MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Stanislav Král

Logaritmicky optimální investování

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Rád bych poděkoval Mgr. Petru Dostálovi, Ph.D., za neskutečnou trpělivost se mnou a srozumitelné vysvětlování mých nejasností. Dále bych rád poděkoval Adamovi Sýkorovi za celoroční podporu při psaní této práce.

Název práce: Logaritmicky optimální investování

Autor: Stanislav Král

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Nechť máme kapitál, který budeme redistribuovat do nějakých investičních příležitostí. Finanční ohodnocení těchto investic bude tvořit posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných vektorů nabývající kladných hodnot v nějakém uzavřeném intervalu. Při každé investici budeme znát a brát v potaz celou historii těchto ohodnocení. Ukazuje se, že pokud naší strategií bude vždy maximalizovat střední hodnotu logaritmu zisku z těchto investic, pak je tato strategie v určitém smyslu asymptoticky optimální.

Klíčová slova: střední hodnota logaritmu zisku, vsázení, asymptotická optimalita

Title: Log-optimal investment

Author: Stanislav Král

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Suppose we have capital, which we will redistribute into investment opportunities. The financial valuation of these investments will form a sequence of independent, identically distributed random vectors taking values in some closed, positive interval. We will have full knowledge of the entire history of these valuations before each investment. It turns out that if our strategy is to always maximize the mean value of the logarithm return on these investments, then this strategy is in a sense asymptotically optimal.

Keywords: expected log return, gambling, asymptotic optimality

Obsah

Úvod

Teorie téhle práce se dá aplikovat na situaci, kdy investor chce maximalizovat své bohatství v dlouhodobém měřítku na trhu s akciemi. Na začátku každého dne (nebo jiných diskrétních časových úseků) pak přerozdělí svůj majetek pomocí váhových vektorů $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ po různých finančních aktivech. Jeho výhoda spočívá v tom, že zná kompletní historii pohybu cen na trhu až do doby poslední investice, na základě nichž se může rozhodovat. Ceny aktiv budou omezené, nezáporné a tvořit nezávislou, stejně rozdělenou posloupnost náhodných vektorů.
Našim cílem bude zkoumat strategii, jenž maximalizuje střední hodnotu logaritmu bohatství investora a porovnávat její asymptotické výsledky oproti jiným strategiím.
Dále práce obsahuje appendix s pomocnými větami s odkazy na důkaz a pomocnou kapitolu o teorii obnovy.

Předpoklad 1. Mějme posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných m-dimenzionálních vektorů

$$\mathbb{X}_1,\mathbb{X}_2,\ldots;\ \ \mathbb{X}_i \in [\alpha_1,\alpha_2]^m \ \text{ sj. }, 0 < \alpha_1 < \alpha_2,\ m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

Tyto vektory budou reprezentovat cenové vektory pro naše aktiva. Takto definované vektory $\{\mathbb{X}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou zobecnění vektorů z práce Breiman (1961), které nabývali pouze konečně mnoho kladných hodnot. Nicméně veškerá tvrzení stále platí.

Definice 1. Definujeme funkci $w : b \mapsto E[\log(\mathbb{X}_1^{\intercal} b)]$, kde $\log(x)$, $x \leq 0$ budeme brát jako $-\infty$. Zavedeme si množinu

$$S = \{b \in \mathbb{R}^m, \sum_{i=1}^{m} b^i = 1, w(b) > -\infty\}. \tag{2}$$

Vektory z množiny S budou reprezentovat možné váhové vektory (ne nutně nezáporné), podle kterých rozdělíme naše bohatství po různých aktivech.

Poznámka 1. Pokud existuje $a \in \mathbb{R}^m$, $a \neq 0$, $a^{\intercal}\, \mathbb{X}_1 = 0$ sj. Bez újmy na obecnosti nechť $\mathbb{X}_1^1 = \sum_{k=2}^{m} \frac{a^k}{-a^1}\mathbb{X}_1^k$. Potom pro libovolný prvek $b \in S$

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbb{X}_1^k b^k = \sum_{k=2}^{m} \mathbb{X}_1^k b^k + b^1(\sum_{k=2}^{m} \frac{a^k}{-a^1}\mathbb{X}_1^k) = \sum_{k=2}^{m} \mathbb{X}_1^k(b^k + \frac{a^k}{-a^1}b^1)$$

a tedy jsme našli vektor c,

$$c^1 = 0,\ \ c^k = b^k + \frac{a^k}{-a^1}b^1,$$

který leží v S, jelikož složky vektoru c se nasčítají na 1 a

$$\log(\mathbb{X}_1^{\intercal} b) = \log(\mathbb{X}_1^{\intercal} c) \ \text{ sj.}$$

Lze složku $\mathbb{X}_1^1$ vynechat. Indukcí bychom pokračovali, dokud bychom neměli náhodný vektor $\tilde{\mathbb{X}}_1 \in [\alpha_1,\alpha_2]^{\tilde{m}}$, $\tilde{m} \leq m$, takový, že pro libovolné $\tilde{a} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$, $\tilde{a} \neq 0$, $P(\tilde{a}'\tilde{\mathbb{X}}_1 = 0) < 1$. Tento vektor bychom si označili jako nové $\mathbb{X}_1$.

Předpoklad 2. Pro všechna $a \in \mathbb{R}^m$, $a \neq 0$, $\mathrm{P}(a^{\intercal}\, \mathbb{X}_1 = 0) < 1$.

Značení a podstata množiny S

Poznámka 2. Množina S je konvexní. Funkce w je na S konkávní.

Značení. Označme $\mathscr{F}_n = \sigma(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Značení. Označme si

$$w^* = \sup_{b \in S} E[\log(\mathbb{X}_1^\intercal b)].$$

Předpoklad 3. V téhle práci se omezíme na případ, kdy je $w^* > 0$ konečná.

Věta 2. *Za předpokladu 3 platí*

$$P(\mathbb{X}_1^\intercal a > 0)\, P(\mathbb{X}_1^\intercal a < 0) > 0, \quad a \in \mathbb{R}^m,\ a^\intercal 1_m = 0,\ a \neq 0. \tag{3}$$

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje nenulové $a \in \mathbb{R}^m$, $a^\intercal 1_m = 0$ takové, že například platí

$$\mathbb{X}_1^\intercal a \geq 0 \ \text{ sj.}$$

Z předpokladu 2 existuje množina A, P(A) > 0, taková, že $\mathbb{X}_1^\intercal a > 0$ na A. Jelikož $a^\intercal 1_m = 0$, tak pro libovolné v reálné máme rovnost

$$\left(\frac{1_m}{m} + va\right)^\intercal 1_m = 1 + \left(a^\intercal 1_m\right) v = 1.$$

Na množině A

$$\lim_{v \to \infty} \mathbb{X}_1^\intercal \left(\frac{1_m}{m} + va\right) = \infty \ \text{ sj.} \quad \text{tj.} \ \lim_{v \to \infty} \log\left(\mathbb{X}_1^\intercal \left(\frac{1_m}{m} + va\right)\right) = \infty \ \text{ sj.}$$

Navíc

$$v \mapsto \log\left(\mathbb{X}_1^\intercal \left(\frac{1_m}{m} + va\right)\right),\ v \geq 0$$

je monotónní. Jelikož máme omezenost zdola,

$$\log\left(\mathbb{X}_1^\intercal \left(\frac{1_m}{m} + va\right)\right) \geq \log\left(\mathbb{X}_1^\intercal \frac{1_m}{m}\right) \geq \log(\alpha_1) \in \mathbb{R} \ \text{ sj.}$$

a proto lze využít Léviho větu o monotónní konvergenci

$$\lim_{v \to \infty} E[\log\left(\mathbb{X}_1^\intercal \left(\frac{1_m}{m} + va\right)\right)] = E[\lim_{v \to \infty} \log\left(\mathbb{X}_1^\intercal \left(\frac{1_m}{m} + va\right)\right)] = \infty.$$

Což je spor s tím, že

$$\limsup_{v \to \infty} E[\log\left(\mathbb{X}_1^\intercal \left(\frac{1_m}{m} + va\right)\right)] \leq E[\log(\mathbb{X}_1^\intercal b^*)] = w^* \in \mathbb{R}.$$

$w^* \in \mathbb{R}$ z předpokladu 3. Podobně bychom postupovali pro případ, kdy $P(\mathbb{X}_1^\intercal a > 0) = 0$, z čehož plyne tvrzení.

$\square$

Věta 3. *Množina S (2) omezená*

Důkaz. Nechť tomu tak není. Mějmě posloupnost $\{b_n\} \subseteq S$ takovou, že

$$\lim_{n\to\infty} \|b_n\| = \infty.$$

Potom posloupnost $\{\frac{b_n}{\|b_n\|}\}$ je omezená a tudíž existuje konvergentní podposloupnost

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{n_k}}{\|b_{n_k}\|} = b_\infty, \quad 1 = \lim_{k\to\infty} \left\| \frac{b_{n_k}}{\|b_{n_k}\|} \right\| = \|b_\infty\|.$$

Dále platí $1 = b_{n_k}^\intercal 1_m \forall k \in \mathbb{N}$ a to nám zaručuje $\lim_{k\to\infty} \frac{b_{n_k}^\intercal 1_m}{\|b_{n_k}\|} = \frac{1}{\|b_{n_k}\|} = 0$, a tedy $b_\infty^\intercal 1_m = 0$. Z věty 2

$$P\left(\mathbb{X}_1^\intercal b_\infty < 0\right) > 0,$$

existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$0 < P\left(\frac{\mathbb{X}_1^\intercal b_{n_{k_0}}}{\|b_{n_{k_0}}\|} < 0\right) = P\left(\mathbb{X}_1^\intercal b_{n_{k_0}} < 0\right).$$

Tedy $E[\log(\mathbb{X}_1^\intercal b_{n_{k_0}})]$ je rovna $-\infty$, což je spor s tím, že $b_{n_{k_0}} \in S$.

□

Věta 4. *Nechť b_1^* a b_2^* jsou z množiny S takové, že*

$$w^* = E[\log(\mathbb{X}^T b_1^*)] = E[\log(\mathbb{X}^T b_2^*)],$$

potom

$$\mathbb{X}^T b_1^* = \mathbb{X}^T b_2^* \quad sj.$$

Důkaz. Jelikož vektory b_1^* a b_2^* jsou z S, tedy platí

$$\mathbb{X}^\intercal b_1^* > 0,\ \mathbb{X}^\intercal b_2^* > 0 \quad \text{sj.} \tag{4}$$

Pro každé $\alpha \in (0,1)$ je $\alpha\, b_1^* + (1-\alpha)\, b_2^* \in S$ z konvexity a platí z definice w^*

$$\begin{aligned} \alpha\, E[\log(\mathbb{X}^\intercal b_1^*)] + (1-\alpha)\, E[\log(\mathbb{X}^\intercal b_2^*)] &= w^*(\alpha + (1-\alpha)) && (5)\\ &\geq E[\log(\alpha\mathbb{X}^\intercal b_1^* + (1-\alpha)\mathbb{X}^\intercal b_2^*)]. && (6) \end{aligned}$$

Z konkávnosti logaritmu

$$\alpha\ \log(\mathbb{X}^\intercal b_1^*) + (1-\alpha)\ \log(\mathbb{X}^\intercal b_2^*) \leq \log(\alpha\mathbb{X}^\intercal b_1^* + (1-\alpha)\mathbb{X}^\intercal b_2^*) \quad \text{sj.} \tag{7}$$

Aplikujeme-li střední hodnotu na obě strany

$$\begin{aligned} w^* &= \alpha E[\log(\mathbb{X}^\intercal b_1^*)] + (1-\alpha) E[\log(\mathbb{X}^\intercal b_2^*)] && (8)\\ &= E[(\alpha \log(\mathbb{X}^\intercal b_1^*) + (1-\alpha) \log(\mathbb{X}^\intercal b_2^*))] && (9)\\ &\leq E[\log(\alpha\mathbb{X}^\intercal b_1^* + (1-\alpha)\mathbb{X}^\intercal b_2^*)]. && (10) \end{aligned}$$

Dohromady z (6) a (10) máme

$$\alpha E[\log(\mathbb{X}^\intercal b_1^*)] + (1-\alpha) E[\log(\mathbb{X}^\intercal b_2^*)] = E[\log(\alpha\mathbb{X}^\intercal b_1^* + (1-\alpha)\mathbb{X}^\intercal b_2^*)]. \tag{11}$$

Z nerovnosti (7) a z toho, že střední hodnoty se rovnají plyne

$$\alpha \log(\mathbb{X}^{\mathsf{T}} b_1^*) + (1-\alpha)\log(\mathbb{X}^{\mathsf{T}} b_2^*) = \log(\alpha \mathbb{X}^{\mathsf{T}} b_1^* + (1-\alpha)\mathbb{X}^{\mathsf{T}} b_2^*) \quad \text{sj.} \tag{12}$$

Na množině $\mathrm{A} = [\mathbb{X}^{\mathsf{T}} b_1^* > 0, \mathbb{X}^{\mathsf{T}} b_2^* > 0, \mathbb{X}^{\mathsf{T}} b_1^* \neq \mathbb{X}^{\mathsf{T}} b_2^*]$ v (7) nastává ostrá nerovnost z ryzí konkávnosti logaritmu, tedy na A neplatí rovnost v (12), a proto také platí $P(A) = 0$.

$\square$

Značení. Zvolme si libovolný pevný vektor $b \in S$, který maximalizuje funkci $w(b)$ a označme jej b^*.

1. Základní věty o strategiích

Tato kapitola je založena na práci Breiman (1961).

Definice 5. Strategii Λ definujeme jako posloupnost $\Lambda = (\beta_1,\beta_2,\ldots)$ tak, že β_j je náhodný $\mathscr{F}_{j-1}$-měřitelný vektor mající hodnoty v S pro všechna přirozená j.

Značení. Mějme strategii $\Lambda = (\beta_1,\beta_2,\ldots)$, potom označme

$$C_n = \begin{cases} 1, \ n = 0 \\ (\mathbb{X}_n^{\intercal}\beta_n)\, C_{n-1}, \ n > 0 \end{cases}$$

$$W_n = \log(\mathbb{X}_n^{\intercal}\beta_n), \qquad W_n^* = \log(\mathbb{X}_n^{\intercal}b^*) \tag{1.1}$$

$$C_n = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i^{\intercal}\beta_i, \qquad C_n^* = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i^{\intercal}b^* \tag{1.2}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} W_i, \qquad S_n^* = \sum_{i=1}^{n} W_i^*. \tag{1.3}$$

Poznámka 3. Hodnota C_n představuje naše bohatství v čase n. Ekvivalentně po n-té investici. V téhle práci uvažujeme případ, kdy naše počáteční bohatství je rovno jedné. Pokud by ovšem tomu tak nebylo, označili bychom si počáteční vklad $\tilde{C}_0 > 0$ a pracovali s náhodnými veličinami $\tilde{C}_n = \tilde{C}_0 C_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka 4. Vektory $b^* \in S$ splňující $E[\log(\mathbb{X}_1^{\intercal}b^*)] = w^*$, nejsou jednoznačně určeny, ale náhodné veličiny $W_n^* = \log(\mathbb{X}_n^{\intercal}b^*)$ sj. ano z věty 4.

Značení. Strategii $(b^*,b^*,\ldots)$ označme jako $\Lambda^* := (b^*,b^*,\ldots)$.

Poznámka 5. W_1^*,W_2^*,... tvoří posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin.

Poznámka 6. Pro libovolnou strategii Λ platí

$$E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}] \leq w^*, \ k \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Značení. Pro $x \in \mathbb{R}^m$ a $\epsilon > 0$ označme

$$B(x,\epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^m, \|x - y\| < \epsilon\}.$$

Věta 6. *Nechť b^* je vnitřní bod množiny S, potom náhodné veličiny $W_k^*, k \in \mathbb{N}$, jsou omezené zdola skoro jistě.*

Důkaz. Jelikož b^* je vnitřní bod množiny S, tedy existuje $\epsilon > 0$ takové, že $B(b^*,\epsilon) \subseteq S$. Pro libovolný vektor b_0 takový, že jeho složky se nasčítají na 0 a $\|b_0\| < \epsilon$ platí

$$\|b^* - (b^* - b_0)\| = \|b_0\| < \epsilon$$

a tedy $b^* - b_0 \in S$. Potom nutně

$$\log(\mathbb{X}^{\intercal}(b^* - b_0)) > \infty \ \text{ sj.} \tag{1.5}$$

Tedy

$$\mathbb{X}^{\intercal}b^* > \mathbb{X}^{\intercal}b_0 \ \text{ sj.} \quad \forall\, b_0;\ \|b_0\| < \epsilon,\ b_0^{\intercal}1_m = 0. \tag{1.6}$$

Ze symetrie

$$\mathbb{X}^{\mathsf{T}} b^* > \left|\mathbb{X}^{\mathsf{T}} b_0\right| \ \text{ sj.} \quad \forall\, b_0;\ \|b_0\| < \epsilon,\ b_0^{\mathsf{T}} 1_m = 0. \tag{1.7}$$

Pro množinu

$$D = \{b \in \mathbb{R}^m, b^{\mathsf{T}} 1_m = 0, \|b\| \leq \epsilon\} \tag{1.8}$$

existuje spočetná hustá podmnožina C. Označme si

$$\mathcal{X}_0 := \{x \in [\alpha_1,\alpha_2]^m; \forall c \in D, x^{\mathsf{T}} b^* \geq x^{\mathsf{T}} c\} \tag{1.9}$$

$$\mathcal{X} := \{x \in [\alpha_1,\alpha_2]^m; \forall c \in C, x^{\mathsf{T}} b^* \geq x^{\mathsf{T}} c\} \tag{1.10}$$

Zřejmě

$$\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}.$$

Ukážeme, že platí i

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_0\,. \tag{1.11}$$

Mějme libovolné $y \in \mathcal{X}$ a $a \in D$,viz (1.8), pro toto a existuje posloupnost prvků $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z C taková, že $\lim_{n\to\infty}\|a_n - a\| = 0$.

$$y^{\mathsf{T}} a_n \leq y^{\mathsf{T}} b^*, n \in \mathbb{N} \quad \text{tedy} \quad y^{\mathsf{T}} a \leq y^{\mathsf{T}} b^*. \tag{1.12}$$

Proto $y \in \mathcal{X}_0$.

Zavedeme si vektory

$$b_x := \frac{\epsilon\,(x - \bar{x}1_m)}{\|x - \bar{x}\|} \in D,\ x \in [\alpha_1,\alpha_2]^m, \tag{1.13}$$

$$\bar{x} := \frac{\sum_{j=1}^m x^j}{m} \quad \text{(tj. průměr).} \tag{1.14}$$

kde $\frac{0}{0} = 0$. Pak

$$b_x^{\mathsf{T}} x = \frac{\epsilon\,(x - \bar{x}1_m)^{\mathsf{T}} x}{\|x - \bar{x}1_m\|} = \frac{\epsilon\,(x - \bar{x}1_m)^{\mathsf{T}}(x - \bar{x}1_m)}{\|x - \bar{x}1_m\|} = \epsilon\,\|x - \bar{x}1_m\|. \tag{1.15}$$

Uvědomíme si, že $1_m^{\mathsf{T}} b^* = 1$ a využitím Cauchyho nerovnosti

$$x^{\mathsf{T}} b^* = \bar{x} + (x - \bar{x}1_m)^{\mathsf{T}} b^* \tag{1.16}$$

$$= \bar{x} + (x - \bar{x}1_m)^{\mathsf{T}}(b^* - 1_m \bar{b}^*) \tag{1.17}$$

$$\geq \alpha_1 - \|(x - \bar{x}1_m)\|\|(b^* - 1_m \bar{b}^*)\|,\ x \in [\alpha_1,\alpha_2]^m. \tag{1.18}$$

Ukážeme, že $\mathbb{X}^{\mathsf{T}} b^* \geq \delta > 0$ sj. , pro nějaké $\delta > 0$.

Dále z (1.7)

$$P(\mathbb{X} \notin \mathcal{X}) \leq \sum_{c\in C} P(\mathbb{X}^{\mathsf{T}} b^* < \mathbb{X}^{\mathsf{T}} c) = 0. \tag{1.19}$$

Z (1.11)

$$\mathbb{X} \in \mathcal{X}_0 \ \text{ sj.} \tag{1.20}$$

Vektor $b_{\mathbb{X}}$ je z (1.13) prvkem množiny D sj., a tedy pro něj platí (1.12).

$$\mathbb{X}^{\mathsf{T}} b^* \geq \mathbb{X}^{\mathsf{T}} b_{\mathbb{X}} \ \text{ sj.}$$

Využitím lemma 19 z appendixu pak dostaneme tvrzení věty

$$
\begin{aligned}
\mathbb{X}^{\mathsf{T}} b^* &= \max\{\mathbb{X}^{\mathsf{T}} b^*, \mathbb{X}^{\mathsf{T}} b_{\mathbb{X}}\} && (1.21)\\
&\geq \max\{\alpha_1 - \|(\mathbb{X} - \bar{\mathbb{X}} 1_m)\| \|(b^* - 1_m \bar{b}^*)\|, \epsilon \, \|\mathbb{X} - \bar{\mathbb{X}} 1_m\|\} && (1.22)\\
&\geq \frac{\epsilon \, \alpha_1}{\epsilon + ||b^* - \bar{b}^* 1_m||} \quad \text{sj.} && (1.23)
\end{aligned}
$$

□

Věta 7. *Pokud bychom neuvažovali předpoklad 3 a místo toho předpokládali, že b^* je vnitřní bod množiny S, potom platí následující ekvivalence. Strategie Λ, pro kterou platí $\lim_{n\to\infty} C_n = \infty$ sj., existuje právě tehdy, když $w^* > 0$.*

Důkaz. $\Leftarrow$ Předpokládejme, že $0 < w^* = E[W_k^*]$, $k \in \mathbb{N}$, W_k^* jsou nezávislé, stejně rozdělené s konečnou střední hodnotou, definované v (1.1), tedy ze Silného zákona velkých čísel máme

$$0 < w^* = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n W_k^*}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(C_n^*)}{n} \quad \text{sj.} \tag{1.24}$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n W_k^* = \infty$, což implikuje i $\lim_{n\to\infty} C_n^* = \infty$ sj.

$\Rightarrow$ Nechť $\lim_{n\to\infty} C_n = \infty$ sj. Využijeme větu 16 v kapitole 2 (tvrzení věty 16 je nezávislé s tvrzením této, tedy lze ji použít), která říká, že pro každou strategii platí $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{C_n^*}$ existuje konečná sj. Tedy $\lim_{n\to\infty} C_n^* = \infty$ sj.

Pro spor předpokládejme, že $w^* < 0$. Podobně, ze Silného zákona velkých čísel dostáváme spor.
Pokud $w^* = 0$, z věty 6 máme omezenost W_1^* sj. a tedy existuje rozptyl $\mathrm{var}(W_1^*) \geq 0$. Pokud $\mathrm{var}(W_1^*) > 0$. Potom z centrální limitní věty

$$\frac{\sum_{k=1}^n W_k^*}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z, \; Z \sim N(0, var(W_1^*)). \tag{1.25}$$

Speciálně,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^n W_k^*}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = P(Z \leq 0) = \frac{1}{2}. \tag{1.26}$$

Jelikož

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n W_k^* = \infty \;\; \text{sj.} \;, \tag{1.27}$$

potom

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^n W_k^* \leq K\right) = 0, \; K > 0, \tag{1.28}$$

ale z (1.26)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^n W_k^* \leq 0\right) = \frac{1}{2}, \tag{1.29}$$

což je spor. Pokud $\mathrm{var}(W_1^*) = 0$ a $w^* = 0$, potom $W_1^* = 0$ sj. a tedy $\sum_{j=1}^\infty W_k^* = 0$ sj., což je spor s předpokladem, že $\sum_{j=1}^\infty W_k^* = \infty$ sj.

□

2. Asymptotické výsledky

Tato kapitola je založena na práci Breiman (1961).

Definice 8. Pro strategii $\Lambda = (\beta_1,\beta_2,\ldots)$ definujeme

$$\Lambda_J = (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_J,b^*,b^*,\ldots),\ J \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

$$N(y) = \{\inf_{n\in\mathbb{N}};\ \sum_{k=1}^{n} W_k > y\} \tag{2.2}$$

$$N^*(y) = \{\inf_{n\in\mathbb{N}};\ \sum_{k=1}^{n} W_k^* > y\} \tag{2.3}$$

$$W_k^J = \begin{cases} \log(\mathbb{X}_k^\intercal \beta_k); & k = 1,2,\ldots,J \\ \log(\mathbb{X}_k^\intercal b^*); & k = J+1,\ldots \end{cases} \tag{2.4}$$

$$N_J(y) = \{\inf_{n\in\mathbb{N}};\ \sum_{k=1}^{n} W_k^J > y\}. \tag{2.5}$$

Pokud nebude řečeno jinak, horní index se vztahuje k dané strategii, ne k mocnině.

Značení. Konstantu $\log(\alpha_2)$ označíme K. Konstanta α_2 je z (1). Jelikož

$$\mathbb{X}_1 \le \alpha_2 \ \text{ sj. },$$

tedy

$$W_n^* = \log(\mathbb{X}_n^\intercal b^*) \le K \ \text{ sj. },\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

a proto K skoro jistě omezuje shora náhodné veličiny $W_n^*, n \in \mathbb{N}$.

Věta 9. *Markovský čas $N^*(y)$ je integrovatelná náhodná veličina pro y kladné.*

Důkaz. Připomeňme si definice S_n^* (1.3). Budeme postupovat stejně jako při důkazu Waldovy identity. Pro $y > 0$ a $k \in \mathbb{N}$

$$ES^*_{\min\{N^*(y),k\}} = \sum_{i=1}^{k} EW_i^* 1_{[N^*(y)\ge i]} \tag{2.7}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} EW_i^* 1_{[N^*(y)> i-1]} \tag{2.8}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} w^* P[N^*(y) > i-1] \tag{2.9}$$

$$= w^* E[\min\{N^*(y),k\}], \tag{2.10}$$

kde jsme využili nezávislosti $\mathscr{F}_{i-1}$ s W_i^* pro všechna i v (2.9). Dále Jelikož $N^*(y)$ je konečná skoro jistě a platí omezení shora

$$y \le S^*_{N^*(y)} \le y + K \ \text{ sj.} \tag{2.11}$$

První využijeme Fatouovo lemma pro $S^*_{N^*(y)} - S^*_{\min\{N^*(y),k\}} \geq 0, k \in \mathbb{N}$, a potom Léviho větu o monotónní konvergenci pro $\min\{N^*(y),k\}$

$$
\begin{aligned}
0 &= E[\liminf_{k\to\infty}(S^*_{N^*(y)} - S^*_{\min\{N^*(y),k\}})] &(2.12)\\
&\leq E[S^*_{N^*(y)}] - \liminf_{k\to\infty} E[S^*_{\min\{N^*(y),k\}}] &(2.13)\\
&= E[S^*_{N^*(y)}] - \liminf_{k\to\infty} w^* E[\min\{N^*(y),k\}] &(2.14)\\
&= E[S^*_{N^*(y)}] - w^* E[N^*(y)] \leq y + K - w^* E[N^*(y)], &(2.15)
\end{aligned}
$$

kde poslední řádek platí z (2.11). Potom

$$0 \leq E[N^*(y)] \leq \frac{y+K}{w^*}$$

Tvrzení plyne z toho, že w^* je kladná konstanta.

□

Značení.

$$
\begin{aligned}
Z_0 &= 0 &(2.16)\\
Z_n &= \sum_{k=1}^{n}(W_k^J - w(\beta_k^J)),\ \forall n \in \mathbb{N}. &(2.17)
\end{aligned}
$$

Funkce w(b) se definovala v definice 1.

Věta 10. *Pro strategii* Λ *a náhodné veličiny* $\{W_k 1_{[k\leq \min\{N(y),J\}]}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *jsou integrovatelné pro J přirozené a y kladné. Potom platí*

$$E[Z_{N_J(y)}] = E[Z_0] = 0. \tag{2.18}$$

Důkaz. Pro $y \geq 0$ a na množině $[N_J(y) > J]$ platí

$$
\begin{aligned}
N_J(y) &= \inf\{n \in \mathbb{N}; \sum_{k=1}^{n} W_k^J > y\} &(2.19)\\
&= \inf\{n > J; \sum_{k=J+1}^{n} W_k^* > y - \sum_{k=1}^{J} W_k\} &(2.20)\\
&= J + \tilde{N}^*_J((y - S_J)^+), &(2.21)
\end{aligned}
$$

kde si označme

$$\tilde{N}^*_J(y) := \inf\{n \in \mathbb{N}; \sum_{k=1}^{n} W^*_{k+J} > y\}.$$

$$\tilde{S}^*_n(J) = \sum_{k=1}^{n} W^*_{k+J}.$$

Z definice $\tilde{N}^*_J(y)$ máme nerovnosti

$$y \leq \tilde{S}^*_{\tilde{N}^*_J(y)}(J) \leq y + K \quad \text{sj.}$$

Jelikož $\tilde{N}^*_J(y)$ je z věty 9 integrovatelné, potom z Waldovy identity

$$E[\tilde{S}^*_{\tilde{N}^*_J(y)}] = w^* E[\tilde{N}^*_J(y)] \in [y, y+K] \tag{2.22}$$

$$E[\tilde{N}^*_J(y)] \leq \frac{y+K}{w^*}$$

$$\bar{E}[\tilde{N}^*_J((y-S_j)^+)|\mathscr{F}_J] \leq \frac{K+(y-S_J)^+}{w*} \quad \text{sj. }, \tag{2.23}$$

tedy speciálně pro množinu $[N_J(y) > J]$ a z předpokladu integrovatelnosti $W_k 1_{[k \leq \min\{N(y),J\}]}, k \in \mathbb{N}$, platí

$$E[(y-S_J)^+ 1_{[N_J(y)>J]}] < \infty.$$

Proto také

$$E[\tilde{N}^*_J((y-S_j)^+) 1_{[N_J(y)>J]}] \leq E[\frac{K+(y-S_J)^+}{w^*} 1_{[N_J(y)>J]}] < \infty.$$

Rozepišme si

$$0 \leq E[N_J(y)] = E[N_J(y) 1_{[N_J(y)<J]}] + E[N_J(y) 1_{[N_J(y)<J]}] \tag{2.24}$$

$$\leq J + (J + E[\tilde{N}^*(y-S_J)]) \tag{2.25}$$

$$\leq 2J + E[\frac{K+(y-S_J)^+}{w^*} 1_{[N_J(y)<J]}] < \infty. \tag{2.26}$$

Odvodili jsme integrovatelnost $N_J(y)$.

$$E[Z_{N_J(y)} - Z_{\min\{N_J(y),J\}}|\mathscr{F}_J] = E[\sum_{k=J+1}^{N_J(y)} (W^J_k - E[W^J_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])|\mathscr{F}_J] \tag{2.27}$$

$$= E[\sum_{k=J+1}^{N_J(y)} (W^*_k - w^*)|\mathscr{F}_J]. \tag{2.28}$$

Uvažujme $\{\mathscr{F}_{J+k}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$- martingál

$$M_n := \sum_{k=J+1}^{J+n} (W^*_k - w^*), n \in \mathbb{N}. \tag{2.29}$$

s integrovatelným Markovským časem $\max\{N_J(y) - J,0\}$. Potom

$$E[|M_{n+1} - M_n| \mid \mathscr{F}_{J+n}] = E[\left|W^*_{n+1} - w^*\right|] = c < \infty, \ c > 0.$$

Potom z věty 28 platí pro volbu $T = \max\{N_J(y) - J,0\}$, $S = 0$

$$E[Z_{\max\{N_J(y)-J,0\}} \mid \mathscr{F}_J] = Z_0 = 0 \text{ sj.} \tag{2.30}$$

Nakonec ukážeme, že $E[Z_{\min\{N_J(y),J\}}] = 0$, potom už z (2.30) bude platit $E[Z_{N_J(y)}] = 0$. Tedy z předpokladu integrovatelnosti $\{W_k 1_{[k\leq\min\{N(y),J\}]}\}_{k\in\mathbb{N}}$ je $\{Z_{\min\{n,J\}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{F}_n$ martingál. Dále $\min\{N_J(y), J\}$ je konečný $\mathscr{F}_n$ Markovský čas omezený konstantou J, a proto z věty 27 v appendixu plyne

$$E[Z_{\min\{N_J(y),J\}}] = E[Z_0] = 0. \tag{2.31}$$

Z čehož dostáváme tvrzení.

□

Věta 11. *Pokud pro strategii Λ, $J \in \mathbb{N}$, $y \in (0,\infty)$ platí $E[N(y)] < \infty$ a zároveň náhodné veličiny $W_k, k \in \mathbb{N}$ jsou integrovatelné, potom*

$$\lim_{J\to\infty} E[N_J(y)] = E[N(y)].$$

Důkaz. Rozepišme tento výraz

$$E[N_J(y)] = \int_{[N(y)\le J]} N(y)dP + \int_{[N(y)>J]} N_J(y)dP \tag{2.32}$$

$$= \int_{[N(y)\le J]} N(y)dP + JP(N(y) > J) + \int_{[N(y)>J]} (N_J(y) - J)dP. \tag{2.33}$$

Dále

$$\lim_{J\to\infty} \int_{N(y)\le J} N(y)dP = E[N(y)]$$

a z předpokladu integrovatelnosti

$$\lim_{J\to\infty} JP(N(y) > J) = 0.$$

Jediné, co nám chybí, je ukázat

$$\lim_{J\to\infty} \int_{N(y)>J} (N_J(y) - J)dP = 0.$$

Budeme upravovat tento výraz na množině $[N_J(y) > J]$.

$$\frac{1}{w^*} \sum_{k=J+1}^{N_J(y)} W_k^J = \frac{1}{w^*}[\sum_{k=1}^{N_J(y)} W_k^* - \sum_{k=1}^{J} W_k] \tag{2.34}$$

$$\le \frac{1}{w^*}[y + K - \sum_{k=1}^{J} W_k] \tag{2.35}$$

$$\le \frac{1}{w^*}[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k + K - \sum_{k=1}^{J} W_k] \tag{2.36}$$

$$= \frac{1}{w^*}[\sum_{k=J+1}^{N(y)} W_k + K] \le \frac{1}{w^*}[KN(y) + K] \text{ sj.} \tag{2.37}$$

Konstanta K je z (2.6). Jelikož $KN(y) + K$ je integrovatelné, proto levá strana je shora integrovatelná na množině $[N_J(y) > J]$. Podobně jako v předešlé větě, bychom si definovali

$$\tilde{N}_J^*(y) := \inf\{n \in \mathbb{N}; \sum_{k=1}^{n} W_{k+J}^* > y\}.$$

$$\tilde{S}_n^*(J) = \sum_{k=1}^{n} W_{k+J}^*.$$

a z Waldovy identity bychom dostali obdobný výsledek jako v (2.23) a to

$$N_J(y) = J + \tilde{N}_J^*((y - \sum_{k=1}^{J} W_k)^+)$$

a

$$\bar{E}[\tilde{N}^*_J((y-\sum_{k=1}^{J} W_k)^+)|\mathscr{F}_J] \leq \frac{K+(y-\sum_{k=1}^{J} W_k)^+}{w*} \quad \text{sj. } .$$

Z (2.35)

$$\frac{K+(y-\sum_{k=1}^{J} W_k)^+}{w*} \leq \frac{1}{w^*}[KN(y)+K]$$

Střední hodnota zachovává nerovnosti a proto

$$\int_{N(y)>J} [N_J(y)-J]dP \leq \frac{1}{w^*}\int_{[N_J(y)>J]} (KN(y)+K)dP.$$

Z Léviho věty o monotónní konvergenci

$$0 \leq \lim_{J\to\infty} \int_{N(y)>J} [N_J(y)-J]dP \leq \lim_{J\to\infty} \frac{K}{w^*}\int_{N(y)>J} N(y)+1dP = 0,$$

kde jsme využili toho, že $N(y)$ je integrovatelná, čímž dostáváme tvrzení.

□

Poznámka 7. Pokud platí

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \infty \quad \text{sj. } ,$$

potom pro $y > 0$ a strategii Λ máme

$$\lim_{J\to\infty} E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} W_k^J] = E[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k]. \tag{2.38}$$

Důkaz. Z Lebesgueovy věty s majorantou $y+K$

$$\lim_{J\to\infty} E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} W_k^J] = E[\lim_{J\to\infty}(\sum_{k=1}^{\min\{N(y),J\}} W_k + \sum_{k=\min\{N(y),J\}+1}^{N_J(y)} W_k^J)] = E[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k],$$

kde

$$\lim_{J\to\infty} E[\sum_{k=\min\{N(y),J\}+1}^{N_J(y)} W_k^J] = 0,$$

jelikož $N(y) < \infty$ sj. a $\lim_{J\to\infty} N_J(y) = N(y)$ pro y pevné.

□

Věta 12. *Nechť $y > 0$ a strategii Λ taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \infty \quad \textit{sj. } , \; E[N(y)] = \infty. \tag{2.39}$$

Nechť dále platí, že náhodné veličiny $W_k, k \in \mathbb{N}$, jsou integrovatelné, potom

$$\infty = E[N(y)] = \frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N(y)}(w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + \frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k] \tag{2.40}$$

Důkaz.

Definici C_n jsme zavedli v úvodu (1.1). Díky předpokladu integrovatelnosti $W_k, k \in \mathbb{N}$ je splňen předpoklad věty 10 a tedy víme

$$E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} (W_k^J - E[W_k^J \mid \mathscr{F}_{k-1}])] = 0. \tag{2.41}$$

$$w^* E[N_J(y)] = E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} w^*] + E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} (W_k^J - E[W_k^J \mid \mathscr{F}_{k-1}])] \tag{2.42}$$

$$= E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} (w^* - E[W_k^J \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} W_k^J] \tag{2.43}$$

$$= E[\sum_{k=1}^{\min\{N(y),J\}} (w^* - E[W_k^J \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} W_k^J] \tag{2.44}$$

$$= E[\sum_{k=1}^{\min\{N(y),J\}} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} W_k^J] \tag{2.45}$$

pokud si uvědomíme

$$N_J(y) = N(y)1_{[N_J(y) \leq J]} + N_J(y)1_{[N_J(y) > J]},$$

a zároveň

$$w^* - E[W_k^J \mid \mathscr{F}_{k-1}] = 0; \ k > J.$$

S využitím Fatouova lemmatu

$$\liminf_{J\to\infty} E[N_J(y)] \geq \liminf_{J\to\infty} E[N(y)1_{[N(y)\leq J]}] \tag{2.46}$$

$$\geq E[\liminf_{J\to\infty} N(y)1_{[N(y)\leq J]}] = E[N(y)] = \infty \tag{2.47}$$

Z úprav nahoře, počínaje (2.42) vidíme, že pokud $E[N(y)] = \infty$, potom také $\lim_{J\to\infty} E[N_J(y)] = \infty$ a jelikož druhý člen v (2.45) je omezen skoro jistě konstantou $y + K$, K je konstanta z (2.6), potom nutně

$$\lim_{J\to\infty} E[\sum_{k=1}^{\min\{N(y),J\}} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] = \infty.$$

Opět využitím Fatouova lemmatu

$$\infty = \liminf_{J\to\infty} E[\sum_{k=1}^{\min\{N(y),J\}} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] \leq E[\sum_{k=1}^{N(y)} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])].$$

V tvrzení věty v (2.40), člen

$$y \leq E[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k] \leq y + K \ \text{ sj.}$$

Tedy na obou stranách rovnosti (2.40) v tvrzení věty je nekonečno.

□

Věta 13. *Pro $y > 0$ a strategii Λ takovou, že*

$$E[N(y)] < \infty. \tag{2.48}$$

Nechť dále platí, že náhodné veličiny $W_k, k \in \mathbb{N}$, jsou integrovatelné, potom platí

$$E[N(y)] = \frac{1}{w^*} E[\sum_{k=1}^{N(y)} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + \frac{1}{w^*} E[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k]. \tag{2.49}$$

Důkaz. Pokud $E[N(y)] < \infty$. Z 6 nalezneme J_0 takové, že pro všechny $J > J_0$ je $N_J(y)$ integrovatelná. Následující úpravy se týkají těchto J.

Použijeme Jensenovu nerovnost pro funkci $x \mapsto x^+$.

$$E[(W_k^J)^+ | \mathscr{F}_{k-1}] \geq (E[W_k^J | \mathscr{F}_{k-1}])^+ = w(\beta_k^J)^+ \quad \text{sj. }, k \in \mathbb{N}. \tag{2.50}$$

První si ukážeme, že platí

$$\begin{aligned} E[W_k^J 1_{[k \leq N_J(y)]}] =& E[W_k^J; k \leq N_J(y)] && (2.51)\\ =& \lim_{n \to oo} E[W_k^J; k \leq N_J(y); w(\beta_k^J) \geq -n] && (2.52)\\ =& \lim_{n \to oo} E[w(\beta_k^J); k \leq N_J(y); w(\beta_k^J) \geq -n] && (2.53)\\ =& E[w(\beta_k^J); k \leq N_J(y)] && (2.54) \end{aligned}$$

Budeme chtít použít Fubiniho větu k záměně střední hodnoty a nekonečné sumy. Ověříme předpoklad a využijeme odvozenou nerovnost v (2.50) a nezápornost náhodné veličiny $w(\beta_k^J)^+, k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[w(\beta_k^J)^+; k \leq N_J(y)] \leq \sum_{k=1}^{\infty} E[(W_K^J)^+; k \leq N_J(y)] < \infty.$$

Proto

$$E \sum_{k=1}^{N_J(y)} W_k^J = E \sum_{k=1}^{\infty} W_k^J 1_{[k \leq N_J(y)]} \tag{2.55}$$

Zde použijeme Fubiniho větu .

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E[W_k^J 1_{[k \leq N_J(y)]}] \tag{2.56}$$

Z (2.51) a (2.54)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E[w(\beta_k^J) 1_{[k \leq N_J(y)]}]. \tag{2.57}$$

$$= \sum_{k=1}^{N_J(y)} E[w(\beta_k^J)] \tag{2.58}$$

Opět použijeme Fubiniho větu.

$$= E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} w(\beta_k^J)]. \tag{2.59}$$

$$\tag{2.60}$$

Celkově

$$w^*E[N_J(y)] = E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} w^*] - E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} w(\beta_k^J)] + E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} W_k^J] \tag{2.61}$$

$$= E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} w^*] - E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} E[W_k^J \mid \mathscr{F}_{k-1}]] + E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} W_k^J] \tag{2.62}$$

$$= E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} (w^* - E[W_k^J \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} W_k^J] \tag{2.63}$$

podobně jako v (2.43)

$$= E[\sum_{k=1}^{\min\{N(y),J\}} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} W_k^J]. \tag{2.64}$$

Z věty 7

$$\lim_{J\to\infty} E[\sum_{k=1}^{N_J(y)} W_k^J] = E[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k]$$

Z věty 11

$$\lim_{J\to\infty} E[N_J(y)] = E[N(y)]$$

Z Léviho věty o monotónní konvergenci

$$\lim_{J\to\infty} E[\sum_{k=1}^{\min\{N(y),J\}} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] = E[\sum_{k=1}^{N(y)} (w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])].$$

Z čehož plyne věta.

□

Poznámka 8. Označme $G(\xi)$ distribuční funkci definovanou předpisem v (A.122). Potom z důsledku 43 v kapitole o teorii obnovy

$$G(\xi) = \lim_{y\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{N^*(y)} W_k^* < y + \xi\right). \tag{2.65}$$

Věta 14. *Nechť Z je libovolná náhodná veličina nezávislá s W_1^*,W_2^*,... Potom*

$$\lim_{y\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{N^*(y+Z)} W_k^* < Z + y + \xi\right) = G(\xi)$$

Důkaz. Distribuční funkce $G(\xi)$ je z poznámky 8 pro kterou platí

$$\lim_{y\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{N^*(y)} W_k^* < y + \xi\right) = G(\xi).$$

Z vlastností podmíněné střední hodnoty

$$P\left(\sum_{k=1}^{N^*(y+Z)} W_k^* < Z + y + \xi\right) = E[P\left(\sum_{k=1}^{N^*(y+Z)} W_k^* < Z + y + \xi\right) \mid Z]. \tag{2.66}$$

Jelikož
$$\lim_{y\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{N^*(y+z)} W_k^* < z+y+\xi\right) = G(\xi),\ \ z\in\mathbb{R}. \tag{2.67}$$
Proto
$$\lim_{y\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{N^*(y+Z)} W_k^* < Z+y+\xi \mid Z\right) \tag{2.68}$$
$$\overset{sj.}{=} \lim_{y\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{N^*(y+z)} W_k^* < z+y+\xi \mid z=Z\right) = G(\xi). \tag{2.69}$$
Použijeme Lebesgueovu větu o konvergentní majorantě v (2.66), tedy
$$\lim_{y\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{N^*(y+Z)} W_k^* < Z+y+\xi\right) = G(\xi).$$
□

Důsledek 1. *Pro strategii* Λ_J, $J\in\mathbb{N}$
$$\lim_{y\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{N^J(y)} W_k^J - y < \xi\right) = G(\xi)$$

Důkaz. Distribuční funkce $G(\xi)$ je z poznámky 8 pro kterou platí
$$\lim_{y\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{N^*(y)} W_k^* < y+\xi\right) = G(\xi).$$

Označme
$$N_k^*(y) = \inf\{n\in\mathbb{N}; \sum_{j=k}^{n} W_j^* \geq y\}.$$
Zřejmě
$$\lim_{y\to\infty} P\left(\sum_{j=k}^{N_k^*(y)} W_j^* - y < \xi\right) = G(\xi).$$
Dále, $\sum_{j=1}^{J} W_j$ je nezávislá na W_{J+1}^*,W_{J+2}^*,... a proto z předešlé věty
$$\lim_{y\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{N_J(y)} W_k^J < y+\xi\right) \tag{2.70}$$
$$= \lim_{y\to\infty} P\left(\sum_{j=J+1}^{N_{J+1}^*(y-\sum_{j=1}^{J} W_j)} W_k^* < y - \sum_{j=1}^{J} W_j + \xi\right) \tag{2.71}$$
$$= G(\xi). \tag{2.72}$$
□

Věta 15. *Pokud pro strategii* Λ *platí* $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} W_k - W_k^*$ *existuje konečná skoro jistě, potom*

$$\lim_{y\to\infty} E\left[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k - \sum_{k=1}^{N^*(y)} W_k^*\right] = 0.$$

Důkaz. Zvolme $\epsilon > 0$. Jelikož předpokládáme

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} W_k - W_k^* < \infty \ \text{ sj. },$$

proto

$$\lim_{m\to\infty} V_m = 0 \ \text{ sj. , kde } V_m := \sum_{k=m}^{\infty}(W_k - W_k^*).$$

Z Jegorovovy věty 24 nalezneme B takové, že $P(B) < \frac{\epsilon}{K}$ a V_m konverguje stejnoměrně na $\Omega \setminus B$, kde K je z (2.6). Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$V_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{\infty} W_k - W_k^* < \epsilon \ \text{ sj.}$$

Z trojúhelníkové nerovnosti potom

$$\left(\left|\sum_{k=n}^{m} W_k - W_k^*\right|\right) 1_{[\Omega\setminus B]} < 2\epsilon,\ m,n > n_0. \tag{2.73}$$

Budeme porovnávat strategii Λ s Λ_{n_0}. Pro y kladné

$$N(y) = \inf\{n; \sum_{k=1}^{n} W_k > y\} = \inf\{n; \sum_{k=1}^{n} W_k^{n_0} > y + \sum_{k=n_0+1}^{n}(W_k^* - W_k)\} \tag{2.74}$$

Z (2.73) a (2.74)

$$N(y) \le \inf\{n; \sum_{k=1}^{n} W_k^{n_0} > y + 2\epsilon\} = N^{n_0}(y + 2\epsilon)\ na\ \Omega \setminus B \tag{2.75}$$

$$N(y) \ge \inf\{n; \sum_{k=1}^{n} W_k^{n_0} > y - 2\epsilon\} = N^{n_0}(y - 2\epsilon)\ na\ \Omega \setminus B. \tag{2.76}$$

Podobně s využitím (2.73)

$$\left|\sum_{k=1}^{N(y)}(W_k - W_k^{n_0})\right| \le 2\epsilon \ \text{ sj. } \ na\ \Omega \setminus B,\ y > n_0 K. \tag{2.77}$$

Na množině $[N(y) < N^{n_0}(y + 2\epsilon)]\setminus B$ sj. platí

$$\sum_{k=1}^{N(y)} W_k^{n_0} \le y + 2\epsilon \le \sum_{k=1}^{N^{n_0}(y+2\epsilon)} W_k^{n_0}, y > n_0 K. \tag{2.78}$$

Na množině $[N(y) = N^{n_0}(y + 2\epsilon)]\setminus B$ nastává v (2.78) rovnost pro $y > n_0 K$.

Jelikož platí (2.75) a z (2.77)

$$\sum_{k=1}^{N(y)} W_k \leq \sum_{k=1}^{N^{n_0}(y+2\epsilon)} W_k^{n_0} + 2\epsilon \text{ sj. } na\, \Omega \setminus B, y > n_0 K. \tag{2.79}$$

Podobně bychom ukázali omezení zdola, neboli na množině $[N(y) > N^{n_0}(y-2\epsilon)]\backslash B$ sj. platí

$$\sum_{k=1}^{N(y)} W_k^{n_0} \geq y - 2\epsilon \geq \sum_{k=1}^{N^{n_0}(y-2\epsilon)} W_k^{n_0}, y > n_0 K. \tag{2.80}$$

Na množině $[N(y) = N^{n_0}(y-2\epsilon)]\backslash B$ nastává v (2.80) rovnost pro $y > n_0 K$ a proto z (2.77)

$$\sum_{k=1}^{N(y)} W_k \geq \sum_{k=1}^{N^{n_0}(y-2\epsilon)} W_k^{n_0} - 2\epsilon \text{ sj. } na\, \Omega \setminus B, y > n_0 K. \tag{2.81}$$

Z volby množiny B

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{N^{n_0}(y-2\epsilon)} W_k^{n_0} - y + 2\epsilon\right) 1_B\right] \leq KP(B) \leq \epsilon \tag{2.82}$$

Analogicky pro $N^{n_0}(y+2\epsilon)$. Proto dostáváme omezení z (2.79) a (2.82) pro $y > n_0 K$

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{N(y)} W_k - y\right) 1_{\Omega\backslash B}\right] \geq E\left[\left(\sum_{k=1}^{N^{n_0}(y-2\epsilon)} W_k^{n_0} - y - 2\epsilon\right) 1_{\Omega\backslash B}\right] \tag{2.83}$$

$$\geq E\left[\left(\sum_{k=1}^{N^{n_0}(y-2\epsilon)} W_k^{n_0} - y + 2\epsilon\right) 1_{\Omega\backslash B}\right] - 4\epsilon \tag{2.84}$$

$$\geq E\left[\sum_{k=1}^{N^{n_0}(y-2\epsilon)} W_k^{n_0} - y + 2\epsilon\right] - 5\epsilon \tag{2.85}$$

a

$$E\left[\sum_{k=1}^{N^{n_0}(y+2\epsilon)} W_k^{n_0} - (y+2\epsilon)\right] + 5\epsilon \geq E\left[\left(\sum_{k=1}^{N(y)} W_k - y\right) 1_{\Omega\backslash B}\right]. \tag{2.86}$$

Pokud označíme

$$A := \lim_{y\to\infty} E\left[\sum_{k=1}^{N^*(y)} W_k^* - y\right] \in \mathbb{R},$$

pak z důsledku 1 víme, že

$$A = \lim_{y\to\infty} E\left[\sum_{k=1}^{N^{n_0}(y\pm 2\epsilon)} W_k^{n_0} - (y \pm 2\epsilon)\right]. \tag{2.87}$$

Z (2.85), (2.86) a (2.87)

$$A - 5\epsilon \le \liminf_{y\to\infty} E\left[\left(\sum_{k=1}^{N(y)} W_k - y\right) 1_{\Omega\setminus B}\right] \tag{2.88}$$

$$\le \limsup_{y\to\infty} E\left[\left(\sum_{k=1}^{N(y)} W_k - y\right) 1_{\Omega\setminus B}\right] \le A + 5\epsilon. \tag{2.89}$$

Jako poslední vyřešíme

$$0 \le E\left[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k - y\right] 1_B \le KP(B) \le \epsilon$$

a celkově

$$A - 6\epsilon \le \liminf_{y\to\infty} E\left[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k - y\right] \le \limsup_{y\to\infty} E\left[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k - y\right] \le A + 6\epsilon. \tag{2.90}$$

Jelikož $\epsilon > 0$ bylo libovolné, proto

$$A = \lim_{y\to\infty} E\left[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k - y\right]. \tag{2.91}$$

□

Věta 16. *Nechť* Λ *je strategie. Potom* $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{C_n^*}$ *existuje sj. a* $E[\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{C_n^*}] \le$ *1.*

Důkaz. První dokážeme, že

$$E\left[\frac{\mathbb{X}_n^\intercal \beta_n}{\mathbb{X}_n^\intercal \beta^*} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right] \le 1 \text{ sj. }, \; n \in \mathbb{N}. \tag{2.92}$$

Nechť $\epsilon > 0$. Vektory b^* a β_n leží v množině S pro n přirozená. Jelikož množina S je konvexní, tedy v ní leží i vektor $(1-\epsilon)b^* + \epsilon\beta_n$ a tedy z poznámky 6.

$$E[\log[(1-\epsilon)\mathbb{X}_n^\intercal b^* + \epsilon\, \mathbb{X}_n^\intercal \beta_n] - \log(\mathbb{X}_1^\intercal b^*) \mid \mathscr{F}_{n-1}] \le 0 \; sj. \tag{2.93}$$

Tuto nerovnost budeme dále upravovat

$$E[\log[(1-\epsilon)\mathbb{X}_n^\intercal b^* + \epsilon\, \mathbb{X}_n^\intercal \beta_n] - \log(\mathbb{X}_1^\intercal b^*) \mid \mathscr{F}_{n-1}]. \tag{2.94}$$

Jelikož $\mathbb{X}_1^\intercal b^* > 0$ sj.

$$=E[\log\left[(1-\epsilon) + \frac{\epsilon\, \mathbb{X}_n^\intercal \beta_n}{\mathbb{X}_n^\intercal \beta^*}\right] \mid \mathscr{F}_{n-1}]. \tag{2.95}$$

Vytkneme $(1-\epsilon)$

$$=\log(1-\epsilon) + E[\log\left[1 + \frac{\epsilon\, \mathbb{X}_n^\intercal \beta_n}{(1-\epsilon)\mathbb{X}_n^\intercal \beta^*}\right] \mid \mathscr{F}_{n-1}], n \in \mathbb{N}. \tag{2.96}$$

Spojením (2.96) a (2.93)

$$\frac{1}{\epsilon}E[\log\left[1+\frac{\epsilon\ \mathbb{X}_n^{\mathsf{T}}\beta_n}{(1-\epsilon)\mathbb{X}_n^{\mathsf{T}}\beta^*}\right] \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq \frac{1}{-\epsilon}\log(1-\epsilon), n\in\mathbb{N}.$$

Aplikujeme na tuto nerovnost Fatouovo lemma, tedy

$$E\left[\frac{\mathbb{X}_n^{\mathsf{T}}\beta_n}{\mathbb{X}_n^{\mathsf{T}}\beta^*} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right] = E[\liminf_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\log\left[1+\frac{\epsilon\ \mathbb{X}_n^{\mathsf{T}}\beta_n}{(1-\epsilon)\mathbb{X}_n^{\mathsf{T}}\beta^*}\right] \mid \mathscr{F}_{n-1}] \tag{2.97}$$

$$\leq \liminf_{\epsilon\to 0} E[\frac{1}{\epsilon}\log\left[1+\frac{\epsilon\ \mathbb{X}_n^{\mathsf{T}}\beta_n}{(1-\epsilon)\mathbb{X}_n^{\mathsf{T}}\beta^*}\right] \mid \mathscr{F}_{n-1}] \tag{2.98}$$

$$\leq \liminf_{\epsilon\to 0}\frac{1}{-\epsilon}\log(1-\epsilon) = 1, n\in\mathbb{N}. \tag{2.99}$$

Z toho plyne

$$E\left[\frac{C_n}{C_n^*} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right] = \frac{C_{n-1}}{C_{n-1}^*}E\left[\frac{\mathbb{X}_n^{\mathsf{T}}\beta_n}{\mathbb{X}_n^{\mathsf{T}}\beta^*} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right] \leq \frac{C_{n-1}}{C_{n-1}^*} \text{ sj. }, n\in\mathbb{N}. \tag{2.100}$$

A tedy $\{\frac{C_n}{C_n^*}\}$ je nezáporný supermartingal a dle věty 22 z appendixu má reálnou limitu sj. Dále

$$E\left[\frac{C_n}{C_n^*}\right] = E\left[\frac{C_{n-1}}{C_{n-1}^*}E\left[\frac{\mathbb{X}_n^{\mathsf{T}}\beta_n}{\mathbb{X}_n^{\mathsf{T}}\beta^*} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right]\right] \leq E\left[\frac{C_{n-1}}{C_{n-1}^*}\right]. \tag{2.101}$$

Užitím Léviho věty

$$E\left[\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{C_n^*}\right] = \lim_{n\to\infty}E\left[\frac{C_n}{C_n^*}\right] \leq \ldots \leq E\left[\frac{C_1}{C_1^*}\right] \leq 1. \tag{2.102}$$

z čehož plyne věta.

□

Věta 17. *Pokud b^* je vnitřní bod množiny S a Λ je strategie, pro kterou jsou náhodné veličiny $W_k, k\in\mathbb{N}$ integrovatelné, potom pro strategii Λ platí*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^*}{C_n} = \infty \underset{sj.}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}(w^* - E(W_n \mid \mathscr{F}_{n-1})) = \infty \tag{2.103}$$

Důkaz. Platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^*}{C_n} = \infty \underset{sj.}{\Longleftrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} W_k^* - W_k = \infty$$

Zavedeme si novou strategii. Pro $M\in R$

$$\hat{\beta}_n(M) := \beta_n 1_{[E(W_n|\mathscr{F}_{n-1})\geq M]} + b^* 1_{[E(W_n|\mathscr{F}_{n-1})<M]}$$

a k ní odpovídající náhodné veličiny

$$\hat{W}_k(M) := \log(\mathbb{X}_k^{\mathsf{T}}\hat{\beta}_n(M)).$$

Posloupnost

$$\hat{Y}_n(M) = \sum_{k=1}^{n}(\hat{W}_k(M) - W_k^* - (E[\hat{W}_k(M) \mid \mathscr{F}_{k-1}] - w^*)), n \in \mathbb{N}$$

je martingal. Dokážeme, že platí

$$(\sup_n[\hat{Y}_n(M) - \hat{Y}_{n-1}(M)])^+ \in L_1, \tag{2.104}$$

potom z věty 26 plyne tvrzení.

$$\hat{Y}_n(M) - \hat{Y}_{n-1}(M) = \hat{W}_n(M) - W_n^* - (E[\hat{W}_n(M) \mid \mathscr{F}_{n-1}] - w^*) \tag{2.105}$$

$\hat{W}_n(M)$ je omezeno shora konstantou K z (2.6). $-W_n^*$ je omezeno shora konstantou z věty 6. Konečně

$$w^* - E[\hat{W}_n(M) \mid \mathscr{F}_{n-1}] \leq \max\{0, w^* - M\}.$$

Proto platí (2.104) a z věty 26 v appendixu existuje reálná $\hat{Y}_\infty(M)$,

$$\lim_{n\to\infty} \hat{Y}_n(M) = \hat{Y}_\infty(M) \in \mathbb{R} \ \text{ sj.}$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} W_k^* - \hat{W}_k(M) = \infty \ \text{ sj., potom také } \sum_{k=1}^{\infty} w^* - E[\hat{W}_k(M) \mid \mathscr{F}_{k-1}] = \infty \ \text{ sj.} \tag{2.106}$$

Obecně, označme

$$A := \{n \in \mathbb{N}, \beta_n \neq \hat{\beta}_n(M)\}.$$

Pokud $\mid A \mid < \infty$ sj., potom tvrzení platí z (2.106) a toho, že

$$-\infty < \sum_{k\in A} E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}] - E[\hat{W}_k(M) \mid \mathscr{F}_{k-1}] < \infty.$$

a

$$-\infty < \sum_{k\in A} W_k^* - \hat{W}_k(M) < \infty.$$

Pokud $\mid A \mid = \infty$ sj., potom pro $M \in \mathbb{R},\ w^* - M > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}] \geq \sum_{k\in A}(w^* - M) = \infty,$$

jelikož $w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}] \geq 0$ sj., $k \in \mathbb{N}$.

□

Věta 18. *Nechť Λ je strategie a b^* je vnitřní bod množiny S. Potom pokud $W_k, k \in \mathbb{N}$ jsou integrovatlené, potom*

$$\lim_{y\to\infty}(E[N(y)] - E[N^*(y)]) = \frac{1}{w^*}\sum_{k=1}^{\infty}(w^* - E[W_k]). \tag{2.107}$$

Důkaz. Díky předpokladu integrovatlenosti veličin $W_k, k \in \mathbb{N}$, dostaneme z vět 12 a 13 ekvivalenci v podobě

$$E[N(y)] = \frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N(y)}(w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}])] + \frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k], y \geq 0.$$

Tedy

$$E[N(y)] - E[N^*(y)] =$$
$$= \frac{E[\sum_{k=1}^{N(y)} w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]]}{w^*} - \frac{E[\sum_{k=1}^{N^*(y)} w^* - E[W_k^* \mid \mathscr{F}_{k-1}]}{w^*} +$$
$$+\frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k - \sum_{k=1}^{N^*(y)} W_k^*],$$

ale

$$\frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N^*(y)} w^* - E[W_k^*] \mid \mathscr{F}_{k-1}] = 0$$

z nezávislosti W_k^* na $\mathscr{F}_{k-1}$.

1) Pokud $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} W_k - W_k^*$ existuje konečná skoro jistě, potom

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N^*(y)} W_k^* - y - \sum_{k=1}^{N(y)} W_k + y] = 0$$

z věty 15 .

Po úpravě

$$\lim_{y\to\infty} E[N(y)] - E[N^*(y)] = \lim_{y\to\infty} \frac{E[\sum_{k=1}^{N(y)} w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]]}{w^*}.$$

Pokračujeme použitím Léviho věty k prohození limity a střední hodnoty, kde monotonie je zajištěna z poznámky 6.

$$\lim_{y\to\infty} E[N(y)] - E[N^*(y)] = \frac{E[\sum_{k=1}^{\infty} w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]]}{w^*}.$$

Znovu použijeme Léviho větu a tím dostaneme tvrzení.

$$\lim_{y\to\infty} E[N(y)] - E[N^*(y)] = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} w^* - E[W_k]}{w^*}.$$

2) Pokud $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} W_k^* - W_k$ je nekonečná na nějaké množině A, $P(A) > 0$, potom z věty 17

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]}{w^*} = \infty \text{ sj. } na\ A. \tag{2.108}$$

Z (2.108) máme implikaci

$$\frac{E[\sum_{k=1}^{\infty} w^* - E[W_k \mid \mathscr{F}_{n-1}]]}{w^*} = \infty.$$

A proto na pravé straně ve znění věty (2.107) je nekonečno. Z vyjádření (2.40), omezenosti $\frac{1}{w^*}E[\sum_{k=1}^{N(y)} W_k]$ dostáváme

$$E[N(y)] = \infty.$$

$E[N^*(y)] < \infty$ a na obou stranách rovnice ve znění věty (2.107) je nekonečno a proto tvrzení platí.

□

3. Appendix

3.1 Pomocné věty

Lemma 19. *Pro $a > 0$ a $c < 0$ platí nerovnost*

$$\max\{ax+b, cx+d\} \geq \frac{d-b}{a-c}$$

Důkaz. Nalezneme průsečík těchto dvou lineárnch funkcí

$$ax + b - cx - d = 0 \implies x = \frac{d-b}{a-c}.$$

A jelikož a-c > 0, tedy nedělíme nulou. Funkce ax+b je rostoucí, tedy její hodnoty jsou větší nebo rovno než daná konstanta na intervalu $[\frac{d-b}{a-c}, \infty)$ a funkce cx+d je klesající, tedy její hodnoty jsou větší nebo rovno než daná konstanta na intervalu $(-\infty, \frac{d-b}{a-c}]$, z čehož plyne lemma.

$\square$

Věta 20. Sigman, *str. 7 Stejnoměrná integrovatelnost.*
Nechť $\{X_n; n \in N\}$ je zprava spojitý $\mathscr{F}_n$-martingál. Nechť $\tau < \infty$ sj. je Markovský čas pro který platí $E[|X_\tau|] < \infty$. Nechť dále platí

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n|, \tau > n] = 0,$$

potom je $\{| X_{\tau\wedge n} |\}_{n\in\mathbb{N}}$ stejnoměrně integrovatelná,

Věta 21. Bhattacharya a Waymire (2007, *str. 43) Optional sampling theorem. Nechť $\{X_t; t \in T\}$ je zprava spojitý $\mathscr{F}_t$-martingál, kde $T = \mathbb{N}$ nebo $T = [0,\infty)$. Nechť $\tau < \infty$ sj. je Markovský čas a $\{| X_{\tau\wedge t} |\}_{t\in T}$, je stejnoměrně integrovatelná, potom*

$$E[X_\tau] = E[X_0].$$

Věta 22. Lachout (a, *str. 35) Doobova věta*
Nechť X je supermartingal spojitý zprava vzhledem k filtraci $\{\mathscr{F}_n\}$, neboli

$$X_s \geq E[X_t \mid \mathscr{F}_s]$$

pro $0 \leq s \leq t < \infty$. Dále nechť platí

$$\sup_{t>0} E[X_t^-] < \infty,$$

potom existuje náhodná, skoro jistě konečná veličina Z taková, že platí $\lim_{t\to\infty} X_t = Z$ sj.

Věta 23. Lachout (a, *str. 40) Nechť $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je submartingal. Pokud $(\sup\{X_n - X_{n-1}\}; n \in \mathbb{N})^+$ je integrovatelné, potom existuje reálná, náhodná veličina Z a $\Omega_0 \subseteq \Omega$ taková, že platí $\lim_{n\to\infty} X_n = Z$ na množině $[\omega; \omega \in \Omega_0, P(\Omega_0) = 1] \cap [\omega; \sup X_n(\omega); n \in \mathbb{N} < \infty]$.*

Věta 24. *Rataj, str. 37 Jegorovova věta*
Mějme pravděpodobnotní prostor $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. *Nechť* f_n, f *jsou reálné, měřitelné funkce na* Ω, f_n *konverguje k* f *sj. a zvolme* $\epsilon > 0$. *Pak existuej množina* $E \in \mathscr{F}$ *taková, že* $P(E) < \epsilon$ *a* f_n *konverguje stejnoměrně k* f *na* $\Omega \backslash E$.

Věta 25. *Lachout (b, str.66) Nechť je dán nerozložitelný homogenní Markovský řetězec s diskrétním časem a všechny jeho stavy jsou trvalé, neperiodické, potom platí*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{i,j}(n) > 0,\ i,j \in S.$$

Věta 26. *Pawlas, str.25 Nechť* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je submartingál. Pro* $k \in \mathbb{N}$ *označme* $Y_k = X_{k+1} - X_k$. *Pokud* $[sup_{n\ \in\ \mathbb{N}}\ Y_n]^+ \ \in\ L_1$, *potom existuje reálná náhodná veličina* X_∞ *taková, že* $X_n \to X_\infty$ *sj. s vlastností* $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) < \infty$.

Věta 27. *Pawlas, str.17 Nechť* $X_1, X_2, ...$ *jsou* F_n *martingaly a nechť* S, T *jsou* F_n *Markovské časy, pro které platí* $S < T < K < \infty$ *pro nějaké* $K \in \mathbb{N}$. *Potom* X_S, X_T *jsou integrovatelné a platí*

$$E[X_T \mid F_S] = X_S \quad sj.$$

Věta 28. *Pawlas, str.19 Nechť* $X_1, X_2, ...$ *jsou* F_n *martingaly a nechť* S, T *jsou* F_n *Markovské časy, pro které platí* $S \leq T < \infty$ *sj. Pokud existuje* $0 < c < \infty$ *takové, pro které platí*

$$T > n \implies E[|X_{n+1} - X_n| \mid F_n] \leq c \quad sj.\ ,$$

potom X_T *je integrovatelná a platí*

$$E[X_T \mid F_S] = X_S \quad sj.$$

A. Teorie obnovy

Tato kapitola je založena na práci Siegrist, kapitoly 1-3. Tato kapitola slouží pouze jako pomocná a svým značením je nezávislá na předchozích kapitolách.

A.1 Základní věty

Nechť $X_1,X_2,\dots$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin. $X_i \in [0,\infty)$, $\mathrm{E}[X_i] = \mu > 0$.

Značení. F je distribuční funkce X_1,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{A.1}$$

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{[S_i \le t]},\ \ t \in [0,\infty),$$

$$T_t = t - S_{N_t},\ t \in [0,\infty), \tag{A.2}$$

$$R_t = S_{N_t+1} - t,\ \ t \in [0,\infty). \tag{A.3}$$

Poznámka 9.

$$[S_{N_t} \le t - x] = [T_t \ge x] = [R_{t-x} > x],\ x \in [0,t],\ t \in [0,\infty). \tag{A.4}$$

Důkaz. První ekvivalence plyne z

$$[T_t \ge x] = [t - S_{N_t} \ge x] = [S_{N_t} \le t - x],\ x \in [0,t],\ t \in [0,\infty). \tag{A.5}$$

Poslední ekvivalence platí, jelikož vycházíme z toho, že jsou $X_1,X_2,\dots$ kladné, tedy

$$[S_{N_t} \le t - x] = [S_{N_t} \le S_{N_{t-x}}] = [S_{N_t} = S_{N_{t-x}}], \tag{A.6}$$

celkově

$$\begin{aligned}
[S_{N_t} \le t - x] &= [S_{N_t} = S_{N_{t-x}},\ S_{N_t} \le t] && \text{(A.7)}\\
&= [S_{N_t} = S_{N_{t-x}},\ S_{N_{t-x}} \le t] && \text{(A.8)}\\
&= [S_{N_{t-x}+1} > t] && \text{(A.9)}\\
&= [S_{N_{t-x}+1} - (t-x) > x]. && \text{(A.10)}
\end{aligned}$$

□

Poznámka 10.

$$\begin{aligned}
[T_{t+x} \ge x] &= [(t+x) - S_{N_{t+x}} \ge x] && \text{(A.11)}\\
&= [S_{N_{t+x}} \le t] && \text{(A.12)}\\
&= [S_{N_{t+x}} \le t, S_{N_t} \le t] && \text{(A.13)}\\
&= [S_{N_t+1} > t + x], x > 0. && \text{(A.14)}\\
& && \text{(A.15)}
\end{aligned}$$

Značení.
$$F_n(t) = P(S_n \leq t), t \in [0,\infty). \tag{A.16}$$

Definice 29. Funkce $M(t) = E[N_t]$, $t \in [0,\infty)$, se nazývá **funkce obnovy.**

Tedy $M(t) = E[N_t] = E\sum_{n=1}^{\infty} 1_{[S_n \leq t]} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$.

Věta 30. *$M(t)$ je konečná pro konečné t kladné.*

Důkaz. Označme si $\hat{X}_1 = \min\{X_1,L\}$ a $\hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \hat{X}_n$, $L > 0$. Potom
$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{[S_i \leq t]} \leq \sum_{i=1}^{\infty} 1_{[\hat{S}_i \leq t]} =: \hat{N}_t < \hat{N}_t + 1.$$

Důkaz pro shora omezené náhodné veličiny byl ve větě 9. Použili bychom $\hat{X}_n =: W_n^*$, $\hat{S}_n =: S_n^*$ a $\hat{N}_t + 1 =: N^*(t)$, $n \in \mathbb{N}, t \geq 0$. Z něj plyne, že $\hat{N}_t + 1$ je intgrovatelná a tedy i N_t.

$\square$

Definice 31. Řekněme, že funkce $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je **lokálně omezená**, pokud je omezená na $[0,t]$ pro všechna t z intervalu $[0,\infty)$.

Definice 32. Nechť f je měřitelná, lokálně omezená funkce a G je monotónní, zprava spojitá na $[0,\infty)$. **Konvolucí** f s G rozumíme $f * G$ definované vztahem
$$(f * G)(t) = \int_{(0,t]} f(t-s)dG(s) = \int_0^t f(t-s)dG(s),\ t \in [0,\infty).$$

Poznámka 11. Nechť F a G jsou monotónní, zprava spojité na $[0,\infty)$, f,g jsou měřitelné, lokálně omezené a $c \in \mathbb{R}$, potom
1) $F * G$ je také distribuční funkce na $[0,\infty)$ a platí $F * G = G * F$
2) $(f * G) * H = f * (G * H)$
3) $(f + g) * H = (f * H) + (g * H), (cf) * H = c(f * H)$
4) $f * (G + H) = (f * G) + (f * H), f * (cG) = c(f * G)$.

Poznámka 12. Všimneme si, že pro distribuční funkci F platí $F_n = F^{*n}$. F_n jsme si zavedli zde (A.16).

Důkaz. Pro $n = 2$, $F_2(t) = P(X_1 + X_2 \leq t) = P(X_1 \leq t - X_2) = \int_0^t F(t-x)dF(x) = F^{*2}$. Pro obecné n podobně indukcí.

$\square$

Definice 33. Nechť $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je měřitelná, lokálně omezená. Řekněme, že lokálně omezená funkce $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ **řeší rovnici obnovy**, pokud splňuje
$$\mathbf{u} = \mathbf{g} + \mathbf{u} * \mathbf{F}, \tag{A.17}$$

přičemž (A.17) se nazývá **rovnice obnovy**.

Poznámka 13. 1) Každá funkce s lokálně konečnou variací je lokálně omezená a měřitelná.
2) Dokážeme, že pokud je G distribuční funkce na $[0,\infty)$ a $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je měřitelná, lokálně omezená. Potom $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definovaná výrazem

$$g(t) = \int_0^t f(s)\, dG(s)$$

je taky lokálně omezená a měřitelná.

Důkaz. 2) Dokážeme, že $g(t)$ má konečnou variaci. Vezměme libovolné dělení $\Delta = \{0 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = t_0\}$ intervalu $[0,t_0]$, potom

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mid g(x_{k+1}) - g(x_k) \mid \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} \mid f(s) \mid \; dG(s) \right] \tag{A.18}$$

$$= D_{t_0} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} 1\, dG(s) \right] \tag{A.19}$$

$$\leq 2D_{t_0}, \tag{A.20}$$

kde D_{t_0} je konstanta z lokální omezenosti f, jenž závisí na t_0. Tato nerovnost platí pro všechna dělení, tedy i pro supremum, čímž dostáváme konečnost variace funkce g.

□

Věta 34. *Pro M a distribuční funkci F platí rovnice obnovy* (A.17)

$$M = F + M * F. \tag{A.21}$$

Důkaz. Rozepíšeme si $M(t)$ jako

$$M(t) = E[N_t] \tag{A.22}$$

$$= E[E[N_t \mid X_1]] \tag{A.23}$$

$$= \int_0^\infty E[N_t \mid X_1 = s]\, dP_X(s) \tag{A.24}$$

$$= \int_0^\infty E[N_t \mid X_1 = s]\, dF(s) \tag{A.25}$$

$$= \int_0^t E[N_t \mid X_1 = s]\, dF(s) + \int_t^\infty E[N_t \mid X_1 = s]\, dF(s). \tag{A.26}$$

Jelikož $[X_1 > t] \subseteq [N_t = 0]$, potom platí

$$E[N_t \mid X_1 = s].1_{[s>t]} = 0. \tag{A.27}$$

Na množině $[X_1 \leq t]$

$$E[N_t \mid X_1 = s].1_{[s\leq t]} = E[\sum_{j=1}^{\infty} 1_{[\sum_{k=1}^{j} X_k \leq t]} \mid X_1 = s].1_{[s\leq t]} \tag{A.28}$$

$$= E[1 + \sum_{j=2}^{\infty} 1_{[\sum_{k=1}^{j} X_k \leq t]} \mid X_1 = s].1_{[s\leq t]} \tag{A.29}$$

Použijeme substituci $j = i + 1$.

$$E[1 + \sum_{j=2}^{\infty} 1_{[\sum_{k=1}^{j} X_k \leq t]} \mid X_1 = s].1_{[s \leq t]} = E[1 + \sum_{i=1}^{\infty} 1_{[\sum_{k=1}^{i+1} X_k \leq t]} \mid X_1 = s].1_{[s \leq t]} \tag{A.30}$$

$$= E[1 + \sum_{i=1}^{\infty} 1_{[\sum_{k=2}^{i+1} X_k \leq t - X_1]} \mid X_1 = s].1_{[s \leq t]}. \tag{A.31}$$

Celkem tedy dostáváme pro $s \in [0,t]$ na $[X_1 \leq t]$

$$E[N_t \mid X_1 = s].1_{[s \leq t]} = [1 + \sum_{i=1}^{\infty} E[1_{[\sum_{k=2}^{i+1} X_k \leq t - X_1]} | X_1 = s]].1_{[s \leq t]} \tag{A.32}$$

$$= [1 + E \sum_{i=1}^{\infty} [1_{[\sum_{k=2}^{i+1} X_k \leq t - s]}].1_{[s \leq t]} \tag{A.33}$$

$$= [1 + M(t - s)].1_{[s \leq t]}. \tag{A.34}$$

Tedy pro $M(t)$ dostáváme z (A.27) a (A.34)

$$M(t) = \int_0^t 1 + M(t - s)\, dF(s) = F(t) + (M * F)(t). \tag{A.35}$$

Nyní jen ověříme, že $M(t)$ je skutečně lokálně omezená, ale to plyne z toho, že je monotónní a konečná pro všechna t.

□

Věta 35. *Předpokládejme, že $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je měřitelná a lokálně omezená, potom existuje právě jedna lokálně omezená funkce u, která řeší rovnici $u = g + u * F$, navíc u je tvaru*

$$u = g + g * M. \tag{A.36}$$

Důkaz. Nejdříve ověříme, že (A.36) je lokálně omezená.

$$u(t) = g(t) + g * M(t) = g(t) + \int_0^t g(t - s) dM(s) \tag{A.37}$$

$$\leq D_{t_0}(g) + D_{t_0}(g) \int_0^t 1\, dM(s) \tag{A.38}$$

$$\leq D_{t_0}(g) + D_{t_0}(g) M(t_0) < \infty,\ t \in [0,t_0],\ t_0 \in [0,\infty), \tag{A.39}$$

kde $D_{t_0}(g)$ je majoranta závisející na t_0 z definice lokální omezenosti funkce g. Tedy i funkce u je lokálně omezená.

Rozepíšeme výraz

$$u * F = (g + g * M) * F \tag{A.40}$$

$$= g * F + g * M * F \tag{A.41}$$

z linearity integrálu, vlastnost 3) z poznámky 11. Z věty 34 platí, že $M - F = M * F$. Tedy použitím vlastnosti 4)

$$u * F = g * F + g * (M - F) = g * F + g * M - g * F = g * M = u - g.$$

Tedy $u = g + u * F$. Nyní pro spor předpokládejme, že v je další lokálně omezené řešení obnovy a označme $w = u - v$. Pak w je také lokálně omezená a

$$w * F = (u - v) * F = u * F - v * F = (u - g) - (v - g) = u - v = w$$

z vlastnosti 3). Tedy

$$w = w * F = w * F * F = w * F^{*n}, n \in \mathbb{N}.$$

$\mid w(s) \mid \leq D_t,$ pro $D_t \in \mathbb{R}$ z definice lokální omezenosti 31, $0 \leq s \leq t$.

$$\mid w(t) \mid = \mid w * F^{*n}(t) \mid \leq \int_0^t \mid w(t-s) \mid \; dF^{*n}(s) \leq D_t \int_0^t dF^{*n}(s) = D_t F^{*n}(t).$$

Z věty 30 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t) < \infty$, což implikuje

$$\lim_{n \to \infty} F^{*n}(t) = 0,$$

což nám dává $w(t) = 0$ pro $\forall t \in [0,\infty)$, tedy $u = v$.

□

Věta 36. *Pro t ležící v intervalu $[0,\infty)$ a pro y z $[0,t]$ platí*

$$P(T_t \geq y) = F^c(t) + \int_0^{t-y} F^c(t-s)\, dM(s), \tag{A.42}$$

kde $F^c(x) = 1 - F(x)$.

Důkaz. Z (A.4)

$$[S_{N_t} \leq t - x] = [T_t \geq x] = [R_{t-x} > x],\ x \in [0,t],\ t \in [0,\infty). \tag{A.43}$$

Rozdělíme důkaz na dvě části.
a) Pokud $y = t$,

$$P(T_t \geq y |\, y = t) = P(R_{t-y} > t |\, y = t) = P(R_0 > t) = P(X_1 > t) = F^c(t).$$

Integrál na pravé straně (A.42) je rovný 0, tedy tvrzení platí pro $y = t$.
b) Pokud $y < t$

$$P(T_t \geq y) = P(R_{t-y} > y) = \int_0^{\infty} P(R_{t-y} > y \mid X_1 = s)\, dF(s).$$

Budeme postupovat podobně jako v důkazu věty 34 a ukážeme

$$P(R_{t-y} > y \mid X_1 = s) = P(R_{t-y-s} > y),\ \forall s \in [0,t-y],\ y < t.$$

Rozepíšeme si

$$P(T_t \geq y) = P(R_{t-y} > y) \tag{A.44}$$
$$= \int_0^\infty P(R_{t-s} > y \mid X_1 = s)\, dF(s),\ y \in [0,t) \tag{A.45}$$

1) Dle (A.4) a pro $s \in [0,t-y]$, $n \in \mathbb{N}$

$$P(S_n \leq t-y,\ N_t = n \mid X_1 = s) \tag{A.46}$$
$$=P(S_n - X_1 \leq t-y-s,\ N_t = n \mid X_1 = s) \tag{A.47}$$
$$=P(S_{n-1} \leq t-y-s, N_{t-s} = n-1). \tag{A.48}$$

Jevy $[N_t = 0]$ a $[X_1 \leq t-y]$ jsou disjunktní, potom

$$P(N_t = 0 | X_1 = s) = 0,\ s \in [0,t-y]$$

Z A.48 a z faktu, že N_t je konečná skoro jistě, plyne

$$P(S_{N_t} \leq t-y \mid X_1 = s,) \tag{A.49}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t-y,\ N_t = n \mid X_1 = s,) \tag{A.50}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{n-1} \leq t-y-s,\ N_{t-s} = n-1) \tag{A.51}$$
$$= P(S_{N_{t-s}} \leq t-y-s) = P(R_{t-y-s} > y). \tag{A.52}$$

2) Nyní uvažujme případ $s \in (t-y,t]$. Jevy $[R_{t-y} > y] = [S_{N_t} \leq t-y]$ a $[t-y < X_1 \leq t]$ jsou neslučitelné, proto

$$P(R_{t-y} > y \mid X_1 = s) = 0,\ \forall s \in (t-y,t].$$

3) Z (A.4), $[R_{t-y} \leq y] = [S_{N_t} > t-y]$ je jev disjunktni s jevem $[N_t = 0] \supseteq [X_1 > t]$. Což znamená, že $P(R_{t-y} \leq y \mid X_1 > t) = 0$, potom

$$P(R_{t-y} > y \mid X_1 > t) = 1 - P(R_{t-y} \leq y \mid X_1 > t) = 1.$$

Pro případ, kdy $y < t$

$$P(T_t \geq y) \tag{A.53}$$
$$= P(R_{t-y} > y) \tag{A.54}$$
$$= \int_0^\infty P(R_{t-y} > y \mid X_1 = s)\, dF(s) \tag{A.55}$$
$$= \int_0^{t-y} P(R_{t-y-s} > y)\, dF(s) + \int_{t-y}^{t} 0\, dF(s) + F^c(t) \tag{A.56}$$
$$= \int_0^{t-y} P(R_{t-y-s} > y)\, dF(s) + F^c(t),\ y < t. \tag{A.57}$$

a z již dokázaného

$$P(T_t \geq y) = F^c(t),\ y = t. \tag{A.58}$$

Tedy celkově

$$P(T_t \geq y) = \int_0^{t-y} P(R_{t-y-s} > y)\, dF(s) + F^c(t),\ y \leq t. \tag{A.59}$$

Označme

$$u_y(t) = P(T_t \geq y),\ y \leq t. \tag{A.60}$$

Přepíšeme (A.59) pomocí (A.60)

$$u_y(t) = \int_0^t u_y(t-s) dF(s) + F^c(t).$$

Potom předešlá rovnice je rovnice obnovy tvaru

$$u_y = u_y * F + F^c,$$

která má jednoznačné řešení z věty 35 $u_y = F^c + F^c * M$

$$P(T_t \geq y) = P(R_{t-y} > y) = F^c(t) + \int_0^{t-y} F^c(t-s) dM(s);\ t \in [0,\infty),\ y \in [0,t]. \tag{A.61}$$

□

A.2 Věta obnovy a její důsledky pro nearitmetický případ

Definice 37. Řekněme, že náhodná veličina X je **aritmetická** s parametrem $\lambda > 0$, pokud

$$P(X \in \{\lambda z; z \in \mathbb{Z}\}) = 1 \tag{A.62}$$

Definice 38. Náhodná veličina X je **nearitmetická** , pokud není aritmetická.

Předpoklad 4. Nyní budeme navíc předpokládat, že X_1 je nearitmetická náhodná veličina

Věta 39. *Věta obnovy.*
Pro $h > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} M(t+h) - M(t) = \frac{h}{\mu}. \tag{A.63}$$

Důkaz. Důkaz viz Feller, str. 360.

□

Věta 40. *Pokud X_1 je nearitmetická náhodná veličina, potom existuje K nezáporné takové, že pro všechna h nezáporná a t nezáporné platí*

$$0 \leq M(t+h) - M(t) \leq K(1+h).$$

Důkaz. Z věty 39 existuje kladné t_0 takové, že pro všechna $t \geq t_0$ platí $M(t+1)$ - $M(t) < \frac{1}{\mu} + 1$. Pro tato t teda platí

$$M(t+h) - M(t) \leq M(t + \lceil h \rceil) - M(t) = \sum_{n=1}^{\lceil h \rceil} M(t+n) - M(t+n-1) \leq$$

$$\leq \lceil h \rceil (\frac{1}{\mu} + 1) \leq (h+1)(\frac{1}{\mu} + 1).$$

Proto

$$M(t+h) - M(t) \leq (h+1)(\frac{1}{\mu} + 1). \tag{A.64}$$

Pro $0 \leq t \leq t_0$

$$M(t+h) - M(t) \leq M(t+h) \leq M(t_0 + h).$$

Použijeme již dokázané (A.64) pro $t = t_0$

$$M(t_0 + h) \leq (h+1)(\frac{1}{\mu} + 1) + M(t_0) \leq (h+1)(\frac{1}{\mu} + 1 + M(t_0)).$$

Pro K $= \max\{\frac{1}{\mu} + 1, \frac{1}{\mu} + 1 + M(t_0)\}$ dostáváme tvrzení.

□

Věta 41. *Pro nearitmetický proces platí*

$$\lim_{t\to\infty} P(T_t \geq y) = \frac{1}{\mu} \int_y^\infty F^c(x)\, dx,$$

pro všechna y ležící v intervalu $[0,\infty)$.

Důkaz. Z tvrzení věty 36

$$P(T_t \geq y) = F^c(t) + \int_0^{t-y} F^c(t-s)\, dM(s).$$

Nyní budeme upravovat pouze druhý člen , abychom na něj mohli použít větu 39.

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{t-y} F^c(t-s)\, dM(s) = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t-y} \int_{t-s}^\infty dF(w)\, dM(s) \tag{A.65}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_y^\infty (\int_{\max\{0,t-w\}}^{t-y} dM(s))\, dF(w) \tag{A.66}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_y^\infty [M(t-y) - M(\max\{0,t-w\})]\, dF(w). \tag{A.67}$$

Z věty 39 platí

$$\lim_{t\to\infty} [M(t-y) - M(\max\{0,t-w\})] \tag{A.68}$$

$$= \lim_{t\to\infty} [M(t-w+w-y) - M(\max\{0,t-w\})] \tag{A.69}$$

$$= \frac{w-y}{\mu},\ w > y, y \in [0,\infty), \tag{A.70}$$

jelikož w je pevné a $t \to \infty$. Použijeme Lebesguegovu větu o majorantě získané ve větě 40.

$$\lim_{t\to\infty} \int_y^\infty [M(t-y) - M(\max\{0,t-w\})]\, dF(w) = \tag{A.71}$$
$$= \int_y^\infty \frac{w-y}{\mu}\, dF(w) = \frac{1}{\mu}\int_y^\infty \int_y^w dx\, dF(w) \tag{A.72}$$
$$= \frac{1}{\mu}\int_y^\infty \int_x^\infty dF(w)dx = \frac{1}{\mu}\int_y^\infty F^c(x)\, dx. \tag{A.73}$$

Jelikož $X \geq 0$, tedy $\int_y^\infty F^c(x)\, dx \leq \int_0^\infty F^c(x)\, dx = \mu < \infty$ a vše je dobře definováno. Nezapomeňme na první člen, $\lim_{t\to\infty} F^c(t+y) = 0$, čímž dostáváme tvrzení.

□

Poznámka 14. Lebesgue–Stieltjesův integrál $\int_a^b F^c(t-s)\, dM(s)$ se definuje na polouzavřeném intervalu $(a,b]$. Což znamená, že v (A.65) integruji přes množinu $0 < s \leq t-y$ a podobně o řádek níže přes množinu $\max\{0,t-w\} < s \leq t-y$.

Důsledek 2. *Limita distribuční funkce má následující tvar,*

$$\lim_{t\to\infty} P(T_t < y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y F^c(z)\, dz. \tag{A.74}$$

Důkaz. Tvrzení plyne z vyjádření střední hodnoty pro skoro jistě nezáporné náhodné veličiny
$$\mu = \int_0^\infty F^c(z)\, dz.$$

□

Poznámka 15. Funkce
$$y \mapsto \frac{1}{\mu}\int_0^y F^c(z)\, dz, \ \ y \geq 0 \tag{A.75}$$
je spojitá distribuční funkce.

A.3 Aritmetický případ

Předpoklad 5. Oproti sekci A.2 nyní předpokládejme, že $X_1 \geq 0$ je aritmetická s $E[X_1] > 0$.

Věta 42. *Pro posloupnost $X_1, X_2, \ldots$ označme*

$$A_c := \{x; \exists n \in \mathbb{N}_0, x = cn\}, \ \ c \in \mathbb{N}, \tag{A.76}$$
$$b := \sup\{c \in \mathbb{N}; P(X_1 \in A_c = 1)\} \ \in \mathbb{N}, \tag{A.77}$$
$$T_k := bk - S_{N_{bk}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{A.78}$$

Za předpokladu 4 platí pro i přirozené

$$\lim_{k\to\infty} P(T_k \geq bi) = \int_i^\infty \frac{bP(X_1 > xb)}{E[X_1]} dx. \tag{A.79}$$

Důkaz. Dokažme to pro b = 1. $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ sj. , my však bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že tato rovnost platí jistě, jinak bychom se omezili na množinu, kde to platí jistě. Uvažujeme pevné $y > 0$. Posloupnost $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je Markovský řetězec. Pro i,j,$k \in \mathbb{N}$,

$$1)\ (T_k = i) \implies [(X_{1+N_k} = i+1) \iff (T_{k+1} = 0)] \tag{A.80}$$
$$2)\ (T_k = i) \implies [(X_{1+N_k} > i+1) \iff (T_{k+1} = i+1)] \tag{A.81}$$

Označme si

$$q_i(k) := P(T_k = i \mid T_{k-1} = i-1), k \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}_0.$$

Pokud $T_k = i$, potom již nutně $X_{1+N_k} \geq i$ a použitím (A.80) a (A.81) dostaneme

$$P(T_{k+1} = j \mid T_k = i) = 0, j+1 \neq i, j+1 \neq 0. \tag{A.82}$$

Ukážeme, že $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je homogenní.

$$q_i(k) = P(T_k = i \mid T_{k-1} = i-1) \tag{A.83}$$

Využijeme implikaci 3 v (A.80) a rozepíšeme výraz $T_{k-1} = i-1$

$$\tag{A.84}$$
$$q_i(k) = P(X_{1+N_{k-1}} > i \mid (k-1) - S_{N_{k-1}} = i-1) \tag{A.85}$$

Z definice N_{k-1}, $[N_{k-1} = n] = [S_n \leq k-1 < S_n + X_{n+1}]$ tedy

$$P(X_{1+N_{k-1}} > i \mid (k-1) - S_{N_{k-1}} = i-1, N_{k-1} = n) \tag{A.86}$$
$$= P(X_{1+n} > i \mid (k-1) - S_n = i-1, S_n \leq k-1 < S_n + X_{n+1}) \tag{A.87}$$
$$= P(X_{1+n} > i \mid X_{n+1} > i-1), \tag{A.88}$$

kde poslední rovnost plyne z toho, že S_n je nezávislé s X_{n+1}. Toto odvození platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$. Proto z věty o úplné pravděpodobnosti,

$$q_i(k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_k = i \mid T_{k-1} = i-1, N_{k-1} = n) P(N_{k-1} = n \mid T_{k-1} = i-1) \tag{A.89}$$
$$= P(X_{1+n} > i \mid X_{n+1} > i-1) \sum_{n=0}^{\infty} P(N_{k-1} = n \mid T_{k-1} = i-1) \tag{A.90}$$
$$= P(X_{1+n} > i \mid X_{n+1} > i-1). \tag{A.91}$$

Hodnota $q_i(k)$ nezáleží na parametru k, tedy jsme dokázali homogenitu Markovského řetězce $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Tuto hodnotu si označíme $q_i = q_i(k), k \in \mathbb{N}$. Poskládejme matici přechodu

Matice přechodu má tedy tvar

$$P := \begin{bmatrix} 1-q_1 & q_1 & 0 & \dots \\ 1-q_2 & 0 & q_2 & \dots \\ 1-q_3 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Nalezneme stacionární rozdělení pomocí soustavy rovnic

$$\pi^{\mathsf{T}} = \pi^{\mathsf{T}} P,$$

což vede na řešení

$$\pi_i = \pi_0 \prod_{n=1}^{i} q_n.$$

Chceme ukázat, že stacionární řešení existuje. Nalezneme lepší vyjádření π_i použitím vyjádření q_i z (A.91)

$$\begin{aligned}
\pi_i &= \pi_0 \prod_{n=1}^{i} q_n && \text{(A.92)}\\
&= \pi_0 \prod_{n=1}^{i} P(X_1 > n \mid X_1 \geq n) && \text{(A.93)}\\
&= \pi_0 \prod_{n=1}^{i} \frac{P(X_1 > n)}{P(X_1 \geq n)} && \text{(A.94)}\\
&= \pi_0 \frac{P(X_1 > 1)}{P(X_1 > 0)} \frac{P(X_1 > 2)}{P(X_1 > 1)} \cdots \frac{P(X_1 > i)}{P(X_1 > i-1)} && \text{(A.95)}\\
&= \pi_0 \frac{P(X_1 > i)}{P(X_1 \geq 1)} && \text{(A.96)}\\
&= \pi_0 P(X_1 > i \mid X_1 \geq 1). && \text{(A.97)}
\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}
1 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \frac{1}{\pi_0} \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 > k \mid X_1 \geq 1) = \frac{1}{\pi_0} E[X_1 \mid X_1 \geq 1] && \text{(A.98)}\\
\implies \pi_0 = \frac{1}{E[X_1 \mid X_1 \geq 1]} && \text{(A.99)}\\
\implies \pi_i = \frac{P(X_1 > i \mid X_1 \geq i)}{E[X_1 \mid X_1 \geq 1]} = \frac{P(X_1 > i)}{E[X_1]}, \quad i \in \mathbb{N}. && \text{(A.100)}
\end{aligned}$$

Stacionární rozdělení existuje. Využijeme větu 25, proces $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je homogenní a nerozložitelný z tvaru matice. Budeme chtít ukázat, že každý stav $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je aperiodický. Jelikož máme nerozložitelnost, stačí vyšetřit aperiodicitu pro $i = 0$. Pro spor předpokládejme, že tento stav má periodu $d > 1$. Potom z vyjádření q_i v (A.91) a tvaru matice přechodu $P(X_1 = k \mid X_1 \geq k) = 0$,a tedy $P(X_1 = k) = 0$ pro $k \in \mathbb{N} \setminus \{(d-1)k; k \in \mathbb{N}\}$. To znamená, že $P(X_1 \in A_{b(d-1)}) = 1$, což je spor s volbou našeho b.

tedy každý stav je aperiodický a proto pro všechna i přirozené

$$\lim_{k\to\infty} q_i = \lim_{k\to\infty} P(T_{k+1} = i+1 \mid T_k = i) = \pi_{i+1}.$$

Finálně

$$\lim_{k\to\infty} P(T_{k+1} \geq i+1) = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=i+1}^{\infty} P(T_{k+1} = m) \tag{A.101}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{m=i+1}^{\infty} P(T_{k+1} = m \mid T_k = m-1)) \tag{A.102}$$

$$= \sum_{m=i+1}^{\infty} \pi_m \tag{A.103}$$

$$= \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{P(X_1 > m)}{E[X_1]} \tag{A.104}$$

$$= \sum_{m=i+1}^{\infty} \int_m^{m+1} \frac{P(X_1 > m)}{E[X_1]} dx \tag{A.105}$$

$$= \sum_{m=i+1}^{\infty} \int_m^{m+1} \frac{P(X_1 > x)}{E[X_1]} dx \tag{A.106}$$

$$= \int_{i+1}^{\infty} \frac{P(X_1 > x)}{E[X_1]} dx. \tag{A.107}$$

Z (A.101) a (A.107)

$$\lim_{k\to\infty} P(T_k \geq i) = \int_i^{\infty} \frac{P(X_1 > x)}{E[X_1]} dx. \tag{A.108}$$

Nyní pokud $b \neq 1$, potom označme

$$\tilde{X}_k = \frac{X_k}{b}, k \in \mathbb{N}. \tag{A.109}$$

$$\tilde{S}_k = \frac{S_k}{b}, k \in \mathbb{N}. \tag{A.110}$$

$$\tilde{T}_k = \frac{T_k}{b} = k - \tilde{S}_{\tilde{N}_k}, k \in \mathbb{N}. \tag{A.111}$$

$$\tilde{N}_k = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{[\tilde{S}_i \leq k]}, k \in \mathbb{N}. \tag{A.112}$$

Pro náhodné veličiny $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$,.. platí již dokázané (A.108), tedy

$$\lim_{k\to\infty} P(T_k \geq bi) = \lim_{k\to\infty} P(\tilde{T}_k \geq i) = \int_i^{\infty} \frac{P(\tilde{X}_1 > x)}{E[\tilde{X}_1]} dx = \int_i^{\infty} \frac{bP(X_1 > xb)}{E[X_1]} dx. \tag{A.113}$$

Čímž je věta dokázána.

□

Poznámka 16. Výsledek věty 42 je srovnatelný s tvrzením věty 41 pro nearitmetický případ.

Předpoklad 6. X_1,X_2,... je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s kladnou střední hodnotou.

Značení.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ S_0 = 0 \tag{A.114}$$
$$\tau_0 = 0 \tag{A.115}$$
$$\tau_k = \inf\{n \in \mathbb{N}; S_n > S_{\tau_{k-1}}\}, k \in \mathbb{N} \tag{A.116}$$
$$\tilde{X}_k = X_{\tau_{k-1}+1} + X_{\tau_{k-1}+2} + ... + X_{\tau_k} \tag{A.117}$$
$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k,\ \tilde{S}_0 = 0 \tag{A.118}$$
$$N(y) = \inf\{n \in \mathbb{N}; S_n > y\} < \infty\ sj. \tag{A.119}$$
$$\tilde{N}(y) = \inf\{n \in \mathbb{N}; \tilde{S}_n > y\} < \infty\ sj. \tag{A.120}$$
$$\tilde{N}_y = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{[\tilde{S}_i \le t]} < \infty\ sj.. \tag{A.121}$$

Poznámka 17. Pro $y \geq 0$ platí vztah

$$\tilde{N}_y + 1 = N(y)$$

Věta 43. *Nechť pro* X_1,X_2,... *platí předpoklad 6. Potom platí pro* $\xi > 0$

$$\lim_{y\to\infty} P(S_{N(y)} - y \leq \xi) = \frac{1}{E[\tilde{X}_1]} \int_0^{\xi} P(\tilde{X}_1 > z)\, dz,\ \ \xi \geq 0. \tag{A.122}$$

Důkaz.
Zřejmě

$$\inf\{n \in \mathbb{N}; S_n > y\} = \tau_{k_0} \iff \inf\{n \in \mathbb{N}; \tilde{S}_n > y\} = k_0$$

a proto

$$\tilde{S}_{\tilde{N}(y)} = S_{N(y)}\ \ \text{sj.}$$

Z Blackwell (1953, str. 316) $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$,... jsou nezávislé, stejně rozdělené, kladné náhodné veličiny.
Rozdělíme zbytek důkazu na dva případy podle toho, zda X_1 je aritmetická nebo ne.

a) Pokud X_1 není aritmetická, potom $\tilde{X}_1$ taktéž není aritmetická a proto z poznámek A.11 , 17 a z věty 41

$$\lim_{y\to\infty} P(S_{N(y)} - y \leq \xi) = \lim_{y\to\infty} P(\tilde{S}_{\tilde{N}(y)} - y \leq \xi) = \frac{1}{E[\tilde{X}_1]} \int_0^{\xi} P(\tilde{X}_1 > z)\, dz,\ \ \xi \geq 0 \tag{A.123}$$

b) Pokud X_1 je aritmetická, potom $\tilde{X}_1$ je aritmetická s parametrem b,

$$A_c := \{x; \exists z \in \mathbb{Z}, x = cz\},\ \ c \in \mathbb{N}, \tag{A.124}$$
$$b := \sup\{c \in \mathbb{N}; P(X_1 \in A_c = 1)\}, \tag{A.125}$$

a proto z poznámek A.11 , 17 a z věty 42

$$\lim_{k\to\infty} P(S_{N(kb)} - kb \leq b\xi) = \lim_{y\to\infty} P(S_{N(y)} - y \leq b\xi) \tag{A.126}$$

$$= \int_0^{\xi} \frac{bP(X_1 > xb)}{E[X_1]} dx \tag{A.127}$$

$$= \int_0^{b\xi} \frac{P(X_1 > z)}{E[X_1]} dx. \tag{A.128}$$

(A.129)

Pro $\hat{\xi} = b\xi$ dostáváme tvrzení. Navíc tato distribuční funkce je spojité v ξ.

$\square$

Závěr

Zformulovali jsme matematický model založený na Markovském řetězci pro naši situaci. Ukázali jsme, že váhový vektor b^* maximalizující střední hodnotu nemusí být unikátní, nicméně hodnota náhodných veličin $W_n^* = \log(\mathbb{X}_n^{\intercal} b^*)$ skoro jistě už ano. Dokázali jsme pár vět o prostoru těchto váhových vektorů b a zavedli pojem strategie.
Abychom mohli zkoumat asymptotické výsledky, museli jsme nejprve zjistit, jak vypadá

$$\lim_{y \to \infty} P(S_{N(y)} - y < \xi).$$

K tomu účelu jsme vybudovali základy teorie obnovy s nezápornými náhodnými veličinami a pak použili Blackwellovu větu, s kterou jsme přešli z kladných náhodných veličin na náhodné veličiny s kladnou střední hodnotou.

Ve třetí, finální kapitole porovnáváme libovolnou strategii Λ s Λ^*. První důležitý výsledek přinesla věta 16, která tvrdí, že pokud budeme používat jinou strategii než Λ^*, potom nemůžeme očekávat větší asymptotický zisk, než kdybychom se řídili právě strategií Λ^*. Druhá důležitá věta je věta 18, která porovnává očekávanou dobu nabytí asymptoticky velkého majetku za strategie Λ^* oproti jiné, libovolné Λ. Ukazuje se, že užitím optimální strategie můžeme vždy očekávat, že nabydeme asymptoticky velkého bohatství dříve a nejen to, ale pokud strategie Λ nekonverguje k Λ^*, potom očekávaná hodnota rozdílu těchto časů roste nade všechny meze.

Seznam použité literatury

BHATTACHARYA, R. N. a WAYMIRE, E. C. (2007). *A basic course in probability theory*. ISBN 978-0-387-71938-2.

BLACKWELL, D. (1953). Extension of a renewal theorem. *Pacific J. Math*, **3** (1991), 315–320.

BREIMAN, L. (1961). Optimal gambling systems for favorable games. In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics*, pages 65–78, Berkeley, Calif., 1961. University of California Press. URL https://projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200512159.

FELLER, W. An introduction to probability theory and its applications, volume 2, 2nd edition. *1991.*

LACHOUT, P. Diskrétní martingaly. Skripta k výuce předmětu Teorie Pravděpodobnosti 2 na MMF UK.

LACHOUT, P. Poznámky a doplňky k přednášce náhodné procesy i. Skripta k výuce předmětu Náhodné procesy I na MMF UK.

PAWLAS, Z. Teorie pravděpodobnosti 2 (nmsa405). Skripta k výuce předmětu Teorie pravděpodobnosti 2 na MMF UK.

RATAJ, J. Teorie míry a integrálu. Skripta k výuce předmětu Teorie míry a integrálu na MMF UK.

SIEGRIST, K. Random services. https://www.randomservices.org/random/renewal/index.html. Accessed: July 17, 2019.

SIGMAN, K. Martingales i: Discrete time. Skripta k výuce předmětu IEOR 4701 na Columbia University in the City of New York.