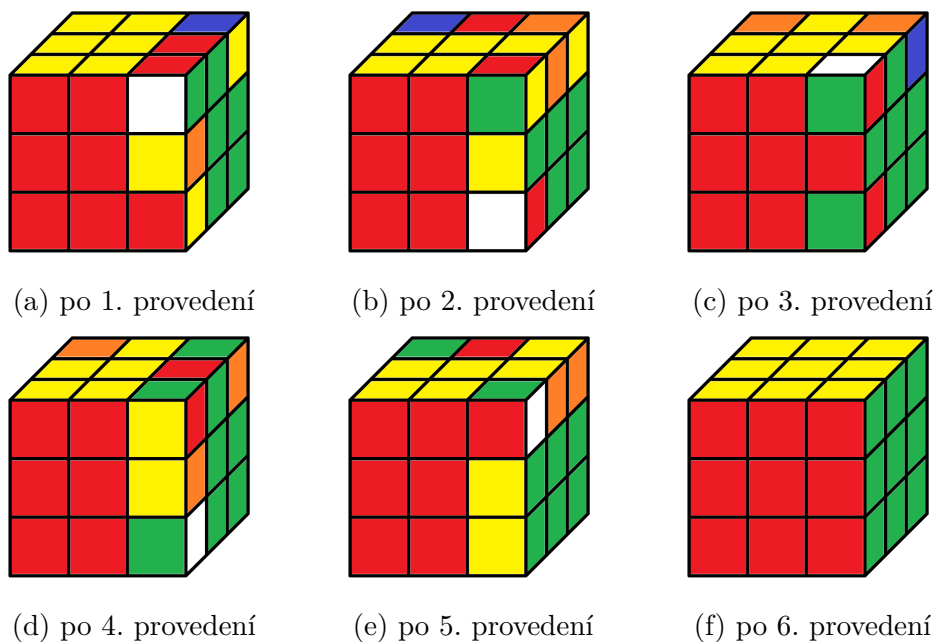
K šestému kroku se dostaneme jen v některých případech. Kostku držíme stále stejně a provádíme sexy move, dokud nezůstanou nesložené jen dva rohy (vpravo vpředu, horní i dolní – viz obrázek 7.1n). Pak si kostku otočíme tak, aby tyto rohy byly vpředu dole (obr. 7.1o). Poté provádíme opět sexy move, dokud se nesloží dolní pravý přední roh. Následně na jeho pozici otočíme druhý nesložený spodní roh (tah D) a opět provádíme sexy move, dokud nebude kostka složená (až na otočení spodní vrstvy).

Nyní máme kostku již složenou, i když je pravděpodobně trochu nejasné, jak k tomu došlo. Proto si nyní princip této metody objasníme.

7.2.2 Vysvětlení sexy metody

Nejprve se podíváme, co se stane, když provedeme sexy move (obr. 7.2).

Ve sloupečcích níže uvedených schémata (sestavených na základě poznatků z kapitoly o orientacích kostiček) se vyskytují stále stejné kostičky, nikoliv pozice. Pokud se tedy díváme na libovolný jeden sloupeček, vidíme, mezi kterými



Obrázek 7.2: Složená kostka po n -tém provedení sexy move

pozicemi se nám kostička přesouvá a jak se mění její orientace. V řádcích vidíme stav po n -tém provedení sexy move. Ve schématu uvádíme pouze kostičky, které jsou algoritmem sexy move ovlivněné.

Rohy: (připomenutí: orientace rohů počítáme nad \mathbb{Z}_3)

$$\begin{array}{l}
0 \text{ provedení : } (DFR,a) \quad (UFR,b) \quad (UBR,c) \quad (UBL,d) \\
1 \text{ provedení : } (UFR,a+2) \quad (DFR,b+2) \quad (UBL,c) \quad (UBR,d+2) \\
2 \text{ provedení : } (DFR,a+1) \quad (UFR,b+1) \quad (UBR,c+2) \quad (UBL,d+2) \\
3 \text{ provedení : } (UFR,a) \quad (DFR,b) \quad (UBL,c+2) \quad (UBR,d+1) \\
4 \text{ provedení : } (DFR,a+2) \quad (UFR,b+2) \quad (UBR,c+1) \quad (UBL,d+1) \\
5 \text{ provedení : } (UFR,a+1) \quad (DFR,b+1) \quad (UBL,c+1) \quad (UBR,d) \\
6 \text{ provedení : } (DFR,a) \quad (UFR,b) \quad (UBR,c) \quad (UBL,d)
\end{array} \quad (7.1)$$

Hrany: (připomenutí: orientace hran počítáme nad \mathbb{Z}_2)

$$\begin{array}{l}
0 \text{ provedení : } (FR,a) \quad (UR,b) \quad (UB,c) \\
1 \text{ provedení : } (UR,a) \quad (UB,b) \quad (FR,c) \\
2 \text{ provedení : } (UB,a) \quad (FR,b) \quad (UR,c) \\
3 \text{ provedení : } (FR,a) \quad (UR,b) \quad (UB,c) \\
4 \text{ provedení : } (UR,a) \quad (UB,b) \quad (FR,c) \\
5 \text{ provedení : } (UB,a) \quad (FR,b) \quad (UR,c) \\
6 \text{ provedení : } (FR,a) \quad (UR,b) \quad (UB,c)
\end{array} \quad (7.2)$$

Z popisu permutací a změny orientací si můžeme všimnout několika zajímavých a pro nás podstatných věcí.

První je ta, že po šesti zopakováních sexy move se dostáváme zpět do výchozího stavu (obr. 7.2f). To ovšem není to nejdůležitější, i když svůj význam to v metodě má.

Další věcí, která je možná méně nápadná, ale pro nás velmi důležitá, je chování hran. Všimněme si, že se mezi sebou permutují jen tři hrany (schéma 7.2), které

se po třetím zopakování sexy move vrací na své původní pozice a to dokonce ve správné orientaci (obr. 7.2c). Pro metodu nepodstatný, ale za zmínku stojící, je postřeh, že tyto hrany zachovávají svou orientaci po každém provedení sexy move (schéma 7.2).

Nyní se ještě podívejme na chování rohů. Všimněme si, že rohy se permutují ve dvou dvojicích (horní zadní rohy mezi sebou a přední pravé spolu) a přitom pravidelně mění svoji orientaci (schéma 7.1). Z toho plyne, že po každém druhém provedení sexy move jsou rohy na svých místech (obr. 7.2b), ale jejich orientace se liší. Zároveň po každém třetím provedení sexy move je jejich orientace správná (obr. 7.2c).

Důležitý je pro nás také fakt, že sexy move je sudá permutace na rozích i hranách. Na rozích se permutují dvě dvojice a na hranách jedna trojice.

První dva kroky nejsou nijak zvláštní a jsou zcela nezávislé na algoritmu.

Ve třetím kroku už je ale důležité, jak sexy move funguje. Zde se využívá vzájemné výměny předních pravých rohů, během níž dochází ke změně jejich orientací. Po prvním, třetím a pátém provedení sexy move se roh z horní vrstvy přesune dolů a to pokaždé s jinou orientací (obr. 7.2). Tedy nejdéle po pěti zopakováních sexy move roh správně složíme (obr. 7.1e). Hrany nás v tomto kroku nezajímají, protože nemáme složenou žádnou z těch, které sexy move permutuje.

Čtvrtý krok nepoužívá sexy move, takže by se mohlo zdát, že se o něm nemá smysl bavit. Ve skutečnosti je ale ohromně důležitý a skrývá se v něm podstatná část funkčnosti celé metody, která se opírá o poznatky o paritách a stavech orientací.

V okamžiku, kdy složíme vrchní hrany, máme, aniž bychom si to možná uvědomili, složenou i čtvrtou hranu ve druhé vrstvě a tedy už všechny hrany (obr. 7.1i). Podle chování sexy move tedy nyní víme, že musíme algoritmus aplikovat v počtu dělitelném třemi, jinak nebudeme mít hrany složené (obr. 7.2). Zdá se to možná omezující, ale ve skutečnosti nám to vůbec nevadí. Pokud jsou hrany všechny správně permutované, znamená to, že jejich permutace je sudá. Z vzájemného vztahu parit na rozích a hranách tedy vyplývá, že musí být sudá i permutace na rozích. To je velmi důležité, protože dále už skládáme jen pomocí sexy move.

Nyní se podívejme, co můžeme říci o pátém kroku. Hrany už jsou složené, z čehož plyne, že potřebujeme aplikovat sexy move v nějakém násobku tří, protože, jak už víme, právě po tolika opakováních se hrany vrací do původního stavu (obr. 7.2c). Rohy se permutují po dvojicích. Jednou z nich je dvojice horních zadních rohů, které jsou už ale také složené. Protože rohy se vracejí do původní pozice po dvou opakováních a ve správné orientaci dokonce po šesti opakováních, je zřejmé, že sexy move bude muset být proveden dokonce v násobku šesti opakování.

Měli bychom také podotknout, že otáčení spodní vrstvou nenarušuje permutování již složených rohů a hran ve druhé a vrchní vrstvě. Zároveň sexy move ovlivňuje pouze jeden roh ve spodní vrstvě a to právě ten, který se snažíme složit (obr. 7.2).

Z hlediska vyžadovaného přemístování rohů můžeme na sexy move nahlížet jako na lichý algoritmus – permutuje mezi sebou přední pravé rohy. Protože na nesložených rozích je permutace sudá a jejich orientaci měníme také po dvou zopakováních sexy move, čeká nás sudý počet opakování algoritmu – odtud nám neplyne, že musí být násobkem šesti! Po sudém počtu zopakování sexy move

máme tedy rohy ve spodní vrstvě na správných místech a máme je i správně zorientované. Pokud si tento postup vyzkoušíme a budeme počítat zopakování algoritmu, skutečně nemusíme získat násobek šesti. A zde proto přichází na scénu šestý krok.

V případě, že jsme měli štěstí a trefili jsme se s počtem opakování sexy move do násobku šesti, máme pouze pootočenou spodní vrstvu (obr. 7.1m). V opačném případě musíme dorovnat počet opakování na násobek šesti. Otočení spodní vrstvy do správné polohy principiálně není nutné, ale pro větší přehlednost je užitečné. Abychom dorovnali hrany a horní zadní rohy, budeme muset algoritmus provést dvakrát, nebo čtyřikrát. Tím nám zůstane dolní přední pravý roh na svém místě, ovšem bude mít špatnou orientaci. Stejně tak dopadne horní přední pravý roh (obr. 7.1n). Tyto rohy mají pochopitelně rozdílné orientace, jak jsme si mohli přečíst v kapitole o orientaci kostiček. Jeden roh spravíme dvěma zopakováními, zatímco druhý spravíme čtyřmi zopakováními. To je dohromady šest zopakování. Pokud proto na zbylých pozicích ovlivněných algoritmem budou všechny kostičky správně, budou správně i po této naší opravě rohů. Proto otáčíme nesprávné rohy do dolní vrstvy, protože zbylé vrstvy jsou tak už složené a otočení spodní vrstvou jim vadit nebude.

8. Kolik rozházení má Rubikova kostka

V této kapitole se budeme bavit o počtu rozházení Rubikovy kostky a jejích variant. Budeme tedy řešit počet prvků grupy permutací Rubikovy kostky.

Počet permutací Rubikovy kostky a příbuzných hlavolamů je dostupný z mnoha (většinou on-line) zdrojů, uvedme alespoň [2, 11, 4].

8.1 3×3 kostka

Začneme nejprve „klasickou“ verzí, tedy $3 \times 3 \times 3$ kostiček.

Odkážeme se na [11, 12], [4] str. 869.

Musíme si uvědomit několik věcí, které budeme pro řešení potřebovat. Za prvé si připomeňme, že hlavolam se skládá z kostiček, které seskupují nálepky do neoddělitelných, vzájemně nepermutovatelných skupin. Za druhé si připomeňme, že kostka má pevné středy, ke kterým vztahujeme pozice jednotlivých kostiček.

Na kostce máme tedy dvacet kostiček, které se mohou pohybovat. Jsou to rohy, kterých je osm a hrany, kterých napočítáme dvanáct. Jak už jsme si řekli v kapitole o permutacích, rohy a hrany tvoří dvě oddělené grupy permutací.

Permutace rohů a permutace hran musí mít shodnou paritu, jak už víme z kapitoly o permutacích, zatímco orientace rohů jsou zcela nezávislé na orientacích hran. Pro náš výpočet necháme volnost ve volbě parity permutace rohů a omezíme možnosti permutací na hranách.

Puštěme se nyní do výpočtu. Začneme permutacemi rohů. Rohů je celkem osm a můžeme je permutovat zcela libovolně, což nám dává celkem $8!$ permutací. Hran je celkem dvanáct, ovšem máme omezení na paritu jejich permutace, což znamená, že poloha dvou hran je jednoznačně určena polohou ostatních. Vzájemným prohozením dvou hran totiž změníme paritu permutace, ale tu máme jednoznačně určenou paritou permutace rohů. Permutací hran je tedy $\frac{12!}{2}$.

Nyní jsme rozmístili kostičky na kostce, ovšem neurčili jsme dosud jejich orientaci. Začneme opět nejdříve s rohy. Roh má tři možné orientace, zároveň ale víme, že součet orientací počítáno nad \mathbb{Z}_3 musí být nula. Pokud zvolíme libovolně orientaci sedmi rohů, pak osmý roh má už orientaci jednoznačně určenou. To znamená, že rohy můžeme orientovat 3^7 možnými způsoby. U hran je situace podobná, jen hrany mají dvě možné orientace a součet jejich orientací musí být nula nad tělesem \mathbb{Z}_2 . Je tedy možno orientovat jedenáct hran libovolně a poslední hrana má orientaci jednoznačně určenou. Tím získáváme celkem 2^{11} možností orientací hran.

Nyní dejme čísla dohromady. Rozmístění kostiček je možno provést celkem

$$\frac{8! \cdot 12!}{2}$$

tedy zhruba $9,657 \cdot 10^{12}$ způsoby. Každé rozmístění může mít celkem $3^7 \cdot 2^{11}$, tedy 4 478 976 různých orientací. Dohromady tedy dostáváme

$$\frac{8! \cdot 12!}{2} \cdot 3^7 \cdot 2^{11},$$

což je přibližně $4,325 \cdot 10^{19}$ [12] prvků grupy všech permutací Rubikovy kostky, neboli stavů Rubikovy kostky.

8.2 2×2 kostka

Nyní pojďme vyřešit stejnou úlohu pro kostku 2×2 , tedy $2 \times 2 \times 2$ kostiček.

O této problematice pojednávají například zdroje [11, 13].

Mohlo by se zdát, že se bude jednat jen o rohy z varianty 3×3 , ale to není úplně pravda.

Na 3×3 kostce jsme vztahovali pozici a orientaci všech kostiček vzhledem ke středům. Středů ale na 2×2 kostce nejsou a my si tedy musíme najít jiný pevný základ, vůči kterému budeme posuzovat pozici a orientaci kostiček. Protože se ale 2×2 kostka skládá pouze z rohů, musíme jako pevný bod zvolit jeden z rohů, včetně jeho konkrétní orientace.

Vůči tomuto pevnému rohu nyní budeme permutovat a orientovat rohy ostatní. Jak už víme, permutace na rozích může být lichá i sudá. To znamená, že zbylých sedm rohů můžeme umístit na sedm pozic, to nám dává $7!$ rozmístění. U těchto sedmi rohů musíme ještě zvolit orientaci. Stále musíme mít na paměti, že poslední roh má orientaci jednoznačně danou ostatními rohy. To znamená, že můžeme volit orientace celkem 3^6 způsoby.

Pokud dáme tyto výsledky opět dohromady, vychází nám, že grupa permutací 2×2 kostky má celkem

$$7! \cdot 3^6,$$

což je 3 674 160 prvků.

8.3 4×4 kostka

Vycházíme z výsledků dostupných v [11, 14].

Poznamenejme, že stejně jako na 3×3 kostce i na 4×4 kostce platí, že možnost liché parity permutace implikuje možnost prohození libovolných dvou kostiček stejného druhu aniž bychom prohodili jiné kostičky. 4×4 kostka má možnost liché parity permutace, tedy můžeme prohodit dvě kostičky. Opět existují algoritmy, kterými dokážeme tohoto docílit, nebudeme je zde uvádět, protože bychom museli nově zavádět značení tahů na větších kostkách, které však jinak nevyužijeme. Odkážme se například na [15, 16].

Řešení otázky počtu permutací dosažitelných na kostce 4×4 vyžaduje několik nových úvah, proto se podíváme i na tuto variantu hlavolamu.

První věc, nad kterou se musíme zamyslet, je opět otázka, k čemu vztáhneme polohu kostiček. Obdobně jako na 2×2 kostce nemáme pevné středy, ale můžeme si zvolit jeden roh jako pevný bod.

Pokud řešíme umístění rohů, jsme ve stejné situaci jako na 2×2 kostce. To znamená, že rohy můžeme celkem umístit (umístěním rozumíme i volbu orientace) $7! \cdot 3^6$ způsoby.

Zajímavé bude rozmístění hranových kostiček, které nejsou vlastně hranami ve smyslu hran na 3×3 kostce. Dohromady je těchto hranových kostiček dvacet čtyři. Při otočení vnitřní vrstvou na nich dostáváme permutaci s lichou paritou, tedy jejich permutace může mít i lichou paritu. To je dohromady $24!$ voleb pozic.

Jak si dále ukážeme, toto číslo je překvapivě konečný počet možností umístění hranových kostiček.

Tyto kostičky, přestože se skládají ze dvou nálepek, nemají možnost volby orientace. Jejich orientace je jednoznačně určena jejich pozicí. Hranovou kostičku nemůžeme vrátit na identickou pozici s opačnou orientací. Toto nelze udělat dokonce ani vyjmutím kostičky z hlavolamu a opětovným vložením – konstrukce hlavolamu to běžně neumožňuje, což ovšem nebrání provádění všech myslitelných tahů.

Posledním typem kostiček na 4×4 kostce jsou středy, které nejsou pevné. Bráno v pořadí od nejmenších rozměrů hlavolamu se poprvé setkáváme s kostičkami, které jsou nerozlišitelné. Pro permutaci středů platí, že může být sudá i lichá, ale parita permutace středů se musí shodovat s paritou permutace rohů. To vyplývá z poznatku, že při otočení vnější vrstvou permutujeme rohy i středy v permutaci s lichou paritou. Při otočení vnitřní vrstvou permutujeme středy v permutaci se sudou paritou a rohy se nepermutují, takže jejich permutace při tomto tahu má také sudou paritu. Dohromady je středů dvacet čtyři, což znamená celkem $\frac{24!}{2}$ voleb pozic. Pro nás jsou ovšem středy stejné barvy nerozlišitelné, proto se nám všechny permutace stejně barevných středů jeví stejně. Barev je celkem šest. Konečný počet umístění středů je tedy nakonec

$$\frac{\frac{24!}{2}}{\frac{4!^6}{2}} = \frac{24!}{4^6}.$$

Z této rovnosti je zřejmé, že bychom neudělali chybu ve výsledku, pokud bychom neuvažovali, že permutace středů musí mít paritu shodnou s permutací rohů.

Pokud dáme všechna čísla dohromady, dostáváme se k celkovému počtu

$$7! \cdot 3^6 \cdot 24! \cdot \frac{24!}{4!^6},$$

což dává přibližně $7,4012 \cdot 10^{45}$ [14] rozlišitelných možností.

8.4 5×5 kostka

Podíváme se ještě na tuto variantu hlavolamu.

Je možné čerpat informace například z [11, 17].

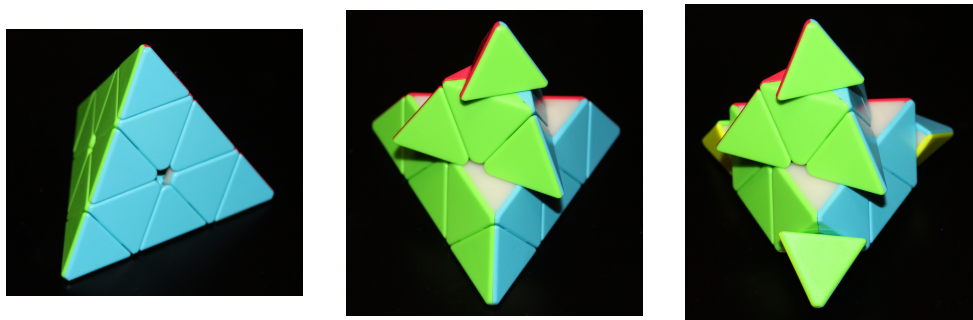
Přestože tato varianta nepřináší už nic nového, můžeme ji využít jako shrnutí poznatků a nástin toho, jak bychom určovali počet permutací na jiných podobných hlavolamech.

I na 5×5 kostce platí stejná souvislost mezi možnostmi prohození kostiček a možností liché parity kostiček jako na 4×4 kostce. 5×5 kostka nemůže mít lichou permutaci. Odkázat se můžeme na [18, 19]

Na této kostce máme pevné středy. To znamená, že polohu kostiček vztahujeme vůči těmto středům, nikoliv vůči zvolenému rohu.

Rohy tedy můžeme umístit opět $8! \cdot 3^7$ způsoby, jako na každé kostce lichých rozměrů.

Dále se podíváme na hranové kostičky. Na 5×5 kostce, stejně jako na každém hlavolamu lichých rozměrů, máme „skutečné“ hrany, tedy prostřední hranové kostičky tvořící hranu. Tato hrana má volitelnou orientaci. Dále jsou zde ostatní



Obrázek 8.1: Pyraminx

hranové kostičky, řekněme jim třeba křídlové hrany. Tyto křídlové hrany, jak už jsme si řekli u 4×4 kostky, nemají volitelnou orientaci.

Hran je na kostce 5×5 , stejně jako na každé kostce lichých rozměrů, dvanáct. Jako na každé kostce lichých rozměrů také platí, že se musí shodovat parita permutace rohů s paritou permutace hran. To nám dává tedy

$$\frac{12!}{2} \cdot 2^{11}$$

možností, jak umístit hrany.

Křídelních hran se vyskytuje celkem dvacet čtyři. U kostek větších rozměrů se křídelní hrany vyskytují různě daleko od nejbližšího rohu a tuto vzdálenost nemůžeme měnit, tedy existují skupiny různých typů kostiček, z nichž každá obsahuje dvacet čtyři kostiček. Tyto kostičky se dají rozmístit celkem $24!$ způsoby.

Dále se podíváme na středové kostičky. Nebudeme řešit pevné středy, ale ostatní středové kostičky. Tyto středy nejsou mezi sebou permutovatelné libovolně. Na 5×5 kostce máme středy „křížové“ mezi pevným středem a hranou, kterých se vyskytuje dvacet čtyři. Dále máme středy „rohové“, které nalezneme mezi pevným středem a rohem. Těch se vyskytuje také dvacet čtyři. Tyto typy středů nemůžeme zaměňovat - „rohový“ střed bude vždy „rohový“ a „křížový“ vždy „křížový“. U obou množin platí, že se v nich vyskytuje každá kostička ve čtyřech identických prvcích. To znamená celkem

$$\left(\frac{24!}{4!} \right)^2$$

rozmístění všech středů.

Dohromady máme tedy na 5×5 kostce

$$8! \cdot 3^7 \cdot 24! \cdot \frac{12!}{2} \cdot 2^{11} \cdot \left(\frac{24!}{4!} \right)^2$$

možností rozmístění, tedy přibližně $2,8287 \cdot 10^{74}$ [17].

8.5 Pyraminx

Podíváme se ještě na jeden příbuzný hlavolam Rubikovy kostky. Tím je pyraminx, který má tvar pravidelného čtyřstěnu. Jedna stěna tedy není čtverec, ale trojúhelník.

Na poznatky z této části se můžeme odkázat například na [20].

Také na pyraminxu platí stejná souvislost mezi možnostmi prohození kostiček a možností liché parity kostiček jako na 4×4 kostce a 5×5 kostce. Popis postupů můžeme nalézt například v [21]. Protože jeden tah na pyraminxu je sudá permutace, je každý tvar pyraminxu sudá permutace.

Pyraminx je obecně považován za jednodušší hlavolam oproti Rubikově kostce. Mnoho principů je však podobných, ne-li stejných. Avšak tento hlavolam má oproti kostce některá svá specifika.

Pyraminx má specifické některé typy kostiček. Podobně jako kostka má pyraminx hrany, které se skládají ze dvou nálepek.

Co má pyraminx specifické, jsou jeho „středý“, které mají pevnou pozici, jako na kostce, ovšem skládají se ze tří nálepek a mají volitelnou orientaci.

Dále zde jsou „špičky“, které jsou pevně navázány na středý, dalo by se říci, že jsou součástí „středů“, ovšem mají opět volitelné orientace. Tyto „špičky“ se skládají ze tří nálepek.

Kolik různých tvarů tedy může mít pyraminx, tento trochu specifický hlavolam?

Podívejme se nejprve na „středý“. Pevným bodem jsou pouze pozice „středů“, nikoliv však jejich orientace. To znamená, že každý z těchto „středů“ můžeme orientovat jedním ze tří způsobů. To dělá 3^4 možností.

Pak zde jsou špičky, jejichž pozice je pevná vůči středům. Ovšem můžeme je opět každou orientovat jedním ze tří způsobů. To dává opět 3^4 možností.

Nakonec hrany, kterých je celkem šest, můžeme permutovat v jakékoliv sudé permutaci. Což znamená, že pozice dvou hran jsou jednoznačně určeny zbylými hranami. To znamená $\frac{6!}{2}$ možností rozmístění.

Dále každá hrana může mít dvě různé orientace. Ale orientace jedné hrany je jednoznačně určena ostatními hranami. Takže orientaci můžeme volit z 2^5 způsobů.

Dohromady můžeme tedy na pyraminxu získat

$$3^4 \cdot 3^4 \cdot \frac{6!}{2} \cdot 2^5$$

různých tvarů, což je 75 582 720 [20].

9. Božské číslo

V této kapitole volně parafrázujeme článek [22]. Některé informace najdeme i v [4], str. 875.

Božské číslo hlavolamu vyjadřuje minimální počet tahů, který je potřeba k vyřešení jakéhokoliv řešitelného tvaru tohoto hlavolamu.

Některé tvary jsou pochopitelně řešitelné mnohem menším počtem tahů, než jaký udává božské číslo.

Pojďme si nyní povědět, jak se toto číslo hledalo pro Rubikovu kostku.

Poznamenejme, že toto číslo také závisí na definici pojmu tah. V této práci jsme za tah považovali (a i nadále budeme považovat) otočení vnější vrstvy o 90° , 180° nebo 270° . Přitom běžná praxe je, že se za jeden tah považuje i otočení prostřední vrstvou. Jiný přístup je ten, že tahy o 180° považujeme za dva tahy. Tahem se tedy rozumí jen otočení o vnější vrstvy o 90° v libovolném směru.

Při rychlostním skládání je zpravidla použito mnohem více tahů, než jaké je božské číslo. Důvod je ten, že už jen najít nejkratší možné řešení daného tvaru je pro člověka velmi obtížné. Dokonce natolik, že má smysl soutěžit v hledání nejkratšího řešení libovolného tvaru.

V roce 1981 David Singmaster odhadl božské číslo Rubikovy kostky na 20. Neexistoval však žádný důkaz, že je tomu skutečně tak.

Vzhledem ke složitosti nalezení nejkratšího řešení libovolného tvaru a především existenci obrovskému počtu těchto tvarů, jak jsme si už ukázali, nebylo možné prozkoumat všechny tvary (tedy řešit problém hrubou silou).

Božské číslo se tedy začalo postupně odhadovat. Pro horní odhad tohoto čísla je například možné použít některou z přesně definovaných metod řešení a prozkoumat, jaký počet tahů bude potřeba k vyřešení tvaru, při jehož řešení touto metodou budeme nuceni použít vždy největší počet tahů potřebných k provedení každého kroku. Pro dolní odhad lze použít nalezení nějakého tvaru, o kterém dokážeme, že jej nelze řešit na méně než určitý počet tahů.

Na počátku osmdesátých let byl s pomocí Thistlewaiteho metody získán horní odhad 52 [4]. Již zmiňovaný David Singmaster se v roce 1980 zasloužil o dolní odhad o hodnotě 18.

Velký posun dále zaznamenal v roce 1995 Michael Reid. Ten posunul dolní odhad do hodnoty 20 a horní odhad snížil na hodnotu 29.

V roce 2008 dokázal snížit dolní odhad Tomas Rokicki na hodnotu 25. Začalo být jasné, že k výpočtu božského čísla již může dostačovat výpočetní kapacita počítačů. Ve stejném roce pak ve spolupráci se společností Sony Pictures Imagework, která poskytla výpočetní kapacitu svých počítačů, dokázal Rokicki posunout horní odhad dokonce na hodnotu 22.

Jen o dva roky později společnost Google poskytla výpočetní sílu svých superpočítačů k vyřazení možnosti existence tvarů, na které je potřeba minimálně 21, nebo 22 tahů. Tím se horní odhad posunul na hodnotu 20 [12, 22], tedy stejnou jako dolní odhad. Tím bylo božské číslo legendárního hlavolamu konečně nalezeno.

10. Příklady

V této kapitole se podíváme na některé zajímavé i nahodilé tvary Rubikovy kostky, které mohou i nemohou být řešitelné.

10.1 Je kostka složitelná?

V této části budeme na základě poznatků uvedených v předešlých kapitolách posuzovat, zda je možné uvedený tvar Rubikovy kostky vyřešit (nebo ho dosáhnout). Řešitelnost tvaru a dosažitelnost tvaru jsou vlastně ekvivalentní pojmy, protože k řešení tvaru můžeme použít jen opačný postup, než jaký vedl k dosažení tvaru.

Podíváme se na příklady z obrázku 10.1 postupně.

Příklad 10.1a není příliš složitý na zorientování se. Vidíme, že se tento tvar liší od složeného tvaru jen v hranách horní a spodní vrstvy. Navíc tyto hrany jsou na správných pozicích, jen špatně orientovány. To znamená, že nebudeme mít takové problémy jako třeba neexistující kostičky (tedy, něco co budeme dále nazývat *nematematickými chytáky*, o nichž se bavíme v první kapitole o řešitelnosti). Jak už jsme říkali, kostičky nejsou permutované, takže jediný problém, který může nastat, musíme hledat v orientacích. Máme celkem osm špatně orientovaných hran, což znamená, že součet orientací hran (samozřejmě nad tělesem \mathbb{Z}_2) je 0. Tento tvar je tedy řešitelný.

Příklad 10.1b je opět dobře přehledný. Máme vlastně pouze permutované středy. Problém ovšem je, že středy považujeme za pevný bod hlavolamu a tedy musíme správně popsat, jak se permutují ostatní kostičky a jaké mají orientace. Předchozí pohled nám alespoň pomohl vyloučit případné nematematické chytáky. Podívejme se na rohy a hrany zvlášť:

Následující schémata vyjadřují zobrazení, které zobrazí složený tvar Rubikovy kostky na tvar, který řešíme.

Rohy:

$$\begin{array}{cccccccc} (UBL,0) & (UBR,0) & (UFR,0) & (UFL,0) & (DBL,0) & (DBR,0) & (DFR,0) & (DFL,0) \\ (DFL,1) & (DBL,2) & (UBL,1) & (UFL,2) & (DFR,2) & (DBR,1) & (UBR,2) & (UFR,1) \end{array}$$

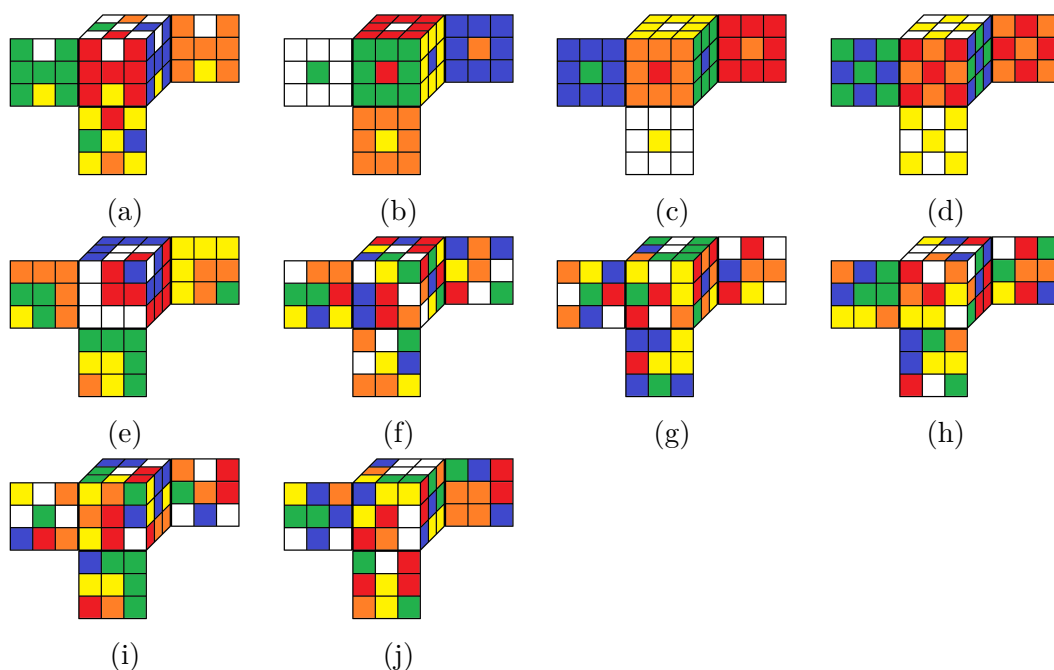
Hrany:

$$\begin{array}{cccccccccccc} (UB,0) & (UR,0) & (UF,0) & (UL,0) & (BL,0) & (BR,0) & (FR,0) & (FL,0) & (DB,0) & (DR,0) & (DF,0) & (DL,0) \\ (DL,1) & (BL,1) & (UL,1) & (FL,1) & (DF,0) & (DB,0) & (UB,0) & (UF,0) & (DR,1) & (BR,1) & (UR,1) & (FR,1) \end{array}$$

Snadno viditelné jsou samozřejmě orientace. Součty orientací rohů i hran jsou 0 (samozřejmě nad tělesy \mathbb{Z}_3 pro rohy a \mathbb{Z}_2 pro hrany).

Podívejme se nyní na permutace. Rozepíšeme si permutace na jednotlivé cykly (bez orientací):

$$\begin{array}{l} (UBL) \mapsto (DFL) \mapsto (UFR) \mapsto (UBL) \\ (UBR) \mapsto (DBL) \mapsto (DFR) \mapsto (UBR) \\ \\ (UB) \mapsto (DL) \mapsto (FR) \mapsto (UB) \\ (UR) \mapsto (BL) \mapsto (DF) \mapsto (UR) \\ (UF) \mapsto (UL) \mapsto (FL) \mapsto (UF) \\ (BR) \mapsto (DB) \mapsto (DR) \mapsto (BR) \end{array}$$



Obrázek 10.1: Příklady

Vidíme, že hrany i rohy jsou permutované v cyklech délky tři, tedy jsou obě permutace sudé. Proto je tento tvar řešitelný.

Příklad 10.1c můžeme začít řešit obdobně jako příklad 10.1b. Zjistili bychom, že by tvar měl být tedy řešitelný. To bychom se však dopustili chyby z nepozornosti. Pokud bychom zkoušeli tento tvar na kostce získat, velice brzo bychom odhalili problém. Tentokrát řešení selhává na nematematickém chytáku. Všimněme si, že na každém rohu je špatná vzájemná poloha nálepek. Na zobrazeném tvaru se tedy vyskytuje hned osm neexistujících kostiček.

Příklad 10.1d také nevypadá příliš komplikovaně a skutečně bude jednodušší. Nebudeme potřebovat ani schémata na jeho řešení. Všimněme si, že rohy jsou zcela v pořádku. Musíme tedy zkontrolovat hrany. Pokud začneme zkoumat permutaci hran, zjistíme, že se hrany vyměnily po dvojicích, a to tak, že si vyměnily pozice vždy dvě hrany ležící na kostce naproti sobě přes střed (nyní máme na mysli těžiště tělesa) kostky. Dále zjistíme, že orientace všech hran jsou v pořádku, což je hezky vidět, protože máme vlastně zaměněné nálepky hranových kostiček za barvu protilehlé stěny. A barva protilehlé stěny má identickou dominanci. Podívejme se tedy ještě znovu na permutace. Hran máme dvanáct a vyměnily se ve dvojicích, což znamená celkem šest cyklů délky dva, z čehož plyne sudá permutace na hranách. Identita na rozích je také sudá permutace, a proto je tento tvar řešitelný.

Příklad 10.1e po kontrole nematematických chytáků zjišťujeme, že se zde taková chyba nevyskytuje. Podívejme se tedy na permutace a orientace. Snadno je vidět, že šest hran se vyskytuje na správných pozicích a ve správné orientaci. Dále dva rohy se vyskytují na správných pozicích, ovšem ve špatné orientaci. Na ostatní kostičky si už radši uděláme schéma, do kterého zahrneme i řečené rohy, kvůli orientaci:

Rohy:

$(UBL,0)$ $(UBR,0)$ $(UFR,0)$ $(UFL,0)$ $(DBL,0)$ $(DBR,0)$ $(DFR,0)$ $(DFL,0)$
 $(DFL,2)$ $(UFL,1)$ $(UFR,1)$ $(DFR,1)$ $(DBL,2)$ $(UBL,2)$ $(UBR,1)$ $(DBR,2)$

Hrany:

$(UB,0)$ $(UL,0)$ $(BR,0)$ $(FL,0)$ $(DR,0)$ $(DF,0)$
 $(FL,0)$ $(DF,1)$ $(UL,1)$ $(DR,1)$ $(UB,1)$ $(BR,0)$

Podívejme se opět nejprve na orientace. Jejich součet je 0, takže jsou v pořádku. Zkusme ještě permutace:

$(UBL) \mapsto (DFL) \mapsto (DBR) \mapsto (UBL)$
 $(UBR) \mapsto (UFL) \mapsto (DFR) \mapsto (UBR)$
 $(UB) \mapsto (FL) \mapsto (DR) \mapsto (UB)$
 $(UL) \mapsto (DF) \mapsto (BR) \mapsto (UL)$

Vidíme, že rohy i hrany jsou permutovány v permutacích se sudou paritou, takže je vše v pořádku a můžeme říct, že tento tvar je složitelný.

V příkladu 10.1f si musíme dát pozor, pak zjistíme, že se zde vyskytuje špatný počet bílých a zelených nálepek. To z toho důvodu, že v tomto tvaru máme dvakrát hranu bílo oranžovou, která se vyskytuje na pozici DB a zároveň na pozici FR . Tento tvar je tedy neřešitelný.

V příkladu 10.1g je počet barev v pořádku a není zde žádná kostička seskupená z jiné množiny nálepek, než z jakých má být. Avšak jeden z rohů se zde vyskytuje se špatně vzájemně uspořádanými nálepkami. Je to roh na pozici DFL , který je bílo-červeno-modrý. Správné pořadí barev ve směru hodinových ručiček při pohledu zpřítma je bílá-modrá-červená, na obrázku je však bílá-červená-modrá. Tento tvar je tedy také neřešitelný.

V příkladu 10.1h nenalezneme žádné nematematické chytáky. Podívejme se ale na přeskupení hran:

$(UB,0)$ $(UR,0)$ $(UF,0)$ $(UL,0)$ $(BL,0)$ $(BR,0)$ $(FR,0)$ $(FL,0)$ $(DB,0)$ $(DR,0)$ $(DF,0)$ $(DL,0)$
 $(UF,1)$ $(UL,0)$ $(DB,0)$ $(UR,0)$ $(FL,0)$ $(BL,0)$ $(UB,1)$ $(BR,1)$ $(FR,0)$ $(DL,1)$ $(DR,0)$ $(DF,1)$

Vidíme, že součet orientací hran je 1. Tento tvar je tedy neřešitelný.

U příkladu 10.1i po pečlivé kontrole zjistíme, že zde nejsou žádné nematematické chytáky. Podívejme se tedy na přeskupení kostiček:

Rohy:

$(UBL,0)$ $(UBR,0)$ $(UFR,0)$ $(UFL,0)$ $(DBL,0)$ $(DBR,0)$ $(DFR,0)$ $(DFL,0)$
 $(DBR,2)$ $(UBR,0)$ $(DBL,1)$ $(DFR,1)$ $(UFL,1)$ $(DFL,2)$ $(UBL,1)$ $(UFR,1)$

Hrany:

$(UB,0)$ $(UR,0)$ $(UF,0)$ $(UL,0)$ $(BL,0)$ $(BR,0)$ $(FR,0)$ $(FL,0)$ $(DB,0)$ $(DR,0)$ $(DF,0)$ $(DL,0)$
 $(FL,1)$ $(UB,1)$ $(BL,1)$ $(UL,1)$ $(DR,1)$ $(DB,0)$ $(UR,0)$ $(DF,1)$ $(UF,0)$ $(FR,1)$ $(DL,0)$ $(BR,1)$

Vidíme, že orientace jsou v pořádku. Podívejme se nyní pořádně na permutace.

$$(UBL) \mapsto (DBR) \mapsto (DFL) \mapsto (UFR) \mapsto (DBL) \mapsto (UFL) \mapsto (DFR) \mapsto (UBL) \\ (UBR) \mapsto (UBR)$$

$$(UB) \mapsto (FL) \mapsto (DF) \mapsto (DL) \mapsto (BR) \mapsto (DB) \mapsto (UF) \mapsto (BL) \mapsto \\ \mapsto (DR) \mapsto (FR) \mapsto (UR) \mapsto (UB) \\ (UL) \mapsto (UL)$$

Vidíme, že máme jen cykly liché délky, což znamená sudé permutace pro oba typy kostiček. Tento příklad je tedy řešitelný.

V příkladu 10.1j nejprve zjistíme, že zde nejsou žádné nematematické chytáky. Podívejme se tedy dále. Za povšimnutí bude stát určitě chování rohů:

$$(UBL,0) \quad (UBR,0) \quad (UFR,0) \quad (UFL,0) \quad (DBL,0) \quad (DBR,0) \quad (DFR,0) \quad (DFL,0) \\ (UBR,0) \quad (DBL,2) \quad (DFR,1) \quad (DFL,1) \quad (DBR,1) \quad (UFL,0) \quad (UBL,1) \quad (UFR,2)$$

Všimněme si, že součet orientací je 2, tedy tento tvar je neřešitelný.

10.2 Pojdme si kostku složit

V této části si prozradíme řešení jednoho vybraného tvaru, o kterém už víme, že je řešitelný. Je jím příklad 10.1i.

K některým jiným uvedeným tvarům a ke spoustě dalších zajímavých tvarů nalezneme řešení v [23], proto je zde nebudeme rozepisovat.

Uvedme si zde jako příklad použití sexy metody řešení příkladu 10.1i.

Pro snadnější sledování postupu si můžeme kostku zamíchat těmito tahy (kostka je otočená bílou stěnou nahoru a červenou dopředu):

$$RF2D'L2U'F2R2F2DL2R2F'D'UB'L'F2L'D2$$

Můžeme postup pozorovat ve webové aplikaci: <https://tinyurl.com/yb7kzchb>

Nejprve si poskládejme bílý kříž, k tomu se můžeme dopracovat použitím tahů $BFLB2UFU$.

Dále si složme tři hrany ve druhé vrstvě. Otočíme si za tím účelem kostku žlutou stěnou nahoru a oranžovou dopředu. Poté použijeme tahy $FUF'RU2R'LUL'$.

Nyní složme tři rohy spodní vrstvy, nejprve si pootočíme kostku tak, abychom měli žlutou stěnu nahoře a modrou vpředu. Pak použijeme tahy UD' . Poté následuje pětkrát sexy move, tedy

$$(RUR'U')(RUR'U')(RUR'U')(RUR'U')(RUR'U').$$

Dále si pomůžeme tahem $D2$ a opět provedeme sexy move: $(RUR'U')$.

Pak jen otočíme spodní vrstvu tahem D' .

Řešení zbytku hran je v tomto případě velice jednoduché, použijeme tahy $RU'R'F'U2FU2$.

Nyní vyřešíme zbylé rohy. Za tím účelem si otočíme kostku opět bílou stěnou nahoru a červenou stěnou dopředu.

Poté budeme střídavě otáčet spodní vrstvou a provádět sexy move v následující posloupnosti tahů:

D'
 $(RUR'U')$
 D
 $(RUR'U')$
 $D2$
 $(RUR'U')(RUR'U')(RUR'U')$
 $D2$
 $(RUR'U')$
 D
 $(RUR'U')(RUR'U')(RUR'U')(RUR'U')$
 D'
 $(RUR'U')(RUR'U')$

Bohužel jsme neměli štěstí, takže musíme dořešit problém špatné orientace dvou rohů. Otočíme si proto kostku zelenou stěnou nahoru a červenou stěnou dopředu a provedeme následující tahy:

$(RUR'U')(RUR'U')$
 D
 $(RUR'U')(RUR'U')(RUR'U')(RUR'U')$
 D'

Nyní je kostka už složená.

Seznam použité literatury

- [1] WCA Regulations | World Cube Association. [Online; accessed 3-June-2020] Dostupné z <https://www.worldcubeassociation.org/regulations/#article-12-notation>.
- [2] J. Tůma. *Matematické hlavolamy a základy teorie grup*. Mladá fronta, Praha, 1988.
- [3] Rubik's Cube: Why are some cases impossible to solve? – youtube. [Online; accessed 2-June-2020] Dostupné z <https://www.youtube.com/watch?v=o-RxLzRe2YE>.
- [4] Elwyn R. Berlekamp & John H. Conway & Richard K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, volume 4. A K Peters, Ltd., Wellesley, 2004.
- [5] Jindřich Bečvář. *Lineární algebra*. Vydání třetí. MATFYZPRESS, Praha, 2005.
- [6] PLL Algorithms - CFOP Speedcubing Cases - speedsolving.com wiki. [Online; accessed 2-June-2020] Dostupné z <https://www.speedsolving.com/wiki/index.php/PLL>.
- [7] OLL Algorithms - CFOP Speedcubing Cases - speedsolving.com wiki. [Online; accessed 2-June-2020] Dostupné z <https://www.speedsolving.com/wiki/index.php/OLL>.
- [8] Jak složit Rubikovu kostku - návod pro začátečníky [FYFT.cz] - youtube. [Online; accessed 3-June-2020] Dostupné z <https://www.youtube.com/watch?v=CW0bvh6BXEU>.
- [9] Sexy Method - speedsolving.com wiki. [Online; accessed 2-June-2020] Dostupné z https://www.speedsolving.com/wiki/index.php/Sexy_Method.
- [10] Beginner Rubik's Cube Solution - Solve the cube using only 1 algorithm! [Online; accessed 3-June-2020] Dostupné z <http://cube.rider.biz/beginner.php>.
- [11] Počet kombinací Rubikovy kostky $N \times N \times N$. [Online; accessed 2-June-2020] Dostupné z <https://hlavolam.maweb.eu/pocet-kombinaci-rubikovy-kostky>.
- [12] Wikipedia contributors. Rubik's Cube — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2020. [Online; accessed 2-June-2020] Dostupné z https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rubik%27s_Cube.
- [13] Wikipedia contributors. Pocket Cube — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2020. [Online; accessed 3-June-2020] Dostupné z https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pocket_Cube.
- [14] Wikipedia contributors. Rubik's Revenge — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2020. [Online; accessed 2-June-2020] Dostupné z https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rubik%27s_Revenge.

- [15] Beginner’s Method for Solving the 4x4 Cube. [Online; accessed 2-June-2020] Dostupné z <https://www.cubeskills.com/uploads/pdf/tutorials/beginners-method-for-solving-the-4x4-cube.pdf>.
- [16] 4x4 Parity Algorithms and Cases – kewbzuk. [Online; accessed 3-June-2020] Dostupné z <https://www.kewbz.co.uk/blogs/solutions/4x4-parity-algorithms-and-cases>.
- [17] Wikipedia contributors. Professor’s Cube — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2020. [Online; accessed 2-June-2020] Dostupné z https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Professor%27s_Cube.
- [18] 5x5 L2E Algorithms (Last Two Edges). [Online; accessed 3-June-2020] Dostupné z <https://www.cubeskills.com/uploads/pdf/tutorials/last-2-edges-algorithms-5x5.pdf>.
- [19] 5x5 Last 2 Edges – KewbzUK. [Online; accessed 3-June-2020] Dostupné z <https://www.kewbz.co.uk/blogs/solutions/how-to-solve-5x5-last-2-edges-beginners-guide>.
- [20] Wikipedia contributors. Pyraminx — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2020. [Online; accessed 2-June-2020] Dostupné z <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pyraminx>.
- [21] Pyraminx - solution tutorial. [Online; accessed 3-June-2020] Dostupné z <https://hlavolam.maweb.eu/Pyraminx>.
- [22] David Joyner. The Man Who Found God’s Number. *The College Mathematics Journal*, 45(4):258–266, 2014.
- [23] Pretty Rubik’s Cube patterns with algorithms. [Online; accessed 3-June-2020] Dostupné z <https://ruwix.com/the-rubiks-cube/rubiks-cube-patterns-algorithms>.