

POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Název: Věncové součiny symetrických grup a počítání Sudoku čtverců
Autor: Jakub Kašpar

Shrnutí obsahu práce

Práce se zabývá velikostí tříd konjugace věncového součinu dvou symetrických grup a aplikací tohoto výsledku na určení počtu esenciálně odlišných Sudoku čtverců stupně $m \times n$. Cílem práce je replikovat tyto počty čistě matematickými prostředky bez použití výpočetní techniky využívající systém GAP, jak je lze nalézt v literatuře. To se částečně podařilo. Formule pro velikost tříd konjugace věncového součinu dvou symetrických grup je odvozena čistě matematickými prostředky. K využití Burnsidova lemmatu pro výpočet počtu esenciálně odlišných Sudoku čtverců je ještě třeba určit počet pevných bodů permutací ze standardní permutační reprezentace věncového součinu dvou grup pro zvolené reprezentanty tříd konjugace. Tato otázka není v práci řešena a čtenář je odkázán na algoritmus uvedený v literatuře.

Celkové hodnocení práce

Téma práce. Téma práce je přiměřené bakalářské práci.

Vlastní příspěvek. Vlastní příspěvek autora spočívá v odvození vzorce pro velikost tříd konjugace ve věncovém součinu dvou symetrických grup. Neumím posoudit, do jaké míry je tento výsledek původní, odhaduji, že asi někde už v literatuře bude publikován, nejspíš v obecnější podobě, tj. pro širší třídu věncových součinů. Tento výsledek je potom prostřednictvím Burnsidova lemmatu použit jako jeden krok pro určení počtu esenciálně různých Sudoku čtverců daného stupně. Dva Sudoku čtverce jsou esenciálně odlišné, pokud leží v různých třídách konjugace přirozené grupy symetrií Sudoku čtverce. Tato grupa symetrií je direktním součinem dvou věncových součinů symetrických grup (rozšířená o semidirektní součin s dvouprvkovou grupou v případě $m=n$).

Matematická úroveň. Matematická úroveň práce je přiměřená. Pokud jsem schopen posoudit, tak všechna uvedená tvrzení jsou správná. Občas jsem měl problém sledovat linii důkazů, v takovém případě jsem si výsledky dokazoval sám. Důkazy jsou přímočaré, vycházejí téměř výhradně z definic a jsou založené na známé charakterizaci permutací konjugovaných v plně symetrické grupě. Jsem přesvědčený, že s drobným úsilím by bylo možné výsledky zobecnit minimálně na určení velikosti tříd konjugace ve věncovém součinu symetrické grupy s obecnou grupou permutací, možná i ve věncovém součinu dvou obecných konečných permutačních grup.

Občas lze mít výhrady k pečlivosti formulací. Asi nejzávažnější prohřešek je skutečnost, že autor sice zavede formální definici Sudoku čtverce stupně $m \times n$ jako rozklad množiny buněk čtverce na mn transversál (Definice 2.4), v následných definicích působení různých grup na množině Sudoku čtverců ale obrazem daného Sudoku čtverce není rozklad na transversály, ale pouhá množina buněk Sudoku čtverce. To je možné snadno napravit přidáním jedné dvojice složených závorek do příslušné formulky, nicméně ani v důkazu Věty 2.10 se z Definice 2.4 nevychází a argument není korektní. Pokud nějaká permutace zachovává rozklad, neplyne z toho, že zachovává každou třídu rozkladu. Samotná Věta 2.10 ale platí a její důkaz lze snadno upravit tak, aby byl v souladu s Definicí 2.4.

Práce se zdroji. Zdroje jsou citovány dostatečně.

Formální úprava. Práce je zpracována na dobré grafické úrovni. Bohužel obsahuje dost překlepů, některé z nich komplikují čtení výrazným způsobem. Například v Definici 1.31 je zjevně smíchána role m a n , což se pak projevuje několikrát v dalším textu. V Pozorování 1.34 má být i z množiny $\{1, \dots, l\}$, nikoliv $\{1, \dots, n\}$, v Poznámce 1.35 se v závěru vůbec neobjeví r_2 , atd. To jsou všechno příklady ze strany 9. Překlepy nebrání pochopení matematického textu, pouze ho činí obtížnějším, stejně jako občas nepřiliš vhodně zvolené značení se spoustou nadbytečných symbolů a naprostá absence osvětlujících obrázků.

Další připomínky a otázky

1. Lze doufat i v nahrazení strojového výpočtu počtu pevných bodů pro jednotlivé reprezentanty tříd konjugace věncového součinu dvou symetrických grup nějakou přímo dokázanou formulkou?
2. Jsou autorovi známe nějaké algoritmy pro generování (neúplných, ale korektně zadaných) Sudoku čtverců?
3. Jakým způsobem se vybírají prázdná místa v neúplných Sudoku čtvercích a lze nějak dopředu hodnotit nebo odhadnout obtížnost řešení Sudoku čtverců?

Závěr

Jako přednost práce hodnotím naprostou samostatnost zpracování, jako jistou slabinu formální úroveň jejího matematického zpracování. V každém případě doporučuji, aby práce byla přijata jako práce bakalářská.

Jiří Tůma

katedra algebry

20.8.2020