Posudek vedoucího k bakalářské práci S.Krále s názvem

Logaritmicky optimální investování

Student se ve své práci věnuje porovnání log-optimální strategie a jakékoli obecné strategie, která zachovává kladné bohatství investora po celé investiční období. Porovnání se zaměřuje na střední dobu potřebnou k dosažení určitého investičního cíle, který se v limitě blíží k ∞.

Student se své práci snažil věnovat samostatně a v určitém směru i iniciativně. Oproti předchozí verzi je práce rozšířena o možnost investovat do aktiv které nabývají hodnot z nějakého kompaktního podintervalu $(0, \infty)$, přičemž se apriori nevylučuje možnost páky či krátké pozice.

Podle mého názoru práce splňuje předpoklady kladené na bakalářskou práci, i když je třeba přiznat, že by ji slušely nějaké dodatečné finalizační úpravy. Některé z nich zde zmíním s tím, že na vybrané z nich by student měl reagovat ve své obhajobě.

Začal bych poznámkou, že je práce (oproti předchozí verzi) více rozepsaná, obsahuje část věnovanou aritmetickému případu a je rozšířena i na obecnější případy než, kdy aktiva nabývají hodnot pouze z nějaké konečné množiny. S tím souvisejí i některé chyby. Jednou (asi nejzásadnější) chybou, související s rozšířením, je předpoklad, že bod optima b^* účelové funkce w je vnitřním bodem množiny S. Zde je třeba tento předpoklad pozměnit na: vnitřním bodem množiny S relativně vzhledem k omezení na nadrovinu $\{b \in \mathbb{R}^m; b^\intercal 1_m = 1\}$. Bez tohoto dodatku by jinak zmíněný předpoklad smysl příliš nedával a práce by předchozí verzi nezobecňovala (neboť by ten předpoklad byl prázdný).

V souvislosti s rozšířením teorie obnovy i o aritmetický případ není úplně v pořádku znění a důkaz věty 43, kterou by (dle mého názoru) měl student u obhajoby dát do pořádku. Jde o to, že v aritmetickém případě studované limitní rozdělení nevyjde spojité ale naopak diskrétní. Dále by (podle mě) dělení možností (a,b) mělo vycházet na základě toho, zda je veličina $\tilde{X}_1$ aritmetická, pokud se v důkazu chceme vyhnout potřebě dodatečného dokazování nějakých dalších (ne nezbytně nutných) tvrzení. Podobně se mi zdá nezvládnutý i konec důkazu věty 17, který by student v souvislosti s obhajobou měl dát také do pořádku.

Další podstatnější výtky se pokusím zde opravit sám či opravu jen naznačit.

(1) Začnu s první opravou týkající se důkazu věty 15. V této souvislosti je dobré mimochodem zmínit, že, aby platila rovnost v (2.74), bylo by třeba sumu $\sum_{k=a}^{b}$ interpretovat jako sumu přes takové hodnoty k pro které platí, že $a \leq k \leq b$ tak, aby v případě $a > b$ se výsledná hodnota interpretovala jako nula (jakožto prázdná suma). Část důkazu, která potřebuje opravit, se týká vzorce (2.80). Tam ta druhá nerovnost neplatí, neboť dle definice hodnoty $N^{n_0}(y - 2\epsilon)$ platí

$$\sum_{k=1}^{N^{n_0}(y-2\epsilon)} W_k^{n_0} > y - 2\epsilon.$$

Proto je třeba zde postupovat jinak. Jde o částečnou analogii předchozího případu, ke kterému je dobré dodat, že vychází z definice hodnoty $N^{n_0}(y + 2\epsilon)$. Zde je oproti tomu třeba vycházet z definice hodnoty $N(y)$ a to následovně

$$[N(y) > N^{n_0}(y - 2\epsilon)] \backslash B \subseteq [\sum_{k=1}^{N(y)} W_k \geq y \geq \sum_{k=1}^{N^{n_0}(y-2\epsilon)} W_k].$$

Pak dostaneme, že množina $\Omega \backslash B$ je rovna množině (té podmnožině nalevo)

$$[N(y) \geq N^{n_0}(y - 2\epsilon)] \backslash B \subseteq [\sum_{k=1}^{N(y)} W_k \geq \sum_{k=1}^{N^{n_0}(y-2\epsilon)} W_k \geq \sum_{k=1}^{N^{n_0}(y-2\epsilon)} W_k^{n_0} - 2\epsilon],$$

což nám dává nerovnost v (2.81) ovšem to vše za dodatečného předpokladu, že $y - 2\epsilon > Kn_0$. Zde se hodí poznamenat, že tento důkaz student sestavoval ze své iniciativy (a intuice) a že k některým zkonkrétněním jsem studenta přinutil. Jmenovitě šlo o specifikaci toho, jak velké y musíme mít, aby uvažovaná tvrzení platila a také jsem jej přiměl k tomu, aby formálně rozepsal i tu kritickou pasáž místo konstatování, že jde (jen) o analogii toho předchozího případu.

Dále se zde také hodí poznamenat, že dokončování práce velmi tvrdě narazilo na poslední možný termín odevzdání, což se projevilo i tím, že ne zcela všechna potenciálně kritická místa v práci byla zcela v poklidu překontrolována. Tato okolnost je i důvodem, proč se posuzování této práce z hlediska vedoucího velmi blíží jejímu oponování, což se následně projevuje i ve formě posudku.

(2) Bohužel k některým opravám se mně studenta přimět nepodařilo a to i přes velkou časovou rezervu, která byla k dispozici. Konkrétně jde o opravu závěrečné části důkazu věty 36 a to od vzorce (A.60), kde student definuje funkci u_y ovšem pouze na intervalu $[y, \infty)$, ale k tomu, aby bylo možné říci, že je tato funkce tím jednoznačným řešením rovnice obnovy, musela by být definována na celém dotčeném intervalu. Podle mě by zmíněná funkce měla být dodefinována hodnotou nula pro případy, kdy $t < y$. Při této definici pak dostaneme následnou rovnost ve tvaru

$$u_y(t) = \int_0^t u_y(t-s)\,\mathrm{d}F(s) + F^c(t)1_{[t\geq y]},$$

což odpovídá rovnici obnovy ve tvaru $u_y = y_y * F + F^c 1_{[y,\infty)}$, která má jednoznačné řešení ve tvaru

$$u_y = F^c 1_{[y,\infty)} + (F^c 1_{[y,\infty)}) * M.$$

V řeči integrálů tak dostaneme, že

$$\begin{aligned} P(T_t \geq y)1_{[t\geq y]} = u_y(t) &= F^c(t)1_{[t\geq y]} + \int_0^t F^c(t-s)1_{[t-s\geq y]}\,\mathrm{d}M(s) \\ &= F^c(t)1_{[t\geq y]} + \int_0^{t-y} F^c(t-s)\,\mathrm{d}M(s). \end{aligned}$$

(3) Poznámka 6 by měla předpokládat integrovatelnost veličiny W_k (a nebo by měla být formulována v řeči střední hodnoty vůči podmíněnému rozdělení). Obecně být veličina W_k integrovatelná nemusí a v tom případě příslušná podmíněná střední hodnota dobře definována není.

Její použití v důkazu věty 16 je pak v pořádku, pokud dodatečně ověříme podmínku integrovatelnosti (zespoda), což lze udělat snadno a to následovně

$$W_k = \ln\big((1-\epsilon)\,\mathbb{X}_k^\intercal b^* + \epsilon \mathbb{X}_k^\intercal \beta_k\big) \overset{\text{sj}}{\geq} \ln((1-\epsilon)\,\mathbb{X}_k^\intercal b^*) = \ln(1-\epsilon) + W_k^* \in \mathbb{L}_1.$$

(4) Postavení hodnoty π_0 ve vzorci (A.98) se mi zdá poněkud nešťastné, místo ve jmenovateli by se měla tato hodnota nacházet v čitateli. Podobně se mi zdá ne zcela zvládnuté dokončení konvergence v distribuci veličin T_k a to již od posledního řádku na str. 36, nicméně si myslím, že není zcela nutné, aby student v rámci obhajoby ukázal, že tuto (snadno opravitelnou) část opravit skutečně dokáže. Mám za to, že ve větě 42 se má uvažovat předpoklad 5 (místo předpokladu 4).

(5) V důkazu věty 30 podle mě není správné volit hodnotu W_n^*, která je v odkazovaném kontextu definována jako $\ln(\mathbb{X}_n^\intercal b^*)$ ale místo toho tou volitelnou hodnotou je $\mathbb{X}_n$, což bych doporučil volit jako $\mathbb{X}_n := \exp\{\hat{X}_n\} \in [1, e^L]$ s tím, že uvažujeme $m = 1$.

(6) V poznámce 9 není správné se odkazovat na kladnost hodnot X_k, protože není vyloučeno, že by mohly mít i nulové hodnoty.

(7) Ve vzorci (2.66) je špatně zapsána pravá strana. Vzorce (2.68,2.69) pak nejsou zapsány nejšťastněji. V důkazu věty 15 při volbě n_0 mělo být uvažováno oboustranné omezení, které je později používáno, místo pouze jednostranného při relaci mezi V_{n_0} a ϵ.

(8) Ke konci důkazu věty 12 je chybně použito Fatouovo lemma, které by nám mělo dát opačnou nerovnost než tu, kterou potřebujeme. Místo toho si myslím, že se dá jednoduše použít Léviho věta o monotónní konvergenci.

(9) Ve vzorci (2.30) je chyba v indexu posloupnosti Z na levé straně. Ve (2.13,2.14) má být místo $\liminf$ napsáno $\limsup$. Znění lemmatu 19 není správné. Na pravé straně příslušné nerovnosti nemá být bod, kde se nabývá minima, ale odpovídající funkční hodnota.

(10) Další (vesměs drobná) nedopatření ponechávám bez komentáře včetně těch, které se týkají formulace používaných vět v části 3.1.

(11) Trochu nesystematicky a dodatečně poukazuji na asi jednu z nejzávažnějších chyb (i z hlediska vedení práce), kterou lze však velmi snadno odstranit, což snižuje její jinak velkou závažnost. Týká se to důkazu věty 43. Ten důkaz není správně. Já zde naznačím, jak opravit tu část odpovídající nearitmetickému případu a na studentu nechávám tu aritmetickou část. Nás zajímá asymptotické rozdělení veličiny (pro $y \to \infty$)

$$S_{N(y)} - y \stackrel{\text{sj}}{=} \tilde{S}_{\tilde{N}(y)} - y = \tilde{S}_{1+\tilde{N}_y} - y = \tilde{R}_y,$$

kde se opíráme o poznámku 17, která by ovšem měla říkat, že $\tilde{N}(y) = 1 + \tilde{N}_y$, a kde $\tilde{R}$ je funkce R odvíjející se od náhodné procházky $(\tilde{S}_n)_{n=1}^{\infty}$. Zkombinujeme-li poznámku 9 s výsledkem věty 41, dostaneme ihned limitní rozdělení $\tilde{R}_y$ pro $y \to \infty$.

(12) Další dodatečnou poznámkou je, že ten aritmetický případ obsahuje chybu spočívající v nerozlišování mezi limitou spojitého parametru jdoucího k nekonečnu a případu, kdy takový parametr je například celočíselný. Je možné, že tuto chybu nebude možné zcela odstranit (bez zeslabení výsledků pro aritmetický případ). V takovém případě studentu doporučuji se zmínit, co se dá pro takový příklad říci na základě toho, co již dokázané je (s případnou drobnou opravou). Zde musím přiznat, že je zmíněná chyba z velké části i mou chybou jako vedoucího a samozřejmě jsem připraven asistovat při hledání odpovědi na tuto otázku.

- Bylo téma pro bakalářskou práci přiměřené a bylo pojato přiměřeným způsobem? - V podstatě ANO.
- Obsahuje práce vlastní příspěvek autora? ANO Je v práci dostatečně specifikován? - Spíše NE.
  V čem tento příspěvek spočívá? - Hlavně v zobecnění předpokladu, kdy se připouští vektor výnosů, kde složky nabývají hodnot v rámci kompaktní podmnožiny $(0, \infty)$.
- Obsahuje práce rigorózně a korektně zformulovaný matematický text? ANO Jaká je matematická úroveň práce? Obecně vyšší, občasná nedopatření.
- Je práce po formální stránce v pořádku? ANO
- Jsou zdroje správně citovány? ANO
- Lze práci uznat jako práci bakalářskou? ANO

V Praze dne 9.9.2020 Mgr. Petr Dostál, PhD.