



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Jana Boháčková

**Časová struktura úrokových měr**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu doc. RNDr. Janu Hurtovi, CSc. za jeho odborné rady a pomoc při psaní. Dále bych chtěla poděkovat své rodině za podporu při studiu.

Název práce: Časová struktura úrokových měř

Autor: Jana Boháčková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Bakalářská práce se zabývá úrokovými měrami a výnosovými křivkami. Zavedeme si pojmy spotová úroková míra, forwardová úroková míra a diskontní faktor. Budeme používat tři modely k odhadu výnosových křivek, dva parametrické: Nelson-Siegelův model a Svenssonův model a jeden neparametrický: jádrový odhad. U každé metody si uvedeme funkce pro odhadnutí výnosových křivel a u parametrických modelů popíšeme jednotlivé parametry. Použité modely odhadů následně použijeme na reálných datech.

Klíčová slova: úrokové míry, časová struktura, výnosová křivka, odhad

Title: Term structure of interest rates

Author: Jana Boháčková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Bachelor thesis deals with interest rates and yield curves. Terms spot interest rate, forward interest rate and discount factor are established. Three models for describing yield curves are used, two parametric models: Nelson-Siegel model and Svensson model and one nonparametric model: kernel estimator. Function of a yield curve is described for all models and for parametric models and the parameters in parametric models are also described. Eventually, all models are used on real data.

Keywords: interest rates, term structure, yield curve, estimation

# Obsah

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Úvod</b>   | <b>2</b>  |
| <b>1 Úrokové míry a výnosové křivky</b>                         | <b>3</b>  |
| 1.1 Diskrétní případ . . . . .                                  | 3         |
| 1.2 Spojitý případ . . . . .                                    | 4         |
| 1.3 Časová struktura . . . . .                                  | 5         |
| 1.4 Užití výnosových křivek při hodnocení<br>investic . . . . . | 6         |
| <b>2 Odhady</b>   | <b>8</b>  |
| 2.1 Nelson-Siegelův model . . . . .                             | 8         |
| 2.2 Svenssonův model . . . . .                                  | 10        |
| 2.3 Jádrový odhad . . . . .                                     | 11        |
| <b>3 Numerická studie</b>                                       | <b>14</b> |
| 3.1 Nelson-Siegelův odhad . . . . .                             | 14        |
| 3.2 Svenssonův odhad . . . . .                                  | 15        |
| 3.3 Jádrový odhad . . . . .                                     | 15        |
| 3.4 Porovnání . . . . .   | 16        |
| <b>Závěr</b>  | <b>19</b> |
| <b>Seznam použité literatury</b>                                | <b>20</b> |
| <b>Seznam obrázků</b>   | <b>21</b> |
| <b>Seznam tabulek</b>   | <b>22</b> |

# Úvod

Bakalářská práce se zabývá úrokovými měrami, výnosovými křivkami a časovou strukturou úrokových měr. Časová struktura úrokových měr se v praxi používá pro odhad budoucích úrokových měr a výnosová křivka popisuje vztah mezi dobou splatnosti a výnosem do splatnosti.

Cílem bakalářské práce je popsat a porovnat tři modely na odhad výnosové křivky a zjistit, jestli by se daly použít na odhad budoucích úrokových měr. Použité modely jsou: Nelson-Siegelův model, Svenssonův model a jádrový odhad. Dále definujeme pojmy: spotová úroková míra, forwardová úroková míra a časová struktura úrokových měr. U popsaných modelů uvedeme, jak se liší výnosové křivky při různých výběrech parametrů. Reálná data použijeme na odhad výnosové křivky uvedenými modely.

# 1. Úrokové míry a výnosové křivky

V této kapitole si zavedeme značení a definice, které budeme používat ve zbytku práce. Úroková míra určuje hodnotu peněz závislou na čase. Úroková míra se udává v procentech a vyjadřuje o jakou částku dlužník zaplatí věřiteli více než si půjčil na smlouvené časové období. Jsou různé typy úrokových měr, my se budeme zabývat spotovými, forwardovými úrokovými mírami a diskontním faktorem. Pro počáteční hodnotu  $PV$  a úrokovou míru na určité časové období  $i$  je na konci časového období hodnota zvýšená o  $PVi$ . To platí pro jednoduché úročení. Budoucí (konečná) hodnota na konci období je  $FV = PV(1 + i)$ . Předpokládejme, že částku  $PV$  máme vypůjčenou na  $N$  období, po uplynutí doby zaplatíme  $FV = PV(1 + iN)$ . Pokud bychom úročili složitě, tak máme na konci období  $FV = PV(1 + i)^N$ . Převážně budu čerpat z knihy od Dupačové a kol. [1], dále z knihy od Hulla [2] a Van Horna [3] a přednášky Finanční management [4].

## 1.1 Diskrétní případ

Spotová úroková míra  $R_t$  je roční úroková míra investice trvající  $t$  let za období od současnosti ( $t = 0$ ) do času  $t$ . Úrok a jistina jsou zaplacený v čase  $t$ . Spotové úrokové míry označujeme  $R_1, R_2, \dots, R_T$ , kde  $1, 2, \dots, T$  jsou doby splatnosti. Tím se rozumí, že  $R_1$  je jednoletá úroková míra účtovaná na částku splatnou po jednom roce,  $R_2$  je dvouletá úroková míra účtovaná na částku splatnou za dva roky, ale je účtovaná ročně. Takže pokud se do banky vloží částka  $PV$ , úročená ročně, tak po dvou letech se částka zvedne na  $(1 + R_2)^2 PV$ . Pro roční úrokovou míru  $R_t$  nám v čase  $t$  vzroste daná částka o násobek  $(1 + R_t)^t$ .

Forwardová úroková míra  $f_t$  vychází ze spotových úrokových měr platných v čase  $t$ . Forwardové úrokové míry označujeme  $f_1, f_2, \dots, f_T$ . Například pro dvouletou investici s nominální hodnotou  $PV$ , pokud známe spotové úrokové míry  $R_1$  a  $R_2$ , vzroste po dvou letech částka na  $(1 + R_2)^2 PV$ . Pokud zároveň investujeme do dvouleté investice na jeden rok, pak nejdříve částka vzroste na  $(1 + R_1)PV$  a po roce investujeme opět na 1 rok s předem smlouvenou úrokovou mírou  $f_1$ , tak po dvou letech s takto smlouveným úročením částka vzroste na  $(1 + R_1)(1 + f_2)PV$ . Máme dva různé způsoby, jak investovat do dvouleté investice, první výnos vychází  $(1 + R_2)^2$  a druhý výnos vychází  $(1 + R_1)(1 + f_2)$ . Protože oba způsoby jsou možné, tak by mělo platit

$$(1 + R_2)^2 = (1 + R_1)(1 + f_2).$$

Z toho můžeme vypočítat forwardovou úrokovou míru  $f_2$

$$f_2 = \frac{(1 + R_2)^2}{(1 + R_1)} - 1.$$

Víme, že  $R_1 = f_1$ , z toho můžeme odvodit vztah mezi spotovou a úrokovou mírou

$$(1 + R_t)^t = (1 + R_{t-1})^{t-1}(1 + f_t), \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Z toho můžeme přímo vypočítat forwardovou úrokovou míru  $f_t$ :

$$f_t = \frac{(1 + R_t)^t}{(1 + R_{t-1})^{t-1}} - 1, \quad t = 2, \dots, T. \quad (1.1)$$

V předchozím případě jsme předpokládali, že forwardová úroková míra je na roční období, teď budeme uvažovat, že forwardová úroková míra se aplikuje na delší časové období. Například,  $f_{1,3}$  je forwardová úroková míra, která je platná po dobu dvou let od času 1 (předtím jsme uvažovali, že  $f_3$  je forwardová úroková míra platná po dobu jednoho roku od času 2). Obecně máme  $f_{t_0,t_1}, f_{t_1,t_2}, \dots, f_{t_{T-1},t_T}$ , kde  $f_{t_i,t_j}$  je forwardová úroková míra po dobu  $t_j - t_i$  let od času  $t_i$ . Dostáváme se k zobecněnému vzorci

$$(1 + R_{t_j})^{t_j} = (1 + R_{t_i})^{t_i} (1 + f_{t_i,t_j})^{t_j - t_i}, \quad j = 2, \dots, T, \quad i = 1, 2, \dots, T.$$

Z toho můžeme odvodit přímý výpočet forwardové úrokové míry  $f_{t_i,t_j}$

$$f_{t_i,t_j} = \left( \frac{(1 + R_{t_j})^{t_j}}{(1 + R_{t_i})^{t_i}} \right)^{\frac{1}{t_j - t_i}} - 1, \quad j = 2, \dots, T, \quad i = 1, 2, \dots, T.$$

Diskontní faktory  $d_t$  jsou faktory, kterými přenásobíme budoucí tok peněz, abychom dostali současnou hodnotu investice. Diskontní faktory označujeme  $d_1, d_2, \dots, d_T$  s časovými okamžiky  $1, 2, \dots, T$ . Můžeme je vypočítat ze spotových úrokových měr pro každý časový okamžik pomocí vzorce

$$d_t = \frac{1}{(1 + R_t)^t}, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

## 1.2 Spojitý případ

Spojité úročení vychází ze toho, že při področném úročení počet úrokovacích období konverguje k nekonečnu. Bereme nominální úrokovou míru  $i^{(\infty)} = \delta$  pro jedno časové období, symbol  $\delta$  nazýváme intenzitou úročení a platí  $\delta = \ln(1 + i)$ . Pro počáteční (nominální) hodnotu  $PV$  v čase 0 máme po uplynutí času splatnosti  $T$  budoucí hodnotu

$$FV_T = PV \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{i^{(\infty)}}{m} \right)^{Tm} = PV e^{\delta T}.$$

Pokud chceme investovat v čase  $t$  ( $0 < t < T$ ) a hodnota investice v čase  $t$  je  $PV_t$  dostaneme budoucí hodnotu jako

$$FV_T = PV_t e^{\delta(T-t)}.$$

Uvažovali jsme, že intenzita úrokové míry je konstantní. Vztah, který jsme si zde uvedli nám umožňuje ji rozšířit na funkci  $\delta_t$ , která závisí na čase  $t$ . Pro investování v čase  $t$  dostáváme budoucí hodnotu  $FV_T$  v čase  $T$  jako

$$FV_T = PV_t e^{\int_t^T \delta_s ds},$$

kde  $v(t) = e^{\int_t^T \delta_s ds}$  je diskontní funkce.



Pro spotovou úrokovou míru  $R_t$  a forwardovou úrokovou míru  $f_t$  při diskrétním úročení získáváme inspirativní vztah pro spojitě úročení (upravením vzorce (1.1))

$$\log(1 + R_t) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \log(1 + f_k).$$

Z toho dostaneme vztah pro forwardovou intenzitu úročení  $f(t)$  a spotovou (okamžitou) intenzitu úročení  $R(t)$

$$R(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds, \quad (1.2)$$

kde  $f(t)\Delta t$  se interpretuje jako akumulovaný úrok za časové období  $(t, t + \Delta t)$ .

Diskontní funkci  $v(t)$  pomocí forwardové nebo spotové intenzity úročení při spojitěm úročení můžeme vyjádřit ve tvaru

$$v(t) = e^{-tR(t)} = e^{-\int_0^t f(s) ds}.$$

### 1.3 Časová struktura

Časová struktura je závislost úrokové míry na době splatnosti. Všechny úrokové míry v této kapitole se vztahují ke stejnému časovému období (ekvidistantní časové úseky).

Předpokládáme, že  ${}_tR_n$  je okamžitá úroková míra investice na  $n$  časových obdobích od času  $t$  a nazývá se spotová úroková míra.  ${}_{t+1}f_{1,t}$ ,  ${}_{t+2}f_{1,t}$ ,  $\dots$ ,  ${}_{t+n-1}f_{1,t}$  jsou úrokové míry na jedno časové období pro investici začínající v časech  $t+1$ ,  $t+2$ ,  $\dots$ ,  $t+T-1$ , nazývají se forwardové úrokové míry na jedno časové období vnořené do času  $t$ . V čase  $t$  známe spotové úrokové míry  ${}_tR_1$ ,  ${}_tR_2$ ,  $\dots$ ,  ${}_tR_T$ . Můžeme označit  ${}_t f_{1,t} = {}_tR_1$ . Víme

$$(1 + {}_tR_k)^k = (1 + {}_tR_1) \prod_{j=1}^{k-1} (1 + {}_{t+j}f_{1,t}), \quad k = 1, \dots, T.$$

$$(1 + {}_tR_k)^k = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + {}_{t+j}f_{1,t}), \quad k = 1, \dots, T.$$

Ze vztahu spotové úrokové míry můžeme odvodit výpočet forwardové úrokové míry

$${}_{t+j}f_{1,t} = \frac{(1 + {}_tR_{j+1})^{j+1}}{(1 + {}_tR_j)^j} - 1, \quad j = 1, \dots, T$$

Můžeme ještě definovat diskontní faktor:

$${}_t v_j = \frac{1}{(1 + {}_tR_j)^j} - 1, \quad j = 1, \dots, T$$

Pokud budeme uvažovat neekvidistantní časové úseky, období  $t = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_T$ . musíme zobecnit vztah mezi spotovými a forwardovými úrokovými měrami. Označme forwardovou úrokovou míru  ${}_t f_{t_{j-1}, t_j}$  na budoucí období od

$t_{j-1}$  do  $t_j$  v čase  $t$ . Dostáváme zobecněný vztah mezi forwardovými a spotovými úrokovými měrami za předpokladu  ${}_tR_{t_0} = {}_t f_{t_0, t_1}$ :

$$(1 + {}_tR_{t_k})^{t_k} = (1 + {}_tR_{t_0}) \prod_{j=1}^{k-1} (1 + {}_t f_{t_j, t_{j+1}}), \quad k = 1, \dots, T.$$

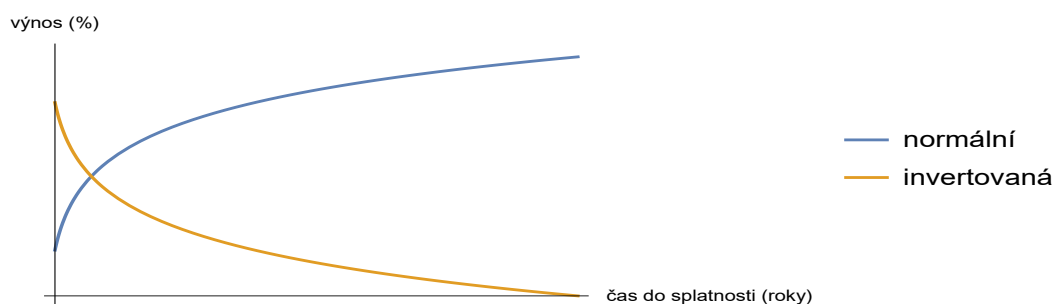
Z toho můžeme přímo vypočítat forwardovou úrokovou míru  ${}_t f_{t_{k-1}, t_k}$

$${}_t f_{t_{k-1}, t_k} = \left[ \frac{(1 + {}_tR_{t_k})^{t_k}}{(1 + {}_tR_{t_{k-1}})^{t_{k-1}}} \right]^{1/(t_k - t_{k-1})} - 1, \quad k = 1, \dots, T.$$

## 1.4 Užítí výnosových křivek při hodnocení investic

Výnos do splatnosti libovolného dluhopisu je spojen s obchodováním na trhu s cennými papíry s pevným výnosem. Výnosy dluhopisů nejsou stejné, liší se hodnocením kvality. Proto dluhopis s hodnocením AAA bude dražší než dluhopis s hodnocením B, i když mají stejný deklarovaný výnos. Ale toto není jediný důvod, proč se dluhopisy mezi sebou liší. Mohou se lišit dobou splatnosti. Platí všeobecné pravidlo v normálně se chovající stabilizované ekonomice, že dlouhodobé dluhopisy nabízejí větší výnos než krátkodobé dluhopisy. Vztah mezi výnosem do splatnosti a dobou do splatnosti popisuje výnosová křivka. Nejvíce se používá pro dluhopisy se stejnými vlastnostmi (stejným hodnocením) a liší se pouze dobou splatnosti [5].

Výnosová křivka popisuje aktuální stav na trhu. Používá se pro predikci úrokových měr pro časové okamžiky, ve kterých nejsou výnosy kótovány. Jsou tři hlavní tvary výnosových křivek: normální, invertované nebo konstantní. Nejčastější jsou normální výnosové křivky, u kterých se postupně zvyšuje výnos s časem do splatnosti. U invertované výnosové křivky platí, že dlouhodobé dluhopisy mají menší výnos než krátkodobé dluhopisy. Toto se stává, když krátkodobá úroková míra rychle vzroste a investoři věří, že je to dočasné; takže dlouhodobá úroková míra se změní minimálně.



Obrázek 1.1: Základní typy výnosových křivek

Dále výnosové křivky mohou být forwardové nebo spotové. Spotová výnosová křivka popisuje závislost výnosu na době splatnosti, měřenou od aktuálního (spotového) okamžiku, a tvoří je spotové úrokové míry. Forwardová výnosová křivka představuje očekávanou spotovou výnosovou křivku v budoucnosti a tvoří je forwardové úrokové míry [6].

Symbolem  $P(t,T)$  označujeme cenu bezkupónového dluhopisu s dobou splatnosti  $T$  a nominální hodnotou jedna (tj.  $P(T,T) = 1$ ) v čase  $t < T$ . Symbolem  $R(t,T)$  označujeme spojitý výnos do splatnosti v čase  $t$  pro daný dluhopis. Vzoreček pro výpočet  $R(t,T)$  je

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}$$

z toho můžeme odvodit výpočet ceny dluhopisu

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}.$$

Výnos do splatnosti  $R(t,T)$  uvažovaný jako funkce argumentu  $T \geq t$  v grafickém znázornění reprezentuje výnosovou křivku ve fixovaném okamžiku  $t$ .

## 2. Odhady

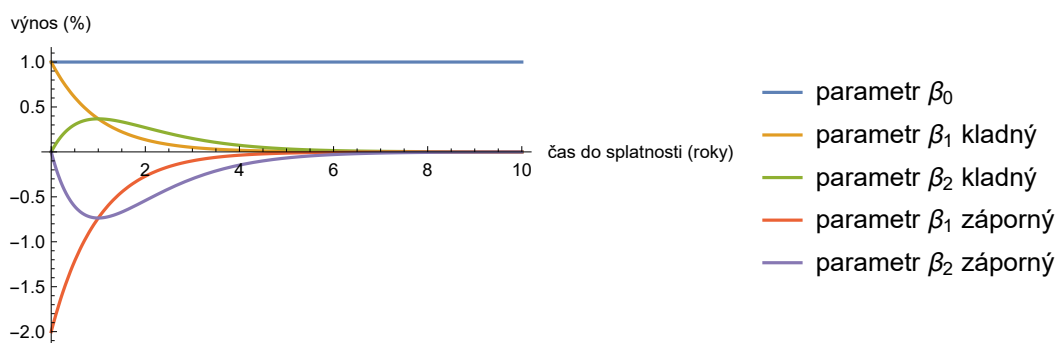
V této kapitole se budeme zabývat odhady (kalibracemi) výnosových křivek pomocí parametrických modelů a neparametrického modelu. Výnosová křivka nabývá v praxi různých tvarů a účelem je najít funkci, která popíše výnosovou křivku. Metody jsou založené na iteračním postupu. Nejdříve se sestrojí hypotetická výnosová křivka a ta se dále upravuje tak, aby co nejlépe aproximovala výnosy na kapitálovém trhu. V této kapitole budu čerpat z knih [7] a [8], článků [9] a [10]. V této kapitole budeme předpokládat, že k dispozici máme pozorované kótované výnosy  $y_1, \dots, y_T$  v časech  $t_1, \dots, t_T$ . V této kapitole budeme předpokládat, že k dispozici máme pozorované kótované výnosy  $y_1, \dots, y_T$  v časech  $t_1, \dots, t_T$ .

### 2.1 Nelson-Siegelův model

Nelson a Siegel experimentovali s funkcí pro forwardovou úrokovou mírou ve tvaru

$$f(t; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda t} + \beta_2 \lambda t e^{-\lambda t}, \quad (2.1)$$

kde  $t$  je časová konstanta a  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  a  $\lambda$  jsou (obvykle) neznámé parametry. Z obrázku (2.1) můžeme popsat, co jednotlivé parametry představují. Parametr  $\beta_0$  představuje výši úrokové míry, funkce  $\beta_1 e^{-\lambda t}$  určuje sklon; směrem dolů pro  $\beta_1 > 0$  nebo směrem nahoru pro  $\beta_1 < 0$ . Parametr  $\beta_2$  určuje zakřivení, jestli funkce má konkávní pro  $\beta_2 > 0$  nebo konvexní tvar pro  $\beta_2 < 0$ . Z obrázku (2.2) vidíme, že parametr  $\lambda$  určuje tvar křivky, její šikmost a extrém (minimum nebo maximum). Dostaneme množinu forwardových úrokových měr s monotonním tvarem, s lokálními extrémy nebo ve tvaru S.



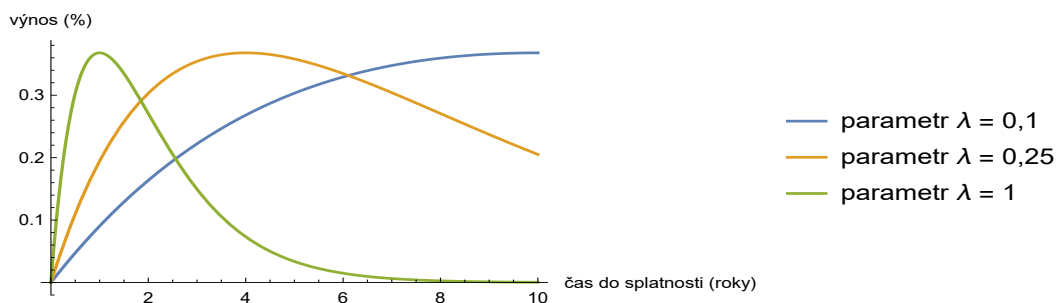
Obrázek 2.1: Funkce forwardové úrokové míry pro jednotlivé parametry se zvoleným parametrem  $\lambda = 1$

Pokud použijeme vzorec pro výpočet spotové výnosové míry ve spojitém případě (1.2)

$$g(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds, \quad (2.2)$$

dostaneme výnosovou křivku ve tvaru

$$g(t; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \left( \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right) - \beta_2 e^{-\lambda t},$$



Obrázek 2.2: Funkce forwardové úrokové míry pro zvolené parametry  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$  a  $\beta_2 = 1$  a různou volbu parametru  $\lambda$

funkci přepíšeme do tvaru

$$g(t; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right). \quad (2.3)$$

Takto definovaná křivka v závislosti na neznámých parametrech může být konstantní, rostoucí, klesající nebo ve tvaru U.

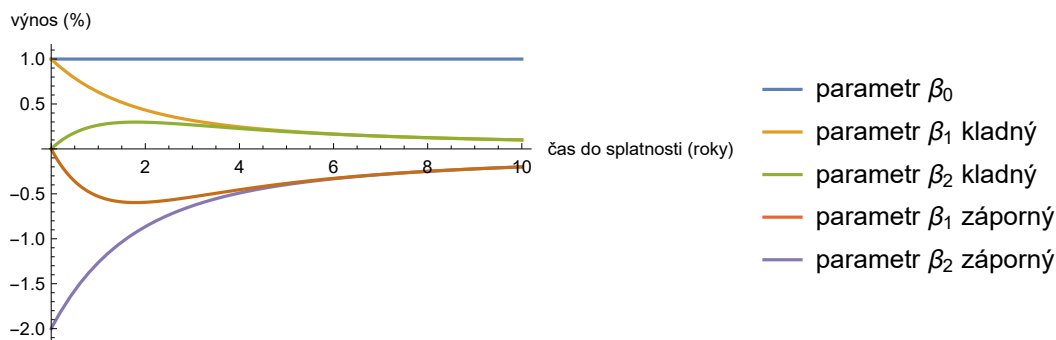
Pro lepší interpretaci parametrů napíšeme limity pro kladné parametry:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda) = \beta_0 + \beta_1$$

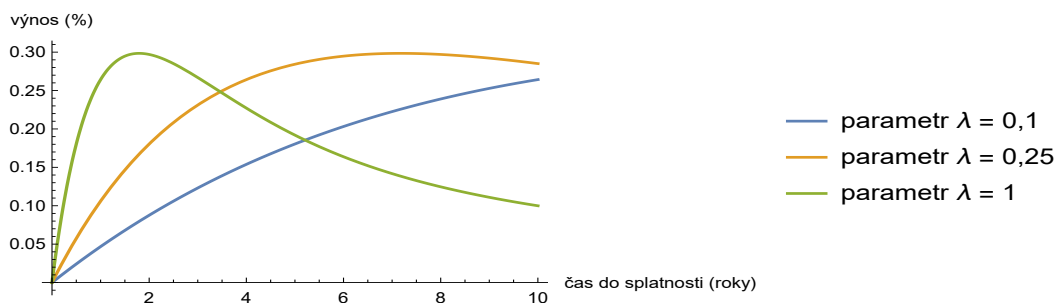
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \lambda) = \beta_0.$$

Víme, že  $\beta_0$  je blízko dlouhodobé spotové úrokové míry a není záporná ani příliš vysoká, protože v praxi úrokové míry takových hodnot nenabývají. Z druhé limity a obrázku (2.3) můžeme vyvodit, že  $-\beta_1$  určuje sklon směrem dolů ( $\beta_1 > 0$ ) nebo směrem nahoru ( $\beta_1 < 0$ ).  $\beta_0 + \beta_1$  je počáteční hodnota výnosové křivky. Parametr zakřivení  $\beta_2$  určuje šikmost funkce. Parametr  $\lambda$  určuje tvar křivky a to, jestli je konvexní nebo konkávní. Pomocí maximalizace parametru  $\beta_2$  vzhledem k funkci  $\lambda$  můžeme najít, kde má funkce extrém.

Také si můžeme zvolit, kde bude extrém tím, že parametr  $\lambda$  zvolíme jako konstantu - můžeme vidět na obrázku (2.4), tímto dostaneme lineární funkci a odhad je jednodušší.



Obrázek 2.3: Funkce spotové úrokové míry pro jednotlivé parametry se zvoleným parametrem  $\lambda = 1$



Obrázek 2.4: Funkce spotové úrokové míry pro zvolené parametry  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$  a  $\beta_2 = 1$  a různou volbu parametru  $\lambda$

## 2.2 Svenssonův model

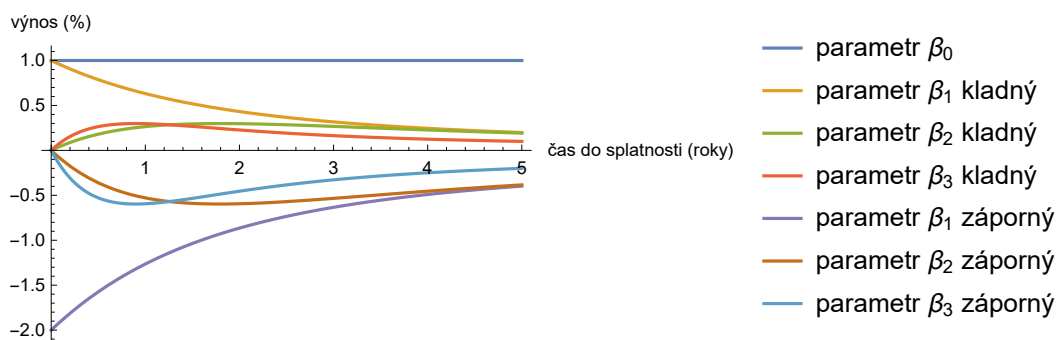
Svenssonův je zobecněný Nelson-Siegelův model. Funkce má další dva parametry, je tedy flexibilnější a přesněji popíše forwardovou nebo spotovou křivku. Forwardová výnosová křivka je popsána funkcí

$$f(t; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda_1, \lambda_2) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda_1 t} + \beta_2 \lambda_1 t e^{-\lambda_1 t} + \beta_3 \lambda_2 t e^{-\lambda_2 t}. \quad (2.4)$$

Funkci pro spotovou výnosovou křivku dostaneme použitím vzorce pro výpočet spotové výnosové míry (2.2), je ve tvaru

$$g(t; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda_1, \lambda_2) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 t} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 t} - e^{-\lambda_1 t} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 t} - e^{-\lambda_2 t} \right), \quad (2.5)$$

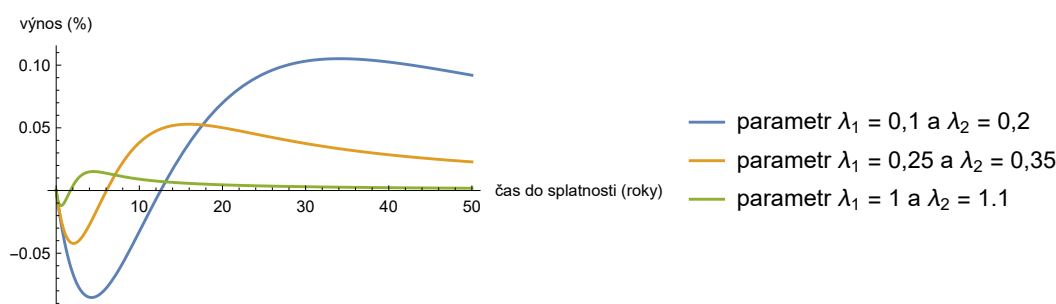
kde  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  jsou neznámé parametry. Přidáním  $\beta_3$  a  $0 < \lambda_2 \neq \lambda_1$  vznikla možnost dalšího extrému. Tzn., že výnosová křivka v reálném případě může mít lepší tvar, ale není snadno interpretovatelná.



Obrázek 2.5: Funkce spotové úrokové míry pro jednotlivé parametry se zvolenými parametry  $\lambda_1 = 1$  a  $\lambda_2 = 2$

Pro lepší představu, co jednotlivé parametry ve funkci znamenají, popíšeme jejich ekonomický význam. Parametr  $\beta_0$  popisuje forwardovou úrokovou míru pro nějaké budoucí období.  $\beta_0 + \beta_1$  může být interpretováno jako počáteční hodnota výnosové křivky nebo jako okamžitá úroková míra.  $-\beta_1$  určuje vzdálenost mezi jednotlivými úrokovými mírami, tj. určuje sklon křivky. Parametr  $\beta_2$  určuje jak se mění krátkodobé a dlouhodobé úrokové míry a kde je křivka konkávní nebo

konvexní. Parametr  $\beta_3$  přidaný Svenssonem změní průběh křivky, další část křivky může být konvexní nebo konkávní. Parametry  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  určují sklon a zakřivení křivky.



Obrázek 2.6: Funkce spotové úrokové míry pro zvolené parametry  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 1$  a  $\beta_3 = -1$  a různé volby parametrů  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$

Na rozdíl od Nelson-Siegelova modelu, kde křivka může mít jen jeden lokální extrém (minimum nebo maximum), může křivka ve Svenssonově modelu mít dva lokální extrémum (obrázek (2.6)).

## 2.3 Jádrový odhad

Je to neparametrický odhad na základě odhadů vytvořených pomocí váženého průměru všech pozorování, patří mezi nejjednodušší modely pro odhadování výnosové křivky. Vychází ze symetrické hustoty  $K(x)$ , v tomto kontextu nazývané jádro.

Budeme se zabývat odhadováním nelineární funkce  $m(\cdot)$  pro kterou platí

$$y_n = m(t_n) + \epsilon_n, \quad n = 1, \dots, T,$$

kde  $y_1, \dots, y_T$  jsou pozorované výnosy v časech  $t_1, \dots, t_T$  a  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_T$  jsou náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a v základním modelu se stejným rozptylem.

Funkce  $m(x)$  může být odhadnuta vyhlazením jako

$$\widehat{m}(t) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \omega_i(t) y_i, \quad (2.6)$$

kde  $\omega_n(x)$  je váhová funkce pozorovaných výnosů  $y_n$  v časech  $t_n$ , pro  $n = 1, \dots, T$ .

Pro časová období  $t_1, t_2, \dots, t_n$  chceme odhadnout funkci výnosové křivky  $y_t$  tak, aby pozorování  $y_{t_i}$  mělo menší váhu pro menší vzdálenosti  $|t - t_i|$ . Jádrou funkci můžeme rozšířit o proměnnou  $h > 0$ :

$$K(t, h) = \frac{1}{h} K\left(\frac{t}{h}\right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(t) dt = 1$$

kde  $K$  je symetrická hustota, parametr  $h$  je vyhlazovací parametr (šířka okénka). Šířka okénka  $h$  určuje míru vyhlazení odhadované funkce.

Můžeme definovat váhovou funkci pro vážené průměry jako

$$\omega_n(x) = \frac{K(x - t_n)}{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T K(x - t_i)}. \quad (2.7)$$

Pokud  $h$  je velice malé, nalezené hodnoty budou blízko naměřených hodnot  $y_n$  a křivka nebude hladká. Pro  $h$  hodně velké, se hodnoty budou lišit od naměřených hodnot a křivka se bude přibližovat jádrové funkci. Dosazením (2.7) do (2.6) dostaneme Nadaraya-Watsonovu funkci odhadu jádra

$$\widehat{m}(t) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \omega_i(t) y_i = \frac{\sum_{i=1}^T K(x - t_i) y_i}{\sum_{i=1}^T K(x - t_i)}.$$

Za určitých podmínek lze ukázat, že  $\widehat{m}(t)$  asymptoticky konverguje k  $m(t)$ .

Jedny z nejpoužívanějších jader jsou Epanechnikovo jádro (obrázek (2.7) pro  $h = 1$ ):

$$K_E(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - t^2), & \text{pro } -1 < t < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2.8)$$

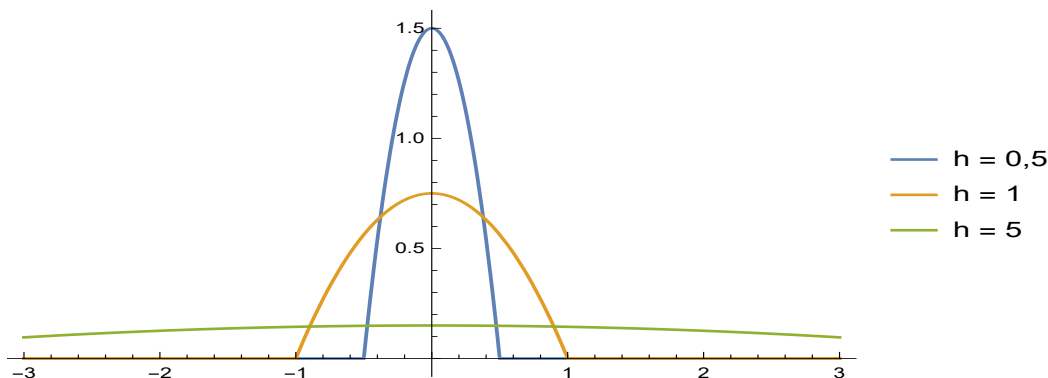
a Gaussovo jádro (obrázek (2.8) pro  $h = 1$ ):

$$K_G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (2.9)$$

Pokud jádra rozšíříme o vyhlazovací parametr  $h$  dostaneme funkce:

$$K_E(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left(1 - \frac{t^2}{h^2}\right), & \text{pro } -1 < \frac{t}{h} < 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$K_G(t, h) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2h^2}}. \quad (2.11)$$



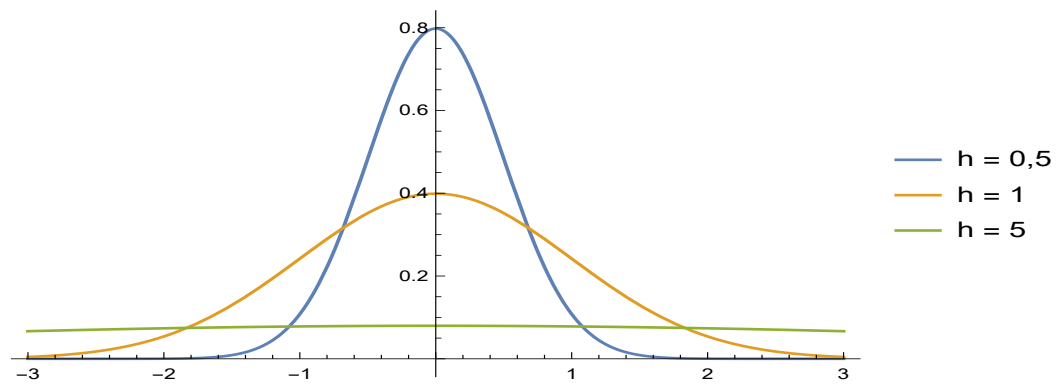
Obrázek 2.7: Epanechnikova jádrová funkce

Na obrázcích (2.7) a (2.8) vidíme, jak se liší rozšířená Epanechnikova jádrová funkce rozšířená a rozšířená Gaussova jádrová funkce pro různou volbu vyhlazovacího parametru  $h$ . Pro velké  $h$  se stávají funkce konstantní.

U jádrového odhadu je důležité správně vybrat vyhlazovací parametr, zajišťuje jak přesný a kvalitní odhad bude. Jednou z možností, které se v praxi používá je pokus/omyl. Zkusíme různé volby vyhlazovacího parametru  $h$  pro jádrové funkce a zvolíme tu jádrovou funkci, která nejvíce odpovídá zadaným kritériím nebo si zvolíme, jak ji chceme hladkou.

Další možnost výběru vyhlazovacího parametru  $h$  je výpočtem. Jeden z používaných výpočtů je minimalizace váženého průměru druhé kvadratické chyby jádrového odhadu. Tato metoda je vhodná pro Gaussovo jádrovou funkci a její data, pro jiné funkce není vhodná.





Obrázek 2.8: Gaussova jádrová funkce

### 3. Numerická studie

Data, se kterými v této kapitole budeme pracovat jsou spotové výnosové úrokové míry pro státní dluhopisy ve Spojených státech amerických z 31. 1. 2020 (tabulka 3.1). Data jsou z tohoto období, protože události v tomto roce hodně ovlivnily úrokové míry a pro zvolené odhady výnosových křivek by bylo těžší je interpretovat.

| splatnost | výnos |
|-----------|-------|
| 1 měsíc   | 1.56% |
| 3 měsíce  | 1.55% |
| 6 měsíců  | 1.54% |
| 1 rok     | 1.45% |
| 2 roky    | 1.33% |
| 3 roky    | 1.3%  |
| 5 let     | 1.32% |
| 7 let     | 1.42% |
| 10 let    | 1.51% |
| 20 let    | 1.81% |
| 30 let    | 1.99% |

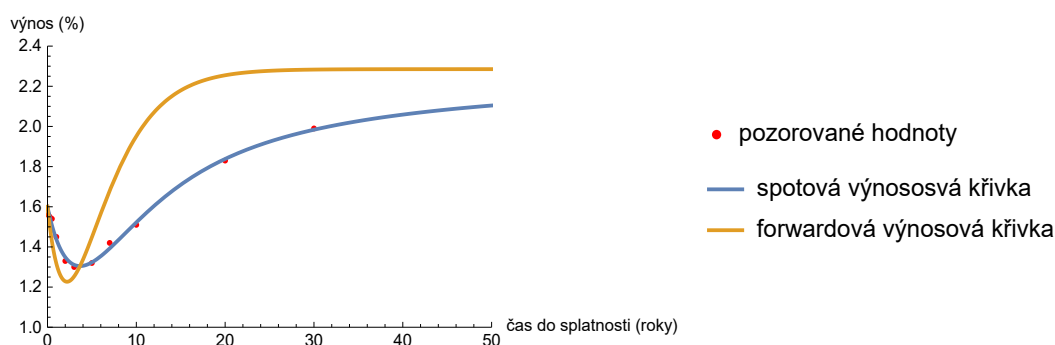
Tabulka 3.1: Pozorované hodnoty

#### 3.1 Nelson-Siegelův odhad

V této části budeme odhadovat výnosové křivky Nelson-Siegelovým modelem. Pro spotovou výnosovou křivku (2.3) odhadneme parametry  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  a  $\lambda$  metodou nejmenších čtverců, v tabulce 3.2 jsou vypsány nalezené parametry. Na obrázku 3.1 je vykreslená odhadnutá spotová výnosová křivka a forwardová výnosová křivka s odhadnutými parametry. Forwardová výnosová křivka je odhadována nepřímo, protože do vzorce (2.1) pro výpočet forwardové výnosové křivky jsou dosazeny parametry pro spotovou výnosovou křivku. Proto se forwardová výnosová křivka více liší od pozorovaných hodnot.

| Parametr | $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\lambda$ |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Odhady   | 2.28531   | -0.684972 | -2.06536  | 0.3037    |

Tabulka 3.2: Odhadnuté parametry pro spotovou výnosovou křivku Nelson-Siegelovým modelem



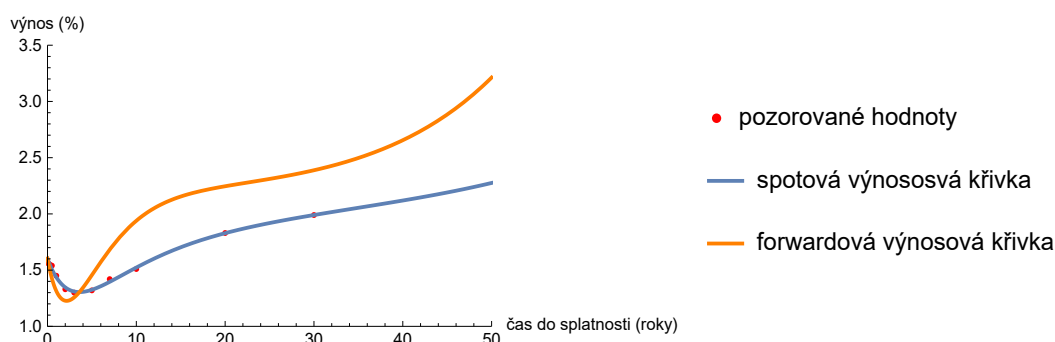
Obrázek 3.1: Odhadnuté výnosové křivky Nelson-Siegelovým modelem a pozorované hodnoty

## 3.2 Svenssonův odhad

Použijeme Svenssonův model pro odhadnutí výnosových křivek. Pro spotovou výnosovou křivku (2.5) dostaneme odhad parametrů  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  metodou nejmenších čtverců, v tabulce 3.3 jsou vypsány nalezené parametry. Na obrázku 3.2 je vykreslená odhadnutá spotová výnosová křivka a forwardová výnosová křivka (2.4) s nalezenými parametry. Jako u Nelson-Siegelova modelu jsou parametry pro spotovou výnosovou křivku dosazeny do vzorce pro forwardovou výnosovou křivku, opět je forwardová výnosová křivka odhadnutá nepřímou.

| Parametr | $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$  | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
|----------|-----------|-----------|-----------|------------|-------------|-------------|
| Odhady   | 2.1928    | -0.590027 | -1.94436  | -0.0210266 | 0.321473    | -0.056766   |

Tabulka 3.3: Odhadnuté parametry pro spotovou výnosovou křivku Svenssonovým modelem

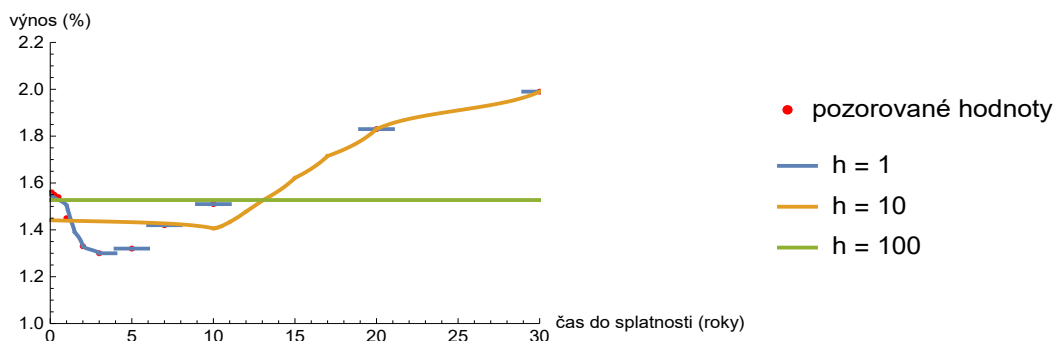


Obrázek 3.2: Odhadnuté výnosové křivky Svenssonovým modelem a pozorované hodnoty

## 3.3 Jádrový odhad

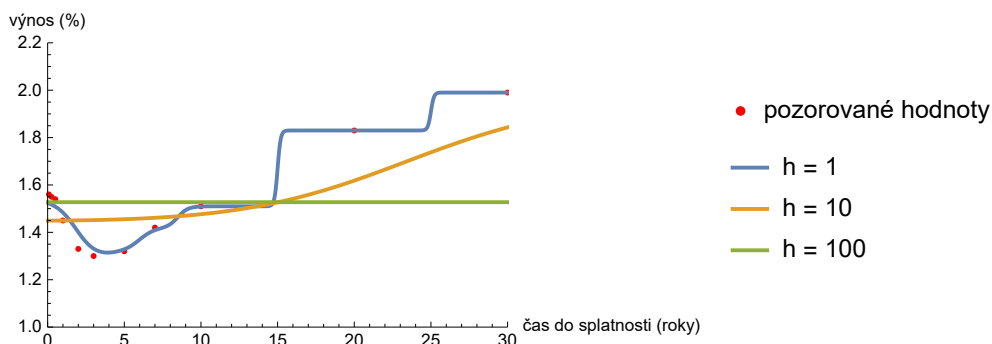
Budeme se zabývat odhadem spotové výnosové křivky pomocí jádrové funkce. Nejdříve použijeme rozšířené Epanechnikovo jádro (2.10). Důležité je vybrat vyhlazovací parametr. Použijeme metodu pokus/omyl. Na obrázku 3.3 jsou různé

volby vyhlazovacího parametru. Vidíme, že nejlepší volba vyhlazovacího parametru bude okolo hodnoty 10. Při zvolení vyhlazovacího parametru 10 je funkce spojitá, ale počáteční pozorované hodnoty se od odhadnuté křivky liší, protože jsou mezi jednotlivými pozorovanými hodnotami krátké časové intervaly. Pokud bychom volili vyhlazovací parametr malý (obrázek 3.3  $h = 1$ ) funkce výnosové křivky by byla nespojitá a po částech konstantní (u pozorovaných hodnot, které mají mezi sebou delší časové období).



Obrázek 3.3: Epanechnikova jádrová funkce

Při použití rozšířeného Gaussova jádra (2.11) je vhodné zvolit vyhlazovací parametr mezi hodnotami 1 a 10, můžeme vidět na obrázku. Pokud zvolíme vyhlazovací parametr 1, výnosová křivka nebude hladká, ale bude odpovídat pozorovaným hodnotám. Při zvolení vyhlazovacího parametru okolo hodnoty 10 bude sice funkce hladká, ale nebude dostatečně odpovídat pozorovaným hodnotám.



Obrázek 3.4: Gaussova jádrová funkce

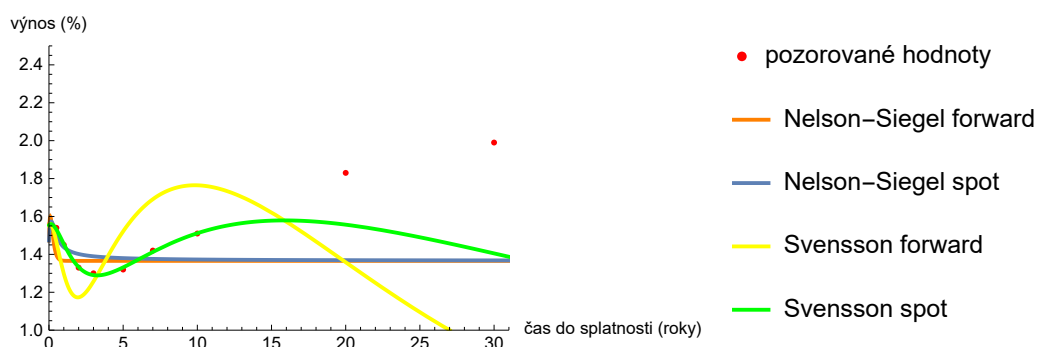
Pokud bychom volili vyhlazovací parametr moc velký (na obrázcích 3.3 a 3.4  $h = 100$ ) funkce by byla konstantní a její hodnota by se získala váženým průměrem pozorovaných hodnot. Vidíme, že jádrový odhad není pro odhadování výnosových křivek vhodný.

### 3.4 Porovnání

Předtím jsme pro odhadování výnosových křivek použily všechny pozorované hodnoty. V této části budeme počítat jen s pozorovanými hodnotami s časem do splatnosti 1 měsíc až 10 let a zkusíme odhadnout výnosovou křivku.

Na obrázku 3.5 jsou znázorněny, jak by vypadaly spotové a forwardové výnosové křivky při použití Nelson-Siegelova a Svenssonova odhadu. V tabulce 3.4 můžeme vidět odhadnuté parametry pro Nelson-Siegelův model a v tabulce 3.5 jsou odhadnuté parametry pro Svenssonův odhad, které jsme získali po upravení vstupních dat. Odhady obou výnosových křivek Nelson-Siegelovým modelem pro čas do splatnosti více než 5 let jsou konstantní, ale podle pozorovaných hodnot, by křivky měly být rostoucí. Při odhadování výnosové křivky pro všechny pozorované hodnoty (obrázek 3.1) jsou křivky pro dobu do delší splatnosti nejspíše také konstantní. U Svenssonova modelu výnosových křivek je nejdříve křivka rostoucí a pro delší čas do splatnosti je funkce klesající. Na obrázku 3.2 jsou obě křivky rostoucí.

Z těchto dvou parametrických odhadů pro pozorované hodnoty je lepší Svenssonův odhad. Při použití Svenssonova modelu můžeme z odhadu výnosové křivky můžeme zjistit hodnoty úrokových měr, které nejsou pozorovány. Tomu odpovídá také to, že Svenssonův model je Nelson-Siegelův model zobecněný o další dva parametry.



Obrázek 3.5: Parametrické odhady

| Parametr | $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\lambda$ |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Odhady   | 8.58847   | 1.36569   | 0.107548  | 0.514166  |

Tabulka 3.4: Odhadnuté parametry pro spotovou výnosovou křivku Nelson-Siegelovým modelem

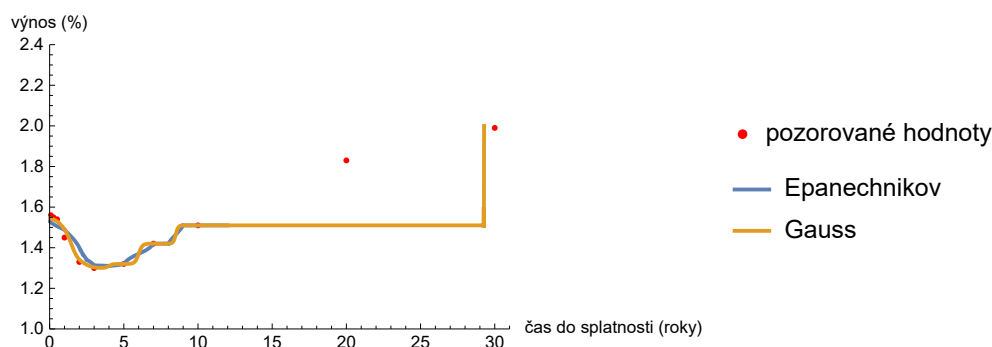
| Parametr | $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|-------------|
| Odhady   | 0.296952  | 1.25712   | 1.10744   | 3.98974   | 1.54087     | 0.101704    |

Tabulka 3.5: Odhadnuté parametry pro spotovou výnosovou křivku Svenssonovým modelem

Na obrázku 3.6 jsou odhadnuté výnosové křivky při použití Epanechnikovy a Gaussovy jádrové funkce. Při odhadování výnosové křivky Epanechnikovou jádrovou funkcí byl zvolen vyhlazovací parametr  $h = 3$  a vidíme, že křivka končí v čase do splatnosti 12 let. Pokud by se zvolil vyhlazovací parametr větší, křivka by byla delší, ale nevypovídala by o pozorovaných hodnotách (jako na obrázku

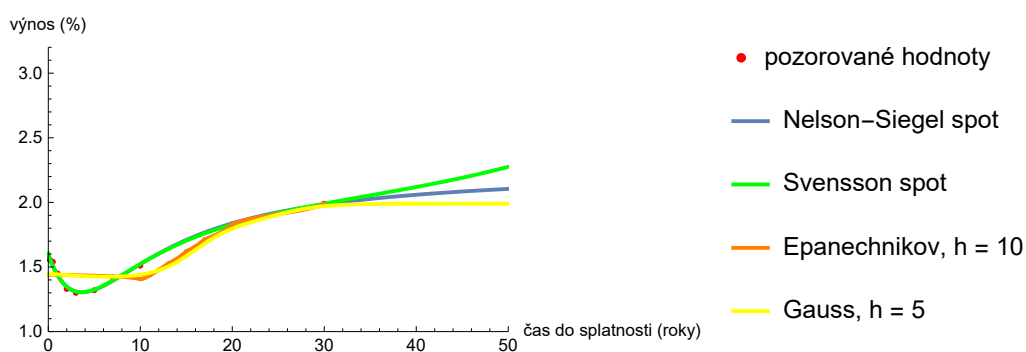
3.3 pro  $h = 100$ ). Pokud použijeme Gaussovu jádrovou funkci výnosová křivka je konstantní od času do splatnosti 9 let a v čase do splatnosti 29 let je kolmá na osu x, ve smyslu úrokové míry to je nemožné, v jednom roce nemůže být více spotových úrokových měr.

Když porovnáme odhadnuté výnosové křivky Epanechnikovou a Gaussovou jádrovou funkcí vidíme, že odhad Epanechnikovou jádrovou funkcí je lepší pro pozorované hodnoty, ale pro předpovídání budoucích úrokových měr je lepší odhad Gaussovou jádrovou funkcí. Pokud použijeme všechny pozorované hodnoty (obrázky 3.3 a 3.4) a porovnáme tyto dva odhady je lepší odhad Epanechnikovou jádrovou funkcí.



Obrázek 3.6: Neparаметrické jádrové odhady

Na obrázku 3.7 jsou odhadnuty spotové výnosové křivky pro všechny použité modely při použití všech pozorovaných hodnot. U parametrických modelů jsou křivky hladké a lépe popisují vývoj spotových úrokových měr. Můžeme si vybrat, zda chceme použít Nelson-Siegelův model nebo Svenssonův model, protože dostáváme do času splatnosti 30 let podobné výnosové křivky. Ale při použití modelů na upravená data Svenssonův model pro výnosovou křivku lépe vypovídá o pozorovaných hodnotách.



Obrázek 3.7: Odhady spotových výnosových křivek

# Závěr

V bakalářské práci jsme zavedli pojmy spotová úroková míra, forwardová úroková míra a diskontní faktor a vztahy mezi nimi. Dále jsme zavedli pojmy časová struktura a výnosová křivka, u kterých jsme uvedli, jak souvisí s úrokovými měrami a dobou splatnosti. V druhé kapitole jsme se zabývali modely pro odhad výnosových křivek. První model, kterým jsme se zabývali, byl Nelson-Siegelův parametrický model. Je to jeden z nejpoužívanějších modelů v praxi, protože jeho parametry jsou dobře interpretovány a výsledná výnosová křivka splňuje podmínky odhadu výnosových křivek. Druhý model byl Svenssonův parametrický model, který vychází z Nelson-Siegelova modelu přidáním dvou parametrů. Jeho interpretace už je těžší, ale přidal možnost dalšího extrému. Pokud by úrokové míry byly ovlivněny tak, že by nejen s přibývajícím časem do splatnosti rostly, ale i klesaly, tak tento model by lépe popsal výnosovou křivku. Poslední model byl neparametrický jádrový odhad, kde jsme uvedli dvě nejčastěji používaná jádra: Epanechnikovo jádro a Gaussovo jádro. U jádrových odhadů jsme mohli vidět, že je vhodný pro úrokové míry, které mezi sebou nemají delší časové úseky. Jinak se odhadnutá výnosová křivka lišila od pozorovaných hodnot, ale byla spojitá nebo odpovídala pozorovaným hodnotám, ale nebyla spojitá. U obou jádrových funkcí, jsme řešili výběr vyhlazovacího parametru.

V další části bakalářské práce jsme uvedené modely aplikovali na reálné spotové úrokové míry Spojených států amerických. U parametrických modelů jsme odhadli parametry pro funkci spotové výnosové křivky a použili jsme je i na funkci pro forwardovou výnosovou křivku. Toto jsme mohli udělat, protože jsme použili vztah, který platí mezi spotovými a forwardovými úrokovými měrami. U neparametrického modelu jsme použili rozšířené jádrové funkce pro pozorované hodnoty a zkusili jsme najít vyhlazovací parametr. Jednotlivé metody jsme mezi sebou porovnali a zjistili, že nejlepší odhad výnosové křivky se získal použitím Nelson-Siegelova modelu nebo Svenssonova modelu.

Nakonec jsme zkusili, zda by popsané modely byly vhodné i pro odhad výnosové křivky, pokud by se nepoužily všechny pozorované hodnoty. Zjistili jsme, že Svenssonův model je pro takto upravená data použitelný. Dále jsme mohli vidět, že pro méně podrobná data (mezi jednotlivými úrokovými měrami jsou delší časové úseky) jsou lepší parametrické modely, u kterých se to na výnosové křivce neprojeví. U neparametrického jádrového odhadu jsme mohli vidět, že množství dat ovlivňuje jeho kvalitu.

# Seznam použité literatury

- [1] J. Dupačová, J. Hurt, and J. Štěpán. *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 2002.
- [2] John C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Eight Edition. Pearson Education Limited, London, 2012.
- [3] J. Van Horne. *Financial Market Rates and Flows*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1978.
- [4] J. Hurt. Finanční management. Přednáška MFF UK, 2020. [http://www.karlin.mff.cuni.cz/~hurt/20200319\\_Interest\\_Rates\\_YC\\_Template\\_mfpress\\_1.pdf](http://www.karlin.mff.cuni.cz/~hurt/20200319_Interest_Rates_YC_Template_mfpress_1.pdf).
- [5] D. Luenberger. *Investment Science*. Oxford University Press, New York, 1998.
- [6] T. Cipra. *Finanční ekonometrie*. 1. vydání. Ekopress, Praha, 2008.
- [7] J.Y. Campbell, A.W. Lo, and A.C. MacKinlay. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, New Jersey, 1997.
- [8] F. X. Diebold and G. D. Rudebusch. *Yield Curve Modeling and Forecasting: The Dynamic Nelson-Siegel Approach*. Princeton University Press, New Jersey, 2013.
- [9] W. K. Härdle and P. Majer. Yield curve modeling and forecasting using semi-parametric factor dynamics. *The European Journal of Finance* 21, 15:1109–1129, 2015.
- [10] M. T. M. Garcia and V. H. F. Carvalho. A cross-sectional application of the nelson-siegelsvensson model to several negative yield cases. *Cogent Economics Finance*, 7:1–54, 2019.



# Seznam obrázků

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Základní typy výnosových křivek . . . . .  | 6  |
| 2.1 | Funkce forwardové úrokové míry pro jednotlivé parametry se zvoleným parametrem $\lambda = 1$ . . . . .   | 8  |
| 2.2 | Funkce forwardové úrokové míry pro zvolené parametry $\beta_0 = 0$ , $\beta_1 = 0$ a $\beta_2 = 1$ a různou volbu parametru $\lambda$ . . . . .                              | 9  |
| 2.3 | Funkce spotové úrokové míry pro jednotlivé parametry se zvoleným parametrem $\lambda = 1$ . . . . .  | 9  |
| 2.4 | Funkce spotové úrokové míry pro zvolené parametry $\beta_0 = 0$ , $\beta_1 = 0$ a $\beta_2 = 1$ a různou volbu parametru $\lambda$ . . . . .                                 | 10 |
| 2.5 | Funkce spotové úrokové míry pro jednotlivé parametry se zvolenými parametry $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_1 = 2$ . . . . .  | 10 |
| 2.6 | Funkce spotové úrokové míry pro zvolené parametry $\beta_0 = 0$ , $\beta_1 = 0$ , $\beta_2 = 1$ a $\beta_3 = -1$ a různé volby parametrů $\lambda_1$ a $\lambda_2$ . . . . . | 11 |
| 2.7 | Epanechnikova jádrová funkce . . . . .   | 12 |
| 2.8 | Gaussova jádrová funkce . . . . .  | 13 |
| 3.1 | Odhadnuté výnosové křivky Nelson-Siegelovým modelem a pozorované hodnoty . . . . .   | 15 |
| 3.2 | Odhadnuté výnosové křivky Svenssonovým modelem a pozorované hodnoty . . . . .  | 15 |
| 3.3 | Epanechnikova jádrová funkce . . . . .   | 16 |
| 3.4 | Gaussova jádrová funkce . . . . .  | 16 |
| 3.5 | Parametrické odhady . . . . .  | 17 |
| 3.6 | Neparametrické jádrové odhady . . . . .  | 18 |
| 3.7 | Odhady spotových výnosových křivek . . . . .   | 18 |

# Seznam tabulek

|     |   |    |  |
|-----|---|----|--|
| 3.1 | Pozorované hodnoty . . . . .  | 14 |  |
| 3.2 | Odhadnuté parametry pro spotovou výnosovou křivku Nelson-Siegelovým modelem . . . . . | 14 |  |
| 3.3 | Odhadnuté parametry pro spotovou výnosovou křivku Svenssonovým modelem . . . . .      | 15 |  |
| 3.4 | Odhadnuté parametry pro spotovou výnosovou křivku Nelson-Siegelovým modelem . . . . . | 17 |  |
| 3.5 | Odhadnuté parametry pro spotovou výnosovou křivku Svenssonovým modelem . . . . .      | 17 |  |