Errata

Věta 42. *Pro posloupnost* $X_1, X_2, \ldots$ *označme*

$$A_c := \{x; \exists n \in \mathbb{N}_0, x = cn\}, \ c \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$b := \sup\{c \in \mathbb{N}; P(X_1 \in A_c = 1)\} \ \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

$$T(k) := S_{N(bk)} - bk, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Za předpokladu 5 platí pro i přirozené

$$\lim_{k\to\infty} P(T(k) \leq bi) = \sum_{m=0}^{i} \frac{bP(X_1 \geq mb)}{E[X_1]}. \tag{4}$$

Důkaz. Dokažme to pro b = 1. $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ sj., my však bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že tato rovnost platí jistě, jinak bychom se omezili na množinu, kde to platí jistě. Uvažujeme pevné $y > 0$. Posloupnost $\{T(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ je Markovský řetězec. Potom pro $k \in \mathbb{N}$

$$1)\ (T(k) > 0) \implies (T(k+1) = T(k) - 1) \tag{5}$$

$$2)\ (T(k) = 0) \implies (T(k+1) = T(k) + X_{N(k)+1} - 1). \tag{6}$$

Ukážeme, že je homogenní. Pro n,$k \in \mathbb{N}$

$$P(T(k+1) = n \mid T(k) = 0) = P(X_{N(k)+1} - 1 = n \mid X_{N(k)+1} > 0) \tag{7}$$

$$= P(X_1 - 1 = n \mid X_1 > 0) \tag{8}$$

z věty o stacionaritě vzhledem k Markovskému času a

$$P(T(k+1) = n \mid T(k) = m) = 1_[n = m - 1].$$

Tyto pravděpodobnosti nezáleží na k, tedy daný proces je homogenní.

Pro $n \in \mathbb{N}$ si označme

$$p_n := P(X_1 = n \mid X_1 > 0). \tag{9}$$

Pomocí (5) a (6) sestrojíme matici přechodu

$$P := \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Chceme ukázat, že stacionární řešení existuje, nalezneme jej pomocí pomocí soustavy rovnic

$$\pi^{\mathrm{T}} = \pi^{\mathrm{T}} P,$$

což vede na řešení

$$\pi_n = \pi_1 p_n + \pi_{n+1}.$$

Postupně budeme dosazovat za π_{n+1} a dostaneme vyjádření pro π_n

$$\pi_n = \pi_1 p_n + \pi_{n+1} = \pi_1 p_n + (\pi_1 p_{n+1} + \pi_{n+2}) \tag{10}$$
$$= \pi_1 \sum_{i=n}^{\infty} p_i \tag{11}$$
$$= \pi_1 P(X_1 \geq n \mid X_1 > 0). \tag{12}$$

Nalezneme vyjádření π_1.

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \pi_1 \sum_{i=1}^{\infty} P(X_1 \geq i \mid X_1 > 0) = \pi_1 E[X_1 \mid X_1 > 0].$$

A proto $\pi_1 = \frac{1}{E[X_1|X_1>0]}$.

Stanionární řešení tedy existuje. Zřejme z matice přechodu vidíme, že je $\{T(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ nerozložitelný. Nyní chceme ukázat aperiodicitu. Pro spor předpokládejme, že stav $j \in \mathbb{N}$ je periodický s periodou d. Z tvaru matice přechodu (hlavně jednotkového "blocku") vidíme, že by to pak znamenalo, že $p_n = P(X_1 = n \mid X_1 > 0) = 0$ a tedy i $P(X_1 = n) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,d,2d,3d,...\}$. To znamená, že $P(X_1 \in A_d) = 1$ a to je spor s předpokladem, že $b = 1$, tedy proces je aperiodický.

a proto platí limita

$$\lim_{k\to\infty} P(T(k) = j) = \pi_j, j \in \mathbb{N}.$$

Finálně pro $i \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{k\to\infty} P(T(k) \leq i) = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{i} P(T(k) = m) \tag{13}$$
$$= \sum_{m=0}^{i} \pi_m \tag{14}$$
$$= \sum_{m=0}^{i} \frac{P(X_1 \geq m \mid X_1 > 0)}{E[X_1 \mid X_1 > 0]} \tag{15}$$
$$= \sum_{m=0}^{i} \frac{P(X_1 \geq m)}{E[X_1]} \tag{16}$$

Nyní pokud $b \neq 1$, potom označme

$$\tilde{X}_k = \frac{X_k}{b}, k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$
$$\tilde{S}_k = \frac{S_k}{b}, k \in \mathbb{N}. \tag{18}$$
$$\tilde{T}(k) = \frac{T(k)}{b} = \tilde{S}_{N(k)} - k, k \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Pro náhodné veličiny $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$,.. platí již dokázané (16), tedy

$$\lim_{k\to\infty} P(\tilde{T}(k) \leq i) = \sum_{m=0}^{i} \frac{P(\tilde{X}_1 \geq m)}{E[\tilde{X}_1]} = \sum_{m=0}^{i} \frac{bP(X_1 \geq mb)}{E[X_1]} \tag{20}$$

Čímž je věta dokázána.

□

Věta 43. *Nechť pro aritmetické náhodné veličiny X_1,X_2,... platí předpoklad 6. Potom pro $n \in \mathbb{N}$ a $\delta \in [bn, b(n+1))$*

$$\lim_{k\to\infty} P(S_{N(kb)} - kb \leq \delta) = \sum_{m=0}^{i} \frac{bP(\tilde{X}_1 \geq mb)}{E[\tilde{X}_1]}. \tag{21}$$

Důkaz. Zřejmě

$$\inf\{n \in \mathbb{N}; S_n > y\} = \tau_{k_0} \iff \inf\{n \in \mathbb{N}; \tilde{S}_n > y\} = k_0$$

a proto

$$\tilde{S}_{\tilde{N}(y)} = S_{N(y)} \;\; \text{sj.}$$

Z Blackwell (1953, str. 316) $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$,... jsou nezávislé, stejně rozdělené, kladné náhodné veličiny a zároveň jsou aritmetické s parametrem b.

$$A_c := \{x; \exists z \in \mathbb{Z}, x = cz\}, \;\; c \in \mathbb{N}, \tag{22}$$
$$b := \sup\{c \in \mathbb{N}; P(X_1 \in A_c = 1)\}. \tag{23}$$

Mějme $n > 0$. Z věty 42 pro $\delta \in [bn, b(n+1))$

$$\lim_{k\to\infty} P(S_{N(kb)} - kb \leq \delta) = \lim_{k\to\infty} P(S_{N(kb)} - kb \leq bn) \tag{24}$$
$$= \lim_{k\to\infty} P(\tilde{S}_{\tilde{N}(kb)} - kb \leq bn) \tag{25}$$
$$= \sum_{m=0}^{i} \frac{bP(\tilde{X}_1 \geq mb)}{E[\tilde{X}_1]} \tag{26}$$

Z čehož plyne tvrzení.

□

Pokud budeme chtít přejít z limity posloupnosti na limitu funkce $\lim_{y\to\infty} S_{N(y)} - y$, tak znáhodníme požadované bohatství náhodnou veličinou Y.

Věta 44. *Nechť pro aritmetické náhodné veličiny X_1,X_2,... s parametrem b,*

$$A_c := \{x; \exists z \in \mathbb{Z}, x = cz\}, \;\; c \in \mathbb{N}, \tag{27}$$
$$b := \sup\{c \in \mathbb{N}; P(X_1 \in A_c = 1)\}, \tag{28}$$

platí předpoklad 6 a $Y \sim R(0,b)$ je náhodná veličina nezávislá s posloupností X_1,X_2,... Potom

$$\lim_{y\to\infty} S_{N(y+Y)} - (y+Y) \underset{d}{=} Z - \hat{Y}, \tag{29}$$

$\hat{Y} \sim R(0,b)$, Z je náhodná veličina s rozdělením

$$P(Z = i) = \frac{bP(X_1 \geq ib)}{E[X_1]} \tag{30}$$

a $\hat{Y}$ a Z jsou nezávislé.

Důkaz. Důkaz je proveden pro $b = 1$, pro $b \neq 1$ je důkaz analogický. Dále pro $x \geq 0$ platí

$$N(x) = N(x - \lfloor x \rfloor),$$

kde $\lfloor x \rfloor$ je spodní celá část. Tato rovnost platí, jelikož X_1 je aritmetická a tedy nabývá jen celočíselných hodnot. Dále

$$S_{N(y+x)} - (y + x) = S_{N(\lfloor x+y \rfloor)} - \lfloor x + y \rfloor - (x + y - \lfloor x + y \rfloor).$$

Z věty 43 dostaneme konvergenci

$$S_{N(\lfloor x+y \rfloor)} - \lfloor x + y \rfloor \xrightarrow[y\to\infty]{d} Z,$$

jelikož $\lfloor x + y \rfloor \in \mathbb{N}$. Z je náhodná veličina s distribucí z (21). Podobným trikem jako ve větě 14 dostaneme

$$\lim_{y\to\infty} P(S_{N(\lfloor Y+y \rfloor)} - \lfloor Y + y \rfloor \leq \xi \mid Y) \overset{sj.}{=} \lim_{y\to\infty} P(S_{N(\lfloor x+y \rfloor)} - \lfloor x + y \rfloor \leq \xi \mid Y = x) \tag{31}$$

$$= \hat{F}(\xi), \xi \in \mathbb{R}, \tag{32}$$

$\hat{F}(\xi)$ je distribuční funkce rozdělení v (30). Použijeme Lebesgueovu větu o konvergentní majorantě

$$\lim_{y\to\infty} P(S_{N(\lfloor Y+y \rfloor)} - \lfloor Y + y \rfloor \leq \xi) = \tag{33}$$

$$\lim_{y\to\infty} E[P(S_{N(\lfloor Y+y \rfloor)} - \lfloor Y + y \rfloor \leq \xi \mid Y)] = \hat{F}(\xi). \tag{34}$$

A tedy

$$S_{N(\lfloor Y+y \rfloor)} - \lfloor Y + y \rfloor \xrightarrow[y\to\infty]{d} Z.$$

Nyní se budeme zabývat zbytkem $(x+y-\lfloor x + y \rfloor)$. Opět za x dosadíme náhodnou veličinu Y.

$$P((Y + y - \lfloor Y + y \rfloor \leq \xi) = P(Y \in [1 - (y - \lfloor y \rfloor), 1 - (y - \lfloor y \rfloor) + \xi]) \tag{35}$$

$$= \xi, \xi \in [0,y - \lfloor y \rfloor], \ y \geq 0. \tag{36}$$

$$P((Y + y - \lfloor Y + y \rfloor \leq \xi) = P(Y \in [0, -(y - \lfloor y \rfloor) + \xi] \cup [1 - (y - \lfloor y \rfloor),1]) \tag{37}$$

$$= \xi, \xi \in (y - \lfloor y \rfloor ,1], \ y \geq 0. \tag{38}$$

Toto rozdělení opět odpovídá rovnoměrnému rozdělení na [0,1]. A tedy pokud si vezmeme náhodnou veličinu Z takovou, že má rozdělení jako v (30) a je nezávislá s Y, potom

$$S_{N(Y+y)} - (Y + y) = S_{N(Y+y)} - \lfloor Y + y \rfloor - (Y + y - \lfloor Y + y \rfloor) \tag{39}$$

$$\xrightarrow[y\to\infty]{d} Z - \hat{Y}, \tag{40}$$

jelikož $\hat{Y}$ je funkcí Y, tedy i $\hat{Y}$ je nezávislá s Z. $\hat{Y} \sim R(0,1)$, z čehož plyne tvrzení. □

Značení. Distribuční funkci náhodné veličiny z (39) si označme jako $H(\xi)$.

Jelikož nyní máme výsledek pro funkční limitu

$$\lim_{y\to\infty} P(S_{N(y+Y)} - (y+Y) \le \xi),\ \xi \in \mathbb{R}, \tag{41}$$

můžeme dokázat obdobu verze věty 14.

Věta 14 (Aritmetická verze)**.** *Nechť Z je libovolná náhodná veličina nezáviská s $\hat{Y}$ z (39) a posloupností W_1^*,W_2^*,... $\hat{Y}$ je nezávislá s posloupností W_1^*,W_2^*,.. . Dále necht W_1^* je aritmetická s parametrem b.*

$$A_c := \{x; \exists z \in \mathbb{Z}, x = cz\},\ c \in \mathbb{N}, \tag{42}$$

$$b := \sup\{c \in \mathbb{N}; P(X_1 \in A_c = 1)\}. \tag{43}$$

Potom

$$\lim_{y\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{N^*(y+\hat{Y}+Z)} W_k^* - (y+\hat{Y}+Z) < \xi\right) = H(\xi), \xi \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Distribuční funkci H jsme zavedli pod větou 44. Důkaz je analogický důkazu věty 14.

□

Díky tomu můžeme využít i důsledek 1 a větu 15, kde by platilo

$$\lim_{y\to\infty} E[\sum_{k=1}^{N^*(y+Y)} W_k^*] - E[\sum_{k=1}^{N(y+Y)} W_k] = 0$$

za předpokladu, že $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(W_k - W_k^*)$ existuje konečná skoro jistě.

Věta 17. *Pokud Λ je strategie, pro kterou jsou náhodné veličiny $W_k, k \in \mathbb{N}$ integrovatelné a b^* je vnitřním bodem množiny S relativně vzhledem k omezení na nadrovinu $\{b \in R^m, b^T 1_m = 1\}$, potom pro strategii Λ platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n^*}{C_n} = \infty \underset{sj.}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}(w^* - E(W_n \mid \mathscr{F}_{n-1})) = \infty \tag{44}$$

Důkaz. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n^*}{C_n} = \infty \underset{sj.}{\Longleftrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} W_k^* - W_k = \infty$$

Zavedeme si novou strategii. Pro $M \in R$

$$\hat{\beta}_n(M) := \beta_n 1_{[E(W_n|\mathscr{F}_{n-1})\ge M]} + b^* 1_{[E(W_n|\mathscr{F}_{n-1})<M]}$$

a k ní odpovídající náhodné veličiny

$$\hat{W}_k(M) := \log(\mathbb{X}_k^{\mathsf{T}} \hat{\beta}_n(M)).$$

Posloupnost

$$\hat{Y}_n(M) = \sum_{k=1}^{n}(\hat{W}_k(M) - W_k^* - (E[\hat{W}_k(M) \mid \mathscr{F}_{k-1}] - w^*)), n \in \mathbb{N}$$

je martingal. Dokážeme, že platí

$$(\sup_n [\hat{Y}_n(M) - \hat{Y}_{n-1}(M)])^+ \in L_1. \tag{45}$$

Rozepišme si

$$\hat{Y}_n(M) - \hat{Y}_{n-1}(M) = \hat{W}_n(M) - W_n^* - (E[\hat{W}_n(M) \mid \mathscr{F}_{n-1}] - w^*) \tag{46}$$

$\hat{W}_n(M)$ je omezeno shora konstantou K z (2.6). $-W_n^*$ je omezeno shora konstantou z věty 6. Dále

$$w^* - E[\hat{W}_n(M) \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq \max\{0, w^* - M\}.$$

Proto platí (45) a z věty 26 v appendixu existuje reálná $\hat{Y}_\infty(M)$,

$$\lim_{n\to\infty} \hat{Y}_n(M) = \hat{Y}_\infty(M) \tag{47}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{W}_k(M) - W_k^* - (E[\hat{W}_k(M) \mid \mathscr{F}_{k-1}] - w^*)) \in \mathbb{R} \text{ sj. .} \tag{48}$$

a tedy pokud

$$\sum_{k=1}^{\infty} W_k^* - \hat{W}_k(M) = \infty \underset{sj.}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} w^* - E[\hat{W}_k(M) \mid \mathscr{F}_{k-1}] = \infty. \tag{49}$$

Tvrzení tedy platí pro strategii $\hat{\beta}_n(M)$. Obecně, zvolme $M \in \mathbb{R},\ w^* - M > 0$ a označme

$$A := \{n \in \mathbb{N}, \beta_n \neq \hat{\beta}_n(M)\}.$$

Na množině $[\mid A \mid < \infty]$ až na množinu míry 0 platí

$$\sum_{k\in A} (W_k^* - W_k) \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k\in A} (W_k^* - \hat{W}_k(M)) \in \mathbb{R}$$

a z definice A

$$\sum_{k\notin A} (W_k^* - W_k) = \sum_{k\notin A} (W_k^* - \hat{W}_k(M)).$$

Proto

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} (W_k^* - W_k) \implies \sum_{k=1}^{\infty} (W_k^* - \hat{W}_k(M)) = \infty \tag{50}$$

$$\underset{sj.}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} (w^* - E[\hat{W}_k(M) \mid \mathscr{F}_{k-1}]) = \infty \tag{51}$$

Jelikož A má konečně prvků, proto

$$\sum_{k\in A} (w^* - E[\hat{W}_k(M) \mid \mathscr{F}_{k-1}]) \in \mathbb{R}. \tag{52}$$

Pokračujeme využitím (52)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(w^* - E[\hat{W}_k(M) \mid \mathscr{F}_{k-1}]) = \infty \underset{sj.}{\Longrightarrow} \sum_{k \notin A}(w^* - E[\hat{W}_k(M) \mid \mathscr{F}_{k-1}]) = \infty, \tag{53}$$

ale

$$\sum_{k \notin A}(w^* - E[\hat{W}_k(M) \mid \mathscr{F}_{k-1}]) = \sum_{k \notin A}(w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]) \tag{54}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}(w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]). \tag{55}$$

Celkově z (50)-(55) máme

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty}(W_k^* - W_k) \underset{sj.}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty}(w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]) = \infty.$$

Nyní na $[\mid A \mid = \infty]$, až na množinu míry 0 a pro $M \in \mathbb{R},\ w^* - M > 0$ platí,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]) \geq \sum_{k \in A}(w^* - M) = \infty,$$

jelikož $w^* - M$ je konstanta a $w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}] \geq 0$ sj., $k \in \mathbb{N}$.

□

Věta 18 (Aritmetická verze). *Nechť Λ je strategie . Potom pokud $W_k, k \in \mathbb{N}$ jsou integrovatlené, aritmetické s parametrem b ,*

$$A_c := \{x; \exists z \in \mathbb{Z}, x = cz\},\ \ c \in \mathbb{N}, \tag{56}$$

$$b := \sup\{c \in \mathbb{N}; P(W_1 \in A_c = 1)\} \tag{57}$$

a b^* je vnitřním bodem množiny S relativně vzhledem k omezení na nadrovinu $\{b \in R^m, b^T 1_m = 1\}$, potom

$$\lim_{y\to\infty}(E[N(y+\hat{Y})] - E[N^*(y+\hat{Y})]) = \frac{1}{w^*}\sum_{k=1}^{\infty}(w^* - E[W_k]), \tag{58}$$

kde $\hat{Y}$ je z (39) .

Důkaz. Důkaz je proveden pro $b = 1$, pro $b \neq 1$ je důkaz analogický. Díky předpokladu integrovatlenosti veličin $W_k, k \in \mathbb{N}$, dostaneme z vět 12 a 13

$$E[N(y+z)] = \frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N(y+z)}(w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + \frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N(y+z)} W_k], y,z \geq 0.$$

Jelikož $\hat{Y}$ z (39) je nezávislá jednak s posloupností W_1,W_2,... tak s posloupnosti W_1^*, W_2^* proto

$$E[N(y+\hat{Y})] = \frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N(y+\hat{Y})}(w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + \frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N(y+\hat{Y})} W_k], y \geq 0.$$

Tedy

$$E[N(y+\hat{Y})] - E[N^*(y+\hat{Y})] =$$

$$= \frac{E[\sum_{k=1}^{N(y+\hat{Y})} w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]]}{w^*} - \frac{E[\sum_{k=1}^{N^*(y+\hat{Y})} w^* - E[W_k^* \mid \mathscr{F}_{k-1}]}{w^*} +$$

$$+\frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N(y+\hat{Y})} W_k - \sum_{k=1}^{N^*(y+\hat{Y})} W_k^*],$$

ale

$$\frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N^*(y+\hat{Y})} w^* - E[W_k^*] \mid \mathscr{F}_{k-1}] = 0$$

z nezávislosti W_k^* na $\mathscr{F}_{k-1}$.

1) Pokud $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} W_k - W_k^*$ existuje konečná skoro jistě, potom

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N^*(y+\hat{Y})} W_k^* - y - \hat{Y} - \sum_{k=1}^{N(y+\hat{Y})} W_k + y + \hat{Y}] = 0$$

z věty 15 .

Po úpravě

$$\lim_{y\to\infty} E[N(y+\hat{Y})] - E[N^*(y+\hat{Y})] = \lim_{y\to\infty}\frac{E[\sum_{k=1}^{N(y+\hat{Y})} w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]]}{w^*}. \quad (59)$$

Pokračujeme použitím Léviho věty k prohození limity a střední hodnoty, kde monotonie je zajištěna z poznámky 6.

$$\lim_{y\to\infty} E[N(y+\hat{Y})] - E[N^*(y+\hat{Y})] = \frac{E[\sum_{k=1}^{\infty} w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]]}{w^*}.$$

Znovu použijeme Léviho větu a tím dostaneme tvrzení.

$$\lim_{y\to\infty} E[N(y+\hat{Y})] - E[N^*(y+\hat{Y})] = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} w^* - E[W_k]}{w^*}.$$

2) Část $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} W_k^* - W_k$ je nekonečná na nějaké množině A, $P(A) > 0$ se dokáže velmi podobně jako v původní práci.

□

Seznam použité literatury

Bhattacharya, R. N. a Waymire, E. C. (2007). *A basic course in probability theory*. ISBN 978-0-387-71938-2.

Blackwell, D. (1953). Extension of a renewal theorem. *Pacific J. Math*, **3** (1991), 315–320.

Breiman, L. (1961). Optimal gambling systems for favorable games. In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics*, pages 65–78, Berkeley, Calif., 1961. University of California Press. URL https://projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200512159.

Feller, W. An introduction to probability theory and its applications, volume 2, 2nd edition. *1991*.

Lachout, P. Diskrétní martingaly. Skripta k výuce předmětu Teorie Pravděpodobnosti 2 na MMF UK.

Lachout, P. Poznámky a doplňky k přednášce náhodné procesy i. Skripta k výuce předmětu Náhodné procesy I na MMF UK.

Pawlas, Z. Teorie pravděpodobnosti 2 (nmsa405). Skripta k výuce předmětu Teorie pravděpodobnosti 2 na MMF UK.

Rataj, J. Teorie míry a integrálu. Skripta k výuce předmětu Teorie míry a integrálu na MMF UK.

Siegrist, K. Random services. https://www.randomservices.org/random/renewal/index.html. Accessed: July 17, 2019.

Sigman, K. Martingales i: Discrete time. Skripta k výuce předmětu IEOR 4701 na Columbia University in the City of New York.