MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Marek Malý

Stein-Weissovy gradienty

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D.
Studijní program: Matematika B1101
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Poděkování.

Rád bych poděkoval doc. RNDr. Romanu Lávičkovi, Ph.D., za možnost psát tuto bakalářskou práci a za jeho vedení. Také mu děkuji za jeho věcné připomínky k mojí práci, za jeho trpělivost a ochotu konzultovat i při nastalých nesnázích.

Název práce: Stein-Weissovy gradienty

Autor: Marek Malý

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: V této práci je popsána konstrukce rotačně invariantních diferenciálních operátorů prvního řádu na Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$, jak ji vymysleli E. Stein a G. Weiss. Pro tuto konstrukci ukážeme, jak se najde ireducibilní rozklad tenzorového součinu reprezentací grupy $Spin(n)$ a dokážeme rotační invarianci operátoru gradientu. Nakonec použijeme Stein-Weissovu konstrukci na odvození některých již známých diferenciálních operátorů. Jmenovitě ukážeme konstrukci Diracova operátoru na $\mathbb{R}^n$ a Hodge-de Rhamova systému diferenciálních rovnic.

Klíčová slova: spin grupa, Cliffordova algebra, invariantní diferenciální operátory, Diracův operátor, Hodge-de Rhamův systém diferenciálních rovnic, Cauchy-Riemannovy podmínky

Title: Stein-Weiss gradients

Author: Marek Malý

Institute: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Roman Lávička, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: In this bachelor thesis, we describe the construction of rotation invariant differential operators of first order on the Euklidean space $\mathbb{R}^n$ given by E. Stein and G. Weiss. For this construction we show how to find an irreducible decomposition of a tensor product of representations of group $Spin(n)$ into irreducible subrepresetations. We shall also prove the rotation invariance of the gradient operator. Then we apply the Stein-Weiss construction to produce some of well-known differential operators. Namely, we construct the Dirac operator in $\mathbb{R}^n$ and Hodge-de Rham system of differential equations using this method.

Keywords: spin group, Clifford algebra, invariant differental operators, the Dirac operator, Hodge-de Rham system of differential equations, Cauchy-Riemann equations

Obsah

Úvod

Cílem práce je seznámit čtenáře se Stein-Weissovou konstrukcí rotačně invariantních diferenciálních operátorů prvního řádu na Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Tuto konstrukci je možno nalézt v textu Stein a Weiss [5], ze kterého práce velmi významně čerpá. V průběhu práce také aplikujeme tento postup pro konstrukci několika důležitých diferenciálních operátorů. Uvedená Stein-Weissova konstrukce je jedním ze základních kamenů studia harmonické analýzy funkcí.

V první kapitole se zaměříme na zopakování a zavedení potřebných pojmů z teorie reprezentací. Zvláště si uvedeme reprezentace dvou Lieových grup, a to grupu rotací $SO(n)$ a jejího dvojnásobného nakrytí $Spin(n)$. V práci se budeme omezovat výhradně na konečně dimenzionální reálné nebo komplexní reprezentace těchto grup. Tato teorie slouží k následné definici „rotačně invariantního operátoru“. V závěru kapitoly si uvedeme postup, jak rozložit tenzorový součin dvou jednoduchých reprezentací na konečný direktní součin irreducibilních podreprezentací. Tento rozklad budeme v dalším potřebovat pro definici Stein-Weissovy kontrukce. Postupů, jak najít ireducibilní rozklad tenzorového součinu, je více (viz například Fulton a Harris [2]). My použijeme tzv. Klimykův algoritmus. Poté tento postup použijeme na rozklad součinu fundamentálních reprezentací a definující reprezentace.

V druhé kapitole popíšeme Stein-Weissovu konstrukci, jak je uvedená v textu Stein a Weiss [5, str. 168-171]. Cílem konstrukce je sestrojit invariantní diferenciální operátor pro hladké funkce, které jsou definované na $\mathbb{R}^n$ a které mají hodnoty v dané ireducibilní reprezentaci V grupy $Spin(n)$. Základní myšlenka tohoto postupu je složení operátoru gradientu ∇ s nějakou projekcí na část cílového prostoru $V \otimes \mathbb{C}^n$, která odpovídá nějaké ireducibilní podreprezentaci. Dokážeme, že samotný operátor gradientu je $Spin(n)$-invariantní. Poté tvrzení, že touto konstrukcí dostaneme skutečně invariantní operátor, už snadno plyne (uvedeme formální důkaz). V závěru kapitoly zmíníme tzv. zobecněné Cauchy-Riemannovy podmínky, které přímo navazují na předchozí výsledky a sestrojené operátory používají. Tyto podmínky lze využít při zjišťování harmonicity funkcí nebo subharmonicity mocnin funkcí v závislosti na dimenzi podkladového prostoru $\mathbb{R}^n$. Harmonická studie je uvedena v textech Gilbert a Murray [3] nebo Stein a Weiss [5].

V poslední třetí kapitole uvedeme příklady konstrukce známých operátorů. Uvedeme například konstrukci Diracova operátoru a také Hodge-de Rhamova systému. Nakonec ukážeme, že Stein-Weissova konstrukce pro dimenzi 2 dává klasické Cauchy-Riemannovy podmínky v komplexní rovině.

1. Reprezentační teorie

K definici rotačně invariantního operátoru budeme používat teorii reprezentací. Speciálně se budeme zabývat pouze komplexními konečně dimenzionálními reprezentacemi Lieových grup $SO(n)$ a $Spin(n)$, protože jejich teorie je známá a poměrně snadná.

Je známý fakt, že grupa $SO(n)$ je kompaktní Lieova grupa, ale není souvislá, zatímco grupa $Spin(n)$, která ji dvakrát nakrývá, již souvislá je (dokonce je i jednoduše souvislá). Proto se hodí studovat reprezentační teorii grupy $Spin(n)$, která je v tomto smyslu zobecněním a rozšířením reprezentační teorie grupy $SO(n)$, jak ukážeme později.

Pro modelování spin grupy $Spin(n)$ se používá Cliffordova algebra, jejíž konstrukci je možno najít ve třech provedeních v knize Gilbert a Murray [3]. My zde uvedeme jeden z možných postupů.

Poté uvedeme postup rozkladu tenzorového součinu dvou ireducibilních reprezentací na ireducibilní podreprezentace. Tento postup se opírá o znalosti z knihy Fulton a Harris [2].

Pro plné pochopení kapitoly budeme předpokládat, že čtenář zná základní pojmy spojené s teorií Lieových grup, tenzorového součinu a vnější algebry.

Připomeňme, že **reprezentace τ Lieovy grupy** G na vektorovém prostoru V je hladký homomorfismus grup $\tau : G \to GL(V)$. (Často se značí také (τ, V) nebo pouze V.) Čili pro každé $g \in G$ je $\tau(g)$ invertibilní lineární zobrazení z V do V. Pro Lieovu grupu $GL(V)$ uvažujme klasickou grupovou strukturu danou skládáním zobrazení a inverzním zobrazením.

Definice 1. *Ať (τ, V) je reprezentace Lieovy grupy G, pak o podprostoru $W < V$ řekneme, že je **invariantní podprostor** reprezentace τ, pokud pro každé $g \in G$ platí $\tau(g)(W) \subset W$.*

*Řekneme, že (τ, V) je **ireducibilní reprezentace** grupy G, pokud jediné invariantní podprostory jsou V a $\{0\}$.*

Definice 2. *Je-li (τ, V) reprezentace grupy G a $W < V$ je invariantní podprostor, pak $(\tau|_W, W)$, kde $\tau|_W$ značí reprezentaci danou restrikcemi zobrazení $(\tau(g))|_W$ pro všechny $g \in G$, nazveme **podreprezentací** reprezentace (τ, V).*

Definice 3. *Máme-li $(\tau_1, V_1), (\tau_2, V_2)$ reprezentace Lieovy grupy G, pak na **tenzorovém součinu** $V_1 \otimes V_2$ zavedeme **reprezentaci** $[\tau_1 \otimes \tau_2]$ tak, že pro každé $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ a každé $g \in G$ platí:*

$$[\tau_1 \otimes \tau_2](g)(v_1 \otimes v_2) = \tau_1(g)(v_1) \otimes \tau_2(g)(v_2).$$

Základním kamenem teorie operátorů na reprezentačních prostorech je tzv. Schurovo lemma, které specifikuje vlastnosti invariantních homomorfismů mezi dvěma reprezentačními prostory.

Definice 4. *Jsou-li (τ_U, U) a (τ_V, V) reprezentace Lieovy grupy G a $\varphi : U \to V$, pak φ je **invariantní operátor**, pokud pro každé $g \in G$ platí:*

$$\tau_V(g) \circ \varphi = \varphi \circ \tau_U(g).$$

Poznámka. Je-li φ homomorfismus, pak mluvíme o **invariantním homomorfismu**. Je-li φ navíc isomorfismus, pak mluvíme o invariantním isomorfismu.

Existuje-li mezi (τ_U,U) a (τ_V,V) nějaký invariantní isomorfismus, pak řekneme, že tyto **reprezentace jsou isomorfní**.

Poznámka. Často se invariantní operátor také nazývá jako „ekvivariantní operátor“ nebo „splétající zobrazení“.

Věta 1 (Schurovo lemma)**.** *Ať V_1,V_2 jsou reprezentace Lieovy grupy G.*

Ať $\varphi : V_1 \to V_2$ je invariantní homomorfismus. Pak platí:

- *Je-li V_1 ireducibilní reprezentace, pak φ je buď triviální, nebo prosté zobrazení.*
- *Je-li V_2 ireducibilní reprezentace, pak φ je buď triviální, nebo je na.*

Důkaz. Zřejmě platí, že $Ker(\varphi) \subset V_1$ a $Im(\varphi) \subset V_2$ jsou invariantní podprostory. V prvním případě je $Ker(\varphi)$ buďto celé V_1, nebo $\{0\}$, tyto případy implikují, že φ je triviální, nebo prosté. V druhém případě je $Im(\varphi)$ buďto celé V_2, nebo $\{0\}$, tyto případy implikují, že φ je na, nebo triviální.

□

Důsledek 1. *Je-li $\varphi : V_1 \to V_2$ invariantní homomorfismus mezi dvěma ireducibilními reprezentacemi Lieovy grupy G, pak φ je buď triviální, nebo je to isomorfismus.*

Důkaz. Plyne přímo ze Schurova lemmatu uvážením obou možností.

□

Důsledek 2. *Nechť V je komplexní ireducibilní reprezentace Lieovy grupy G. Ať $\varphi : V \to V$ je invariantní homomorfismus. Pak existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, že $\varphi = \lambda Id$.*

Důkaz. V je komplexní, tedy existuje alespoň jedno vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ a jeden vlastní vektor $v \in V$ operátoru φ (tedy $\varphi(v) = \lambda v$).

Potom $\{0\} \neq Ker(\varphi - \lambda Id)$ je invariantní podprostor. Z ireducibility V to musí už být ale celý prostor V.

□

Důsledek 3. *Nechť V_1, V_2 jsou ireducibilní reprezentace Lieovy grupy G.*

Ať φ, ψ jsou invariantní homomorfismy z V_1 do V_2 tak, že φ není identicky nulový. Pak existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, že $\psi = \lambda\varphi$.

Důkaz. Homomorfismus φ není identicky nulový, tedy ze důsledku 1 je to invariantní isomorfismus, speciálně existuje dobře definovaný inverz φ^{-1}.

Pak $\phi := \psi \circ \varphi^{-1} : V_2 \to V_2$ je invariantní homomorfismus. Z důsledku 2 existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, že $\phi = \lambda Id$, neboli platí $\psi = \lambda\varphi$.

□

1.1 Grupa $SO(n)$ a její reprezentace

V této sekci připomeneme základní fakta o reprezentaci grupy $SO(n)$. Tato teorie se často pro pedagogické účely zavádí ze širšího pohledu pro reprezentace Lieových algeber příslušné Lieovým grupám. My ji zde zavedeme pouze v řeči reprezentace grup.

Používejme kanonické značení pro bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \text{ s jedničkou na } j\text{-tém místě,}$$

pro $j = 1, \dots, n$.

Stejnou bázi uvažujme i pro prostor $\mathbb{C}^n$ (generujeme z báze pomocí lineární kombinace s komplexními koeficienty, místo reálných).

Definice 5. ***Speciální ortogonální grupa*** *je definovaná jako maticová grupa:*

$$SO(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T \cdot A = Id \ \ \& \ \ det(A) = 1\},$$

kde používáme klasické značení pro transponovanou a identickou matici a pro determinant matice. Grupové operace jsou dány násobením matic a inverzní maticí, neutrální prvek je identická matice.

Poznámka. Platí, že $SO(n)$ je kompaktní Lieova grupa a je komutativní právě, když $n \in \{1, 2\}$.

Ať nyní $n = 2k$ nebo $n = 2k + 1$. Pro $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k$ definujme

$$R(\theta_1, \dots, \theta_k) := \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \dots & 0 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \cos\theta_2 & \dots & -\sin\theta_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \sin\theta_2 & \dots & \cos\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \dots & 0 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \in SO(n). \tag{1.1}$$

Je-li $n = 2k + 1$, pak matice $R(\theta_1, \dots, \theta_k)$ má v $(k + 1)$-ním řádku a sloupci všude nuly až na místo $(k + 1, k + 1)$, kde má jedničku.

Definice 6. *Zaveďme n-**torus** jako $T_n^0 := \{R(\theta_1, \dots, \theta_k) \mid \theta_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, k\}$.*

Potom T_n^0 je maximální komutativní podgrupa $SO(n)$, zřejmě $T_n^0 \cong (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^k$.

Předpokládejme, že (τ, V) je ireducibilní reprezentace grupy $SO(n)$. Potom je dobře známo, že restrikce τ na T_n^0 je direktní součet jednodimenzionálních reprezentací, čili

$$(\tau|_{T_n^0})(R(\theta_1, \dots, \theta_k)) = e^{i \sum_{j=1}^k m_j \theta_j},$$

pro nějaké $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}^k$.

Definice 7. *Pro $\bar{m} \in \mathbb{Z}^k$, položme*

$$V_{\bar{m}} := \{v \in V \mid \tau(R(\theta_1, \dots, \theta_k))(v) = e^{i \sum_{j=1}^k m_j \theta_j} \cdot v\}.$$

*Je-li $V_{\bar{m}} \neq \{0\}$, pak řekneme, že $\bar{m}$ je **váha** reprezentace (τ, V).*

Pro váhu $\bar{m}$ se příslušný $V_{\bar{m}}$ nazývá **váhový prostor** a jeho prvky jsou **váhové vektory**.

Platí, že $V = \bigoplus_{\bar{m}} V_{\bar{m}}$, kde sčítáme přes všechny váhy reprezentace (τ, V).

Nyní na množině vah zavedeme lexikografické uspořádání. Víme, že lexikografické uspořádání je lineární uspořádání, proto z konečné dimenze V platí, že existuje nějaká lexikograficky-největší váha $\bar{m}$, kterou budeme nazývat **nejvyšší** a budeme ji značit $\bar{h}$ (z anglického „highest weight“).

Platí, že každá ireducibilní reprezentace má jednoznačně přidělenou svoji nejvyšší váhu a navíc každé dvě reprezentace mající stejnou nejvyšší váhu jsou isomorfní.

Nyní uvedeme často používané reprezentace $SO(n)$.

Definující reprezentace

Mějme vektorový prostor $\mathbb{C}^n$. **Definující reprezentace** $(\varrho_c, \mathbb{C}^n)$ maticové Lieovy grupy $SO(n)$ je daná:

$$\varrho_c(A)(v) = A \cdot v, \tag{1.2}$$

pro $A \in SO(n)$, $v \in \mathbb{C}^n$, kde v předpisu vpravo uvažujeme násobení „matice krát vektor“, proto se často definující reprezentace značí také jako $\varrho_c(A)(v) = A(v)$.

Lemma 2. *Váhy definující reprezentace* $(\varrho_c, \mathbb{C}^n)$ *Lieovy grupy* $SO(n)$ *jsou*

$$(\pm 1, 0, \dots, 0), (0, \pm 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \pm 1),$$

je-li n *liché, pak navíc* k*-tice* $(0, \dots, 0)$ *je také váha.*

Důkaz. Jelikož $(\varrho_c|_{T_n^0})(R(\theta_1, \dots, \theta_k))$ působí na prostoru $\mathbb{C}^n$ jako rotace na rovinách daných bázovými prvky e_j, e_{n-j+1}, o úhly θ_j, pak příslušné generující váhové vektory (prvky $V_{\bar{m}}$) vypadají následovně:

$$\begin{aligned}
&(1, 0, \dots, 0, \mp i) && \in V_{(\pm 1, 0, \dots, 0)} \\
&(0, 1, \dots, \mp i, 0) && \in V_{(0, \pm 1, 0, \dots, 0)} \\
& && \vdots \\
&(0, \dots, 1, \dots, 0) && \in V_{(0, \dots, 0)}
\end{aligned}$$

Např. pro nejvyšší váhu $(1, 0, \dots, 0)$ a příslušný vektor nejvyšší váhy $v = (1, 0, \dots, 0, -i)$ skutečně dle (1.1) platí:

$$\varrho_c(R(\theta_1, \dots, \theta_k))(v) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) + i \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sin(\theta_1) - i \cdot \cos(\theta_1) \end{pmatrix} = e^{i \cdot \theta_1} \cdot e_1 - i \cdot e^{i \cdot \theta_1} \cdot e_n = e^{i \cdot \theta_1} \cdot v.$$

$\square$

Vnější mocniny definující reprezentace

Ať $n = 2k$ nebo $n = 2k + 1$. Mějme pro vektorový prostor $\mathbb{C}^n$ jeho vnější algebru $\Lambda^*(\mathbb{C}^n) = \bigoplus_{l=0}^{n} \Lambda^l(\mathbb{C}^n)$.

Pak platí, že každá z vnějších mocnin $\Lambda^l(\mathbb{C}^n)$ (budeme používat zkrácené značení Λ^l) je vektorový prostor s bazí $\{e_I\}_{|I|=l}$, kde $e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_l}$, pro $I = \{i_1, \ldots, i_l\}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n$, a $e_\varnothing = 1 \in \mathbb{C}$. Na Λ^l pro $l \geq 1$ zavedeme reprezentaci R_l maticové Lieovy grupy $SO(n)$ tak, že pro l-vektory platí

$$R_l(A)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_l) = A(v_1) \wedge \cdots \wedge A(v_l), \tag{1.3}$$

kde $A \in SO(n)$, $v_j \in \mathbb{C}^n$, $j = 1, \ldots, l$ a kde $A(v_j)$ značí akci pomocí definující reprezentace ϱ_c.

Navíc platí, že reprezentace Λ^l a Λ^{n-l} jsou jako reprezentace $SO(n)$ isomorfní. Můžeme se tedy omezit na případy, kdy $l \in \{0, \ldots, k\}$.

Lemma 3. *Ať $l \in \{0, \ldots, k\}$, pak nejvyšší váha reprezentace (R_l, Λ^l) je k-tice $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (s l jedničkami).*

Důkaz. Snadno zjistíme, že k-tice $(1, \ldots, 1, 0 \ldots, 0)$ je váha, neboť jí přísluší váhový l-vektor $\bar{m}_1^+ \wedge \ldots \bar{\wedge} \bar{m}_l^+$, kde $\bar{m}_j^\pm$ jsou váhové vektory definující reprezentace $\mathbb{C}^n$ odpovídající vahám $(0, \ldots, 0, \pm 1, 0, \ldots, 0)$, tj.

$$\bar{m}_j^\pm = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \mp i, 0, \ldots, 0)$$

s jedničkou na j-tém místě a $\mp i$ na $(n - j + 1)$-tém místě.

Skutečně, neboť dle (1.1) pak z linearity vnějšího součinu platí:

$$\begin{aligned} R_l(R(\bar{\theta}))(\bar{m}_1^+ \wedge \ldots \bar{\wedge}\, \bar{m}_l^+) &= R(\bar{\theta})(\bar{m}_1^+) \wedge \ldots \wedge R(\bar{\theta})(\bar{m}_l^+) = \\ &= e^{i\theta_1} \bar{m}_1^+ \wedge \ldots \wedge e^{i\theta_l} \bar{m}_l^+ = e^{i \sum_{j=1}^{l}} \cdot [\bar{m}_1^+ \wedge \ldots \wedge \bar{m}_l^+]. \end{aligned}$$

Protože Λ^l je vnější mocnina definující reprezentace, můžeme pozorovat, že váhové l-vektory v Λ^l jsou právě vnější součiny váhových vektorů z definující reprezentace.

Tedy platí, že každý váhový vektor lze zapsat jako součin $\wedge_j \bar{m}_j^\pm$ (pro j různá kvůli antisymetrii vnější algebry). Pro příslušné váhy platí, že jsou součtem vah odpovídajícím vektorům $\bar{m}_j^\pm$.

Tedy všechny váhy reprezentace (R_l, Λ^l) mají právě l nenulových členů, které jsou rovny ± 1. Tedy z lexikografického uspořádání vidíme, že nejvyšší váha je skutečně k-tice $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.

$\square$

Platí, že Λ^l, pro $l = 1, \ldots, k - 1$, jsou ireducibilní reprezentace.

Poznámka. Je-li $n = 2k$, nebo $n = 2k + 1$, pak Λ^k není ireducibilní a platí rozklad $\Lambda^k = \Lambda_+^k \oplus \Lambda_-^k$, kde $\Lambda_\pm^k$ jsou ireducibilní reprezentace s nejvyšší vahou $(1, \ldots, 1, \pm 1)$.

1.2 Grupa $Spin(n)$ a její reprezentace

Druhá Lieova grupa, kterou se budeme zabývat, je tzv. spin grupa $Spin(n)$, která je v jistém smyslu obecnější a abstraktnější než grupa rotací $SO(n)$, neboť ji dvakrát nakrývá. Této skutečnosti využijeme k vybudování nových reprezentací, které budeme v dalším používat.

Definice 8. *Ať (V,Q) je reálný (respektive komplexní) vektorový prostor s bilineární formou.* ***Cliffordova algebra*** *$Cliff(V,Q)$ je asociativní algebra s jednotkou, která je generovaná prvky V a splňuje následující vztah:*

$$v \cdot w + w \cdot v = -2Q(v,w) \cdot 1,$$

pro všechny $v,w \in V$, kde na pravé straně uvažujeme prvek $1 \in Cliff(V,Q)$.

Navíc požadujeme tzv. „univerzální vlastnost“. Čili požadujeme, aby pro každou asociativní algebru A s jednotkou a lineárním zobrazením $J : V \to A$, pro kterou platí

$$J(v) \cdot J(w) + J(w) \cdot J(v) = -2Q(v,w) \cdot 1,$$

pro všechny $v,w \in V$, kde $1 \in A$, také platilo, že existuje homomorfismus algeber $\varphi : Cliff(V,Q) \to A$, který jednoznačně rozšiřuje J na celou $Cliff(V,Q)$.

Poznámka. Cliffordova algebra se může také zavádět pomocí tenzorové algebry. Uvažujme tenzorovou algebru $T^*(V)$ nad V:

$$T^*(V) = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots,$$

a oboustranný ideál $I(V,Q)$ generovaný prvky $v \otimes w + w \otimes v + 2Q(v,w) \cdot 1$.

Pak lze ukázat, že algebra definovaná jako $T^*(V)/I(V,Q)$ splňuje vlastnosti Cliffordovy algebry a jde s ní isomorfně ztotožnit díky univerzální vlastnosti. Podrobnosti k této konstrukci Cliffordovy algebry jsou uvedeny např. v knize Gilbert a Murray [3, str. 8-18].

Pro vektorové prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ a vektory $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ uvažujme klasickou bilineární formu

$$< x,y >= \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Zkráceně označujme $Cliff(\mathbb{R}^n) := Cliff(\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >)$ a také označme $Cliff(\mathbb{C}^n) = $ $= Cliff(\mathbb{C}^n, < \cdot, \cdot >)$.

Snadno lze ukázat, že báze Cliffordovy algebry je množina

$$\{e_A \mid A \subset \{1, \dots, n\}\},$$

kde $e_{\{a_1,\dots a_r\}} = e_{a_1} \cdot \dots \cdot e_{a_r}$, pro $1 \leq a_1 < \dots < a_r \leq n$ a $e_\varnothing = 1$. Obecný prvek Cliffordovy algebry $g \in Cliff(\mathbb{R}^n)$ má tedy tvar

$$g = \sum_{A \subset \{1,\dots,n\}} c_A \cdot e_A, \text{ kde } c_A \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Poznámka. Také pozorujme, že Cliffordova algebra se přirozeně rozpadá na direktní součet $\mathit{Cliff}(\mathbb{R}^n) = \mathit{Cliff}(\mathbb{R}^n)^{\mathit{sudé}} \oplus \mathit{Cliff}(\mathbb{R}^n)^{\mathit{liché}}$, kde $\mathit{Cliff}^{\,\mathit{sudé}}$ je podalgebra generovaná součiny sudého počtu vektorů a $\mathit{Cliff}^{\,\mathit{liché}}$ je podprostor generovaný součiny lichého počtu vektorů.

$\mathit{Cliff}^{\,\mathit{liché}}$ podalgebru zřejmě netvoří (neboť $\mathit{Cliff}^{\,\mathit{liché}} \cdot \mathit{Cliff}^{\,\mathit{liché}} \subset \mathit{Cliff}^{\,\mathit{sudé}}$ a také platí $1 \notin \mathit{Cliff}^{\,\mathit{liché}}$).

Příklad. Pro nízké hodnoty dimenze n si lze snadno rozmyslet strukturu uvažovaných Cliffordových algeber. Například platí:

- $\mathit{Cliff}(\mathbb{R}^1) = \mathbb{C}$,
- $\mathit{Cliff}(\mathbb{R}^2)$ jsou kvaterniony $\mathbb{H}$,
- $\mathit{Cliff}(\mathbb{C}^1) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Jsou známé i tvary pro jiné hodnoty dimenzí. Pak se musí Cliffordovy algebry „modelovat“ jako algebry matic nebo součtu matic. Rozsáhlejší teorie a tabulka těchto modelů je uvedená např. v textu Porteous [4, str. 247-251].

Pro vektory $v_j \in \mathbb{R}^n$ uvažujme prvek $(v_1 \cdot \ldots \cdot v_r)$ v Cliffordově algebře $\mathit{Cliff}(\mathbb{R}^n)$. Pak definujeme tzv. **konjugaci** * tohoto prvku následovně:

$$(v_1 \cdot \ldots \cdot v_r)^* = (-1)^r \cdot v_r \cdot \ldots \cdot v_1.$$

Tuto konjugaci rozšíříme jako lineární zobrazení na celou algebru pomocí lineárního vztahu $(a + b)^* = a^* + b^*$ pro všechny $a,b \in \mathit{Cliff}(\mathbb{R}^n)$.

Analogická pozorování ohledně báze, tvaru obecného prvku, rozkladu na sudou podalgebru a lichý podprostor a definice konjugace platí také pro $\mathit{Cliff}(\mathbb{C}^n)$.

Definice 9. ***Spin grupa*** *$Spin(n)$ je podgrupa $\mathit{Cliff}(\mathbb{R}^n)$ (grupovou strukturu uvažujeme Cliffordovské násobení) definovaná následovně:*

$$Spin(n) = \{v_1 \cdot \ldots \cdot v_{2r} \mid v_j \in \mathbb{R}^n, ||v_j|| = 1,\ \forall j = 1, \ldots, 2r,\ r \in \mathbb{N}_0\}.$$

Poznámka. Z definice pro prvky spin grupy $s \in Spin(n)$ platí, že $s^* = s^{-1}$.

Je známo, že $Spin(n)$ má strukturu kompaktní jednoduše souvislé Lieovy grupy. Navíc platí, že $Spin(n)$ dvojitě nakrývá grupu $SO(n)$, a to právě pomocí zobrazení $\sigma : Spin(n) \to SO(n)$:

$$\sigma(s)(x) = s \cdot x \cdot s^{-1}, \tag{1.5}$$

pro $s \in Spin(n)$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Akce σ je lineární operátor, ale ten můžeme kanonicky ztotožnit s jeho maticí, neboť působí na vektorových prostorech konečné dimenze, proto $\sigma(s) \in SO(n)$. Platí, že $Ker(\sigma) = \{\pm 1\}$, čili $\sigma(s) = \sigma(-s)$ Navíc platí, že σ je zobazení na, tedy $\sigma(Spin(n))$ je dvojitě nakrytá grupa $SO(n)$.

Zavedeme **definující reprezentaci** spin grupy jako zobrazení σ. Opět budeme pro jednodušší zápisy používat zkrácené značení $\sigma(s)(v) = s(v)$, pro $s \in Spin(n)$, $v \in \mathbb{R}^n$.

Definice 10. *Pro $n = 2k$ nebo $n = 2k+1$ a $j \in \{0, \ldots, n\}$ uvažujme prvky Cliffordovy algebry $X_j = \frac{1}{2} e_j \cdot e_{n-j+1}$, pro kanonickou ortonormální bázi $\{e_j\}_{j=1}^n$ prostoru $\mathbb{R}^n$. Pak zavedeme n-**torus** jako $T_n := \{\prod_{j=1}^k \exp(\theta_j X_j) \mid \theta_j \in \mathbb{R}\}$.*

Potom T_n je maximální komutativní podgrupa $Spin(n)$.

Definujme nyní vnoření do T_n:

$$\beta : (\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z})^k \to T_n : \bar{\theta} \mapsto \prod_{j=1}^k \exp(\theta_j X_j),$$

kde $\bar{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$. Pak platí, že β je z definice na. Navíc platí $Ker(\beta) = = \{\bar{\theta} \in \{0, 2\pi\}^k \mid \sum_{j=1}^k \theta_j \equiv 0 \pmod{4\pi}\}$.

Lemma 4. *Pro každé $\bar{\theta} \in (\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z})^k$ platí $\sigma(\beta(\bar{\theta})) = R(\bar{\theta})$.*

Připomeňme, že $R(\bar{\theta})$ je rotační matice v rovinách daných bázovými prvky e_j a e_{n-j+1} o úhly θ_j, viz (1.1).

Důkaz. Víme, že z definice $\beta(\bar{\theta}) \in T_n \subset Spin(n)$. Předpokládejme pro jednoduchost nejprve, že $s = \beta(\bar{\theta}) = \exp(\theta_1 X_1)$. Pak

$$\begin{aligned} s = \exp(\theta_1 X_1) &= \cos\frac{\theta_1}{2} + \sin\frac{\theta_1}{2} \cdot e_1 \cdot e_n, \\ s^{-1} = \exp(-\theta_1 X_1) &= \cos\frac{\theta_1}{2} - \sin\frac{\theta_1}{2} \cdot e_1 \cdot e_n. \end{aligned}$$

Všimneme si, že platí $e_i \cdot e_j \cdot e_i = e_j$ pro prvky kanonické báze a $i \neq j$.

Pak pokud aplikujeme $\sigma(s)$ na prvky báze, dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma(s)(e_1) =& (\cos\frac{\theta_1}{2} + \sin\frac{\theta_1}{2} \cdot e_1 \cdot e_n) \cdot e_1 \cdot (\cos\frac{\theta_1}{2} - \sin\frac{\theta_1}{2} \cdot e_1 \cdot e_n) = \\ =& \cos^2\frac{\theta_1}{2} \cdot e_1 - \sin^2\frac{\theta_1}{2} \cdot e_1 \cdot e_n \cdot e_1 \cdot e_1 \cdot e_n + \\ &+ \sin\frac{\theta_1}{2} \cdot \cos\frac{\theta_1}{2} \cdot e_1 \cdot e_n \cdot e_1 - \cos\frac{\theta_1}{2} \cdot \sin\frac{\theta_1}{2} \cdot e_1 \cdot e_1 \cdot e_n = \\ =& (\cos^2\frac{\theta_1}{2} - \sin^2\frac{\theta_1}{2}) \cdot e_1 + 2\sin\frac{\theta_1}{2} \cdot \cos\frac{\theta_1}{2} \cdot e_n = \\ =& \cos\theta_1 \cdot e_1 + \sin\theta_1 \cdot e_n = R(\theta_1, 0, \ldots, 0)(e_1). \end{aligned}$$

Stejným výpočtem dostaneme, že platí

$$\begin{aligned} &\sigma(s)(e_n) = \sin\theta_1 \cdot e_1 - \cos\theta_1 \cdot e_n = R(\theta_1, 0, \ldots, 0)(e_n), \\ &\sigma(s)(e_j) = 0 = R(\theta_1, 0, \ldots, 0)(e_j), \end{aligned}$$

pro $j \in \{2, \ldots, n-1\}$.

Analogický výpočet dostaneme, pokud uvažujeme $s = \beta(\bar{\theta}) = \exp(\theta_l X_l)$ pro $1 \leq l \leq k$.

Pro lineární operátory na vektorovém prostor rovnost na bázi implikuje rovnost na celém prostoru. Navíc díky součinu exponenciel $\prod_{j=1}^k \exp(\theta_j X_j)$ dostáváme požadovaný závěr.

$\square$

Pak nechť (τ, V) je ireducibilní reprezentace grupy $Spin(n)$. Potom je opět dobře známo, že restrikce τ na T_n je direktní součet reprezentací

$$(\tau|_{T_n})(\beta(\theta_1, \dots, \theta_k)) = e^{i\sum_{j=1}^{k} m_j\theta_j},$$

pro nějaké $\bar{m} \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^k$.

Definice 11. *Pro $\bar{m} \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^k$ položme*

$$V_{\bar{m}} := \{v \in V \mid \tau(\beta(\theta_1, \dots, \theta_k))(v) = e^{i\sum_{j=1}^{k} m_j\theta_j} \cdot v\}.$$

*Je-li $V_{\bar{m}} \neq \{0\}$, pak řekneme, že $\bar{m}$ je **váha** reprezentace (τ, V).*

Pro váhu $\bar{m}$ se příslušný $V_{\bar{m}}$ nazývá **váhový prostor** a jeho prvky jsou **váhové vektory**.

Platí, že $V = \bigoplus_{\bar{m}} V_{\bar{m}}$, kde sčítáme přes všechny váhy reprezentace (τ, V).

Na množině vah zavedeme lexikografické uspořádání. I zde platí, že pro ireducibilní reprezentaci existuje právě jedna **nejvyšší váha** a ta přísluší (až na isomorfismus) právě jedné ireducibilní reprezentaci.

Snadno se dá ukázat, že platí buď $\bar{m} \in \mathbb{Z}^k$ (řekneme, že $\bar{m}$ je **celočíselná** váha), nebo $\bar{m} \in (\frac{1}{2} + \mathbb{Z})^k$ (řekneme, že $\bar{m}$ je **poločíselná** váha).

Věta 5 (Existence Cartanova součinu)**.** *Nechť (τ_1, V_1), (τ_2, V_2) jsou dvě ireducibilní reprezentace spin grupy $Spin(n)$. Nechť $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ jsou nejvyšší váhy příslušných reprezentací.*

*Pak v tenzorovém součinu $V_1 \otimes V_2$ existuje jediná ireducibilní podreprezentace (τ, V) s nejvyšší vahou $\bar{h}_1 + \bar{h}_2$. Tento vektorový prostor $V \subset V_1 \otimes V_2$ budeme nadále označovat jako tzv. **Cartanův součin** V_1 a V_2, značíme ho $V_1 \boxtimes V_2$*

Díky vzájemně jednoznačnému ztotožnění nejvyšší váhy $\bar{h}$ s příslušnou reprezentací (τ, V) (až na isomorfismus), můžeme dále zapisovat reprezentaci zjednodušeně pomocí nejvyšší váhy:

$$\bar{h} \cong (\tau, V).$$

Poznámka. Je-li nejvyšší váha reprezentace celočíselná, pak mluvíme o celočíselné reprezentaci. Naopak, je-li její nejvyšší váha poločíselná, pak mluvíme o poločíselné reprezentaci.

Pro budoucí použití zavedeme nyní následující pojmy, které upřesňují tvar nejvyšších vah pro reprezentace grupy $Spin(n)$.

Definice 12. *Označme množiny:*

$$\text{Pro } n = 2k+1: \qquad \overline{C} = \{\bar{m} \mid m_1 \geq \dots \geq m_k \geq 0\},$$
$$C = \{\bar{m} \mid m_1 > \dots > m_k > 0\},$$

$$\text{Pro } n = 2k: \qquad \overline{C} = \{\bar{m} \mid m_1 \geq \dots \geq m_{k-1} \geq |m_k|\},$$
$$C = \{\bar{m} \mid m_1 > \dots > m_{k-1} > |m_k|\},$$

kde $\bar{m} \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^k$.

*Množině $\overline{C}$ se říká komora dominantních vah (též **Weylova komora**), C se říká komora striktně dominantních vah.*

Poznámka. Platí, že nejvyšší váhy ireducibilních reprezentací spin grupy leží právě v komoře dominantních vah. Takové reprezentace, jejichž nejvyšší váha leží v množině $\overline{C} \setminus C$ (tj. na hranici Weylovy komory), se nazývají **fundamentální reprezentace**. Platí, že libovolná ireducibilní reprezentace se dá napsat jako Cartanův součin fundamentálních reprezentací. (Toto lze snadno nahlédnout z tvaru, který pro váhy reprezentace uvažujeme.)

Definice 13. *Ať $n = 2k + 1$, pak **Weylova grupa** W_n pro spin grupu $Spin(n)$ je definovaná jako grupa změn uspořádané k-tice generovaná transpozicemi „dvou souřadnic“ a změnami znaménka „na jedné souřadnici“.*

Pro $n = 2k$ je W_n definovaná stejně, ale povolujeme pouze sudý počet změn znamének.

Každé generující změně přiřadíme znaménko (-1), toto rozšíříme na celé W_n pomocí „znaménko složení je součin znamének“. (Tedy zavedeme sgn na W_n podobně jako v grupě permutací S_k.)

Označíme-li Z_A, $A \subset \{1, \dots, k\}$, jako změnu znaménka na všech souřadnicích dané množiny A, (např. $Z_1(m_1, m_2, \dots, m_k) = (-m_1, m_2, \dots, m_k)$), pak např.:

$$\begin{aligned} W_4 &= \{(1,2), Id, Z_{1,2}\}, \\ W_5 &= \{(1,2), Id, Z_1, Z_2, Z_{1,2}\}, \\ W_6 &= S_3 \cup \{Z_{1,2}, Z_{2,3}, Z_{1,3}\}, \\ W_7 &= S_3 \cup \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_{1,2}, Z_{2,3}, Z_{1,3}, Z_{1,2,3}\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

kde používáme značení zděděné z grupy symetrií S_k a píšeme $Z_{1,2}$ místo formálního $Z_{\{1,2\}}$.

Poznámka. Pojmy Weylovy grupy a komory lze zavést i obecně (pro konečně dimenzionální komplexní reprezentaci obecné Lieovy grupy). Pak je např. Weylova grupa definovaná jako maximální grupa symetrií, která zobrazuje množinu vah reprezentace do sebe.

Je snadné si rozmyslet, že naše definice 13 je speciální případ obecné definice. Tedy, že W_n zobrazuje množinu vah reprezentace do sebe a že je maximální taková množina symetrií.

Vztah $SO(n)$ a $Spin(n)$

Platí:

1. Je-li (ω, V) reprezentace grupy $SO(n)$, pak $(\omega \circ \sigma, V)$ je taková reprezentace grupy $Spin(n)$, že $\omega \circ \sigma(\pm 1) = Id_V$. Tedy každou reprezentaci grupy $SO(n)$ lze speciálně také vnímat jako reprezentaci grupy $Spin(n)$.

2. Je-li (τ, V) reprezentace grupy $Spin(n)$ taková, že $\tau(-1) = Id_V$, pak existuje právě jedna reprezentace (ω, V) grupy $SO(n)$ tak, že $\tau = \omega \circ \sigma$.

Například platí, že všechny Λ^l pro $l = 1, \dots, k - 2$ jsou ireducibilní celočíselné reprezenatce grupy $Spin(n)$. (Definující reprezentace grupy $SO(n)$ je isomorfní Λ^1, tedy je také ireducibilní reprezentací $Spin(n)$.)

Λ^{k-1} pro liché n je také ireducibilní reprezentace $Spin(n)$.

Spinorové reprezentace

Platí, že existují reprezentace grupy $Spin(n)$, které ale nejsou reprezentace grupy $SO(n)$. Ukážeme, že tyto reprezentace jsou poločíselné s nejvyššími vahami $\bar{h} \in (\frac{1}{2} + \mathbb{Z})^k$. Těmto reprezentacím se také často říká „čistě spinorové reprezentace“.

V následující sekci si povíme, jak je možné tyto „spinorové prostory“ modelovat pomocí Cliffordovy algebry.

Mějme $\mathbb{C}^n$ s kanonickou bazí $\{e_j\}_{j=1}^k$ a se skalárním součinem $< x,y > = = \sum_{j=1}^n x_j y_j$, kde $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, $x = \sum_{j=1}^n y_j e_j$.

Označ $\mathbb{C}_n := \mathit{Cliff}(\mathbb{C}^n, < \cdot,\cdot >)$, $\mathbb{R}_n := \mathit{Cliff}(\mathbb{R}^n, < \cdot,\cdot >)$, speciálně tedy platí

$$e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = -2\delta_i^j,$$

Poznámka. Platí, že $\mathbb{C}_n$ je tzv. **komplexifikace** algebry $\mathbb{R}_n$. Značí se $(\mathbb{R}_n)_c = = \mathbb{R}_n \oplus i\mathbb{R}_n = \mathbb{C}_n$ pro imaginární jednotku $i \in \mathbb{C}$ (tedy platí $i^2 = -1$).

Pojem komplexifikace se zavádí obdobně také pro vektorové prostory, speciálně platí $(\mathbb{R}^n)_c = \mathbb{C}^n$.

Případy, kdy dimenze n je sudá nebo lichá se liší. Konstrukce spinorových prostorů v lichém případě je povětšinou analogická sudému případu, proto obě uvedeme zároveň.

Jako novou bázi prostoru $\mathbb{C}^{2k}$ volme množinu $\{f_j, f_j^+\}_{j=1}^k$, naopak pro prostor $\mathbb{C}^{2k+1}$ uvažujme bázi jako množinu $\{f_j, f_j^+, u\}_{j=1}^k$, kde

$$f_j := \frac{1}{2}(e_j - ie_{n-j+1}),\ f_j^+ := -\frac{1}{2}(e_j + ie_{n-j+1}),\ u := ie_{k+1},$$

pro $j = 1, \ldots, k$.

Pak pro $W =< f_1, \ldots, f_k >$, $W^+ =< f_1^+, \ldots, f_k^+ >$, $U =< u >$, (kde standardně například $< f_1, \ldots, f_k >$ označuje prostor generovaný vektory $f_1, \ldots, f_k$), platí

$$\mathbb{C}^{2k} = W \oplus W^+, \text{ resp. } \mathbb{C}^{2k+1} = W \oplus W^+ \oplus U.$$

Po zbytek sekce budeme převážně počítat v Cliffordově algebře, proto „$\cdot$“ značí Cliffordovské násobení. Definujme následující prvky Cliffordovy algebry:

$$I_j = f_j \cdot f_j^+, \text{ pro } j = 1, \ldots, k,$$

$$I_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + u),$$

$$I^{2k} := I_1 \cdot \ldots \cdot I_k, \text{ resp. } I^{2k+1} := I_1 \cdot \ldots \cdot I_k \cdot I_{k+1}.$$

Lemma 6. *Výše definované prvky mají následující vlastnosti:*
$f_j \cdot f_l = -f_l \cdot f_j$,
$f_j^+ \cdot f_l^+ = -f_l^+ \cdot f_j^+$.
Speciálně prvky $f_j^{(+)}$ jsou izotropní, čili platí $(f_j^{(+)})^2 = 0$.
$f_j \cdot f_l^+ + f_l^+ \cdot f_j = \delta_j^l$,
$f_j^{(+)} \cdot I_l = I_l \cdot f_j^{(+)}$.
Všechny I_j spolu komutují a jsou idenpotentní, čili platí $(I_j)^2 = I_j$.
Navíc pro libovolné $\theta_j \in \mathbb{R}$ a $X_j = \frac{1}{2}e_j \cdot e_{n-j+1}$ platí:
$\exp(\theta_j X_j) \cdot I_j = e^{i\frac{1}{2}\theta_j} I_j$,
$\exp(\theta_j X_j) \cdot f_j^+ \cdot I_j = e^{-i\frac{1}{2}\theta_j} f_j^+ \cdot I_j$.

Důkaz. Ve výpočtech, které uvedeme pouze pro $n = 2k$, použijeme kompaktnější značení indexu $jc := n - j + 1$.

První tři tvrzení skutečně platí, neboť výpočtem v Cliffordově algebře dostáváme:

$$\begin{aligned}
f_j \cdot f_l + f_l \cdot f_j &= \frac{1}{4}((e_j - ie_{jc}) \cdot (e_l - ie_{lc}) + (e_l - ie_{lc}) \cdot (e_j - ie_{jc})) = \\
&= -\frac{1}{2}(\delta_j^l - \delta_{jc}^{lc} - i\delta_{jc}^l - i\delta_j^{lc}) = -\frac{1}{2}(0 - i0 - i0) = 0, \\
f_j^+ \cdot f_l^+ + f_l^+ \cdot f_j^+ &= \ldots = -\frac{1}{2}(\delta_j^l - \delta_{jc}^{lc} - i\delta_{jc}^l - i\delta_j^{lc}) = 0, \\
f_j \cdot f_l^+ + f_l^+ \cdot f_j &= -\frac{1}{4}((e_j - ie_{jc}) \cdot (e_l + ie_{lc}) + (e_l + ie_{lc}) \cdot (e_j - ie_{jc})) = \\
&= +\frac{1}{2}(\delta_j^l + \delta_{jc}^{lc} - i\delta_{jc}^l - i\delta_j^{lc}) = \frac{2}{2}\delta_j^l.
\end{aligned}$$

Pak platí

$$\begin{aligned}
f_j^{(+)} \cdot I_l &= f_j^{(+)} \cdot f_l \cdot f_l^+ = -f_l \cdot f_j^{(+)} \cdot f_l^+ = +f_l \cdot f_l^+ \cdot f_j^{(+)} = I_l \cdot f_j^{(+)}, \\
I_j \cdot I_l &= f_j \cdot f_j^+ \cdot I_l = f_j \cdot I_l \cdot f_j^+ = I_l \cdot f_j \cdot f_j^+ = I_l \cdot I_j, \\
I_j \cdot I_j &= f_j \cdot f_j^+ \cdot (1 - f_j^+ \cdot f_j) = f_j \cdot f_j^+ - f_j \cdot f_j^+ \cdot f_j^+ \cdot f_j = I_j - 0.
\end{aligned}$$

Tvrzení o násobcích exponencielou $\exp(\theta_j X_j)$ se v obou případech ukáže rutinním výpočtem. Zde uvedeme alespoň výpočet prvního tvrzení. Označme pro kompaktnost výpočtu $E_j := e_j \cdot e_{jc}$. Využijeme tvaru $I_j = \frac{1}{2}(1 - e_j \cdot e_{jc}) = \frac{1}{2}(1 - iE_j)$ a vlastnosti $(E_j)^2 = e_j \cdot e_{jc} \cdot e_j \cdot e_{jc} = -1$, které snadno získáme z definice a předchozích vztahů.

$$\begin{aligned}
&\exp(\theta_j X_j) \cdot I_j = \exp(\frac{1}{2}\theta_j E_j) \cdot \frac{1}{2}(1 - iE_j) = \\
&\quad = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}(\frac{1}{2}\theta_j E_j)^l \cdot \frac{1}{2}(1 - iE_j) = \\
&\quad = \sum_{l=0}^{\infty} [\frac{1}{2 \cdot l!}(\frac{1}{2}\theta_j)^l (E_j)^l - i\frac{1}{2 \cdot l!}(\frac{1}{2}\theta_j)^l (E_j)^{l+1}] = \\
&\quad =: \sum_{l=0}^{\infty} [a_l (E_j)^l - i \cdot a_l (E_j)^{l+1}] =: \sum_{l=0}^{\infty} člen_{(l)} = \\
&\quad = \sum_{l=0}^{\infty} člen_{(4l)} + člen_{(4l+1)} + člen_{(4l+2)} + člen_{(4l+3)} = \\
&\quad = \sum_{l=0}^{\infty} (E_j)^{4l} \cdot [a_{4l} - i \cdot a_{4l} E_j + a_{4l+1} E_j - i \cdot a_{4l+1} (E_j)^2 + \\
&\qquad\quad + a_{4l+2} (E_j)^2 - i \cdot a_{4l+2} (E_j)^3 + a_{4l+3} (E_j)^3 - i \cdot a_{4l+3} (E_j)^4] = \\
&\quad = \sum_{l=0}^{\infty} (E_j)^{4l} \cdot [a_{4l} - i \cdot a_{4l} E_j + a_{4l+1} E_j + i \cdot a_{4l+1} + \\
&\qquad\quad - a_{4l+2} + i \cdot a_{4l+2} E_j - a_{4l+3} E_j - i \cdot a_{4l+3}] =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{\infty} (E_j)^{4l} \cdot [a_{4l}(1 - iE_j) + i \cdot a_{4l+1}(1 - iE_j) + \\
&\qquad + (-1) \cdot a_{4l+2}(1 - iE_j) + (-i) \cdot a_{4l+3}(1 - iE_j)] = \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} (i^l) \cdot a_l (1 - iE_j) = \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (i \frac{1}{2} \theta_j)^l \frac{1}{2} (1 - iE_j) = e^{i \frac{1}{2} \theta_j} I_j.
\end{aligned}
$$

□

Poznámka. Stejně rutinním výpočtem lze dokázat

$$
\begin{aligned}
f_j^{(+)} \cdot u + u \cdot f_j^{(+)} &= 0, \\
(u)^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Potom vlastnosti z Lemmatu 6 platí i pro I_{k+1}, přičemž tvrzení s násobkem exponencielou $\exp(\theta_j X_j)$ pro $j = k + 1$ neuvažujeme.

Důsledek 4. *Prvek I^n je idenpotentní, čili platí $(I^n)^2 = I^n$.*

Důkaz. Tvrzení snadno plyne z komutativity a idenpotence prvků I_j.

□

Definice 14. ***Prostor spinorů*** $\mathbb{S}_n$ *nad* $\mathbb{C}^n$ *se definuje jako levý ideál Cliffordovy algebry pomocí prvku I^n:*

$$\mathbb{S}_n := \mathbb{C}_n \cdot I^n.$$

Lemma 7. *Pro všechny prvky $v \in \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{S}_n$ platí $v \cdot z \in \mathbb{S}_n$, čili zjednodušeně řečeno „vektor krát spinor je spinor“.*

Důkaz. Toto triviálně platí díky faktu, že $\mathbb{S}_n$ je ideál. Tento fakt se dá nahlédnout díky vlastnostem algebry $\mathbb{C}_n$, speciálně platí uzavřenost algebry vzhledem k násobení, čili $\mathbb{C}_n \cdot \mathbb{C}_n \subset \mathbb{C}_n$.

Prostor $\mathbb{C}^n$ vnímáme jako podprostor algebry $\mathbb{C}_n$, tedy lemma snadno platí.

□

Díky skutečnosti, že $f_j \cdot I^n = 0$ pro libovolné j, platí:

$$\mathbb{S}_n = \Lambda^*(W^+) \cdot I^n. \tag{1.6}$$

Na spinorovém prostoru $\mathbb{S}_n$ zavedeme tzv. **spinorovou reprezentaci** S grupy $Spin(n)$ následujícím způsobem pro $s \in Spin(n)$, $z \in \mathbb{S}_n$:

$$S(s)(z) = s \cdot z. \tag{1.7}$$

Lemma 8. *Pro $n = 2k$ nebo $n = 2k + 1$ jsou váhy spinorové reprezentace $(S, \mathbb{S}_n)$ Lieovy grupy $Spin(n)$ ve tvaru k-tic:*

$$(\pm\frac{1}{2}, \ldots, \pm\frac{1}{2}). \tag{1.8}$$

Důkaz. Pro ověření, jestli $\bar{m} \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^k$ je váha, chceme z definice ověřit, že existuje nějaký $0 \neq a \in \mathbb{S}$ tak, že $S(\prod_{j=1}^k \exp(\theta_j X_j))(a) = e^{(i\sum_{j=1}^k m_j\theta_j)}a$ pro všechny $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^k$ a $X_j = \frac{1}{2}e_j \cdot e_{n-j+1}$.

Díky vlastnostem prvků, uvedeným v Lemmatu 6, snadno pak pro libovolné $l \in \{1, \ldots, k\}$ platí následující výpočty pro n sudé (pro n liché se výpočet změní pouze uvážením prvku I^{k+1}, což je uvedeno jako alternativa v závorce):

$$
\begin{aligned}
[\prod_{j=1}^k \exp(\theta_j X_j)] \cdot I^n &= \exp(\theta_1 X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(\theta_k X_k) \cdot I_k \cdot \ldots \cdot I_1(\cdot I^{k+1}) = \\
&= \exp(\theta_1 X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(\theta_{k-1} X_{k-1}) \cdot e^{i\frac{1}{2}\theta_k} I_k \cdot I_{k-1} \cdot \ldots \cdot I_1(\cdot I_{k+1}) = \\
&= e^{i\frac{1}{2}\theta_k} \exp(\theta_1 X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(\theta_{k-1} X_{k-1}) \cdot I_{k-1} \cdot \ldots \cdot I_1 \cdot I_k(\cdot I_{k-1}) = \\
&= e^{i\frac{1}{2}\theta_1} \cdot \ldots \cdot e^{i\frac{1}{2}\theta_k} I_k \cdot \ldots \cdot I_1(\cdot I^{k+1}) = e^{(i\sum_{j=1}^k \frac{1}{2}\theta_j)} I^n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\prod_{j=1}^k \exp(\theta_j X_j)] \cdot f_l^+ \cdot I^n &= \prod_{j=1}^k \exp(\theta_j X_j) \cdot (f_l^+ \cdot I_l) \cdot \prod_{j' \neq l} I_{j'}(\cdot I^{k+1}) = \\
&= e^{i\sum_{j=l+1}^k \frac{1}{2}\theta_j} \prod_{j'=1}^{l-1} \exp(\theta_{j'} X_{j'}) \cdot (\exp(\theta_l X_l) \cdot f_l^+ \cdot I_l) \cdot \prod_{j'' \neq l} I_{j''}(\cdot I_{k+1}) = \\
&= e^{i\sum_{j=l+1}^k \frac{1}{2}\theta_j} \prod_{j'=1}^{l-1} \exp(\theta_{j'} X_{j'}) \cdot (e^{-i\frac{1}{2}\theta_l} f_l^+ \cdot I_l) \cdot \prod_{j'' \neq l} I_{j''}(\cdot I_{k+1}) = \\
&= e^{(i\sum_{j\neq l} \frac{1}{2}\theta_j - i\frac{1}{2}\theta_l)} f_l^+ \cdot I^n.
\end{aligned}
$$

Čili, k-tice $(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ a $(\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ (s „$-\frac{1}{2}$“ na l-tém místě) jsou váhy.

Podobnými výpočty díky antikomutativitě f_j^+ zjistíme, že libovolná k-tice $(\pm\frac{1}{2}, \ldots, \pm\frac{1}{2})$ s „$-\frac{1}{2}$“ na místech $1 \leq l_1 < \ldots < l_r \leq k$ je váha s váhovým vektorem $f_{l_1}^+ \cdot \ldots \cdot f_{l_r}^+ \cdot I^n$. Máme tedy 2^k vah.

Pak díky faktu, že $dim(\mathbb{S}_n) = dim(\Lambda^*(W^+)) = 2^k$ a že $\mathbb{S}_n = \bigoplus_{\{\text{váhy } \mathbb{S}_n\}} V_{\bar{m}}$, pak vidíme, že více vah této reprezentace neexistuje.

□

Pro n sudé označme $\mathbb{S}_+ := \mathbb{S}_{2k} \cap \mathbb{C}_{2k}^{sudé}$, $\mathbb{S}_- := \mathbb{S}_{2k} \cap \mathbb{C}_{2k}^{liché}$. Snadno tedy platí $\mathbb{S}_{2k} = \mathbb{S}_+ \oplus \mathbb{S}_-$. Pro n liché označme $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{2k+1}$.

Poznámka. Speciálně pro sudé n platí:

$$\forall v \in \mathbb{C}^n, \forall z \in \mathbb{S}_\pm : v \cdot z \in \mathbb{S}_\mp. \tag{1.9}$$

Váhy $\mathbb{S}_+$ jsou tvaru (1.8), kde se vyskytuje sudý počet znamének „$-$“.

Váhy $\mathbb{S}_-$ jsou tvaru (1.8), kde se vyskutuje lichý počet znamének „$-$“.

Tedy nejvyšší váha reprezentací $\mathbb{S}$ a $\mathbb{S}_+$ je k-tice $(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$. Nejvyšší váha reprezentace $\mathbb{S}_-$ je $(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Navíc platí, že $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}_\pm$ jsou ireducibilní reprezentace.

Z poznámky za definicí 12 vidíme, že fundamentální reprezentace jsou ty, jejichž nejvyšší váhy leží na hranici Weylovy komory, ze kterých lze dostat libovolná jiná ireducibilní reprezentace pomocí Cartanova součinu. Jsou to právě:

$$\text{Pro } n = 2k \begin{cases} \Lambda^l, \text{ pro } l = 1, \ldots, k-2, \\ \mathbb{S}_\pm. \end{cases}$$

$$\text{Pro } n = 2k+1 \quad \begin{cases} \Lambda^l, \text{ pro } l = 1, \dots, k-1, \\ \mathbb{S}. \end{cases}$$

Díky platnosti vztahů

$$(1,\dots,1) = (\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}), \qquad \text{čili } \Lambda^k \cong \mathbb{S}_{(+)} \boxtimes \mathbb{S}_{(+)}, \tag{1.10}$$

$$(1,\dots,1,0) = (\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}), \qquad \text{čili } \Lambda^{k-1} \cong \mathbb{S}_- \boxtimes \mathbb{S}_-, \tag{1.11}$$

pak také platí, že Λ^k (a v sudém případě i Λ^{k-1}) neuvádíme mezi fundamentálními reprezentacemi.

Nadále se budeme zabývat převážně těmito zmíněnými ireducibilními fundamentálními spinorovými reprezentacemi $\mathbb{S}$ a $\mathbb{S}_\pm$.

1.3 Klimykův algoritmus

Jsou-li $(\tau_1, V_1), (\tau_2, V_2)$ ireducibilní konečně dimenzionální reprezentace Lieovy grupy $Spin(n)$, pak obecně platí, že jejich tenzorový součin není ireducibilní a lze tedy rozdělit na direktní součin ireducibilních reprezentací.

V této sekci uvedeme tzv. Klimykův algoritmus, který lze často použít k výpočtu ireducibilních podreprezentací prostoru $V_1 \otimes V_2$.

Poznámka. Způsobů, jak najít ireducibilní rozklad tenzorového součinu $V_1 \otimes V_2$ je mnoho. Jeden z nich je uvedený např. v textu Fulton a Harris [2, §25.3, str. 424-429].

Platí, že postup, který uvádíme zde, je analogický výše zmiňovanému. O této skutečnosti vypovídá např. cvičení z textu [2, Exercise 25.41, str.428]

Následující větu uvedeme bez důkazu. Její důkaz, přeformulovaný v řeči Lieových algeber, je možné najít například v Fulton a Harris [2, str. 128, Theorem 9.19].

Věta 9. *Je-li (τ, V) komplexní, konečně dimenzionální reprezentace kompaktní Lieovy grupy G, pak je direktním součtem konečně mnoha ireducibilních podreprezentací.*

Protože zde budeme uvažovat pouze tenzorový součin nějaké fundamentální reprezentace s definující reprezentací, je jejich tenzorový součin komplexní konečně dimenzionální reprezentace grupy $Spin(n)$. Tedy, aplikujeme-li větu 9 na tento součin, dostaneme korektnost základní myšlenky Stein-Weissovy konstrukce (tj., že tenzorový součin můžeme rozložit na konečně mnoho ireducibilních podreprezentací).

V průběhu algoritmu budeme používat pojmy Weylovy grupy a Weylovy komory, zmiňované v minulé sekci (definice 13 a 12).

Označme

$$\delta = \left(k - \tfrac{1}{2}, k - \tfrac{3}{2}, \dots, \tfrac{1}{2}\right) \qquad \text{pro } n = 2k+1,$$
$$\delta = \left(k-1, k-2, \dots, 0\right) \qquad \text{pro } n = 2k.$$

Předpokládejme, že známe nejvyšší váhu $\bar{h}_1$ reprezentace (τ_1, V_1) a všechny váhy $\bar{m}_2$ reprezentace (τ_2, V_2). Z konečné dimenze V_2 plyne, že uvažovaných vah je konečně mnoho, označme je tedy $\{\bar{m}_2^i\}_{i=1}^r$.

Platí, že následujícím Klimykovým algoritmem, uvedeným například v článku Bureš a Souček [1, str. 12-13], velmi snadno zjistíme všechny nejvyšší váhy ireducibilních podreprezentací tenzorového součinu $V_1 \otimes V_2$.

Zde uvedeme aplikaci tohoto algoritmu na součin nějaké fundamentální a definující reprezentace. Platí, že tento algoritmus může mít až exponenciální časovou složitost vzhledem k dimenzím uvažovaných reprezentací (pokud procházíme algoritmicky celou Weylovu grupu W_n).

Algoritmus probíhá následujícím způsobem ve třech základních krocích:

1. Pro každé $i = 1, \dots, r$ položme A_i jako součet $\bar{h}_1 + \delta + \bar{m}_2^i$.

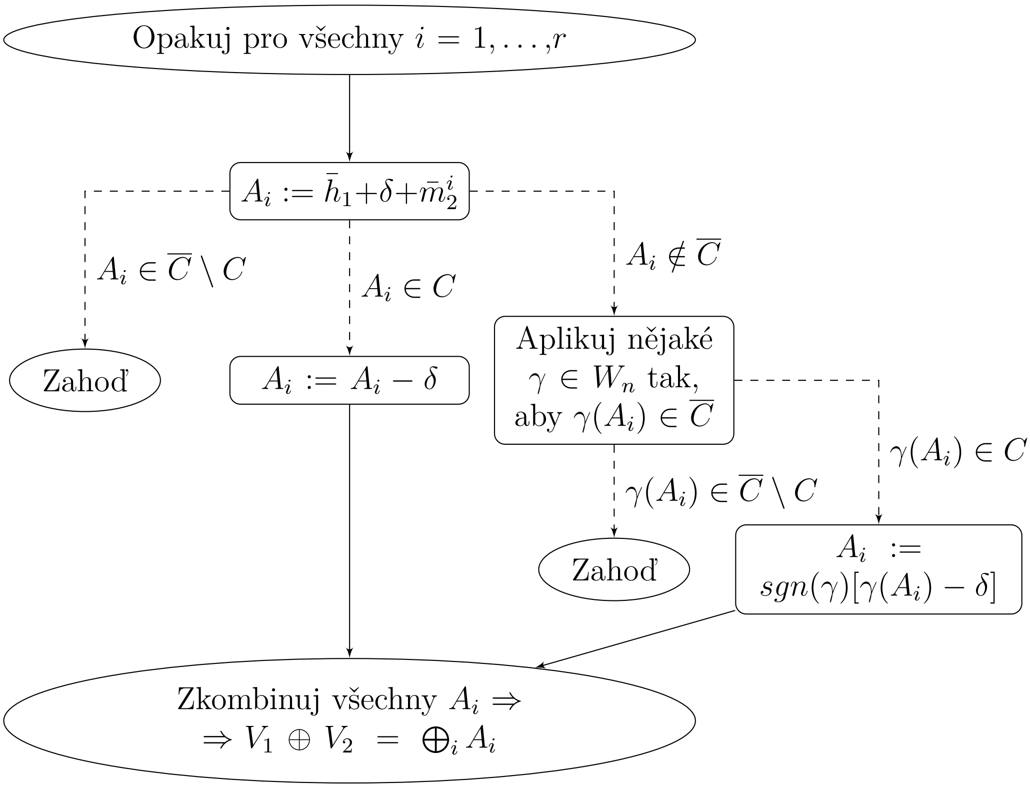
2. Požadujeme, aby A_i ležel ve Weylově komoře striktně dominantních vah C.

   - Je-li to pravda, odečteme δ a výsledek je nejvyšší váha nějaké ireducibilní podreprezentace prostoru $V_1 \otimes V_2$.
   - Není-li to pravda a leží na hranici Weylovy komory $\overline{C} \setminus C$, pak tuto k-tici neuvažujeme.
   - Není-li to pravda a leží mimo $\overline{C}$, tuto k-tici příslušně „otočíme“ prvkem z Weylovy grupy tak, aby výsledek ležel v $\overline{C}$ (z definice je tato „otočená“ váha stále váha reprezentace V_1).
     Leží-li výsledná k-tice ve Weylově komoře striktně dominantních vah, pak odečteme δ, naopak, leží-li na hranici $\overline{C} \setminus C$, pak ji neuvažujeme.

3. Opakujeme tento postup pro všechny $\{\bar{m}_2^i\}_{i=1}^r$, nakonec dostaneme váhy $\{A_{i_j}\}_{j=1}^p$. Díky vzájemné jednoznačnosti nejvyšších vah a ireducibilních reprezentací můžeme tyto váhy ztotožnit s nějakými reprezentacemi $A_j \cong$ $\cong (\omega_j, W_j)$. Pak platí rozklad

$$V_1 \otimes V_2 = \bigoplus_{j=1}^{p} A_j.$$

Strom průběhu algoritmu vypadá následovně:



Poznámka. Všimněme si, že Algoritmus vždy vrátí Cartanův součin $V_1 \boxtimes V_2$ jako jeden ze sčítanců. Navíc platí, že existuje právě jeden takový sčítanec (jednoznačnost plyne z jednoznačnosti nejvyšší váhy.)

Navíc z teorie tenzorového součinu víme, že $V_1 \otimes V_2$ je isomorfní $V_2 \otimes V_1$, jako reprezentace $Spin(n)$.

Aplikace algoritmu na $\mathbb{S} \otimes \mathbb{C}^n$

Víme, že je potřeba rozlišit paritu dimenze n a tedy vyšetřit případy $\mathbb{S}$ a $\mathbb{S}_\pm$.

Nejprve ať $n = 2k+1$ pro nějaké $k \geq 1$. Pak víme, že fundamentální spinorová reprezentace je jen $\mathbb{S}$ s nejvyšší vahou $\bar{h} = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$. Také víme, že definující reprezentace $\mathbb{C}^n$ má seznam vah: $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$, $(0, \pm 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, \pm 1)$, $(0, \ldots, 0)$. Váhy definující reprezentace označíme jako násobky kanonické báze prostoru $\mathbb{R}^k$: $\{\pm \bar{e}_i\}_{i=1}^k \cup \{\bar{e}_0\}$, kde $\bar{e}_0 = (0, \ldots, 0)$.

Postupem podle algoritmu dostaneme:

$$
\begin{aligned}
&\bar{h}+\delta+\bar{e}_1 = && \Big(k+1,k-1,\dots,1\Big) && \in C && \longrightarrow \Big(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{1}{2}\Big),\\
&\bar{h}+\delta+\bar{e}_2 = && \Big(k,k,k-2\dots,1\Big) && \in \overline{C}\setminus C && \longrightarrow \times,\\
& && \vdots && && \\
&\bar{h}+\delta+\bar{e}_k && \Big(k,k-1,\dots,2,2\Big) && \in \overline{C}\setminus C && \longrightarrow \times,\\
& && && && \\
&\bar{h}+\delta-\bar{e}_1 = && \Big(k-1,k-1,\dots,1\Big) && \in \overline{C}\setminus C && \longrightarrow \times,\\
&\bar{h}+\delta-\bar{e}_2 = && \Big(k,k-2,k-2\dots,1\Big) && \in \overline{C}\setminus C && \longrightarrow \times,\\
& && \vdots && && \\
&\bar{h}+\delta-\bar{e}_k = && \Big(k,k-1,\dots,2,0\Big) && \in \overline{C}\setminus C && \longrightarrow \times,\\
& && && && \\
&\bar{h}+\delta+\bar{e}_0 = && \Big(k,k-1,\dots,1\Big) && \in C && \longrightarrow \Big(\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{1}{2}\Big).
\end{aligned}
$$

Celkem tedy v lichém případě platí

$$
\mathbb{S}\otimes\mathbb{C}^n = \Big(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{1}{2}\Big)\oplus\Big(\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{1}{2}\Big)\cong[\mathbb{S}\boxtimes\mathbb{C}^n]\oplus\mathbb{S}. \tag{1.12}
$$

Pro sudý případ $n = 2k$ je situace analogická. Víme, že základní spinorové reprezentace jsou $\mathbb{S}_\pm$ s nejvyššími vahami $\bar{h}_\pm = (\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$. Také víme, že definující reprezentace $\mathbb{C}^n$ má seznam vah: $\{\pm\bar{e}_i\}_{i=1}^k$.

Rozepsáním algoritmu pro oba tenzorové součiny $\mathbb{S}_\pm\otimes\mathbb{C}^n$, dostaneme, že jediné zajímavé kroky jsou:

$$
\begin{aligned}
&\bar{h}_\pm+\delta+\bar{e}_1 = && \Big(k+\tfrac{5}{2},k-\tfrac{3}{2},\dots,\pm\tfrac{1}{2}\Big) && \in C && \longrightarrow \Big(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2}\Big),\\
&\bar{h}_+ +\delta-\bar{e}_k = && \Big(k-\tfrac{1}{2},k-\tfrac{3}{2},\dots,\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\Big) && \in C && \longrightarrow \Big(\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\Big),\\
&\bar{h}_- +\delta+\bar{e}_k = && \Big(k-\tfrac{1}{2},k-\tfrac{3}{2},\dots,\tfrac{5}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\Big) && \in C && \longrightarrow \Big(\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\Big).
\end{aligned}
$$

Celkem v sudém případě tedy platí

$$
\mathbb{S}_\pm\otimes\mathbb{C}^n = \Big(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2}\Big)\oplus\Big(\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{1}{2},\mp\tfrac{1}{2}\Big)\cong[\mathbb{S}_\pm\boxtimes\mathbb{C}^n]\oplus\mathbb{S}_\mp. \tag{1.13}
$$

Aplikace algoritmu na $\Lambda^l\otimes\mathbb{C}^n$

Ať $n = 2k$ nebo $n = 2k+1$ a $1 \le l < k$.

Při uvažování reprezentací Λ^l se rozdíl v paritě dimenze n se projeví pouze uvážením váhy $(0,\dots,0)$ a tvarem δ, jinak jsou oba postupy naprosto analogické. Zde provedeme postup pro n liché a alespoň odlišnosti postupu pro n sudé. Je snadné si rozmyslet, jak by vypadal celý postup pro sudý případ.

Opět víme, že definující reprezentace $\mathbb{C}^n$ má seznam vah $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^k\cup\{\bar{e}_0\}$. Také víme, že reprezentace Λ^l má nejvyšší váhu $\bar{h}_l = (1,\dots,1,0,\dots,0)$ s l jedničkami.

Postup uvedeme současně pro váhy $\pm\bar{e}_i = (0,\dots,0,\pm1,0,\dots,0)$. Pro tento zápis postupu se vyplatí zapsat δ jako $\delta = (k-1+\frac{1}{2}, k-2+\frac{1}{2},\dots,k-k+\frac{1}{2})$.

Provedením algoritmu dostáváme:

$$
\begin{aligned}
&\bar{h}_l + \delta + \pm\bar{e}_1 = \\
&= \Big(k+\tfrac{1}{2}\pm 1, k-\tfrac{1}{2},\dots,k-l+\tfrac{1}{2}+1, k-(l+1)+\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{1}{2}\Big) \\
&\longrightarrow (+) \in C \longrightarrow \Big(2{,}1,\dots 1{,}0,\dots,0\Big)\,, \\
&\longrightarrow (-) \in \overline{C}\setminus C \longrightarrow \times,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{h}_l + \delta \pm \bar{e}_2 = \\
&= \Big(k+\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}\pm 1,\dots,k-l+\tfrac{1}{2}+1, k-(l+1)+\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{1}{2}\Big) \\
&\longrightarrow (+) \in \overline{C}\setminus C \longrightarrow \times, \\
&\longrightarrow (-) \in \overline{C}\setminus C \longrightarrow \times,
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{h}_l + \delta \pm \bar{e}_l = \\
&= \Big(k-\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{3}{2},\dots,k-l+\tfrac{1}{2}+1\pm 1, k-(l+1)+\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{1}{2}\Big) \\
&\longrightarrow (+) \in \overline{C}\setminus C \longrightarrow \times, \\
&\longrightarrow (-) \in C \longrightarrow \Big(1,\dots,1{,}0{,}0,\dots,0\Big) = \bar{e}_{l-1} \cong \Lambda^{l-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{h}_l + \delta \pm \bar{e}_{l+1} = \\
&= \Big(k-\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{3}{2},\dots,k-l+\tfrac{1}{2}+1, k-(l+1)+\tfrac{1}{2}\pm 1,\dots,\tfrac{1}{2}\Big) \\
&\longrightarrow (+) \in C \longrightarrow \Big(1,\dots,1{,}1{,}0,\dots,0\Big) = \bar{e}_{l+1} \cong \Lambda^{l+1}, \\
&\longrightarrow (-) \in \overline{C}\setminus C \longrightarrow \times.
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

Projdeme-li všechny kroky algoritmu až na váhy $(0,\dots,0,a)$, kde $a \in \{0,\pm 1\}$, dostaneme, že

$$\Lambda^l \otimes \mathbb{C}^n \cong [\Lambda^l \boxtimes \mathbb{C}^n] \oplus \Lambda^{l+1} \oplus \Lambda^{l-1} \oplus F,$$

kde F je sčítanec tohoto rozkladu odpovídající vahám $(0,\dots,0,a)$, který probereme pečlivěji níže.

$$
\begin{aligned}
&\bar{h}_l + \delta \pm \bar{e}_k = \\
&= \Big(k - \tfrac{1}{2}, k - \tfrac{3}{2}, \dots, k - l + \tfrac{1}{2}, k - (l+1) + \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{2} \pm 1\Big) \\
&\longrightarrow (+) \in \overline{C} \setminus C \longrightarrow \times, \\
&\longrightarrow (-): \text{ viz níže},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{h}_l + \delta + \bar{e}_0 = \\
&= \Big(k - \tfrac{1}{2}, k - \tfrac{3}{2}, \dots, k - l + \tfrac{1}{2}, k - (l+1) + \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{2}\Big) \\
&\longrightarrow \in C \longrightarrow \Big(1, \dots, 1, 0, \dots, 0\Big) = \bar{e}_l \cong \Lambda^l.
\end{aligned}
$$

V případě $\bar{h}_l + \delta - \bar{e}_k$ dostaneme takovou k-tici, která neleží v $\overline{C}$. Musíme proto využít poslední větve algoritmu („otočit“ váhu pomocí prvku Weylovy grupy). Aplikujme tedy nějaké $\gamma \in W_n$ tak, aby $\gamma(\bar{h}_l + \delta - \bar{e}_k) \in \overline{C}$. Takové γ je právě jedno a je to $\gamma = Z_k$ (změna znaménka na k-té souřadnici).

Podle algoritmu tedy dostaneme

$$
sgn(Z_k)(Z_k[(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) + \delta + (0, \dots, 0, -1)] - \delta) =
$$

$$
= sgn(Z_k)(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \cong -\Lambda^l.
$$

Celkem dostáváme $F \cong \Lambda^l \oplus (-\Lambda^l) = 0$.

Sudý případ je naprosto analogický, dokonce je o uvážení členu F kratší, neboť definující reprezentace v případě sudé dimenze nemá váhu $\bar{e}_0$ a k-tice, které dostaneme z algoritmu pro váhy $\pm\bar{e}_k$, leží přímo už na hranici Weylovy komory $\overline{C} \setminus C$.

Jediná komplikace a odlišnost od tohoto tvrzení nastává, uvážíme-li $l = k - 1$ (pro sudé n). Pak dostaneme

$$
\Lambda^{k-1} \otimes \mathbb{C}^n \cong [\Lambda^{k-1} \boxtimes \mathbb{C}^n] \oplus (1, \dots, 1) \oplus (1, \dots, 1, -1) \oplus \Lambda^{k-2}, \tag{1.14}
$$

kde váhu $(1, \dots, 1, -1)$ dostaneme z kroku algoritmu pro $\bar{h}_{k-1} + \delta - \bar{e}_k \in C$. Víme ale, že platí $(1, \dots, 1) \oplus (1, \dots, 1, -1) = \Lambda^k$

Celkem tedy v sudém i lichém případě n dostaneme rozklad

$$
\Lambda^l \otimes \mathbb{C}^n \cong [\Lambda^l \boxtimes \mathbb{C}^n] \oplus \Lambda^{l-1} \oplus \Lambda^{l+1}. \tag{1.15}
$$

2. Stein-Weissova konstrukce

Cílem této kapitoly je osvětlit čtenáři samotné „gro“ práce, konstrukci rotačně invariantních differenciálních operátorů prvního řádu, jak je popsaná v textu Stein a Weiss [5, str. 171].

Výchozí text nebudeme citovat v jeho původním znění, ale přepíšeme ho do značení používaného v práci a uvedeme pouze nutné části. Samotný text, jak ho sepsali E. Stein a G. Weiss, se totiž zabývá například subharmonicitou mocnin řešení zobecněných Cauchy-Riemannových podmínek, což není předmětem této práce. Touto harmonickou analýzou se zabývá také kniha Gilbert a Murray [3].

Základním kamenem konstrukce je dobře známý operátor gradientu pro hladké funkce na konečně dimenzionálním reálném (nebo komplexním) vektorovém prostoru. (Po zbytek kapitoly opět uvažujeme pouze takové prostory a funkce.)

Budeme předpokládat, že čtenář zná pojmy diferenciální operátor a gradient, které se přednáší ve standardním kurzu analýzy.

2.1 Gradient

Cílem této sekce je především důsledné dokázaní $Spin(n)$-invariance operátoru gradientu a ujasnění značení spojené s tímto operátorem, které budeme nadále používat.

Ať V je konečně dimenzionální komplexní vektorový prostor. Uvažujme hladké funkce $f : \mathbb{R}^n \to V$, čili $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, V)$.

Pro definici gradientu budeme uvažovat **komplexifikaci** definující reprezentace $(\sigma, \mathbb{R}^n)$ grupy $Spin(n)$. Tato komplexifikace $(\sigma_c, \mathbb{C}^n)$ je definovaná následovně:

$$\sigma_c(s)(x + iy) = \sigma(s)(x) + i\sigma(s)(y), \tag{2.1}$$

pro $s \in Spin(n)$, $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Definice 15. *Definujeme* ***gradient*** *hladké funkce $f : \mathbb{R}^n \to V$ následovně:*

$$\nabla f(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \otimes e_j,$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$, $\{e_j\}_{j=1}^n$ je kanonická báze prostoru $\mathbb{C}^n$ a derivace $\frac{\partial}{\partial x_j}$ je derivace ve směru souřadnice x_j, čili ve směru j-tého bázového prvku e_j prostoru $\mathbb{R}^n$. (Opakujeme, že $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{R}^n$ mají stejnou kanonickou bázi).

Z definice je snadno vidět, že operátor gradientu působí mezi prostory hladkých funkcí $\nabla : C^\infty(\mathbb{R}^n, V) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, V \otimes \mathbb{C}^n)$.

Definice 16. *Je-li $(\sigma, \mathbb{R}^n)$ definující reprezentace a (R,W) nějaká komplexní konečně dimenzionální reprezentace Lieovy grupy $Spin(n)$, pak* ***na prostoru operátorů*** *$C^\infty(\mathbb{R}^n, W)$ zadefinujeme* ***reprezentaci*** *Π_R následovně:*

Pro $s \in Spin(n), \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, W)$ a $x \in \mathbb{R}^n$ polož:

$$[\Pi_R(s)(\varphi)](x) := R(s)[\varphi(\sigma(s^{-1})(x))].$$

Invariance gradientu

Uvažujme (τ, V) komplexní reprezentaci $Spin(n)$, $(\sigma, \mathbb{R}^n)$ definující reprezentaci $Spin(n)$ a nakonec příslušnou komplexifikaci $(\sigma_c, \mathbb{C}^n)$.

Opakujeme, že pro $\{e_j\}_{j=1}^n$ kanonickou bázi $\mathbb{R}^n$ (tedy i $\mathbb{C}^n$) je definující reprezentace σ (resp. σ_c) určená pomocí vztahů (1.2), (1.5) a (2.1) následovně:

$$\begin{aligned} \sigma(s)(e_j) &= s \cdot e_j \cdot s^{-1} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(s) e_i, \\ \sigma_c(s)(e_j) &= s \cdot e_j \cdot s^{-1} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(s) e_i, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde $\sigma_{ji}(g)$ jsou prvky matice, pokud na operátor $\sigma(s)$, pohlížíme jako na maticový operátor, jehož akce je daná násobením „matice krát vektor“. Tento maticový pohled si můžeme dovolit, neboť předpokládáme, že $\sigma(s) \in SO(n)$. (V případě komplexifikace σ_c je odůvodnění korektnosti maticového pohledu stejný, neboť $\sigma(s)$ a $\sigma_c(s)$ jsou pro všechny $s \in Spin(n)$ definovány na bázových prvcích stejně.)

Nejprve dokážeme pomocné lemma, které upřesňuje tvar parciálních derivací zobrazení $\sigma(s)$.

Lemma 10. *Pro každé $s \in Spin(n)$ a každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí:*

$$\frac{\partial[\sigma(s)]_j}{\partial x_i}(x) = \sigma_{ji}(s).$$

Důkaz. Uvažujme maticový pohled. Označ $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Pak z linearity $\sigma(s)$ a ze vztahu (2.2) platí

$$\sigma(s)(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sigma(s)(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \sigma_{ji}(s) e_j = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sigma_{ji}(s)) e_j.$$

Tedy platí

$$[\sigma(s)]_j(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sigma_{ji}(s).$$

Lemma pak snadno plyne z linearity parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

□

Věta 11 (Invariance gradientu)**.** *Operátor gradientu je $Spin(n)$-invariantní. Čili, ať (τ, V) je komplexní vektorová reprezentace konečné dimenze, pak pro všechny $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, V)$, $s \in Spin(n)$ platí, že $\Pi_{\tau\otimes\sigma_c}(s)(\nabla(f)) = \nabla(\Pi_\tau(s)(f))$.*

Důkaz. Ať tedy $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, V), x \in \mathbb{R}^n, s \in Spin(n)$. Označme

$$y = \sigma(s^{-1})(x) \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

a v důkazu uvažujme maticový pohled na reprezentaci grupy.

Zobrazení $\tau(s)$ je lineární operace, proto ji lze vytknout před derivaci. Následně dostaneme:

$$\begin{aligned}\nabla(\Pi_\tau(s)(f))(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\Pi_\tau(s)(f))}{\partial x_i}(x) \otimes e_i = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\tau(s)\circ f \circ \sigma(s^{-1}))}{\partial x_i}(x) \otimes e_i &= \sum_{i=1}^{n} \tau(s)(\frac{\partial(f\circ\sigma(s^{-1}))}{\partial x_i}(x)) \otimes e_i.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Aplikací řetízkového pravidla na každou parciální derivaci $\frac{\partial}{\partial x_i}$ dostaneme pomocí předchozího lemmatu 10 vzorec:

$$\frac{\partial(f\circ\sigma(s^{-1}))}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y)\cdot \frac{\partial[\sigma(s^{-1})]_j}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y)\cdot \sigma_{ji}(s^{-1}). \tag{2.5}$$

Tedy s využitím vtahů (2.4) a (2.5) máme sérii rovností:

$$\begin{aligned}\nabla\circ(\Pi_\tau(s))(f)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \tau(s)(\frac{\partial(f\circ\sigma(s^{-1}))}{\partial x_i}(x)) \otimes e_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \tau(s)(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y)\cdot\sigma_{ji}(s^{-1}))\otimes e_i.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Naopak přímo z definic reprezentací a gradientu (16), (2.3), (15) a (3) platí následující série rovností:

$$\begin{aligned}\Pi_{\tau\otimes\sigma_c}(s)\circ\nabla(f)(x) &= [\tau\otimes\sigma_c(s)](\nabla f(\sigma(s^{-1})(x))) = \\ &= [\tau\otimes\sigma_c(s)](\nabla f(y)) = \\ &= [\tau\otimes\sigma_c(s)](\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y)\otimes e_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \tau(s)(\frac{\partial f}{\partial y_j}(y))\otimes\sigma_c(s)(e_j).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Navíc platí, že matice rotace příslušné prvku $s \in Spin(n)$ je ortogonální, takže platí $\sigma(s^{-1}) = \sigma(s)^{-1} = \sigma(s)^T$, pak pomocí (2.2) tedy platí

$$\sigma_{ji}(s^{-1}) = \sigma_{ij}(s). \tag{2.8}$$

Celkem díky vztahům (2.6), (2.8) a (2.7), díky linearitě zobrazení $\tau(s)$, linearitě tenzorového součinu v obou složkách a díky prohození pořadí konečných sum dostáváme nakonec:

$$\begin{aligned}\nabla\circ\Pi_\tau(s)(f)(x) &= \sum_{i=1}^{n}\tau(s)(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_j}(y)\cdot\sigma_{ji}(s^{-1}))\otimes e_i = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ji}(s^{-1})\cdot\tau(s)(\frac{\partial f}{\partial y_j}(y))\otimes e_i = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\tau(s)(\frac{\partial f}{\partial y_j}(y))\otimes\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ji}(s^{-1})e_i = \sum_{j=1}^{n}\tau(s)(\frac{\partial f}{\partial y_j}(x))\otimes\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}(s)e_i = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\tau(s)(\frac{\partial f}{\partial y_j}(y))\otimes\sigma_c(s)(e_j) = \Pi_{\tau\otimes\sigma_c}(s)\circ\nabla(f)(x).\end{aligned}$$

□

2.2 Obecná konstrukce

Mějme (τ, V) netriviální ireducibilní komplexní reprezentaci grupy $Spin(n)$ a $f : \mathbb{R}^n \to V$ hladkou funkci. Z předchozí sekce známe operátor gradientu ∇, $\nabla : C^\infty(\mathbb{R}^n, V) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, V \otimes \mathbb{C}^n)$ a víme, že je $Spin(n)$-invariantní.

Z reprezentační teorie víme, že $(T, V \otimes \mathbb{C}^n)$, kde $T = [\tau \otimes \sigma_c]$, je také reprezentace grupy $Spin(n)$. Pomocí reprezentační teorie umíme tento tenzorový součin (jako reprezentaci) rozdělit na konečný direktní součet ireducibilních podreprezentací $V \otimes \mathbb{C}^n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$. Uvažujme pro tento rozklad **projekce** $\pi_j : V \otimes \mathbb{C}^n \to F_j$, pak můžeme vyslovit následující základní větu Stein-Weissovy konstrukce.

Věta 12 (Obecná konstrukce)**.** *Ať operátor D_j je definován následovně:*

$$D_j := \pi_j \circ \nabla : C^\infty(\mathbb{R}^n, V) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, F_j),$$

pak D_j je $Spin(n)$-invariantní operátor.

Důkaz. Pro invarianci chceme ukázat, že platí $D_j \circ \Pi_\tau(s) = \Pi_T(s) \circ D_j$, pro každé $s \in Spin(n)$.

Ať tedy $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, V)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $s \in Spin(n)$. Ztotožníme nyní značení projekce π_j na $V \otimes \mathbb{C}^n$ a na $C^\infty(\mathbb{R}^n, V \otimes \mathbb{C}^n)$ pomocí $[\pi_j(\psi)](x) = \pi_j(\psi(x))$ pro $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, V \otimes \mathbb{C}^n)$, pak $\pi_j(\psi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, F_j)$.

Navíc F_j je invariantní podprostor $V \otimes \mathbb{C}^n$, tedy pro každý $X \in F_j \subset V \otimes \mathbb{C}^n$ platí, že $T(s)(X) \in F_j$ pro každé $s \in Spin(n)$. Z čehož plyne, že projekce π_j jsou invariantní operátory. Tj $\forall X \in V \otimes C^n$ platí

$$(\pi_j \circ T(s))(X) = (T(s) \circ \pi_j)(X).$$

Pak z invariance ∇ (věta 11) a opakovanou aplikací definice reprezentace Π_T (definice 16) a definice operátoru D_j dostáváme sérii rovností

$$(D_j \circ \Pi_\tau)(s)(f)(x) = (\pi_j \circ \nabla \circ \Pi_\tau(s))(f)(x) =$$

$$= (\pi_j \circ \Pi_T(s) \circ \nabla)(f)(x) = (\pi_j \circ T(s) \circ \nabla)(f)(\sigma(s^{-1})(x)) =$$

$$= (T(s) \circ \pi_j \circ \nabla)(f)(\sigma(s^{-1})(x)) = (T(s) \circ D_j)(f)(\sigma(s^{-1})(x)) = (\Pi_T(s) \circ D_j)(f)(x).$$

□

2.3 Zobecněné Cauchy-Riemannovy podmínky

Jak jsme předesílali, budeme pracovat s tzv. Cartanovým součinem $V \boxtimes \mathbb{C}^n$. O něm víme, že je to jednoznačně určená ireducibilní podreprezentace tenzorového součinu $V \otimes \mathbb{C}^n$. Zobecněné Cauchy-Riemannovy podmínky jsou podmínka, že hodnota ∇f leží vždy v Cartanově součinu $V \boxtimes \mathbb{C}^n$.

Víme, že rozklad $V \otimes \mathbb{C}^n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ je jednoznačný až na izomorfismus. Tedy existuje nějaký sčítanec F_l tak, že $F_l \cong V \boxtimes \mathbb{C}^n$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $l = 1$. Stejně jako v minulé sekci uvažujme pro tento rozklad projekce $\pi_j : V \otimes \mathbb{C}^n \to F_j$.

Uvažme nyní následující rozklad s příslušnými projekcemi

$$\begin{aligned} V \otimes \mathbb{C}^n &\cong (V \boxtimes \mathbb{C}^n) \oplus (V \boxtimes \mathbb{C}^n)^c, \\ E &= \pi_1, \\ E^c &= \pi_2 + \cdots + \pi_p, \end{aligned}$$

kde $(V \boxtimes \mathbb{C}^n)^c \cong F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ je doplněk Cartanova součinu a kde projekce $E^c : V \otimes \mathbb{C}^n \to (V \boxtimes \mathbb{C}^n)^c$ je projekce právě na tento podprostor.

Položíme-li $\partial := E \circ \nabla$, $\partial^c := E^c \circ \nabla$, pak snadno vidíme, že pro hladkou funkci $f : \mathbb{R}^n \to V$ platí

$$\nabla f = \partial f + \partial^c f.$$

Definice 17. *Řekneme, že hladká funkce $f : \mathbb{R}^n \to V$ splňuje tzv. zobecněné Cauchy-Riemannovy podmínky (**ZCR**), pokud pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí soustava diferenciálních rovnic*

$$\partial^c f(x) = 0. \tag{2.9}$$

Systém diferenciálních rovnic (2.9) *nazveme* ***systémem příslušným reprezentaci*** $T = [\tau \otimes \sigma_c]$.

V předpisu uvažujeme na pravé straně prvek $0 \in V \otimes \mathbb{C}^n$.

Snadno si uvědomíme, že jelikož Cartanův součin je ireducibilní vzhledem k reprezentaci T, pak následně E, ∂ i C-R podmínky závisí na této reprezentaci. Pokud bychom na V nebo na $\mathbb{C}^n$ uvažovali jinou reprezentaci, pak dostaneme jiný (resp. ne nutně stejný) systém rovnic.

Poznámka. Řešení zobecněných Cauchy-Riemannových podmínek mají „hezké vlastnosti“, tj. jsou např harmonická, nebo jejich mocniny jsou subharmonické. Podrobnosti k této studii je možné najít například v textu Stein a Weiss [5, Theorem 1, str. 171-172] nebo Gilbert a Murray [3, Section 4.5, str. 232-239].

3. Příklady

V této kapitole sestrojíme konkrétní příklady známých rotačně invariantních diferenciálních operátorů prvního řádu pomocí Stein-Weissovy konstrukce a aplikace zobecněných Cauchy-Riemannových podmínek.

Budeme uvažovat operátory pro funkce, které mají hodnoty ve fundamentálních reprezentacích grupy $Spin(n)$. Tímto způsobem docílíme konstrukce **Diracova operátoru** a **Hodge-deRhamova systému** diferenciálních rovnic.

Nakonec ukážeme konstrukci dobře známých **Cauchy-Riemannových podmínek** pro funkce na komplexní rovině $\mathbb{C}$.

Výpočty v této kapitole se opírají výhradně o fakta, která jsme v této práci již zmínili a dokázali.

3.1 Diracův operátor

Obecný Diracův operátor je libovolný diferenciální operátor prvního řádu s konstantními koeficienty v Cliffordově algebře, jehož druhá mocnina je rovna Laplaceovu operátoru. Čili je to takový operátor ∂, že platí $\partial^2 = \partial \circ \partial = \Delta$.

Využití tohoto operátoru je například ve studii harmonické analýzy funkcí, neboť zřejmě pak platí, že libovolná funkce, která leží v $Ker(\partial)$, je automaticky harmonická (čili $\Delta(f) = 0$).

Širší studií Diracova operátoru a jeho uplatnění se zabývá např. kniha Gilbert a Murray [3, Chapter 2].

Jak víme z minulé teorie, uvažujeme-li fundamentální reprezentace grupy $Spin(n)$, které odpovídají spinorovým (tedy počíselným) reprezentacím, je potřeba rozlišit dva případy parity dimenze n.

$\mathbb{S}_{2k+1}$

Nechť $n = 2k+1$. Uvažujme $(\sigma_c, \mathbb{C}^n)$ definující a $(S, \mathbb{S})$ jedinou fundamentální spinorovou reprezentaci grupy $Spin(n)$.

Klimykův algoritmus rozkladu tenzorového součinu nám dá rozklad (1.12):

$$\mathbb{S} \otimes \mathbb{C}^n = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2}\right).$$

Zatímco první člen rozkladu, označme ho F, je Cartanův součin $\mathbb{S} \boxtimes \mathbb{C}^n$, druhý, označený G, je isomorfní prostoru $\mathbb{S}$.

Lemma 13. *Definujeme $\Phi : \mathbb{S} \otimes \mathbb{C}^n \to \mathbb{S}$ tak, že $\Phi(z \otimes v) = v \cdot z$, kde „$\cdot$“ je Cliffordovské násobení. Pak Φ je $Spin(n)$-invariantní, $\Phi|_F \equiv 0$ a $\Phi|_G$ je invariantní isomorfismus vektorových prostorů.*

K důkazu tohoto lemmatu vzpomeňme na Schurovo lemma (věta 1), které říká, že zobrazení mezi dvěma ireducibilními reprezentacemi Lieovy grupy je buď triviální, nebo isomorfismus.

Navíc díky vztahu z lemmatu 7 platí, že skutečně $\Phi(z \otimes v) \in \mathbb{S}$.

Důkaz. $Spin(n)$-invariance se ukáže snadno:

$$\Phi([S \otimes \sigma_c](s)(z \otimes v)) = \Phi(S(s)(z) \otimes \sigma_c(s)(v)) = \sigma_c(s)(v) \cdot S(s)(z) =$$
$$= s \cdot v \cdot s^{-1} \cdot s \cdot z = s \cdot v \cdot z = S(s)(v \cdot z) = S(s)(\Phi(z \otimes v)).$$

Pro restrikci $\Phi|_F$ platí Schurovo lemma, tedy $\Phi|_F$ je buď isomorfismus, nebo nulový operátor. Protože ale F a $\mathbb{S}$ mají oba různou nejvyšší váhu, nemohou být isomorfní. Proto platí $\Phi|_F \equiv 0$.

Nenulovost Φ plyne přímo ze skutečnosti, že např. $e_1 \cdot e_2 \in \mathbb{S}$, pak pro $e_2 \in \mathbb{C}^n$ platí: $\Phi([e_1 \cdot e_2] \otimes e_2) = e_2 \cdot e_1 \cdot e_2 = -(e_2)^2 \cdot e_1 = e_1 \neq 0$.

Tedy Schurovo lemma platí i pro restrikci $\Phi|_G$, u kterého nulovost vylučujeme díky nenulovosti operátoru Φ.

□

Poznámka. Z důsledku Schurova lemmatu (důsledek 3) plyne, že Φ je nenulový násobek projekce $\pi_G : \mathbb{S} \otimes \mathbb{C}^n \to G$.

Použitím dokázaného lemmatu je zřejmá ekvivalence platnosti zobecněných Cauchy-Riemannových podmínek na $\mathbb{S}$:

$$(ZCR) \Longleftrightarrow \pi_G \circ \nabla(f) = 0 \Longleftrightarrow \Phi \circ \nabla(f) = 0.$$

Označme $\partial(f) := \Phi \circ \nabla(f)$, pro hladkou funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}$, pak platí, že

$$\partial(f)(x) = \Phi(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \otimes e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \tag{3.1}$$

Čili ∂ má přesně tvar dobře známého **Diracova operátoru** v $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{S}_{2k}$

Nechť $n = 2k$. Uvažujme $(\sigma_c, \mathbb{C}^n)$ definující reprezentaci $Spin(n)$.

Spinorová reprezentace $(S, \mathbb{S})$ se, jak víme, rokládá na dvě ireducibilní reprezentace $\mathbb{S}_+, \mathbb{S}_-$, které odpovídají vahám $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, respektive $(\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2})$.

Uvažujme tedy jednu z fundamentálních spinorových reprezentací $(S_\pm, \mathbb{S}_\pm)$.

Případy odpovídající ireducibilním reprezentacím lze studovat odděleně a sepsat každý zvlášť, ale vzhledem k tomu, že jsou do jisté míry symetrické, uvedeme zde zjednodušený zápis obou případů pomocí symboliky „±“.

Klimykův algoritmus rozkladu tenzorového součinu nám dává rozklad (1.13)

$$\mathbb{S}_\pm \otimes \mathbb{C}^n = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, \dots, \pm\tfrac{1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{2}, \mp\tfrac{1}{2}\right).$$

Což přesně odpovídá, že první člen součtu, označený opět jako F, je Cartanův součin $\mathbb{S}_\pm \boxtimes \mathbb{C}^n$ a druhý sčítanec je isomorfní $\mathbb{S}_\mp$, označme ho $G_\mp$.

Můžeme tedy uvažovat stejné lemma jako v lichém případě, důkaz proběhne naprosto identicky. (Skutečně, neboť platí „vektor krát spinor$_\pm$ je spinor$_\mp$“ pomocí vztahu 1.9.)

Uvažme následující operátor: $\Phi_\pm : \mathbb{S}_\pm \otimes \mathbb{C}^n \to \mathbb{S}_\mp$, definovaný stejně jako v lichém případě. Stejně jako v lichém případě uvažujeme ztotožnění $\mathbb{S}_\mp \cong G_\mp$.

Opět označme $\partial_\pm(f) := \Phi_\pm \circ \nabla(f)$, pro hladkou funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}_\pm$, a dostaneme ekvivalentní podmínku platnosti zoobecněných Cauchy-Riemannových podmínek:

$$(ZCR \text{ na } \mathbb{S}_\pm) \Longleftrightarrow \partial_\pm(f) = 0.$$

Výsledkem je opět operátor, který má tvar (3.1), což je tvar Diracova operátoru (v obou případech „±“).

3.2 Hodge-de Rhamův systém

Uvažujeme-li funkce, které mají hodnoty ve fundamentálních reprezentacích odpovídající vnějším mocninám Λ^l definující reprezentace (takovým funkcím se často říká také „l-formy“), dostaneme zobecněnými Cauchy-Riemannovými podmínkami systém diferenciálních rovnic (nedostaneme pouze jednu rovnici jako v případě spinorových reprezentací).

Hodge-de Rhamův systém diferenciálních rovnic představuje jeden ze způsobů, jak studovat harmonicitu l-forem (neboť Laplaceův operátor na l-formách je definován jako $\Delta := d^* \circ d + d \circ d^*$ pro diferenciál d a kodiferenciál d^*).

Ať $n = 2k + 1$, nebo $n = 2k$.

Uvažujme fundamentální celočíselnou reprezentaci Λ^l grupy $Spin(n)$ pro nějaké $l \in \{1, \dots, k-1\}$ (je-li n sudé, pak také $l \neq k-1$). Jelikož se jedná o celočíselnou reprezentaci spin grupy, můžeme ji ztotožnit s reprezentací grupy $SO(n)$, což nám zjednoduší značení při výpočtech.

Klimykův algoritmus rozkladu tenzorového součinu nám dá rozklad (1.15):

$$\Lambda^l \otimes \mathbb{C}^n = [\Lambda^l \boxtimes \mathbb{C}^n] \oplus G_- \oplus G_+,$$

kde $G_\pm \cong \Lambda^{l\pm1}$ (dále tyto prostory ztotožňujeme).

Budeme tedy pro Stein-Weissovu konstrukci uvažovat projekce na prostory Λ^{l-1} a Λ^{l+1}. Sestrojíme dva invariantní operátory: $\varphi_\pm : \Lambda^l \otimes \mathbb{C}^n \to \Lambda^{l\pm1}$.

Definice φ_+ se přímo nabízí jako:

$$\varphi_+(a \otimes v) = v \wedge a, \tag{3.2}$$

kde $a \in \Lambda^l, v \in \mathbb{C}^n$ a „$\wedge$“ je vnější násobení.

Lemma 14. *φ_+ je invariantní operátor.*

Důkaz. Provedeme pouze na generujících prvcích (tedy na l-vektorech).

Ať $A \in SO(n), v_1, \dots, v_l, z \in \mathbb{C}^n$. Pak

$$R_{l+1}(A)(\varphi_+((v_1 \wedge \dots \wedge v_l) \otimes z)) = R_{l+1}(A)(z \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_l) =$$

$$= A(z) \wedge A(v_1) \wedge \dots \wedge A(v_l) = A(z) \wedge (R_l(A)(v_1 \wedge \dots \wedge v_l)) =$$

$$= \varphi_+(R_l(A)(v_1 \wedge \dots \wedge v_l) \otimes A(z)) = \varphi_+([R_l \otimes \varrho_c](A)((v_1 \wedge \dots \wedge v_l) \otimes z)).$$

Tedy platí $R_{l+1}(A)) \circ \varphi_+ = \varphi_+ \circ ([R_l \otimes \varrho_c](A)$, což nám dává invarianci φ_+.

□

Navíc, ze Schurova lemmatu (věta 1) opět platí, že $(\varphi_+|_{[\Lambda^l \boxtimes \mathbb{C}^n]}), (\varphi_+|_{G_-}) = 0$ (díky rozdílnosti nejvyšších vah, prostory Cartanova součinu, G_- a Λ^{l+1} nemohou být isomorfní) a naopak restrikce $(\varphi_+|_{G_+})$ je isomorfismus.

Pro hladkou funkci $f : \mathbb{R}^n \to \Lambda^l$ platí předpis $f(x) = \sum_{|I|=l} f_I(x) e_I$ a její parciální derivace jsou definovány jako $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{|I|=l} \frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x) e_I$, pro $I = \{i_1, \ldots, i_l\}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n$, $e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_l}$ a hladké fce $f_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Pro takovou f označme $d(f) := \varphi_+ \circ \nabla(f)$. Pak platí, že

$$
\begin{aligned}
d(f)(x) = \varphi_+ \circ \nabla(f)(x) = \varphi_+ (\sum_{i=1}^{n} \sum_{|I|=l} \frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x) e_I \otimes e_i) = \\
= \sum_{i=1}^{n} \sum_{|I|=l} \varphi_+ (\frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x) e_I \otimes e_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|I|=l} e_i \wedge (\frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x) e_I) = \\
= \sum_{i=1}^{n} \sum_{|I|=l} \frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x) \cdot [e_i \wedge e_I],
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

tedy vidíme, že d má tvar známého **vnějšího diferenciálu** (nebo jinak také **de Rhamova operátoru**) na vnější algebře $\Lambda^*(\mathbb{C}^n)$.

Polož pro $v_1, \ldots, v_l, z \in \mathbb{C}^n$ operátor φ_- jako tzv. **kontrakci l-vektoru** vektorem. Neboli položme jeho hodnotu na l-vektorech následujícím způsobem a lineárně ho rozšířme na celý prostor.

$$
\varphi_-((v_1 \wedge \ldots \wedge v_l) \otimes z) = \sum_{j=1}^{l} (-1)^{j+1} < z, v_j > \cdot [v_1 \wedge \ldots \hat{v_j} \ldots \wedge v_l], \tag{3.4}
$$

kde notace $[v_1 \wedge \ldots \hat{v_j} \ldots \wedge v_l]$ znamená, že je to vnější součin všech v_i bez j-tého členu, (tj. $[v_1 \wedge \ldots \hat{v_j} \ldots \wedge v_l] = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{j-1} \wedge v_{j+1} \wedge \ldots \wedge v_l$), a kde $< x,y >= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ je klasická bilineární forma pro vektory $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$. V řeči matic platí $< x,y >= x^T \cdot y$, což uvažujeme jako násobení matic a ztotožníme matice 1×1 s komplexními čísly.

Lemma 15. *Pro $A \in SO(n), x,y \in \mathbb{C}^n$ platí $< \varrho_c(A)(x), \varrho_c(A)(y) >=< x,y >$.*

Důkaz. Operátor $\varrho_c(A)$, je pomocí vztahu 1.2 ortogonální (tj. $A^T \cdot A = Id$). Pak platí:

$$
\begin{aligned}
< \varrho_c(A)(x), \varrho_c(A)(y) >=< A \cdot x, A \cdot y >= (A \cdot x)^T \cdot A \cdot y = \\
= x^T \cdot A^T \cdot A \cdot y = x^T \cdot Id \cdot y = x^T \cdot y =< x,y > .
\end{aligned}
$$

□

Lemma 16. *φ_- je invariantní operátor.*

Důkaz. Ať $A \in SO(n), v_1, \ldots, v_l, z \in \mathbb{C}^n$, pak z definic (1.2), (3), (3.4), z Lemmatu 15 a z linearity zobrazení $R_{l-1}(A)$ platí série rovností

$$
\varphi_-[R_l \otimes \varrho_c(A)((v_1 \wedge \ldots \wedge v_l) \otimes z)] = \varphi_-[(A(v_1) \wedge \ldots \wedge A(v_l)) \otimes A(z)] =
$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} < A(z), A(v_i) > \cdot [A(v_1) \wedge \dots (A(\hat{v_i})) \dots \wedge A(v_l)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} < z, v_i > \cdot [A(v_1) \wedge \dots (A(\hat{v_i})) \dots \wedge A(v_l)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} < z,v_i > \cdot R_{l-1}(A)(v_1 \wedge \dots \hat{v}_i \dots \wedge v_l) =$$

$$= R_{l-1}(A)(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} < z,v_i > \cdot [v_1 \wedge \dots \hat{v}_i \dots \wedge v_l]) =$$

$$= R_{l-1}(A)[\varphi_-((v_1 \wedge \dots \wedge v_l) \otimes z)].$$

□

Navíc, ze Schurova lemmatu (věta 1) platí, že $(\varphi_-|_{[\Lambda^l \boxtimes \mathbb{C}^n]}), (\varphi_-|_{G_+}) = 0$ (díky rozdílnosti nejvyšších vah) a naopak restrikce $(\varphi_-|_{G_-})$ je isomorfismus.

Označme $d^*(f) = \varphi_- \circ \nabla(f)$ jako výše pro hladkou funkci $f : \mathbb{R}^n \to \Lambda^l$, pak platí vzorec

$$\begin{aligned} d^*(f)(x) = \varphi_- \circ \nabla(f)(x) = \varphi_-(\sum_{i=1}^{n} \sum_{|I|=l} [\frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x) e_I] \otimes e_i) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|I|=l} \varphi_-([\frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x) e_I] \otimes e_i) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|I|=l} \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x) \cdot (-1)^{j+1} \cdot \delta_i^j \cdot [e_{I \setminus \{j\}}]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Operátoru d^* se říká **kodiferenciál** a platí, že je duálním operátorem k vnějšímu diferenciálu d výše.

Celkem dostaneme, že ekvivalentní podmínka platnosti zobecněných Cauchy-Riemannových podmínek je platnost **Hodge-deRhamova systému** diferenciálních rovnic.

$$(ZCR) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} d(f) = 0 \\ d^*(f) = 0 \end{pmatrix}.$$

3.3 Cauchy-Riemannovy rovnice v $\mathbb{C}$

Ze standardního kurzu komplexní analýzy známe klasické Cauchy-Riemannovy podmínky, které tvrdí, že hladká funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní, právě tehdy, když platí soustava rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Konstrukci těchto podmínek uvádíme nejen, protože je speciálním případem zobecněných Cauchy-Riemannových podmínek, ale také protože umožňuje zjišťovat holomorficitu komplexních funkcí. Motivaci studia holomorfních komplexních funkcí známe velmi dobře z již zmíněného kurzu komplexní analýzy.

Mějme hladkou funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. Ztotožněním $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ můžeme také uvažovat, že f je hladké zobrazení z komplexních čísel do sebe. Uvažme definující reprezentaci $(\varrho, \mathbb{R}^2)$ grupy $SO(2)$ a její komplexifikaci $(\varrho_c, \mathbb{C}^2)$.

Grupa rotací $SO(2)$ je dobře známá grupa matic tvaru

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta, & -\sin\theta \\ \sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix},$$

pro $\theta \in \mathbb{R}$.

Grupa $SO(2)$ je ale na rozdíl od obecného případu $SO(n)$ komutativní. Důsledkem toho dostáváme, že komplexifikace definující reprezentace $\mathbb{C}^2$ není ireducibilní (viz následující lemma).

Lemma 17. *Je-li (τ,V) ireducibilní komplexní reprezentace komutativní Lieovy grupy G, pak V je nejvýše jednodimenzionální.*

Důkaz. Z komutativity grupy G platí, že $\tau(g) : V \to V$ jsou invariantní homomorfismusy pro každé $g \in G$. Tedy z důsledku Schurova lemmatu pro všechny $g \in G$ platí $\tau(g) = \lambda_g Id$ pro nějaké $\lambda_g \in \mathbb{C}$.

Zvolme libovolně $0 \neq v \in V$, pokud existuje, pak podprostor $< v > \subset V$ je invariantní, neboť $\lambda v \in < v >$ pro libovolné $\lambda \in \mathbb{C}$, tedy $\tau(g)(v) \in V$ pro libovolné $g \in G$. Z ireducibility V a $< v > \neq \{0\}$ musí platit, že $< v > = V$.

□

Navíc jednoduchým výpočtem platí

$$\begin{pmatrix} \cos\theta, & -\sin\theta \\ \sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = e^{\mp i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Tedy jediné dvě podreprezentace jsou podprostory odpovídající vlastním podprostorům vektorů $(1, \pm i)$.

Z jednoduchého algebraického ověření platí, že je-li $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ lineární kombinací vektorů $(1, \pm i)$, pak nutně

$$(x,y) = \frac{x - iy}{2}(1, +i) + \frac{x + iy}{2}(1, -i).$$

Položme tedy dva operátory $\Phi_\pm : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \cdot (1, \pm i)$ následujícím způsobem:

$$\Phi_\pm((x,y)) = \frac{1}{2}(x \mp iy). \tag{3.8}$$

Gradient funkce f je $\nabla(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \otimes e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \otimes e_2$.

Položme $\partial_\pm = \Phi_\pm \circ \nabla$, pak platí:

$$\partial_\pm(f) = \Phi_\pm \circ \nabla(f) = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x_1} \mp i\frac{\partial f}{\partial x_2}).$$

Položíme-li $\partial_- = 0$, a rozepíšeme-li $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + i\frac{\partial f_2}{\partial x_i}$, pak porovnáním reálné a komplexní složky (díky ztotožnění tečného prostoru $T_0(\mathbb{C})$ a $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$) dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

která je přesně ekvivalentní tvaru (3.6), což je tvar dobře známých **Cauchy-Riemannových podmínek** pro hladké komplexní funkce.

Závěr

Závěrem bychom chtěli říct, že Stein-Weissova konstrukce rotačně invariantních diferenciálních operátorů je velmi šikovný nástroj, jak pro konstrukci nových operátorů, tak i pro zjišťování vlastností známých operátorů.

Teorie uvedená v této práci se dá zobecnit mnoha způsoby. Jedno z možných zobecnění je uvážení těchto postupů ne na Euklidovských prostorech, ale obecně na jistých varietách (je zmíněno v textu Bureš a Souček [1]). Také se dají zjišťovat vlastnosti řešení zobecněných Cauchy-Riemannových podmínek. Podrobnosti lze nalézt v textech Stein a Weiss [5, Theorem 1, str. 171-172] a Gilbert a Murray [3, Section 4.5, str. 232-239].

Práce je především kompilační, a proto by měla sloužit jako shrnutí a utřídění poznatků z několika klíčových zdrojů. Přínos práce leží zejména ve formulaci teorie v řeči srozumitelné studentům bakalářského studia na Matematicko-fyzikální fakultě v Praze. V práci také rozepisujeme netriviální důkazy a výpočty, které jsou často v odborných matematických textech považovány za snadné a bývají vynechávány. Jedná se například o výpočet vah reprezentací (lemmata 2, 3 a 8), podrobný výpočet rozkladu tenzorového součinu pomocí Klimykova algoritmu (sekce 1.3), důkaz invariance operátorů ∇ a D_i (věty 11 a 12) a důkazy lemmat v kapitole 3 (lemmata 13, 14 a 16).

Seznam použité literatury

[1] Bureš, J. a Souček, V. (1984). Regular spinor valued mappings. *Seminari di geometria*, pages 7–22.

[2] Fulton, W. a Harris, J. (1991). *Representation Theory.* Springer-Verlag New York Inc. ISBN 0-387-97527-6.

[3] Gilbert, J. E. a Murray, M. A. M. (1991). *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis.* Cambridge University press. ISBN 0-521-34654-1.

[4] Porteous, I. R. (1969). *Topological geometry.* Cambridge Universty Press. ISBN 978-0-521-29839-1.

[5] Stein, E. M. a Weiss, G. (1968). Generalization of the Cauchy-Riemann equations and representations of the rotation group. *American Journal of Mathematics.*