

OPONENTSKÝ POSUDEK NA DIPLOMOVOU PRÁCI

Autor diplomové práce: Jan Krejčí

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Luboš Pick, DSc.

Oponent: Doc. RNDr. Aleš Nekvinda, CSc.

Rok podání diplomové práce: 2020

Diplomová práce pana Jana Krejčího se zabývá operátorem $Tf(t) = \int_t^1 f^*w$, kde w je nějaká klesající váhová funkce. Autor se zajímá o následující otázky: Nechť je dán Banachův prostor funkcí Y , hledáme optimální Banachův prostor funkcí X takový, že $T : X \rightarrow Y$ je omezený a naopak, nechť je dán Banachův prostor funkcí X , hledáme optimální Banachův prostor funkcí Y takový, že $T : X \rightarrow Y$ je omezený.

Práce je rozdělena na pět částí. V první části je vysvětlena motivace práce a stručně naznačeny výsledky, ve druhé části je dán přehled základních značení a faktů potřebných v dalších částech. Ve třetí části jsou nalezeny vzorečky pro normy optimálních prostorů, ve čtvrté části jsou spočené příklady různých optimálních prostorů při různých konkrétních zdrojových a cílových prostorech, např Lorenzových a zobecněných Lorenzových prostorech. V páté části je kromě jiného uvažován cílový prostor L^∞ a hledá se, za jaké podmínky na w existuje optimální X .

Lze říci, že práce přináší nové výsledky ve stále vyvíjející disciplíně funkcionální analýzy, a to teorie prostorů funkcí a operátorů mezi nimi. Zpracování práce ukazuje na autorovu slušnou erudovanost, dobrou orientaci v problematice jakož i znalost současné i klasické literatury. Práce je dobře a přehledně sepsána.

V práci samotné jsem našel několik překlepů a také několik nejasností. Jejich výčet příkládám a rád bych viděl nějaké vysvětlení.

Překlepy a nejasnosti:

- (1) V celé práci se zkoumá otázka omezenosti operátoru T na různých prostorech.
Plyne z omezenosti též bodová spojitost? To by jistě stálo za zmínu.
- (2) str 5, Thm 2.3: f^* je na předchozí stránce definováno jen pro $f \in \mathcal{M}(0, 1)$, ale v Thm 2.3 jsou f, g definovány na $\mathcal{M}(R, \lambda)$. Neříká se, co je (R, λ) .
- (3) str 7, Def 2.13: V předpokladech je $q \in [1, \infty)$, ale $\|f\|_{p,q}$ je pak definována i pro $q > 0$. Jak to jde dohromady?
- (4) str 10, řádek 3: Jak souvisí výraz $\left\| \frac{w(t)}{t} \right\|_{L^p}$ s nerovnostmi na předchozí stránce?
Tam jsou výrazy obsahující $\left\| \frac{w(t)^{1/p}}{t} \right\|_{L^p}$.
- (5) str 10, řádky 8 až 15: Argumentu pro netriviálnost $\Gamma^p(w)$ nerozumím.
- (6) str 13, řádek 8: Tvrzení "The integral $\int_0^t f^*$ is non-zero for all $t > 0$ if and only if g is non-zero a.e." je nějak podezřelé.
- (7) str 18, řádky 14 až 16: Předpokládá se, že $tw(t)$ je neklesající. Z toho se vyvozuje

$$sw(s) \leq Ctw(t), \quad 0 < s \leq t \leq 1$$

pro nějaké $C > 0$. Proč není rovnou $C = 1$, když $tw(t)$ je neklesající?

- (8) str 19, řádek 6: Nemá být $tw(t) \in L^1$ místo $tw(t) \in L^\infty$?

- (9) str 23, poslední dva řádky a str 24 první dva řádky: Jednak je tam výraz $\int_0^t w(t)dt$. Určitě by měla být integrační proměnná označena jinak, např. $\int_0^t w(s)ds$.

Potom, odhad

$$\sup_{t \in (0,1)} \frac{t}{\int_0^t \int_s^1 w(y)dyds} \int_t^1 w(t)dt \leq 1$$

je sice pravda, ale asi by to chtělo zdůvodnit, třeba takto: Zřejmě je

$$\int_0^t \int_s^1 w(y)dyds \geq \int_0^t \int_t^1 w(y)dyds = \int_t^1 \int_0^t w(y)dsdy = t \int_t^1 w(y)ds$$

a okamžitě máme

$$\sup_{t \in (0,1)} \frac{t}{\int_0^t \int_s^1 w(y)dyds} \int_t^1 w(t)dt \leq \sup_{t \in (0,1)} \frac{t \int_t^1 w(t)dt}{t \int_t^1 w(y)ds} = 1$$

a čtenář nemusí přemýšlet, proč to tak je.

- (10) str 24, poslední řádek: V integrálu chybí ds .
- (11) str 25, řádky 13, 14, 16: Tomu nějak není rozumět. Na ř. 13 vystupuje Ug a na ř. 14 a 16 žádné g není. To je divné.
- (12) str 44, řádky 4 a 5: Je tam nějaký zmatek ve značení. Ve výrazu $\|w(t)T\chi_{(T,1]}\|_{X'(0,1)}$ nevím význam těch dvou T . Znamená to jednou operátor T na funkci $\chi_{(T,1]}$, nebo je to číslo z $(0, 1]$? Tomu není vůbec rozumět.
- (13) str 46, řádky 21 a 22: Nevidím, proč platí rovnost z ř. 21 na ř. 22. Vidím, že

$$\frac{\varphi_X}{\varphi_Y}(t_n) = \frac{\|\chi_{[0,t_n]}\|_{X(0,1)}}{\|\chi_{[0,t_n]}\|_{Y(0,1)}} = \frac{\|\chi_{[0,t_n]}\|_{X(0,1)} \|\chi_{[0,t_n]}\|_{Y'(0,1)}}{t_n}.$$

Aby autorovi platila rovnost, je potřeba vědět, že

$$\|\chi_{[0,t_n]}\|_{Y'(0,1)} = \|w(t)(t\chi_{[0,t_n]}(t) + t_n\chi_{(t_n,1]}(t))\|_{X'(0,1)}.$$

Proč to platí?

- (14) str 47, poslední řádek: Zdě se mi, že platí dokonce

$$\int_{T/2}^T tw(t)dt \geq \frac{3}{8}T^2w(T),$$

což je trochu lepší konstanta než $\frac{1}{4}$.

I přes tyto nedostatky se jedná o dobrou práci, která splňuje požadavky kladené na diplomovou práci.

Aleš Nekvinda