Oponentský posudek disertační práce **RNDr. Václava Kučery**
High order methods for the solution of compressible flows

Tématem disertační práce je nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků (DGFEM), teoretická analýza jejích vlastností a aplikace metody pro řešení dvojrozměrných úloh proudění popsaných systémy Eulerových (nevazké proudění) i Navier-Stokesových rovnic (laminární vazké proudění).

Jde o téma velmi aktuální. DGFEM metodě je v posledních letech věnována značná pozornost jak z hlediska teoretického, tak i praktických aplikací. I přes vyšší výpočetní náročnost představuje jeden z velmi perspektivních postupů umožňujících analyzovat a aplikovat metody vyššího řádu přesnosti. Přitom metody vyššího než teoreticky druhého řádu (na hladkém řešení) stále nejsou pro úlohy mechaniky tekutin dostatečně rozvinuty.

Prvá část předkládané práce (kapitoly 1 a 2) je věnována modelové nelineární skalární rovnici konvekce-difuze. Autor formuluje tři různé alternativy aproximace obecně nelineárního difuzního členu. Při analýze vlastností metod (odhadů chyby) navazuje na práce Feistauera a Dolejšího věnované metodě DGFEM. Přináší nové originální výsledky v podobě optimálních chybových odhadů symetrické varianty aproximace difuzních členů pro relativně obecné triangulace s vyšším řádem přesnosti a dalších odhadů pro ostatní varianty. Výsledky dokumentuje numerickými experimenty pro 2D úlohu popsanou tzv. vazkou Burgersovou rovnicí pro případy po částech lineárních i po částech kvadratických elementů. Vhodnější by ale bylo zařadit tuto část práce až za kapitolu dvě, protože takto lze těžko sledovat výběr případů a závěry z numerických experimentů.

Aplikace DGFEM metody pro složitější praktické úlohy je podobně jako jiné numerické metody založena na v určitém smyslu vhodném rozšíření algoritmů analyzovaných pro skalární problém a nezbytnou součástí vývoje metody jsou pak i numerické testy určitých detailů výpočtového postupu.

Tomu se autor věnuje ve zbylých částech práce. Formuluje úlohy nevazkého proudění a popisuje DGFEM metodu s explicitní i semiimplicitní aproximací v čase. Uvažuje alternativní numerické aproximace konvektivního toku na vnitřních hranicích elementů i alternativní postupy potřebných modifikací schématu v blízkosti rázových vln. Podrobně se věnuje aproximaci okrajových podmínek na vstupní a výstupní hranici výpočtové oblasti založené na lokální 1D linearizované úloze na odpovídající hranici elementu a charakteristické dekompozici řešení. Úspěšný vývoj metody dokumentuje na případech vnější aerodynamiky - 2D obtékání profilu a válce - i vnitřní aerodynamiky (tzv. GAMM kanál) pro široký rozsah Machových čísel zahrnujících vedle případů transsonického a supersonického proudění s rázovými vlnami i řadu úloh z fyzikálního hlediska nestlačitelného proudění, jež však představují z hlediska matematického modelu velmi komplikované případy stlačitelného proudění při velmi malých Machových číslech.

V poslední části se pak autor zabývá rozšířením semiimplicitní metody pro případ vazkého proudění popsaného systémem Navier-Stokesových rovnic. Jsou navrženy alternativní varianty diskretizace disipativních členů vycházející z postupů studovaných v prvé části práce pro modelovou rovnici. Úspěšný vývoj metody je dokumentován porovnáním s Blasiovým řešením mezní vrstvy na desce pro Re=1000 i na případech stacionárního i nestacionárního obtékání symetrického profilu NACA0012 při Re=5000.

Práce svým širokým záběrem dokumentuje autorovu velmi dobrou orientaci v různých aspektech vývoje, analýzy a použití DGFEM metod a přináší řadu významných výsledků. Zde je nutné zvláště vyzdvihnout:

- příspěvek k teoretické analýze chyby DGFEM metody pro elementy vyššího řádu přesnosti (vyšší p) pro modelové úlohy konvekce-difuze;

- vynikající výsledky získané při řešení úloh stlačitelného nevazkého proudění při velmi nízkých Machových číslech. I když používané implementace okrajových podmínek asi nelze používat zcela univerzálně (např. obtékání profilových mříží), jde o jednu z velmi mála tzv. "all speed" metod, kdy numerický algoritmus pracuje bez dodatečných modifikací pro řešení proudění s rázovými vlnami (nespojitá řešení) i pro řešení úloh s velmi malými Machovými čísly, kdy je sice řešení hladké, ale výchozí systém rovnic má velice nepříjemné matematické vlastnosti;
- úspěšný vývoj metody pro řešení vazkého proudění s elementy vyššího řádu přesnosti i když je ještě třeba další otestování a případně dopracování metody pro případy s vyššími Reynoldsovými čísly.

K práci mám několik připomínek a dotazů:
- v kapitole 1.6 jsou prezentovány numerické experimenty pro testování metody s elementy vyššího řádu (p=1, resp. 2). Přitom se jedná o nestacionární úlohu řešenou metodou pouze prvního řádu v čase. I když cílem je testování velikosti chyby v prostorových proměnných (pro pevný čas), očekával bych naopak použití metody vysokého řádu v čase, protože z CFL kritéria stability je $O(\Delta t) \sim O(h^2)$.
- numerické výsledky řešení nevazkého proudění prezentované v kap. 3.8. jsou velmi kvalitní. Postrádám však pro jejich hodnocení - např. kvalitu zachycení rázové vlny - dostatečnou informaci o použité síti. Její topologie může mít na získané výsledky vliv srovnatelný s kvalitou vlastní numerické metody. Je možné komentovat použité sítě a případně vztah kvality výsledku, hustoty sítě a doby výpočtu při použití např. lineárního a kvadratického elementu?
- v kap. 3.6.2 je popsána semiimplicitní metoda diskretizace v čase používající určitou linearizaci nelineárních členů - např. 3.70. Je tento postup použitelný i pro elementy vyššího řádu beze ztráty přesnosti? Lze na základě zkušeností z numerických výpočtu blíže specifikovat situaci s postupem řešení soustavy lineárních rovnic, resp. větu "v případech kdy iterační řešení není postačující ..." v téže kapitole na str. 83?

Výše uvedené připomínky rozhodně nesnižují vysokou odbornou úroveň předkládané práce a navrhuji proto po její úspěšné obhajobě udělit RNDr. V. Kučerovi titul Ph.D.

V Praze, 7. 11. 2007