

**Univerzita Karlova**  
**Pedagogická fakulta**  
**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

## **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**Prostorové řešení rovinných geometrických úloh**  
**Spatial solutions to planar geometric problems**

**Adéla Ptáčková**

**Vedoucí práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.**

**Studijní program: Specializace v pedagogice**

**Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání**

**2020**

Odevzdáním této bakalářské práce na téma *Prostorové řešení rovinných geometrických úloh* potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 23. července 2020

## **Poděkování**

Na tomto místě bych chtěla poděkovat především svému vedoucímu bakalářské práce Mgr. Michalovi Zambojovi, Ph.D. za odborné a skvělé vedení této práce. Děkuji za veškerý věnovaný čas při konzultacích, za trpělivost, ochotu, poskytnuté zdroje a cenné rady, které mi pomohly práci dokončit.

## **ABSTRAKT**

Tato bakalářská práce se zabývá řešením rovinných geometrických úloh poněkud netradičním způsobem, a to řešením pomocí prostorové interpretace. K prostorovému řešení je vždy využito některé z geometrických těles. Práce je rozdělena na dvě hlavní části. V části první využijeme hranaté plochy a tělesa, kterými jsou hranol a jehlan (a jejich plochy) – podle těchto těles je práce dále dělena na podkapitoly. V podkapitole o hranolu se pojednává o osově afinitě mezi dvěma rovinami – osová afinita je pak použita v následujícím důkazu Pohlkeovy věty. Dále jsou uvedeny konstrukční úlohy, kde v prostorové představě využijeme speciální typy hranolů. V podkapitole o jehlanu zase hovoříme o středové kolineaci, která se následně používá v Desarguesově větě. Uvedeny jsou také další konstrukční úlohy a analogie. Druhá část práce se soustředí na využití kvadrik v prostorovém řešení – v tomto případě se jedná o kužel, válec, kružnici a paraboloid. V podkapitole o kuželu a válci jsou uvedeny věty Quételetova-Dandelinova a Mongeova, důkaz vlastností tětívového čtyřúhelníku nebo Apolloniova úloha řešená pomocí cyklografie. Apolloniova úloha je následně řešena také v dalších podkapitolách, a to za pomoci stereografické projekce na sféře a poté s využitím vlastností rotačního paraboloidu. Celá práce je proložena názornými obrázky, které byly všechny vytvořeny v programu GeoGebra.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Hranaté plochy a tělesa, kvadriky, prostorové řešení, rovinné geometrické úlohy

## **ABSTRACT**

This bachelor thesis deals with solving planar geometric problems in slightly unusual way, by solving it with the use of spatial interpretation. Various geometric solids are used for spatial solutions. The thesis is divided into two main parts. The first chapter deals with prismatic and pyramidal surfaces and solids and is further subdivided into corresponding parts. The subchapter about the prisms discusses an axial affinity between two planes, which is applied to the following proof of Pohlke's theorem. Constructions with special types of prisms are used in spatial visualizations. In the subchapter about the pyramid we describe a central collineation, that is subsequently used in the Desargues's theorem. Further on, some constructions and analogies are also presented. The second part of the thesis is focused on the use of quadrics in spatial solutions – particularly we consider a cone, a cylinder, a sphere and a paraboloid. The theorem of Quételet-Dandelin, Monge's theorem, cyclic quadrilateral or cyclographic solution of the Apollonius' problem are presented in the subchapter about the cone and the cylinder. The Apollonius' problem is subsequently solved in next subchapters with the use of stereographic projection on the sphere and by using the properties of a rotary paraboloid. The entire thesis is supplemented with illustrative figures, all of them were created in the program GeoGebra.

## **KEYWORDS**

Prismatic and pyramidal surfaces and solids, quadrics, spatial solution, planar geometric problems

# Obsah

Úvod .....	8
1 Hranaté plochy a tělesa.....	10
1.1 Hranol.....	10
1.1.1 Osová afinita .....	10
1.1.2 Pohlkeova věta .....	13
1.1.3 Rovnoběžnostěn – úloha o kruhové inverzi .....	17
1.1.4 Krychle – úloha o lichoběžníku .....	20
1.2 Jehlan a čtyřstěn.....	22
1.2.1 Středová kolineace .....	22
1.2.2 Desarguesova věta.....	24
1.2.3 Zobrazení jako prostorové promítání.....	29
1.2.4 Výšky v trojúhelníku .....	34
1.2.5 Obsah trojúhelníku a objem jehlanu .....	36
1.2.6 Prostorová analogie Pythagorovy věty .....	38
1.2.7 Pól a polára vzhledem k trojúhelníku.....	40
2 Kvadriky .....	45
2.1 Kužel a válec.....	45
2.1.1 Quételetova-Dandelinova věta. ....	45
2.1.2 Mongeova věta .....	54
2.1.3 Tětivový čtyřúhelník .....	56
2.1.4 Apolloniova úloha ( <i>kkk</i> ) – cyklografie .....	58
2.2 Sféra .....	61
2.2.1 Kruhová a sférická inverze, stereografická projekce .....	61
2.2.2 Apolloniova úloha ( <i>kkk</i> ) – stereografická projekce .....	63
2.2.3 Apolloniova úloha ( <i>kBB</i> ) – stereografická projekce.....	65

2.3	Paraboloid.....	65
2.3.1	Apolloniova úloha ( <i>kkk</i> ) – paraboloid.....	65
	Závěr .....	68
	Seznam obrázků .....	69
	Literatura.....	71

## Úvod

Tato bakalářská práce shromažďuje různé geometrické úlohy a důkazy z planimetrie, které využívají ve svém řešení nebo dokazování prostorovou představu. Také jsou uvedeny některé prostorové analogie planimetrických vět a vztahů. V různých matematických učebnicích se řešení za pomoci prostoru u ojedinělých rovinných úloh objevuje, nicméně publikací shromažďujících právě tyto úlohy je nedostatek. Jednou z publikací, která na toto téma již existuje, je Holubářova kniha [1], ze které ve své práci také čerpám.

Cílem mé práce je tedy vytvořit přehlednou publikaci o rovinných úlohách, které ke svému řešení mohou využívat prostorovou představu – propojím tak planimetrii a stereometrii na konkrétních příkladech. Jedná se o syntetické řešení konstrukčních úloh, prostorové důkazy vybraných planimetrických vět a zobecnění některých rovinných vztahů do trojrozměrného prostoru. Vybrané případy a důkazy jsou roztříděny do kategorií podle toho, které geometrické těleso či plocha je v prostorovém řešení využito.

Pro přehlednost je práce samotná rozdělena do dvou hlavních částí – v první z nich se objevují příklady zahrnující hranaté plochy a tělesa, druhá soustřeďuje příklady, kde jsou využity kvadriky. Každá z částí je dále dělena na kapitoly podle konkrétních těles.

V části první se vyskytují dvě kapitoly, jedna pojednává o příkladech řešených pomocí hranolu (hranolové plochy), druhá využívá jehlanu (jehlanové plochy). Čtenář se tak seznámí se zobrazeními, jako jsou osová afinita u hranolu nebo středová kolineace u jehlanu, zmíněna jsou i další zobrazení z nich odvozená. Dále lze nahlédnout do prostorových důkazů Pohlkeovy nebo Desarguesovy věty, do prostorového řešení některých konstrukčních úloh nebo se seznámit s prostorovou analogií Pythagorovy věty či se vztahem obsahu trojúhelníka s objemem jehlanu.

Druhá část obsahuje kapitoly tři – první zahrnuje kužel a válec, druhá hovoří o příkladech týkajících se sféry a v poslední při řešení uvažujeme paraboloid. V této části se čtenář seznámí s odvozením kuželoseček pomocí kuželu a válce díky Quételetově-Dandelinově větě, dále nahlédne do prostorových důkazů věty



Mongeovy nebo o vlastnostech tětívového čtyřúhelníku. Co se týká konkrétních úloh, je zde řešena Apolloniova úloha pomocí cyklografie (využití kuželové plochy), stereografické projekce (využití sféry) nebo za pomoci rotačního paraboloidu. V práci předpokládáme základní znalost již zmíněných geometrických těles a ploch. Téma této práce je zajímavé především z hlediska propojování dvou zdánlivě odlišných oblastí geometrie. Toto téma mne zaujalo z důvodu, že se jedná právě o hledání souvislostí tam, kde to nemusí být zcela zřejmé na první pohled – proto jsem se také rozhodla takovou práci vypracovat. Planimetrie a stereometrie bývají často oddělovány, obzvlášť ve výuce na středních školách – studentům pak mnohé souvislosti mohou chybět, což je škoda. Když ovšem uvažujeme, že trojrozměrným prostorem geometrie nekončí a je možné pokračovat dále do vyšších dimenzí, začíná být zřejmé, že mezi jednotlivými dimenzemi existují úzké vztahy a analogie. Prostorová interpretace rovinných útvarů a úloh se pak stává mnohem přirozenější. Uvažujme například bod, který v rovinném pojetí není ničím jiným než bodem. V prostorové interpretaci se ovšem může jednat o kolmý průměr přímky či úsečky, která je za bodem „schovaná“. Stejně tak lze za přímkou vidět rovinu, za čtvercem krychli nebo za kružnicí sféru. Na rovinné objekty se tak lze dívat jako na průměty do roviny nějakého tělesa v prostoru, které je ukryto za rovinným objektem neboli hlouběji uvnitř něj. Podobně je pak možné představit si za rovinou celý prostor a za tělesa v prostoru objekty čtvrté dimenze, kterou se ale v této práci zabývat nebudeme. V této motivaci jsem se inspirovala z článku [33].

Práce je určena pro studenty vysokých, případně středních škol k propojení souvislostí v oblasti syntetické geometrie, dále může být inspirací ve výuce geometrie pro pedagogy na středních školách.

## 1 Hranaté plochy a tělesa

V první části této práce se budeme zabývat takovými úlohami, které ke svému řešení využívají hranaté plochy a tělesa.

Jedná se konkrétně o hranolovou plochu a hranol, pod něž patří například i rovnoběžnostěn a krychle – tato tělesa jsou obsahem první kapitoly. Druhá kapitola této části obsahuje zase jehlanovou plochu a jehlan, který zahrnuje také čtyřstěn.

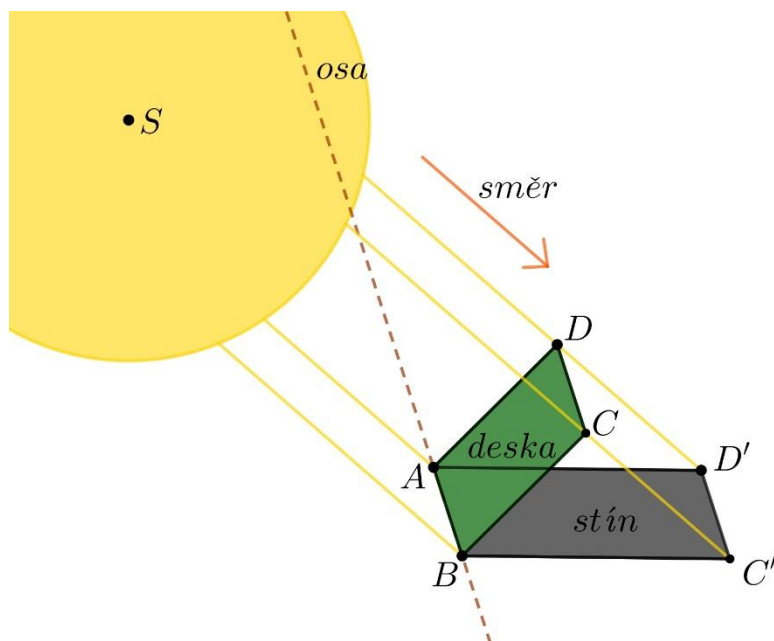
### 1.1 Hranol

Na úvod této kapitoly budeme hovořit o osové afinitě, která se následně objevuje v Pohlkeově větě. Dále kapitola zahrnuje úlohu o kruhové inverzi, ve které využijeme k řešení rovnoběžnostěn, a nakonec uvedeme úlohu v krychli.

#### 1.1.1 Osová afinita

Na začátek práce se pojdme seznámit s osovou afinitou a ukažme si, jak nám prostorová představa může pomoci v pochopení toho, jak osová afinita funguje. O tomto zobrazení lze totiž hovořit nejen v rámci roviny, ale také v prostoru mezi dvěma rovinami.

S osovou afinitou v prostoru se setkáváme běžně, možná aniž si to uvědomujeme. Vezměme si například nakloněnou tenkou desku opřenu o zem, která vrhá stín. Sluneční paprsky považujeme za vzájemně rovnoběžné. Mezi deskou a jejím stínem pak můžeme vidět vztah osové afinity. Osou této afinity je hrana desky opřené o zem, která je zároveň shodná s jednou hranou stínu – jedná se o průsečnici roviny země a roviny, ve které deska leží. Spojnice každého z rohů desky s příslušným rohem stínu jsou přímky rovnoběžné se slunečními paprsky. Právě tento směr paprsků je směrem naší afinity, tudíž je v tomto směru zobrazen i každý jiný bod desky na zem (Obrázek 1.1, inspirován [8, s. 16]).



Obrázek 1.1 - Příklad osové afinity v běžném životě

Pozn.: V našem případě, kdy rohy desky A a B leží na ose afinity (jsou samodružné) a desku tvoří rovnoběžník, se spojnice zbývajících dvou vrcholů neprotne s osou. Pro konstrukci obrazů těchto vrcholů je proto třeba použít rovnoběžnost.

Dalším příkladem může být řez hranolu<sup>1</sup>, kdy se vrcholy podstavy zobrazí na průsečíky řezu s hranami hranolu. V tomto případě je směrem afinity směr (svislých) hran hranolu a osou afinity je průsečnice roviny řezu s rovinou podstavy. Pojďme si tedy nyní osovou afinitu mezi dvěma rovinami zavést.

**Definice 1.** Jsou dány dvě různoběžné roviny  $\rho_1, \rho_2$  s průsečnicí  $o$  a přímka  $s$ , která není rovnoběžná ani s jednou z rovin. Přiřadíme body (přímky) z roviny  $\rho_1$  bodům (přímkám) z roviny  $\rho_2$  následovně:

- Každá spojnice afinně sdružených bodů (neboli odpovídajících si bodů vzor – obraz) je rovnoběžná s přímkou  $s$
- Pokud existují průsečíky dvojic afinně sdružených přímek, pak leží na ose afinity  $o$
- Body na přímce se zobrazí také na body na přímce

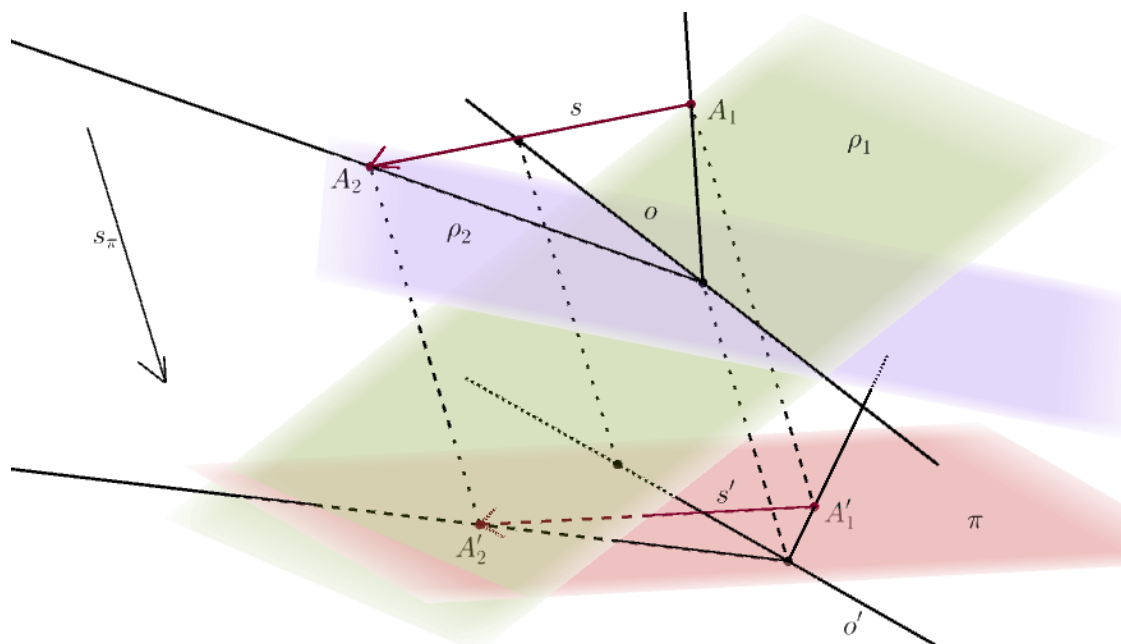
<sup>1</sup> V obecném případě se jedná o hranolovou plochu – není podstatné, zda některou z rovin, ve kterých leží vzory a obrazy, vnímáme jako podstavu hranolu či jako řez hranolové plochy.

*Toto zobrazení nazveme osovou afinitou mezi dvěma různoběžnými rovinami, přímka  $s$  udává směr afinity a přímka  $o$  je její osou.*

Čerpáno z [8, s. 17] a [29, s. 104–105] a [9].

Nejčastěji se afinita zadává právě pomocí osy, směru a dvojice sdružených bodů.

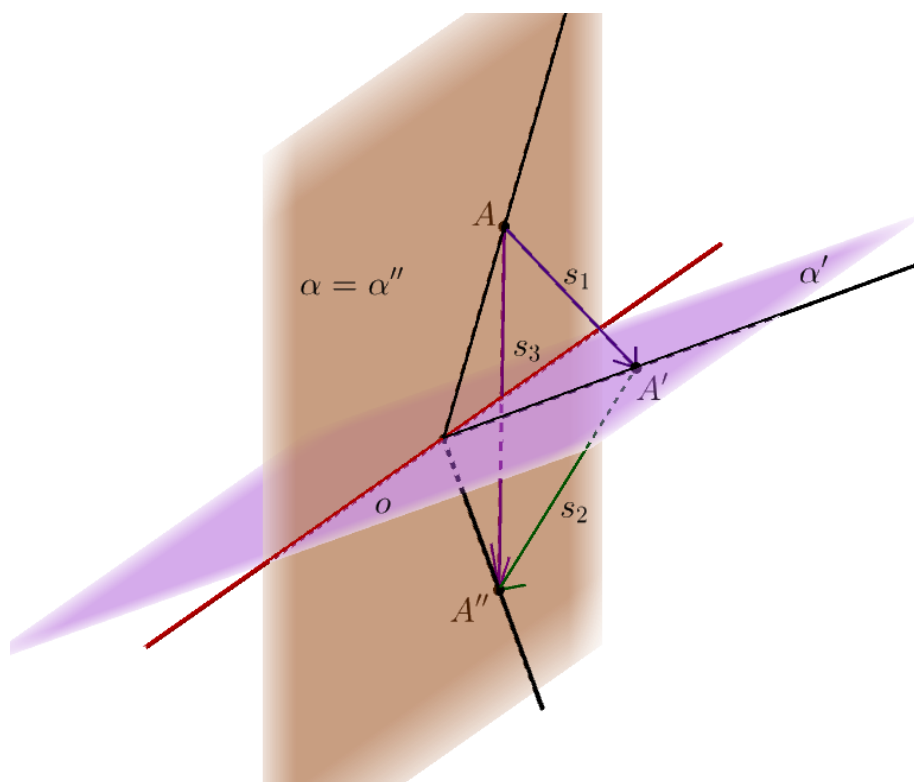
Jak nyní pomocí této prostorové definice získat osovou afinitu v rovině? Stačí nám si zvolit rovinu  $\pi$  a směr  $s_\pi$  – v tomto směru pak osovou afinitu mezi rovinami rovnoběžně promítneme do roviny  $\pi$ , která se stává průmětnou (Obrázek 1.2). Rovinu a směr si ovšem nelze zvolit zcela libovolně. Pro směr  $s_\pi$  platí, že nesmí být stejný jako směr afinity  $s$ . V tomto případě by se totiž jednalo o identitu – vzory by splynuly s obrazy. Dále nesmí směr být rovnoběžný ani s jednou z rovin  $\rho_1, \rho_2$ . Při volbě roviny  $\pi$  si musíme pouze dát pozor na to, aby nebyla rovnoběžná se zvoleným směrem  $s_\pi$  – to by se nám body a přímky, které udávají afinitu v prostoru, v podstatě neměly kam zobrazit. Osa afinity  $o$  se promítne na osu  $o'$ , a stejně tak se vzor  $A_1$  a obraz  $A_2$  promítnou na body  $A_1'$  a  $A_2'$ . Tyto body nám udávají nově vzniklý směr  $s'$ . Takto nám pomocí promítání v prostoru vznikla osová afinita v rovině ( $\pi$ ), zadaná osou  $o'$ , směrem  $s'$  a dvojicí sdružených bodů  $A_1', A_2'$ .



Obrázek 1.2 - Promítání osově afinity v prostoru do roviny

Jiný způsob pro získání osové afinity v rovině je pomocí složení dvou osových afinit mezi dvěma rovinami se společnou osou afinity [9]. Uvažujme jednu osovou afinitu se směrem  $s_1$  mezi rovinami  $\alpha, \alpha'$  ( $A \rightarrow A'$ ) a druhou afinitu se směrem  $s_2$  mezi rovinami  $\alpha', \alpha''$  ( $A' \rightarrow A''$ ). Všechny tři roviny se protínají v jediné přímce  $o$ , společné ose obou afinit. Pokud dané afinity složíme, dostaneme další osovou afinitu, a to afinitu mezi rovinami  $\alpha, \alpha''$  ( $A \rightarrow A''$ ) s novým směrem  $s_3$ . V případě, že by roviny  $\alpha$  a  $\alpha''$  byly totožné, vznikne tímto složením afinit právě námi požadovaná osová afinita v rovině (Obrázek 1.3).

Praktické využití osové afinity v prostoru najdeme zejména při řezech hranolů a válců, což také využijeme v této práci.



Obrázek 1.3 - Osová afinita v rovině skládáním dvou afinit mezi rovinami

### 1.1.2 Pohlkeova věta

Nyní budeme hovořit o Pohlkeově větě. Při jejím dokazování, potažmo i v samotném jejím znění se objevuje rovnoběžné promítání a vztah již zmíněné osové afinity, která může být právě pomocí tohoto promítání interpretována (řešeno v kapitole 1.2.3).

Karl Pohlke byl profesorem deskriptivní geometrie na technické vysoké škole v Berlíně a žil v letech 1810–1876. Pohlkeova věta může být příkladem toho, kdy je k jejímu důkazu a v podstatě i ve větě samotné využita představa nějakého geometrického tělesa, v tomto případě hranolu či hranolové plochy. Tato věta je také nazývána základní větou šikmé axonometrie a poprvé byla publikována bez důkazu v Pohlkeově publikaci Deskriptivní geometrie v roce 1860. Jedna z formulací věty je následující [22]:

**Věta 1** (Pohlkeova). *Vrcholy každého rovinného čtyřúhelníku můžeme považovat za rovnoběžný průmět vrcholů čtyřstěnu, který je podobný libovolnému zvolenému čtyřstěnu. Jinak řečeno, čtyřúhelník je průmětem čtyřstěnu libovolného tvaru.*

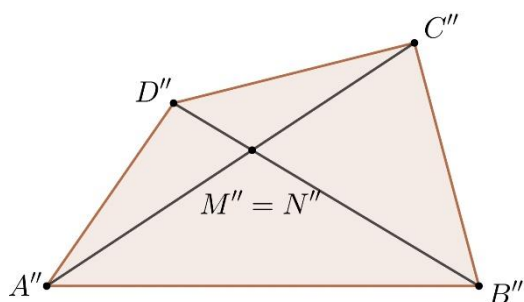
Věta bývá mnohdy také vyslovena odlišným způsobem, například takto:

**Věta 1** (Pohlkeova, varianta 2). *Tři úsečky libovolné délky v rovině (průmětně) vedoucí ze společného bodu a mající mezi sebou libovolné úhly tvoří rovnoběžný průmět třech stejně dlouhých úseček na souřadnicových osách vedoucích z počátku soustavy. Zároveň platí, že pouze jedna z úseček či úhlů se může vytratit, tzn. že nejvýše dvě úsečky spolu mohou splynout [13].*

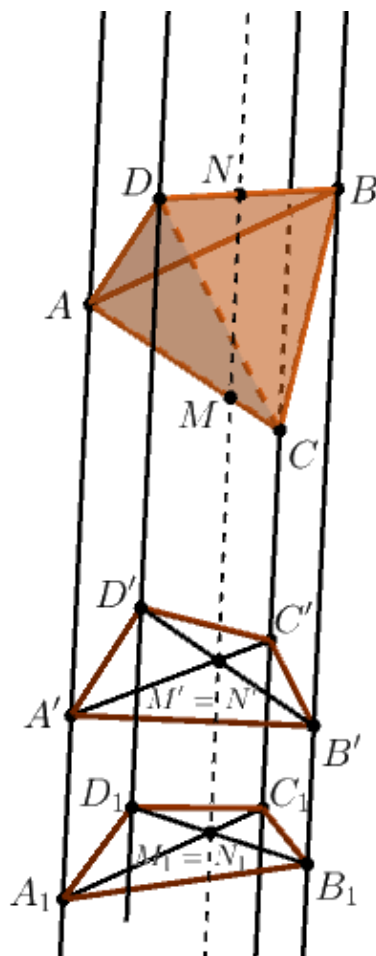
Tuto formulaci věty je možné interpretovat tak, že úsečky v rovině jsou průměty třech hran krychle sbíhajících se v jednom vrcholu [37, s. 297].

Bylo uvedeno také obecnější tvrzení Pohlkeovy věty, které dokazoval například T. Reye a H. Schwarz [22]: *Libovolné tři komplanární úsečky (ležící v jedné rovině)  $O'X'$ ,  $O'Y'$  a  $O'Z'$  takové, že nejvýše tři z bodů jsou kolineární, je možné považovat za rovnoběžný průmět třech úseček  $OX$ ,  $OY$  a  $OZ$ , které neleží v jedné rovině a pro které jsou známé vzájemné úhly a poměry jejich délek.*

Co se týká důkazu Pohlkeovy věty, tak její autor v prvním vydání své první publikace uvedl, že elementární důkaz pravděpodobně neexistuje a bude odložen do druhého svazku učebnice. Ovšem ještě před druhým vydáním prvního svazku byly známy alespoň tři elementární důkazy a mnohé různé další potom následovaly [22]. V několika případech šlo také o důkaz zevšeobecněné věty pro šikmý systém



Obrázek 1.4 - Daný čtyřúhelník pro důkaz Pohlkeovy věty



Obrázek 1.5 - Důkaz Pohlkeovy věty

souřadnicových os. První precizní elementární důkaz představil Hermann Schwarz (1843–1921), jehož jméno se stalo v souvislosti s touto větou významným, a dokonce je někdy věta uváděna pod názvem Pohlkeova-Schwarzova věta.

V této práci se podíváme na princip právě Schwarzova elementárního důkazu, který je čerpán z [22], a inspirován z původního Schwarzova díla [21]. Také lze tuto větu s důkazem najít v [37, s. 296–299].

*Důkaz.* Ke zvolenému důkazu využijeme následující lemma, které v roce 1811 poprvé dokázal Simon L'Huilier (1750–1840):

**Lemma 1.** *Ke každé trojboké hranolové ploše existuje taková rovina, že řezem hranolové plochy touto rovinou (či jejím průnikem s rovinou) je trojúhelník podobný libovolnému předem zvolenému trojúhelníku [22].*

Jinak můžeme říci, že na každé hranolové ploše existují všechny typy trojúhelníků. Náznak důkazu tohoto lemmatu uvádí např. Schwarz [21] a také je dokázáno v [37, s. 164–165]. Tam se důkaz provádí pomocí kótového promítání, které je nad rámec této práce, proto zde uvádíme pouze odkaz. Důsledkem lemmatu je tvrzení, že také na každé čtyřboké hranolové ploše existuje taková rovina, že řezem plochy touto rovinou je čtyřúhelník podobný libovolnému předem danému čtyřúhelníku. Řešení tohoto důsledku pro čtyřúhelník lze provést stejně, jako předtím pro trojúhelník (tvořený třemi vrcholy čtyřúhelníku) – pro předem daný čtyřúhelník ovšem musí platit, že dělicí poměry průsečíku úhlopříček vzhledem k vrcholům jsou stejné, jako u čtyřúhelníku udávajícího hranolovou plochu [37, s. 165] (viz dále v důkazu).

Pro potřeby našeho důkazu vhodně upravíme znění původní věty (Věta 1), ovšem tvrzení zůstane nadále ekvivalentní: *Obrazem vrcholů libovolně zvoleného čtyřstěnu ABCD v nějakém (šikmém) rovnoběžném promítání do roviny mohou vždy být vrcholy čtyřúhelníku  $A_1B_1C_1D_1$ , který je podobný předem danému čtyřúhelníku  $A''B''C''D''$  (Obrázek 1.4) [22].* Pokud tedy existuje promítání, které splňuje požadované vlastnosti, pak je v předpokládaném čtyřúhelníku  $A_1B_1C_1D_1$  (jeho vrcholy jsou průměty vrcholů čtyřstěnu) průsečík úhlopříček  $A_1C_1 \cap B_1D_1$  průmětem dvou bodů ležících na mimoběžných hranách čtyřstěnu. Označme  $M_1$  bod strany  $A_1C_1$  a  $N_1$  bod strany  $B_1D_1$ , přičemž tedy  $M_1 = N_1$ . Označme dále v předem zvoleném čtyřúhelníku průsečík úhlopříček  $M'' = N''$  a body na hranách čtyřstěnu, které se promítnou na průsečík úhlopříček, označme  $M \in AB$  a  $N \in BD$  (značení dle obrázků 1.4 a 1.5). Díky podobnosti čtyřúhelníků platí následující rovnosti mezi dělicími poměry:  $(A_1C_1; M_1) = (A''C''; M'')$  a  $(B_1D_1; N_1) = (B''D''; N'')$ . Zároveň díky funkčnosti osové afinity platí vztahy:  $(A_1C_1; M_1) = (AC; M)$  a  $(B_1D_1; N_1) = (BD; N)$ . Pokud tedy sestrojíme na čtyřstěnu body  $M$  a  $N$  tak, že se dělicí poměry bodů ve čtyřstěnu rovnají dělicím poměrům bodů ve zvoleném čtyřúhelníku následovně:  $(AC; M) = (A''C''; M'')$  a  $(BD; N) = (B''D''; N'')$ , pak je směrem afinity neboli rovnoběžného promítání požadovaných vlastností právě přímka určená body  $M$  a  $N$  (Obrázek 1.5). Přímky tohoto rovnoběžného promítání, kterým promítáme vrcholy čtyřstěnu, tvoří hrany čtyřboké hranolové plochy. Ta je hranicí prostoru, ve kterém daný čtyřstěn promítáme. Řezem této plochy libovolnou rovinou, která je různoběžná s přímkou  $MN$ , je čtyřúhelník  $A'B'C'D'$ , ve kterém označíme průsečík



úhlopříček  $M' = N'$ . Jelikož platí vztahy mezi dělicími poměry:  $(AC; M) = (A''C''; M'') = (A'C'; M')$  a  $(BD; N) = (B''D''; N'') = (B'D'; N')$ , tak musí být také čtyřúhelník  $A'B'C'D'$  v afinitě s předem zvoleným čtyřúhelníkem  $A''B''C''D''$ .

Máme tedy zvolený čtyřúhelník  $A''B''C''D''$  a s ním afinní čtyřúhelník  $A'B'C'D'$ , který udává hranolovou plochu vymezející promítání čtyřstěnu. Podle důsledku uvedeného lemmatu existuje taková rovina, že průnik této roviny s danou plochou je čtyřúhelník podobný zvolenému  $A''B''C''D''$ , a to je právě hledaný čtyřúhelník  $A_1B_1C_1D_1$ .

Odlišný důkaz Pohlkeovy věty (Věta 1, varianta 2) za pomoci kvadrik (viz dále v kapitole 2) je možné najít například v [31, s. 251–252].

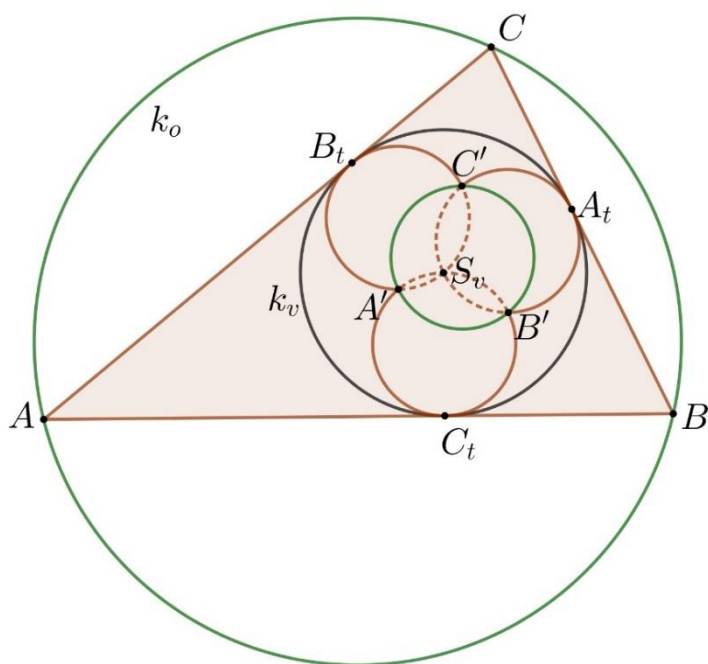
### 1.1.3 Rovnoběžnostěn – úloha o kruhové inverzi

Přesuňme se nyní od důkazu k řešení úloh. Tato úloha je z větší části řešena planimetricky, avšak v závěru řešení využíváme opět prostorovou představu, v tomto případě se jedná o rovnoběžnostěn. Zadání úlohy bylo převzato ze zdroje [12] a její řešení inspirováno z [24] a [25].

Mějme daný trojúhelník  $ABC$ .

- 1) Sestrojte obraz  $\triangle ABC$  v kruhové inverzi, jejíž řídicí kružnice je kružnicí vepsanou  $(k_v)$  danému trojúhelníku.
- 2) Sestrojte obraz kružnice opsané  $\triangle ABC$   $(k_o)$  v dané kruhové inverzi.
- 3) Určete vztahy mezi poloměrem kružnice, která je obrazem kružnice opsané trojúhelníku, a poloměry kružnic, jež jsou obrazy přímk AB, BC a CA.

V této úloze je naším úkolem zobrazit úsečky a kružnici v kruhové inverzi a zjistit vlastnosti obrazů – vztahy mezi poloměry kružnic. Je tedy už ze zadání úlohy zřejmé, že obrazy jsou kružnice. Ovšem musíme ještě rozlišit mezi situacemi, kdy zobrazujeme v inverzi celé přímky, nebo pouze na nich ležící strany trojúhelníka (úsečky). Z vlastností kruhové inverze platí, že obrazy stále zůstanou tečnou křivkou kružnice vepsané se stejnými dotykovými body.



Obrázek 1.6 - Řešení úlohy o kruhové inverzi

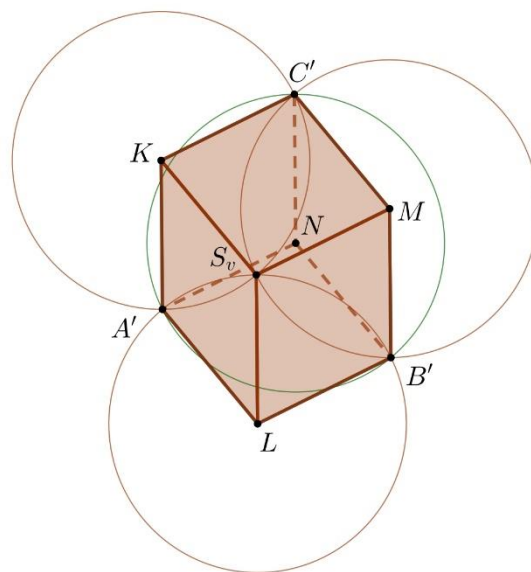
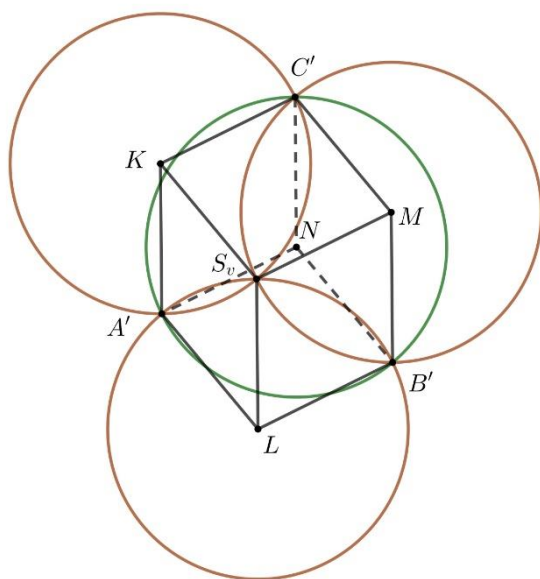
*Řešení.* Názorné řešení úlohy můžeme vidět na obrázku (Obrázek 1.6). Obrazy stran trojúhelníka v kruhové inverzi s řídicí kružnicí  $k_v$  jsou kružnicové oblouky, které procházejí tečnými body řídicí kružnice – body jsme označili  $A_t$ ,  $B_t$  a  $C_t$ . Obraz strany  $AB$  je oblouk daný body  $A'C_tB'$ , obraz strany  $BC$  je oblouk  $B'A_tC'$  a obraz třetí strany  $CA$  je oblouk  $C'B_tA'$ . Máme tedy vyřešený první bod úlohy. Jak si lze všimnout, obrazy vrcholů trojúhelníka leží vždy na společném krajním bodě dvou kružnicových oblouků. Z toho plyne, že i obraz kružnice opsané  $k_o$  procházející třemi vrcholy bude kružnice procházející právě body  $A'$ ,  $B'$  a  $C'$ , čímž jsme vyřešili i druhý bod úlohy.

Co se týká třetí části úlohy, tak obrazy přímek  $AB$ ,  $BC$  a  $CA$  jsou tedy kružnice protínající se všechny tři ve středu  $S_v$  kružnice vepsané a sestrojeny po řadě nad průměry  $C_tS_v$ ,  $A_tS_v$  a  $B_tS_v$  (střed  $S_v$  je obrazem bodů v nekonečnu). Poloměr všech tří kružnic se tak rovná polovině poloměru kružnice vepsané, a je tudíž u všech kružnic stejný. Zbývá ještě zjistit, jaký poloměr má poslední kružnice, která je v inverzi obrazem kružnice opsané. Přesně o tomto problému hovoří následující věta:

**Věta 2 .** *Pokud se tři kružnice mající stejný poloměr protínají v jednom bodě, tak kružnice opsaná jejich dalším třem průsečíkům má stejný poloměr jako tyto kružnice.*

Důkaz této věty za pomoci prostorové představy není nijak složitý, pojdme se na něj nyní podívat.

*Důkaz – prostorový.* Označme si středy stran třech daných kružnic  $K$ ,  $L$  a  $M$  a vyznačme dále stejně dlouhé poloměry, tzn. všechny úsečky spojující středy kružnic a vzájemné průsečíky kružnic. Získáme tak devět shodných úseček, které nám vytvoří rovnoběžnostěn, respektive jeho rovnoběžnou projekci do roviny (Obrázek 1.7, Obrázek 1.8). Chybí nám tam ovšem tři hrany, které jsou skryté za rovnoběžnostěnem. Tyto chybějící tři hrany tedy doplníme – musí mít shodnou délku s těmi původními, neboť v rovnoběžnostěnu mají vzájemně rovnoběžné hrany stejnou délku. Takto získáme bod  $N$ , který je posledním skrytým vrcholem rovnoběžnostěnu a je stejně vzdálen od bodů  $A'$ ,  $B'$  a  $C'$ . Nyní je zřejmé, že bod  $N$  je středem kružnice opsané bodům  $A'$ ,  $B'$  a  $C'$ , a že poloměr této kružnice je shodný s poloměry zbylých třech kružnic (obrazů přímk AB, BC a CA).



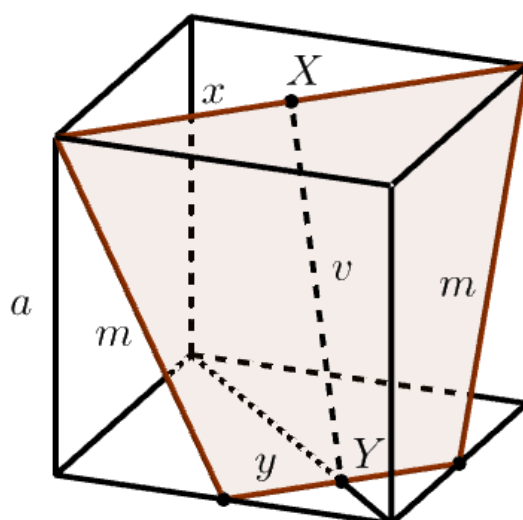
Obrázek 1.7 - Důkaz pomocí rovnoběžnostěnu 1    Obrázek 1.8 - Důkaz pomocí rovnoběžnostěnu 2

Získali jsme tak zajímavý závěr všech bodů úlohy, že v kruhové inverzi podle kružnice vepsané trojúhelníku se jeho strany (resp. odpovídající přímky) i kružnice mu opsaná zobrazí na čtyři kružnice se stejným poloměrem, který se rovná polovině poloměru kružnice vepsané  $\triangle ABC$ .

### 1.1.4 Krychle – úloha o lichoběžníku

Zadání této úlohy bylo převzato ze sborníku příspěvků [14, úloha 11].

Nalezněte vzdálenost dvou bodů X, Y umístěných na krychli. Bod X leží ve středu jedné stěny (na průsečíku úhlopříček) a bod Y leží na protější stěně ve  $\frac{3}{4}$  úhlopříčky neboli je středem úsečky spojující středy dvou sousedních stran protější stěny krychle (Obrázek 1.9).



Obrázek 1.9 - Lichoběžník řezem krychle

Při řešení této úlohy můžeme využít lichoběžník, který je řezem krychle a body X a Y leží ve středech jeho rovnoběžných stran – to nás přivede na docela elegantní řešení. Na lichoběžník je nutno pohlížet v rámci prostoru, neboť se stal součástí krychle, která je 3D útvarem. Dochází zde tak opět k propojení rovinné a prostorové geometrie, kdy lichoběžník jako 2D útvar slouží k řešení úlohy v krychli. Je to poněkud opačný jev, než kterým se primárně chceme v této práci zabývat, nicméně velmi vhodně poslouží pro doplnění souvislostí. Tento typ úloh by jistě šel koncipovat i obráceně, tedy že nějaký rovinný obrazec budeme vnímat jako řez prostorového tělesa a výpočty v něm provedeme pomocí stereometrického pojetí.

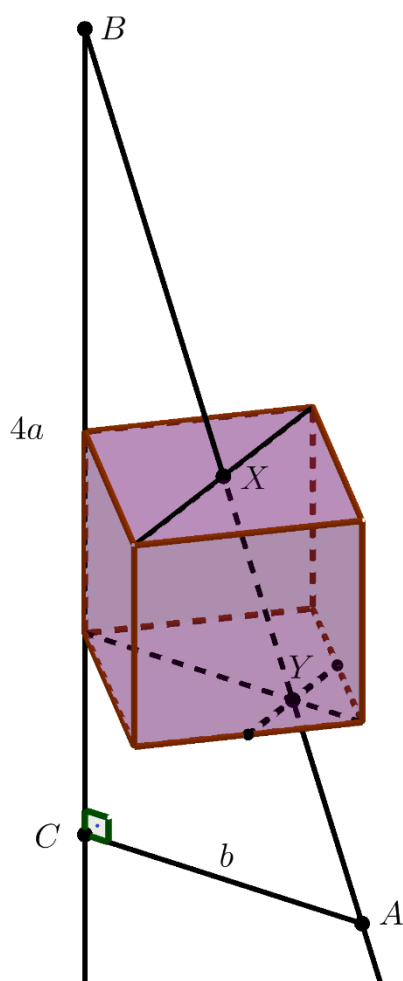
*Řešení.* Stranu krychle označme  $a$ . Potom v rovnoramenném lichoběžníku má základna  $x$  délku  $a\sqrt{2}$ , základna  $y$  má délku  $a\frac{\sqrt{2}}{2}$  a boční strany označené  $m$  mají délku  $a\frac{\sqrt{5}}{2}$ . Úsečku spojující body X a Y jsme označili  $v$  a její délka představuje výšku

lichoběžníku – a právě tu máme za úkol spočítat. Nyní je její výpočet už poměrně snadný, pomocí Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona je označena  $m$  a odvěsna  $v$ . Druhou odvěsnu tvoří čtvrtina základny  $x$ , její délka je tudíž  $a \frac{\sqrt{2}}{4}$ . Výpočet pak vypadá následovně:

$$v = \sqrt{\left(a \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(a \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{20a^2 - 2a^2}{16}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

Vzdálenost bodů  $X$  a  $Y$  je tedy spočítaná pomocí výšky  $v$  lichoběžníku, který vnímáme v souvislosti s krychlí v prostoru.

Řešení může být pojato i jinak než pomocí lichoběžníku. Můžeme např. délku  $XY$  vnímat jako čtvrtinu přepony pravoúhlého trojúhelníka  $ABC$ , kde délky odvěsen jsou  $4a$  a  $b = a\sqrt{2}$  (Obrázek 1.10). Toto řešení a případná další již ponecháme čtenáři.



Obrázek 1.10 - Náznak možného řešení úlohy o lichoběžníku

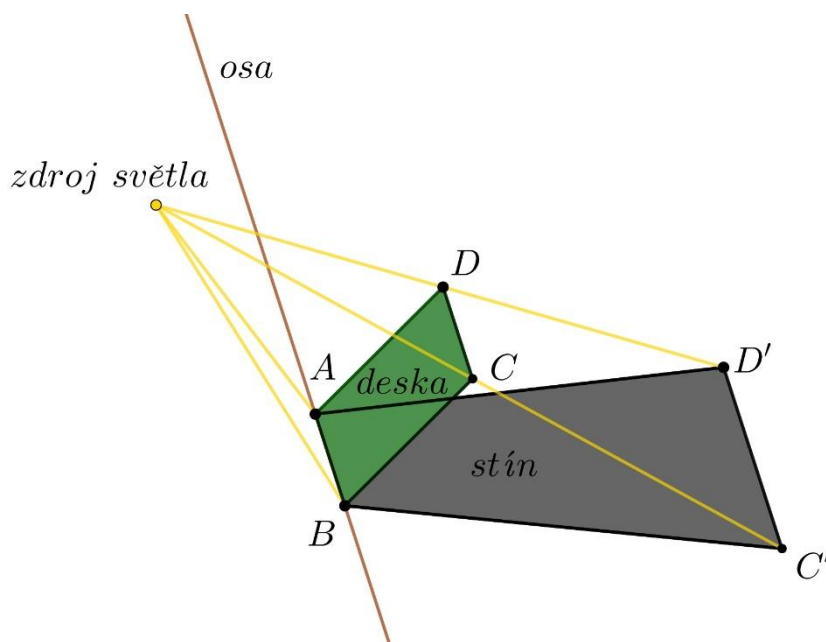
## 1.2 Jehlan a čtyřstěn

Na úvod této kapitoly se zaměříme na středovou kolineaci, která bude následně využita i při dokazování Desarguesovy věty. Dále uvedeme ještě některá další zobrazení v souvislosti s prostorovým promítáním a se vztahem ke středové kolineace – osová afinita a středová kolineace tedy budou zmíněny ještě znovu z jiného pohledu. Dále budeme dokazovat větu o výškách v trojúhelníku, uvedeme také prostorovou analogii Pythagorovy věty a vztah obsahu trojúhelníka s objemem jehlanu. Na závěr se zaměříme na konstrukci pólu přímky vzhledem k trojúhelníku.

### 1.2.1 Středová kolineace

Podobně jako v kapitole o hranolu se pojdme nyní podívat, jak nám prostorová představa může pomoci v pochopení středové kolineace. Opět na tuto problematiku můžeme nahlédnout nejen v rámci roviny, ale také v prostoru mezi dvěma rovinami.

Také se středovou kolineací v prostoru se v běžném životě setkáváme. Podobně jako u osově afinity nám k pochopení poslouží osvětlená tenká deska. Nyní na ni ovšem budeme svítit baterkou, jejíž paprsky jsou rozbíhavé (narozdíl od rovnoběžných slunečních paprsků). Mezi deskou a jejím stínem vzniká vztah středové kolineace (Obrázek 1.11, inspirován z [8, s. 42]). Můžeme si všimnout, že každý roh desky, jeho stín a žárovka v baterce leží v jedné přímce – a opět to neplatí pouze pro rohy, ale pro každý bod na desce. Středem kolineace je tedy zdroj světla, kde se všechny přímky sbíhají. Také u kolineace potřebujeme pro její zavedení osu, kterou je tady opět hrana opřená o zem, tj. průsečnice roviny země a roviny desky. Dost obdobně můžeme středovou kolineaci vidět např. u stínů dopravních značek (nebo jiných plochých předmětů) na ulici osvětlené lampami.



Obrázek 1.11 - Příklad středové kolineace v běžném životě

Pozn.: V našem případě, kdy rohy desky A a B leží na ose kolineace (jsou samodružné) a desku tvoří rovnoběžník, se spojnice zbývajících dvou vrcholů neprotne s osou. Pro konstrukci obrazů těchto vrcholů je proto třeba použít rovnoběžnost. Z obrázku a této konkrétní představy by se mohlo zdát, že kdyby byl střed níže než hrana CD, její obraz v kolineaci nevznikne – to by ovšem byla chybná úvaha.

Dalším příkladem je řez jehlanu<sup>2</sup>, kde se vrcholy podstavy zobrazí na průsečíky řezu s hranami jehlanu. Středem kolineace je vrchol jehlanu a osou je průsečnice roviny řezu s rovinou podstavy. Stejným způsobem jako u afinity si zavedeme středovou kolineaci mezi dvěma rovinami.

**Definice 2.** Jsou dány dvě různoběžné roviny  $\rho_1, \rho_2$  s průsečnicí  $o$  a bod  $S$  tak, že neleží ani v jedné z rovin. Přiřadíme body (přímky) z roviny  $\rho_1$  bodům (přímkám) z roviny  $\rho_2$  následovně:

- Každá spojnice bodů sdružených v kolineaci prochází bodem  $S$
- Pokud existují průsečíky dvojic přímek sdružených v kolineaci, tak leží na ose  $o$
- Body na přímce se zobrazí také na body na přímce

<sup>2</sup> Podobně jako u hranolu se v obecném případě jedná o jehlanovou plochu.

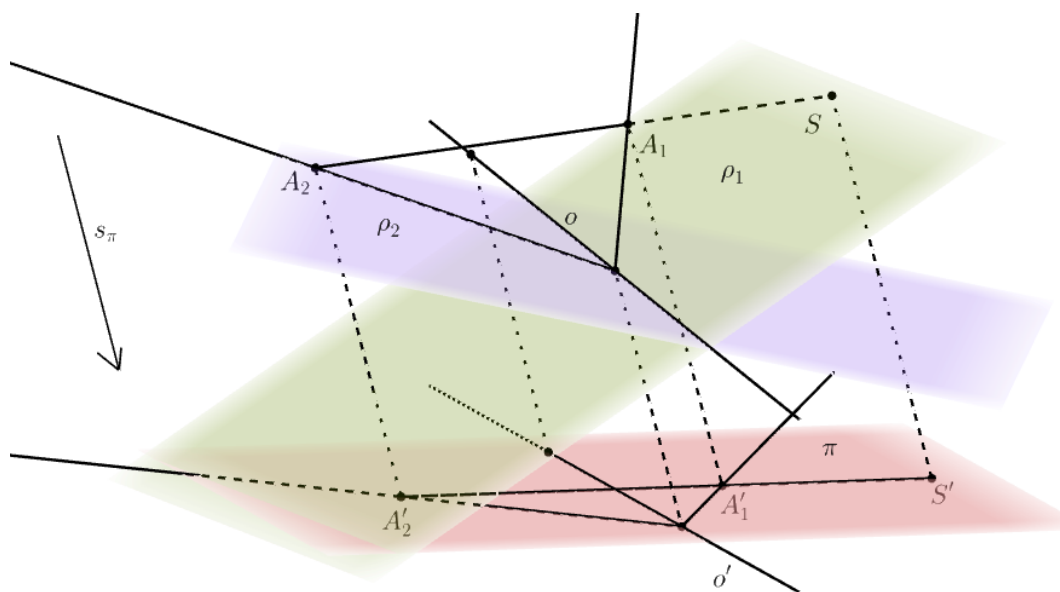
*Toto zobrazení nazveme středovou kolineací mezi dvěma různoběžnými rovinami, bod  $S$  je středem kolineace a přímka  $o$  je její osou*

Čerpáno z [8, s. 43], [29, s. 102] a [9].

Nejčastěji se kolineace zadává pomocí středu, osy a dvojice sdružených bodů.

Odvození středové kolineace v rovině z této prostorové definice pobíhá analogicky jako u osové afinity. Zvolíme si rovinu  $\pi$  a směr  $s_\pi$  tak, aby směr nebyl rovnoběžný s žádnou ze tří rovin (Obrázek 1.12). Následně v tomto směru rovnoběžně promítneme kolineaci mezi rovinami  $\rho_1, \rho_2$  do roviny  $\pi$  a tím získáme vztah středové kolineace v rovině. Pro průměty bodů  $A_1$  a  $A_2$  a střed  $S$  stále platí, že jsou kolineární, a bod  $S'$  je tedy střed kolineace v rovině. Osa kolineace se promítne na přímku  $o'$  a ta se také nyní stává osou.

Se středovou kolineací i osovou afinitou mezi dvěma rovinami se následně setkáme také v Desarguesově větě.



Obrázek 1.12 - Promítání středové kolineace v prostoru do roviny

### 1.2.2 Desarguesova věta

Girard Desargues byl francouzský matematik, inženýr, architekt a jeden ze zakladatelů projektivní geometrie žijící na přelomu 16. a 17. století. Názorným příkladem toho, kdy je důkaz pomocí prostorového vnímání více zřejmý nežli



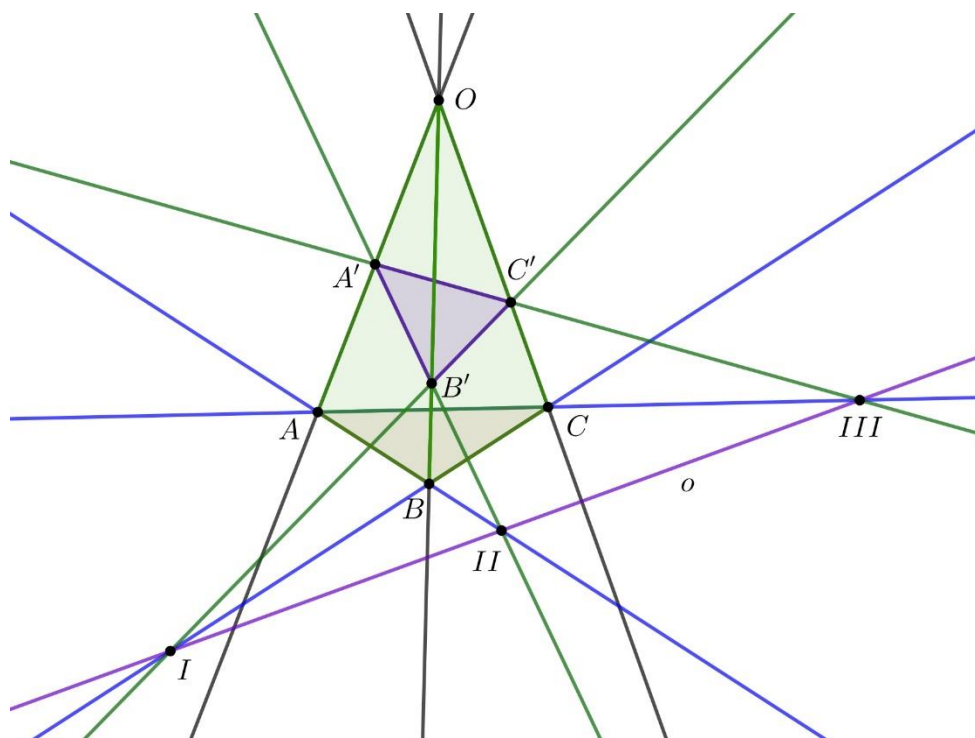
planimetrický, je právě Desarguesova věta. Tato věta je jednou ze základních vět syntetické rovinné geometrie a poprvé byla publikována v roce 1648 v práci Abrahama Bosse (viz [35, s. 27]).

**Věta 3** (Desarguesova). *Jestliže se tři přímky  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  protínají v jednom bodě (jsou konkurentní) nebo jsou rovnoběžné, pak pokud existují průsečíky přímek  $AB \cap A'B'$ ,  $AC \cap A'C'$  a  $BC \cap B'C'$ , tak leží v jedné přímce (jsou kolineární) [3, str. 134] [5, s. 41].*

Věta se dá vyslovit různými způsoby, např. Josef Holubář ve své publikaci formuluje takto:

**Věta 3** (Desarguesova, varianta 2). *Jsou-li dva trojúhelníky v takové poloze, že spojnice dvojic sdružených vrcholů procházejí jediným bodem, protínají se dvojice sdružených stran v bodech, které leží na jedné přímce, a naopak [1, str. 9].*

Tato formulace Desarguesovy věty na první pohled ovšem opomíná jednak možnost, že by přímky byly rovnoběžné, a jednak možnost neexistence některého z průsečíků – k těmto případům se dostaneme později. Holubář si je této skutečnosti vědom a dalším případům se také věnuje. Na druhou stranu věta mnohem více nastiňuje prostorovou představu, která se nám hodí pro prostorový důkaz.

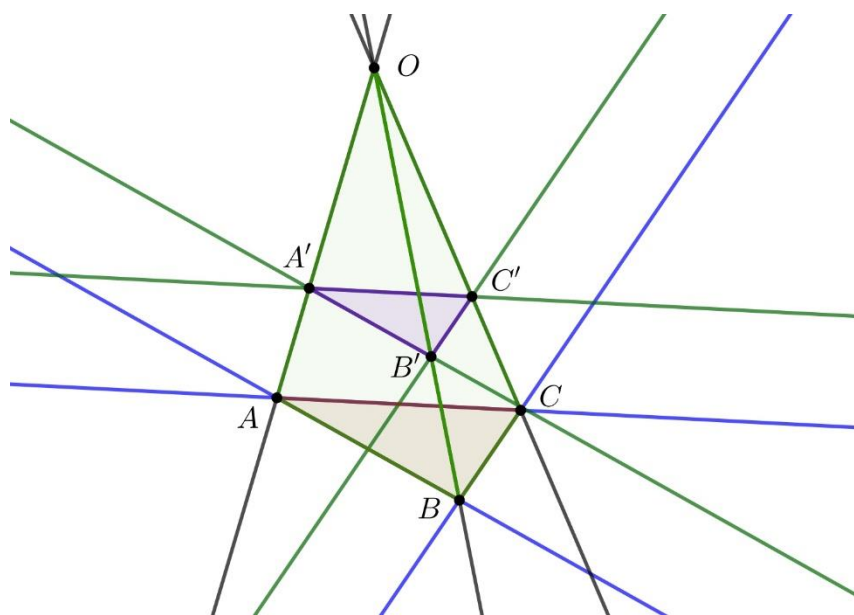


Obrázek 1.13 - Desarguesova věta

*Důkaz – prostorový.* Zatímco planimetrický důkaz věty bývá prováděn pomocí vět o dělicích poměrech, prostorový důkaz můžeme považovat za jednodušší či intuitivnější, navíc skýtá řadu zajímavostí. Přímky  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , které se protínají v bodě  $O$ , můžeme považovat za průmět hran trojbokého jehlanu s vrcholem  $O$ , trojúhelník  $ABC$  za průmět podstavy jehlanu a trojúhelník  $A'B'C'$  za průmět řezu jehlanu rovinou  $A'B'C'$ . Pak musí průsečíky sdružených stran z podstavy a z řezu, tj. body  $I = (BC, B'C)$ ,  $II = (AB, A'B')$  a  $III = (AC, A'C')$  ležet všechny v jedné přímce  $o$ , protože ta je průmětem průsečnice sečné roviny a roviny podstavy (Obrázek 1.13). V planimetrickém pojetí věty je přímka  $o$  osou středové kolineace, bod  $O$  je jejím středem a trojúhelníky jsou pak navzájem v této kolineaci.

Pojďme se nyní podívat na výše zmíněné, zatím neprobírané případy. Pokud některý ze tří průsečíků neexistuje, resp. je-li jedna z dvojic sdružených přímek vzájemně rovnoběžná a průsečík je tudíž nevlastním bodem<sup>3</sup>, pak i osa  $o$ , na které leží zbylé dva průsečíky, je rovnoběžná s danou dvojicí přímek. Toto tvrzení opět plyne z prostorové vlastnosti průsečnice rovin podstavy a řezu.

V případě, že by dvě dvojice sdružených přímek byly navzájem rovnoběžné, a tudíž dva z průsečíků neexistovaly, osa  $o$  pak také nevznikne (resp. stává se tzv. úběžnou přímkou). Z prostorového pohledu řekneme, že rovina podstavy a rovina řezu jsou

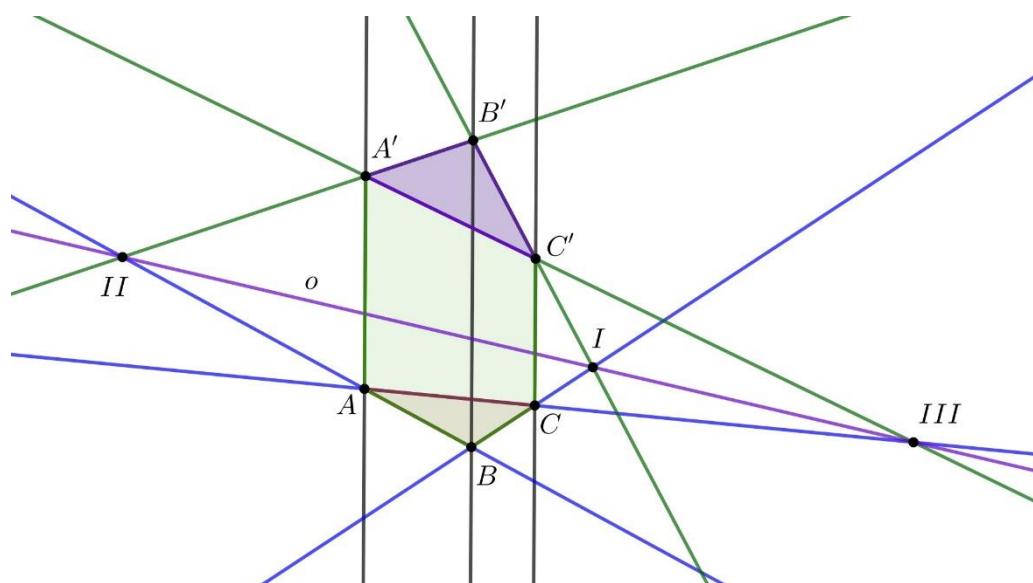


Obrázek 1.14 - Desarguesova věta, podobnost

<sup>3</sup> Nevlastními body a přímkami rozumíme takové body a přímky, které v eukleidovském prostoru nevzniknou – jsou tzv. v nekonečnu, např. společné body rovnoběžných přímek či rovin [8, s. 9–12].

rovnoběžné, a tudíž jejich průsečnice je nevlastní. Z toho plyne, že i sdružené přímky ve třetí dvojici spolu musí být rovnoběžné a žádný z průsečíků nevzniká. Trojúhelníky jsou v tomto případě podobné (homotetické) a leží ve stejnolehlosti, jejíž střed je bod  $O$ . Ze stereometrického pohledu vidíme, že rovina řezu je rovnoběžná s rovinou postavy trojbokého jehlanu (Obrázek 1.14).

Další možnost nastává, pokud jsou přímky  $AA'$ ,  $BB'$  a  $CC'$  rovnoběžné. Jiným způsobem můžeme říct, že střed kolineace ubíhá do nekonečna. Potom se vztah mezi trojúhelníky mění z kolineace na osovou afinitu (Obrázek 1.15). Se speciální situací se setkáme v případě, že již zmíněné možnosti nastanou současně. Budou-li uvedené přímky rovnoběžné (střed v nekonečnu) a zároveň osa  $o$  v nekonečnu, pak bude řez shodný s podstavou – trojúhelníky budou perspektivně shodné a planimetrocky se jedná o posunutí ve směru rovnoběžných přímek.



Obrázek 1.15 - Desarguesova věta, osová afinita

V našem důkazu jsme propojili rovinný pohled, kde se objevují dva trojúhelníky v kolineaci, s prostorovým pohledem, kde se vyskytuje řez trojbokého jehlanu, příp. hranolu. Je však možné uvažovat také jehlanovou či hranolovou plochu – bez podstavy, a na oba trojúhelníky se dívat jako na dva různé řezy touto plochou. Na závěr zmiňme ještě jednu zajímavost. Za střed kolineace dvou trojúhelníků můžeme zvolit kterýkoliv z 10 bodů a nalézt k němu příslušné trojúhelníky. Zbylé tři kolineární body pak tvoří osu.

Důkaz byl kromě vlastního zkoumání čerpán z [1, s. 9–10] a inspirován také z [11, s. 219–220] a [6].

Jak jsme již zmínili, vztah mezi trojúhelníky  $ABC$  a  $A'B'C'$  mohou popisovat různá zobrazení. Těmto zobrazením z hlediska prostorového promítání se budeme věnovat v další kapitole.

Pro srovnání uvedeme i planimetrický důkaz, který je převzatý z [3, s. 134].

*Důkaz – planimetrický.* Pro klasický důkaz můžeme použít Menelaovu větu, kterou lze i s důkazem nalézt v [3, s. 52–53, 130].

**Věta 4** (Menelaova). *Mějme v rovině trojúhelník  $ABC$ . Na přímkách  $AB$ ,  $BC$  a  $CA$  leží po řadě body  $K$ ,  $L$ ,  $M$  tak, že žádný není totožný s vrcholem. Body  $K$ ,  $L$ ,  $M$  leží na společné přímce právě tehdy když:*

- 1) *Trojúhelníku náleží z bodů  $K$ ,  $L$ ,  $M$  buď právě dva, nebo žádný*
- 2) *Pro dělicí poměry platí:  $(AC; M) \cdot (BA; K) \cdot (CB; L) = -1$*

Tuto větu aplikujeme vždy na trojúhelník a k němu příslušnou přímku. V našem případě se jedná o trojúhelník  $A'B'O$  a přímku  $AB$ , trojúhelník  $B'C'O$  a přímku  $BC$  a trojúhelník  $A'C'O$  a přímku  $AC$ . Použitím Menelaovy věty tedy získáme následující vztahy:

$$(A'B'; II) \cdot (B'O; B) \cdot (OA'; A) = 1$$

$$(B'C'; I) \cdot (C'O; C) \cdot (OB'; B) = 1$$

$$(A'C'; III) \cdot (C'O; C) \cdot (OA'; A) = 1$$

Pokud poslední ze tří rovnic vydělíme součinem prvních dvou (a následně upravíme dle vlastností dělicího poměru), získáme vztah:

$$(A'C'; III) \cdot (B'C'; I) \cdot (A'B'; II) = 1.$$

Tato rovnost vyjadřuje Menelaovu větu pro trojúhelník  $A'B'C'$  a vyplývá z ní, že body I, II a III musí být kolineární.

### 1.2.3 Zobrazení jako prostorové promítání

Jak už jsme u Desarguesovy věty zjistili, v závislosti na vzájemné poloze přímek a na nich ležících bodů vznikají mezi trojúhelníky různé typy zobrazení. O středové kolineaci a osově afinitě jsme již hovořili dříve v souvislosti s výskytem těchto zobrazení v běžném životě a ukázali převod z prostoru do roviny. Nyní vytvoříme přehled některých zobrazení v souvislosti s definicí prostorového promítání a uvedeme jejich vztah ke středové kolineaci. Tato kapitola je čerpána převážně z [11] a inspirována také z [29].

Mnoho zobrazení je možné interpretovat pomocí rovnoběžného či středového promítání, pojďme si tato promítání definovat a uvést pod ně spadající zobrazení.

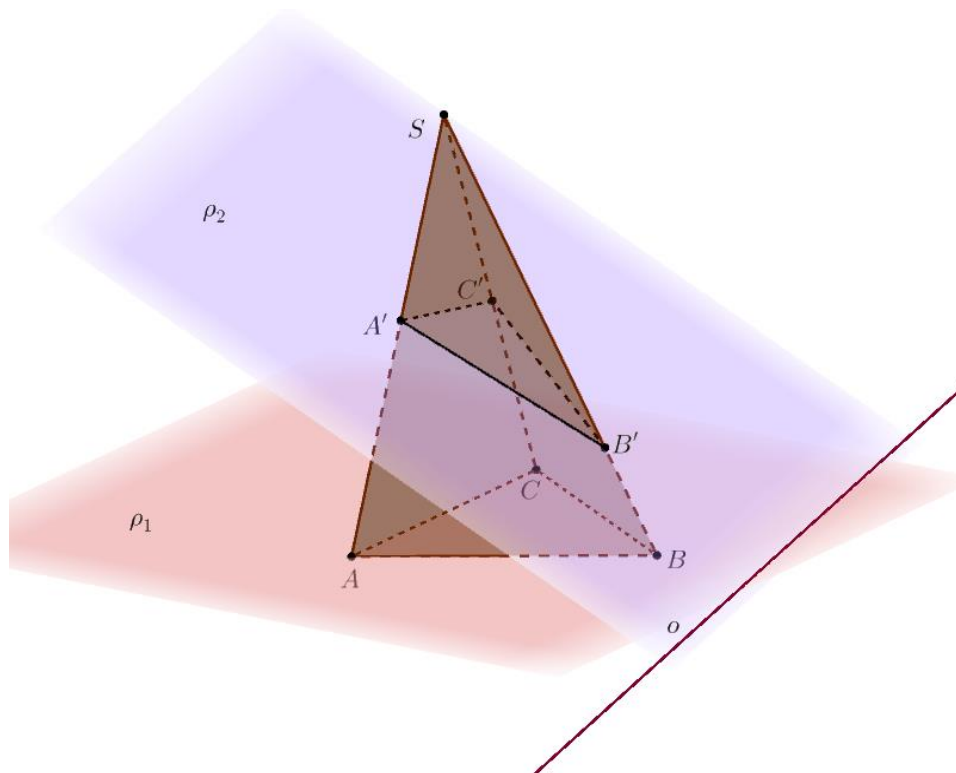
#### Středové promítání

**Definice 3.** *Mějme dvě různoběžné či rovnoběžné roviny  $\rho_1$  a  $\rho_2$  a bod  $S$  ležící mimo obě tyto roviny. Libovolnému bodu  $X \in \rho_1$  přiřadíme bod  $X' \in \rho_2$  tak, že přímka  $XX'$  prochází bodem  $S$ . Takové zobrazení nazýváme středové promítání roviny  $\rho_1$  do roviny  $\rho_2$  se středem  $S$  [11, s. 27–28].*

#### Středová kolineace

Středovou kolineaci jsme již popsali výše a zaměřili jsme se jak na intuitivnější prostorovou variantu tohoto zobrazení, tak na odvození kolineace v rovině. Toto zobrazení lze interpretovat pomocí středového promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami se společnou osou  $o$ , která je osou středové kolineace. Jak již bylo naznačeno, středová kolineace může být také zavedena pomocí řezu trojbokého jehlanu (či jehlanové plochy).

Mějme trojboký jehlan  $ABCS$ , jehož podstava  $ABC$  leží v rovině  $\rho_1$ . Dále je dána rovina  $\rho_2$ , která je určena přímkou  $o$  v rovině  $\rho_1$  a bodem  $A'$ , který náleží hraně jehlanu  $AS$ . Sestrojte řez jehlanu rovinou  $\rho_2$  (Obrázek 1.16).



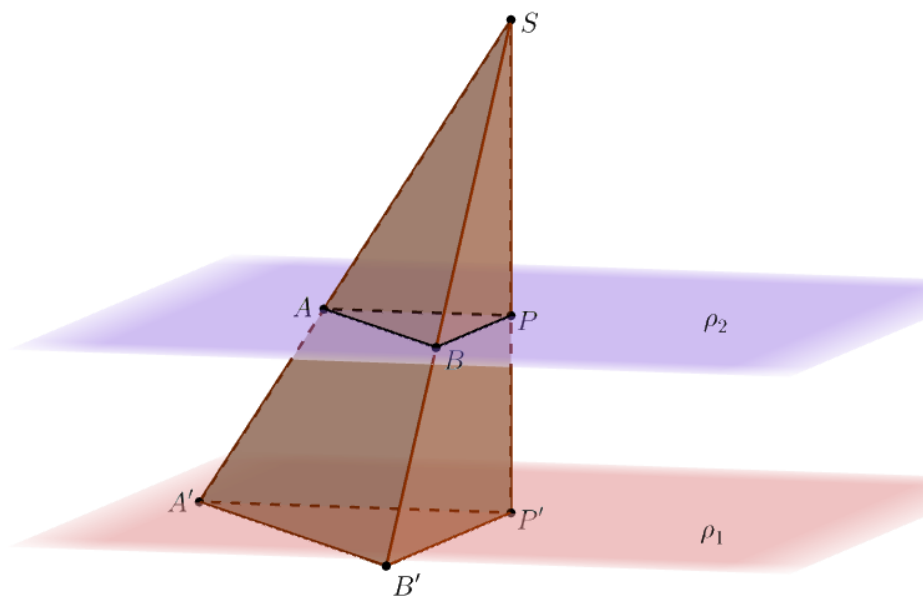
Obrázek 1.16 - Středové promítání, středová kolineace

Bodům  $A, B, C$  jsme tedy přiřadili body  $A', B', C'$  tak, že každá spojnice příslušných bodů ( $AA', BB', CC'$ ) prochází vrcholem  $S$ , dále každá dvojice sdružených přímek ( $AB$  a  $A'B'$ ,  $BC$  a  $B'C'$ ,  $CA$  a  $C'A'$ ) se protíná na přímce  $o$ . Takové zobrazení se nazývá středovou kolineací se středem  $S$  a osou  $o$ , přičemž osa i střed jsou vlastní. Střed kolineace je tedy zároveň středem středového promítání – v tomto případě (dle obrázku 1.16) promítáme z roviny  $\rho_1$ , kde leží podstava jehlanu, do roviny  $\rho_2$ , která je rovinou řezu.

### **Stejnolehlost**

Speciálním případem středové kolineace je stejnoolehlost – v prostoru ji lze interpretovat pomocí středové promítání mezi dvěma rovnoběžnými rovinami  $\rho_1$  a  $\rho_2$ , střed promítání označíme  $S$ . Pro libovolnou dvojici bodů  $A, B$  v rovině  $\rho_2$  a jejich obrazy  $A', B'$  v rovině  $\rho_1$  platí, že trojúhelníky  $SAB$  a  $SA'B'$  jsou si podobné. Kdybychom například bodem  $S$  vedli kolmici  $p$  k oběma rovinám a její průsečíky s nimi označili  $P$  a  $P'$ , pak poměry příslušných úseček zůstávají stále stejné:  $\frac{|A'B'|}{|AB|} =$

$\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SP'|}{|SP|}$  (Obrázek 1. 17). Uvedli jsme pouze několik rovností, ovšem platí jich ještě



Obrázek 1.17 - Středové promítání, stejnohlost

více – poměr délek úseček v rovině  $\rho_1$  (vzorů) a úseček v rovině  $\rho_2$  (obrazů), tj. poměr podobnosti, je konstantní a značíme ho  $k$ .

Takto vzniklá podobnost v prostoru díky středovému promítání je stejnohlostí se středem  $S$  a koeficientem stejnohlosti  $k$ . Pro vzor a obraz bodů ve stejnohlosti platí:  $\overrightarrow{SA'} = k \cdot \overrightarrow{SA}$ , z čehož i vyplývá, že všechny body  $S$ ,  $A$  a  $A'$  leží na jedné přímce.

Na závěr hovoření o stejnohlosti zmiňme její souvislost se středovou kolineací. V případě, že osa kolineace je v nekonečnu (je nevlastní), tzn. že přímky  $AB$  a  $A'B'$  se neprotínají, se kolineace stává stejnohlostí.

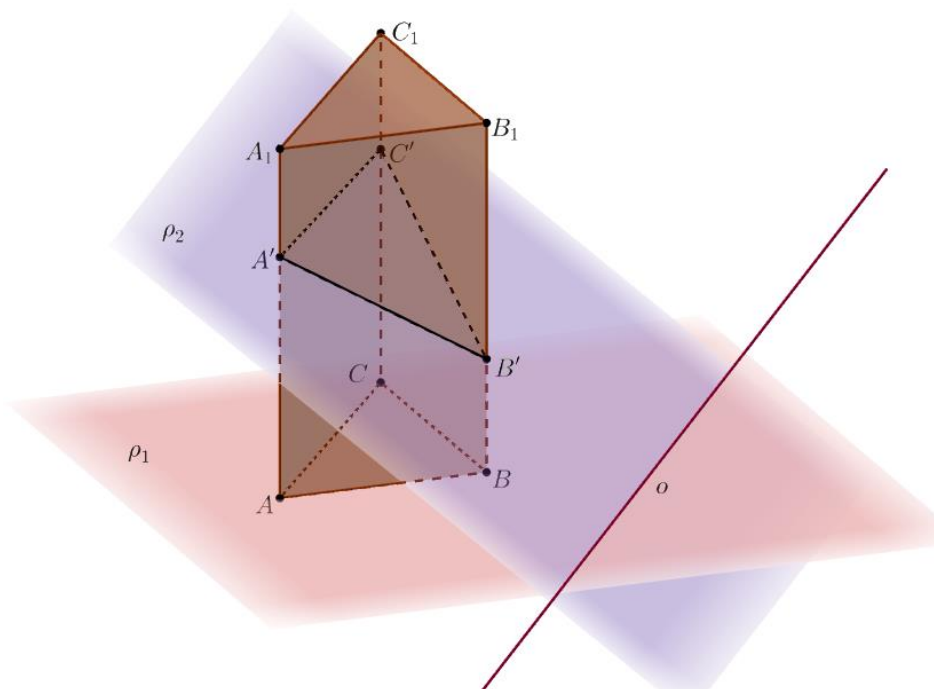
### Rovnoběžné promítání

**Definice 4.** Mějme dvě různoběžné či rovnoběžné roviny  $\rho_1$  a  $\rho_2$  a přímku  $s$ , která není rovnoběžná ani s jednou z rovin. Libovolnému bodu  $X \in \rho_1$  přiřadíme bod  $X' \in \rho_2$  tak, že přímka  $XX'$  je rovnoběžná s přímkou  $s$ . Takové zobrazení se nazývá rovnoběžné promítání roviny  $\rho_1$  do roviny  $\rho_2$  ve směru  $s$  [11, s. 27–28].

## Osová afinita

Osovou afinitou jsme se také zabývali mezi dvěma rovinami i v rovině. Toto zobrazení lze interpretovat pomocí rovnoběžného promítání mezi dvěma různoběžnými rovinami se společnou osou  $o$ , která je osou osově afinity. Možná je již zřejmé, že osovou afinitu lze také zavést pomocí řezu trojbokého hranolu (či hranolové plochy).

Mějme trojboký hranol  $ABCA_1B_1C_1$ , rovinu podstavy  $ABC$  označme  $\rho_1$ . Dále je dána rovina  $\rho_2$ , která je určena přímkou  $o$  v rovině  $\rho_1$  a bodem  $A'$ , který leží na hraně hranolu  $AA_1$ . Sestrojte řez hranolu rovinou  $\rho_2$  (Obrázek 1.18).



Obrázek 1.18 - Rovnoběžné promítání, osová afinita

Podobně jako u kolineace jsme přiřadili bodům  $A, B, C$  body  $A', B', C'$ . V tomto případě tak, že všechny spojnice bodů  $AA', BB'$  a  $CC'$  jsou navzájem rovnoběžné a každá dvojice sdružených přímek ( $AB$  a  $A'B'$ ,  $BC$  a  $B'C'$ ,  $CA$  a  $C'A'$ ) se protíná na přímce  $o$ . Toto zobrazení nazveme osovou afinitou se směrem  $s = AA'$  o osou  $o$ . Směr  $s$  je zároveň směrem rovnoběžného promítání, v tomto případě z roviny  $\rho_1$ , kde leží podstava hranolu, do roviny řezu  $\rho_2$ .

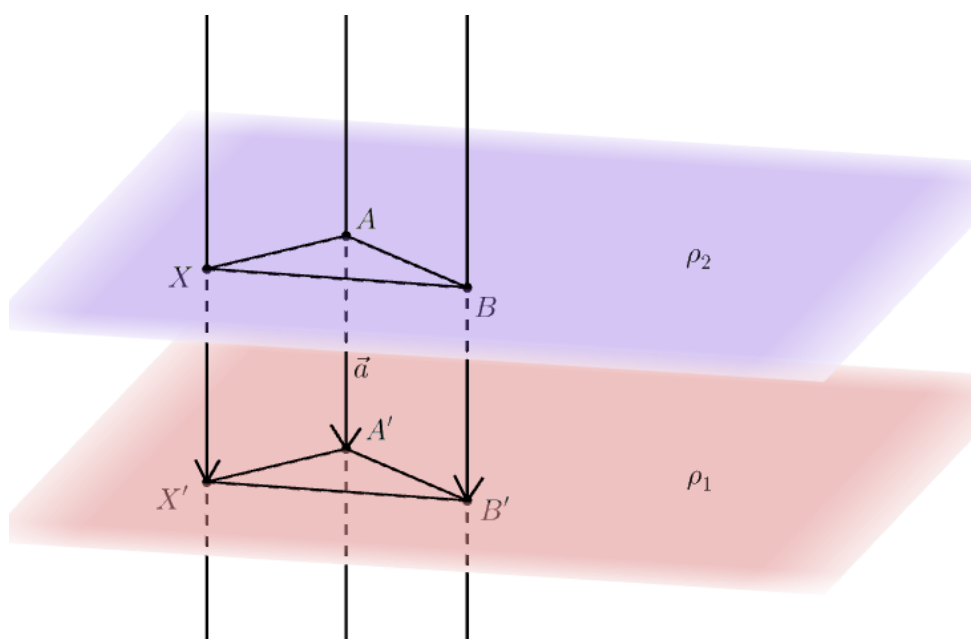
A jaký má tedy vztah osová afinita ke středové kolineaci? Jak již vyplynulo z Desarguesovy věty, v případě, že střed kolineace je v nekonečnu (je nevlastní)



a z konkurentních přímek se tudíž stanou přímky rovnoběžné, zobrazení se stává osovou afinitou.

### **Posunutí**

Ohledně posunutí v souvislosti s promítáním v prostoru můžeme říci, že ho lze interpretovat pomocí rovnoběžného promítání mezi dvěma rovnoběžnými rovinami. Pro libovolnou dvojici bodů  $A, B$  v rovině  $\rho_2$  a pro jejich obrazy  $A'B'$  v rovině  $\rho_1$  získané tímto promítáním platí, že délky úseček zůstávají shodné, a že čtyřúhelník  $AA'B'B$  je rovnoběžníkem (Obrázek 1.19).



Obrázek 1.19 - Rovnoběžné promítání, posunutí

Takto zavedené shodné zobrazení je posunutím, neboť rovnoběžné promítání udává směr posunutí a dvojice bodů  $A, A'$  vzájemnou vzdáleností určuje délku posunutí. Orientovanou úsečkou  $\overrightarrow{AA'}$  je dán vektor posunutí  $\vec{a}$ , který je pro určenost zobrazení libovolného bodu  $X$  dostačující:  $X' = \vec{a} + X$ . Pokud by roviny  $\rho_1$  a  $\rho_2$  byly totožné, vektor  $\vec{a}$  by měl nulovou velikost a jednalo by se o identitu.

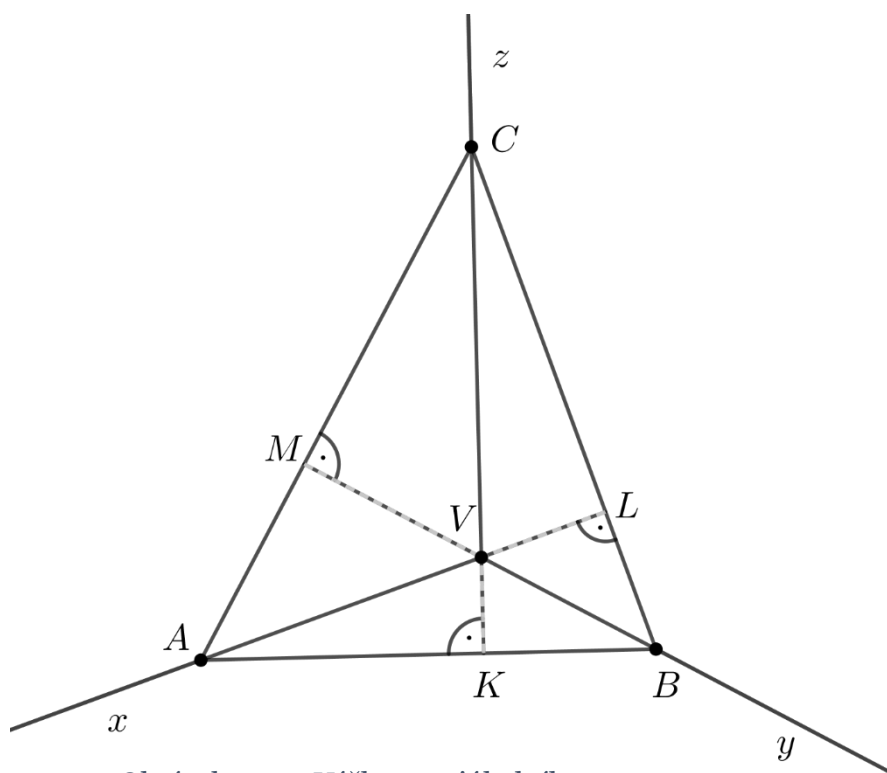
Opět uvedme ještě souvislost posunutí v prostoru se středovou kolineací. V případě, že střed i osa kolineace budou v nekonečnu, takže přímky  $AB$  a  $A'B'$  se neprotínou a přímky  $AA'$  a  $BB'$  budou rovnoběžné, stává se toto zobrazení shodností a konkrétně posunutím.

### 1.2.4 Výšky v trojúhelníku

Jako další si uveďme prostý příklad, kdy je důkaz téměř zřejmý už z prostorového pohledu na danou úlohu. Jedná se o dokázání toho, že se výšky v obecném trojúhelníku protínají v jediném bodě, tzv. ortocentru. Úloha s prostorovým důkazem byla převzata z publikace [1, s. 5–6].

**Věta 5 .** *Výšky libovolného trojúhelníku procházejí jedním bodem.*

V prostorovém důkazu této věty budeme využívat pravoúhlu axonometrii. Pravoúhlá axonometrie je kolmé axonometrické promítání, ve kterém je dána axonometrická průmětna a tři pomocné průmětny, které jsou totožné se souřadnicovými rovinami (k sobě navzájem kolmými). Axonometrickou průmětnu volíme tak, že neprochází počátkem a je různoběžná se všemi souřadnicovými rovinami (Pro korektní zavedení viz [29, s. 263–265]).



Obrázek 1.20 - Výšky v trojúhelníku

*Důkaz – prostorový.* Pro tento důkaz se stačí na úlohu pouze vhodně podívat, dost nám může pomoci obrázek (Obrázek 1.20). Výšky „protáhneme“ do polopřímek za příslušný vrchol a představíme si je jako souřadnicové osy  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Každá dvojice os udává jednu souřadnicovou rovinu – všechny jsou k sobě navzájem kolmé.

Trojúhelník ABC, v tomto případě ostroúhlý, udává rovinu  $\rho = (ABC)$ , která se stane axonometrickou průmětnou. Strany trojúhelníku – úsečky AB, BC a CA – jsou části průsečnic dané souřadnicové roviny s průmětnou, tzv. stopy souřadnicových rovin. Výšky trojúhelníka v naší prostorové představě získáme kolmým promítáním souřadnicových os do průmětny  $\rho$  a počátek soustavy souřadnic se promítne právě do společného bodu výšek, ortocentra V. A podle čeho víme, že úhel mezi danou stranou a k ní příslušnou výškou je pravý? Je jisté, že např. strana AB leží v souřadnicové rovině  $xy$ , jejíž všechny přímky včetně AB jsou v prostoru kolmé k výšce CV, která je totožná s osou  $z$ . Pravost úhlu v trojúhelníku pak vyplývá z vlastnosti kolmého průmětu pravého úhlu, který je mezi dvěma mimoběžnými přímkami, přičemž jedna z přímek (resp. úsečka – daná strana trojúhelníka) leží v průmětně.

Na závěr prostorového důkazu opět můžeme zmínit zajímavost, že u trojúhelníku na obrázku lze kterýkoliv ze čtyřech bodů považovat za ortocentrum, přičemž zbývající tři body tvoří trojúhelník. Díky této skutečnosti už nebude těžké přijít na to, jak bude důkaz vypadat u tupoúhlého trojúhelníku – zvolením jednoho z vrcholů u ostroúhlého trojúhelníku za ortocentrum nám vznikne ze zbývajících bodů právě trojúhelník tupoúhlý. Tato vlastnost je navázána na Schwarzův důkaz lemmatu o trojúhelnících na hranolové ploše, zmiňovaný v kapitole 1.1.2. Opět pro srovnání uvádíme i důkaz planimetrický [3, s. 55–56], ve kterém využijeme Cevovu větu, kterou lze i s důkazem nalézt zde [3, s. 53–54, 130].

*Důkaz – planimetrický.*

**Věta 6** (Cevova). *Mějme v rovině trojúhelník ABC. Na přímkách AB, BC a CA leží po řadě body K, L, M tak, že žádný není totožný s vrcholem. Přímky CK, AL a BM jsou rovnoběžné nebo procházejí jedním bodem právě tehdy když:*

- 1) *Trojúhelníku náleží z bodů K, L, M buď právě jeden, nebo každý z nich*
- 2) *Pro dělicí poměry platí:  $(AC; M) \cdot (BA; K) \cdot (CB; L) = -1$*

Paty výšek nazveme  $K \in AB$ ,  $L \in BC$  a  $M \in CA$ . Trojúhelníky CKA a BMA jsou podobné podle věty (uu), proto platí vztah:  $\frac{|AM|}{|AK|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ .

Obdobně z podobnosti trojúhelníků BKC a BLA získáme vztah  $\frac{|BK|}{|BL|} = \frac{|BC|}{|BA|}$  a nakonec z trojúhelníků CLA a CMB rovnost  $\frac{|CL|}{|CM|} = \frac{|CA|}{|CB|}$ . Když vynásobíme všechny tyto tři rovnosti, dostaneme vztah dělicích poměrů platný pro Cevovu větu:

$$(AC; M) \cdot (BA; K) \cdot (CB; L) = -1$$

V případě ostroúhlého trojúhelníku víme, že všechny paty výšek K, L, M jsou body tohoto trojúhelníku. Naopak u trojúhelníku tupoúhlého mu náleží pouze jeden z těchto tří bodů. Oba tyto případy vyhovují Cevově větě, a proto dle této věty přímky AL, BM a CK procházejí jedním bodem, což jsme chtěli dokázat.

### 1.2.5 Obsah trojúhelníku a objem jehlanu

Od prostorových důkazů se pro tuto chvíli přesuňme k zobecňování skutečností z roviny do trojrozměrného prostoru. Jednoduchým příkladem je obsah trojúhelníku, jehož analogií v prostoru je objem jehlanu. Toto propojení patřilo mezi první příklady včlenění třetí dimenze do souvislosti s rovinou [16].

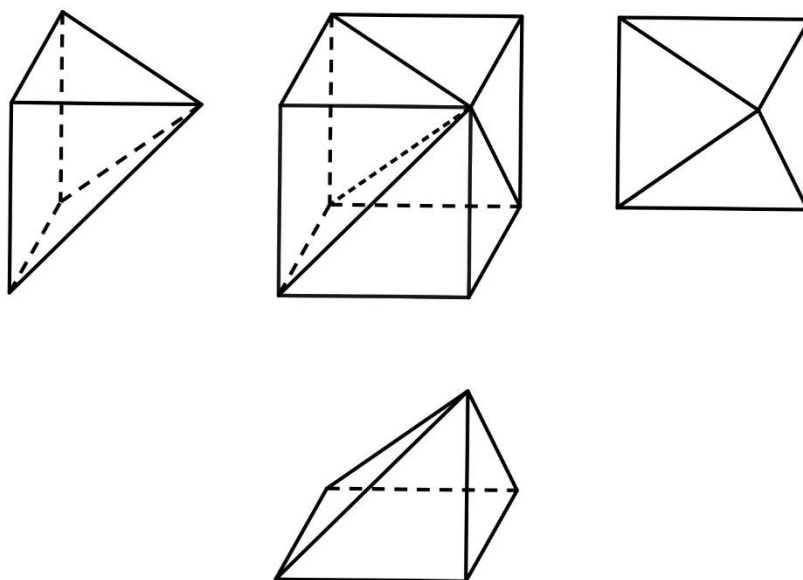
Výpočet obsahu trojúhelníka je zřejmý, např. u ostroúhlého trojúhelníka si lze velmi snadno představit jeho doplnění na obdélník s rozměry stejnými, jako je základna a výška trojúhelníka. Z toho je vidět, že jeho obsah je poloviční než u obdélníku. Vzorec pro obsah je následující:

$$\text{Obsah } \Delta = \frac{1}{2} \cdot \text{výška} \cdot \text{délka základny}$$

Zcela jasné je to u speciálního případu, a to u rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka, který je polovinou čtverce. K libovolnému trojúhelníku pak dospějeme vhodnými afinními transformacemi, kterými můžeme trojúhelník „zešikmit a roztáhnout“, přičemž vzorec pro výpočet zůstává pořád platný.

V prostoru budeme tedy uvažovat krychli a budeme ji chtít rozdělit na několik shodných jehlanů. Jak to provedeme? Lze využít trojnásobné symetrie krychle – osou této symetrie je tělesová úhlopříčka, tzn. spojnice protilehlých vrcholů. Stačí nám vhodně rozříznout krychli podél tělesové úhlopříčky, která bude společnou hranou tří shodných jehlanů – řezy povedou také přes tři stěnové úhlopříčky (Obrázek 1.21, inspirován z [16]). Tím dokážeme, že objem jednoho jehlanu se čtvercovou základnou (stěna krychle) a výškou rovnající se délce strany čtverce je skutečně třetina objemu krychle. Vzorec pro výpočet objemu je tedy následující:

$$\text{Objem jehlanu} = \frac{1}{3} \cdot \text{výška} \cdot \text{plocha základny}$$



Obrázek 1.21 - Rozdělení krychle na tři shodné jehlany

Podobně jako v rovině, i v tomto případě lze vhodným afinním zobrazením tvar tohoto jehlanu deformovat na jakýkoliv jehlan, jehož základnou je rovnoběžník. A konečně, jak tento vztah můžeme zobecnit pro libovolný n-boký jehlan? Díky Cavalieriho principu víme, že jehlan se stejnou výškou a základnou o stejně velké ploše jako rovnoběžník má i stejný objem. Vzorec je tedy platný pro libovolný jehlan.

Na závěr doplňme, že takovéto zobecnění zdaleka nemusí skončit u prostoru, nýbrž lze pokračovat i do vyšších dimenzí, až nakonec zobecníme úplně. Ve čtyřrozměrném prostoru se například setkáme s hyperkrychlí, kterou lze rozdělit na čtyři stejné hyperjehlany s krychlovou základnou [16].

### 1.2.6 Prostorová analogie Pythagorovy věty

Objem jehlanu jakožto prostorová analogie obsahu trojúhelníka je pouze jedním z mnoha případů, kdy můžeme tímto způsobem zobecňovat do prostoru a dalších dimenzí. Například, známá je analogie mezi těžištěm trojúhelníka a těžištěm čtyřstěnu [15]. Kromě toho mají prostorovou podobu také některé dobře známé planimetrické věty. Jelikož se ovšem nejedná o řešení rovinných úloh prostorovou metodou, ale spíše o zobecňování z roviny do prostoru, zaměříme se proto v rámci této práce jen na jednu z takových vět, a to větu Pythagorovu.

Pythagorova věta byla patrně známá již v mnoha starověkých kulturách, znali ji starověcí indičtí a čínští matematici, kteří prováděli důkaz geometricky. Patrně byla používána Egypťany při stavbě pyramid a znali ji i staří Babyloňané, více než tisíciletí před dobou Pythagora. Samotný formální důkaz této prastaré věty je ovšem přisuzován až řeckým Pythagorejcům (5. století př. n. l.) [17][18][20].

Uvedeme nejprve znění této věty v rovině [15]:

**Věta 7** (Pythagorova). *Nechť  $a$ ,  $b$  jsou délky odvěsen v libovolném pravoúhlém trojúhelníku a  $c$  je délka přepony. Pak platí:  $a^2 + b^2 = c^2$ .*

Tato věta však není pouze implikací, nýbrž ekvivalencí, proto platí i věta obrácená, kterou lze i s důkazem nalézt např. v publikaci [3, s. 44–45]:

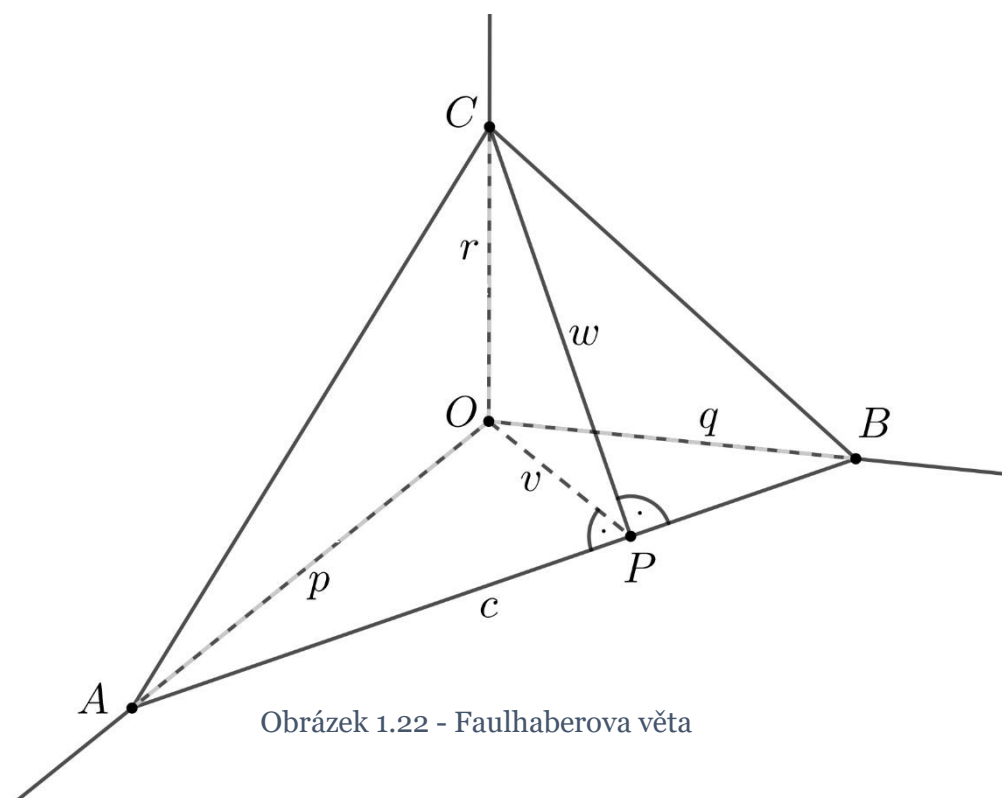
*Trojúhelník se stranami  $a$ ,  $b$ ,  $c$  je pravoúhlý s pravým úhlem proti straně  $c$  právě tehdy, jestliže platí:  $a^2 + b^2 = c^2$ .*

Důkazů Pythagorovy věty je opravdu mnoho, jedenáct z nich je zpracovaných například v Kuřinově publikaci [20]. My se ovšem již přesuneme k analogické větě v prostoru, která je pojmenována po německém matematikovi Johannesovi Faulhaberovi (1580–1635). Pro lepší pochopení zobecňování si představme Pythagorovu větu takto: Dvě přímky v rovině se protínají ortogonálně v bodě  $O$ . Pak pro jakoukoliv úsečku spojující tyto dvě přímky se obsah čtverce sestrojený nad ní rovná součtu čtverců sestrojených nad úsečkami  $OA$  a  $OB$ , které jsme na přímkách vyřáli úsečkou  $AB$ . V prostoru proto uvažujme tři přímky, které se všechny vzájemně ortogonálně protínají v bodě  $O$ . Různoběžně k těmto přímkám vedeme rovinu  $ABC$  – body  $A$ ,  $B$  a  $C$  tvoří trojúhelník s vrcholy na každé z těchto tří přímek. Každá dvojice těchto bodů udává spolu s bodem  $O$  trojúhelníky  $OBC$ ,  $OCA$ , a  $OAB$ , jejich

obsahy označme po řadě  $S_A$ ,  $S_B$  a  $S_C$ , obsah trojúhelníka ABC bude označen  $S_O$ . Tak nám vznikl čtyřstěn ABCO. Patu výšky v trojúhelníku ABC označíme P. (Obrázek 1.22). Následující formulace věty je čerpána z [15].

**Věta 8** (Faulhaberova) *V libovolném pravoúhlém čtyřstěnu ABCO s pravými úhly u vrcholu O platí při výše uvedeném označení obsahů jeho stěn:*

$$(S_O)^2 = (S_A)^2 + (S_B)^2 + (S_C)^2$$



Obrázek 1.22 - Faulhaberova věta

Důkazů této věty je také celá řada – lze například dokazovat pomocí Heronova vzorce [16], soustavy souřadnic, vektorů, objemu čtyřstěnu nebo Eukleidových vět, což je analogický důkaz ke klasickému důkazu věty Pythagorovy [20]. Zajímavý důkaz využívající podobnost trojúhelníků a lemma o goniometrické identitě v prostoru je podrobně popsán v časopise [15]. V této práci uvedeme poměrně jednoduchý důkaz vycházející z obsahu trojúhelníku a z Pythagorovy věty, který je čerpán z publikace [20].

*Důkaz.* Označme  $c$  stranu AB,  $v$  výšku OP (v trojúhelníku OAB),  $w$  výšku CP (v trojúhelníku ABC),  $p$  úsečku AO,  $q$  úsečku BO a  $r$  úsečku CO. Ze dvou použití vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníka OAB pomocí základny a výšky plyne, že:

$$v \cdot c = p \cdot q.$$

Dále z Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník OAB plyne rovnost

$$c^2 = p^2 + q^2$$

a nakonec pro trojúhelník OPC z Pythagorovy věty platí

$$w^2 = v^2 + r^2.$$

Umocněním a dosazováním získáme další rovnosti:

$$v^2 c^2 = p^2 q^2, v^2 = \frac{p^2 q^2}{p^2 + q^2}, w^2 = \frac{p^2 q^2}{p^2 + q^2} + r^2 = \frac{p^2 q^2 + p^2 r^2 + q^2 r^2}{p^2 + q^2}.$$

Když umocníme vztah pro výpočet obsahu  $S_O$  trojúhelníku ABC, získáme

$$(S_O)^2 = \frac{1}{4} \cdot c^2 w^2$$

a dosazením za  $c, w$  z odvozených rovností nám vznikne následující rovnost:

$$\begin{aligned} (S_O)^2 &= \frac{1}{4} \cdot (p^2 + q^2) \cdot \frac{p^2 q^2 + p^2 r^2 + q^2 r^2}{p^2 + q^2} = \frac{p^2 q^2 + p^2 r^2 + q^2 r^2}{4} \\ &= \frac{p^2 q^2}{4} + \frac{p^2 r^2}{4} + \frac{q^2 r^2}{4}. \end{aligned}$$

Jednotlivé členy na konci rovnosti se už přímo rovnají obsahům bočních trojúhelníků v čtyřstěnu, takže konečně dostáváme

$$(S_O)^2 = (S_A)^2 + (S_B)^2 + (S_C)^2,$$

což jsme chtěli dokázat.

Na závěr zmiňme, že jak Pythagorovu větu, tak další věty a vztahy z roviny lze zobecnit do vyšších dimenzí. Více o historii objevování  $n$ -rozměrné Pythagorovy věty je možné se dočíst např. v článku Levy-Leblonda [17], který je dovětkem k jeho předchozímu článku [16].

### 1.2.7 Pól a polára vzhledem k trojúhelníku

Jako poslední z kapitoly o hranatých plochách a tělesech uvedeme příklad, kdy konstrukci určitého bodu v rovině provedeme pomocí trojrozměrného prostoru. Jedná se o konstrukci tzv. pólu přímky vzhledem k trojúhelníku. Tato konstrukce je

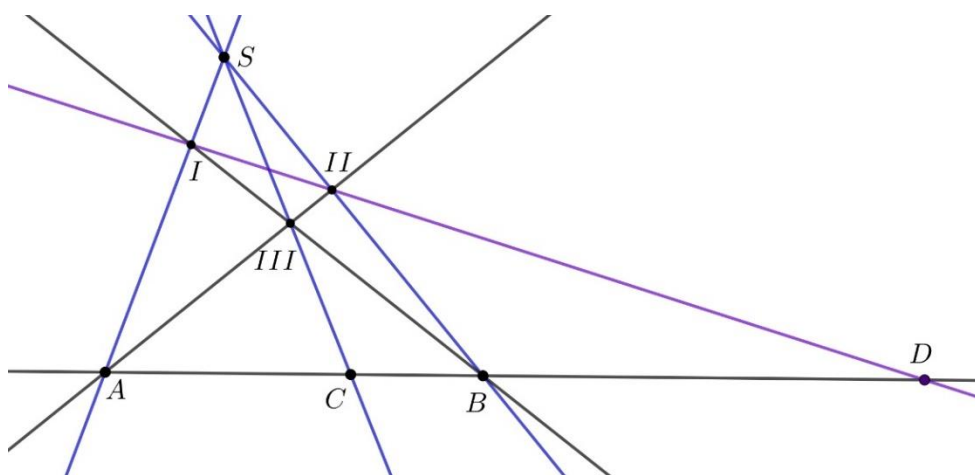


zobecněním konstrukce harmonické čtveřice bodů na přímce (1D), která je prováděna pomocí roviny (2D), tzn. také za pomoci dimenze o jednu vyšší – v tom můžeme opět spatřit analogii.

**Definice 5.** *Uspořádanou čtveřici bodů, jejichž dvojpoměr  $(AB; CD)$  je roven  $-1$ , nazveme harmonickou čtveřicí bodů (někdy též čtveřinou) [6].*

Konstrukce harmonické čtveřice bodů ABCD na přímce, přesněji konstrukce čtvrtého harmonického bodu D k daným bodům A, B, C může být následující (Obrázek 1.23) [31, s. 79]:

- 1) *Mějme body A, B, C ležící na přímce p, bod C volíme mezi body A, B. Tyto body promítněme z libovolného bodu S, který neleží na přímce p. Přímkami, kterými promítáme body A, B, C, označme po řadě 1, 2, 3.*
- 2) *Zvolme si libovolný bod III na přímce 3 ( $III \neq C, S$ ). Promítněme jej z bodu A na přímku 2 do bodu II a dále z bodu B na přímku 1 do bodu I.*
- 3) *Přímka vedená body I a II protíná přímku p v hledaném bodě D.*



Obrázek 1.23 - Konstrukce harmonické čtveřice

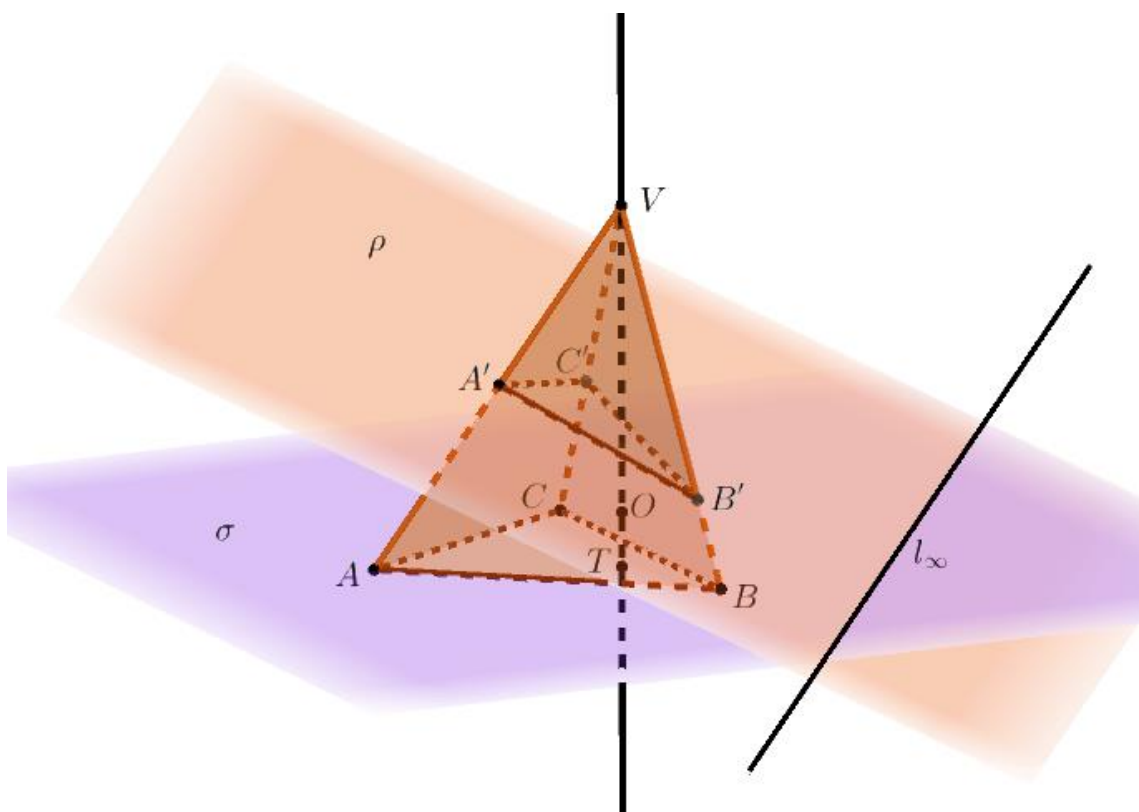
Pojem poláry zřejmě není neznámý v souvislosti s kružnicí. Pro libovolný bod roviny, který neleží na kružnici  $k$  (a není jejím středem  $S$ ) lze získat poláru následujícím způsobem: Sestrojíme přímku  $PS$  a její průsečíky s kružnicí  $k$  označíme  $A, B$ . Nalezneme bod  $R$  jakožto čtvrtý bod v harmonické čtveřici bodů  $ABPR$ . Bodem  $R$  pak vedeme přímku  $p$  kolmou k  $PS$  a tato přímka je polárou bodu  $P$  – přímku tvoří body  $R'$  harmonické čtveřice  $(A'B'PR')$ , kde body  $A', B'$  jsou průsečíky kružnice s libovolnými sečnami kružnice bodem  $P$  [31, s. 105–106]. V této kapitole se

věnujeme poněkud netradiční úloze, a to – jak již bylo zmíněno – hledání pólu k dané přímce vzhledem ke trojúhelníku.

Tato konstrukce byla převzata z [5, s. 53–54], planimetrické řešení inspirováno také z [5, s. 16–17].

Mějme trojúhelník  $ABC$  a přímku  $l_\infty$ , která leží ve stejné rovině – označíme ji  $\sigma$ .

- 1) Zvolíme si libovolný bod  $V$ , který neleží v rovině  $\sigma$  a spojíme ho s vrcholy trojúhelníku – tak vzniknou přímky  $AV$ ,  $BV$  a  $CV$ .
- 2) Zvolíme si rovinu  $\rho$  tak, že neprochází vrcholem  $V$ , není totožná s rovinou  $\sigma$  a přímka  $l_\infty$  náleží této rovině. Najdeme průsečíky této roviny s přímkami  $AV$ ,  $BV$  a  $CV$  a označíme je po řadě  $A'$ ,  $B'$  a  $C'$ .
- 3) Najdeme průsečík třech rovin  $ABC'$ ,  $BCA'$  a  $ACB'$ , kterým je jediný bod a označíme ho  $O$ .
- 4) Bod  $T$  (pól přímky  $l_\infty$ ) je průsečíkem přímky  $VO$  a roviny  $\sigma$ .



Obrázek 1.24 - Prostorová konstrukce pólu přímky vzhledem k trojúhelníku

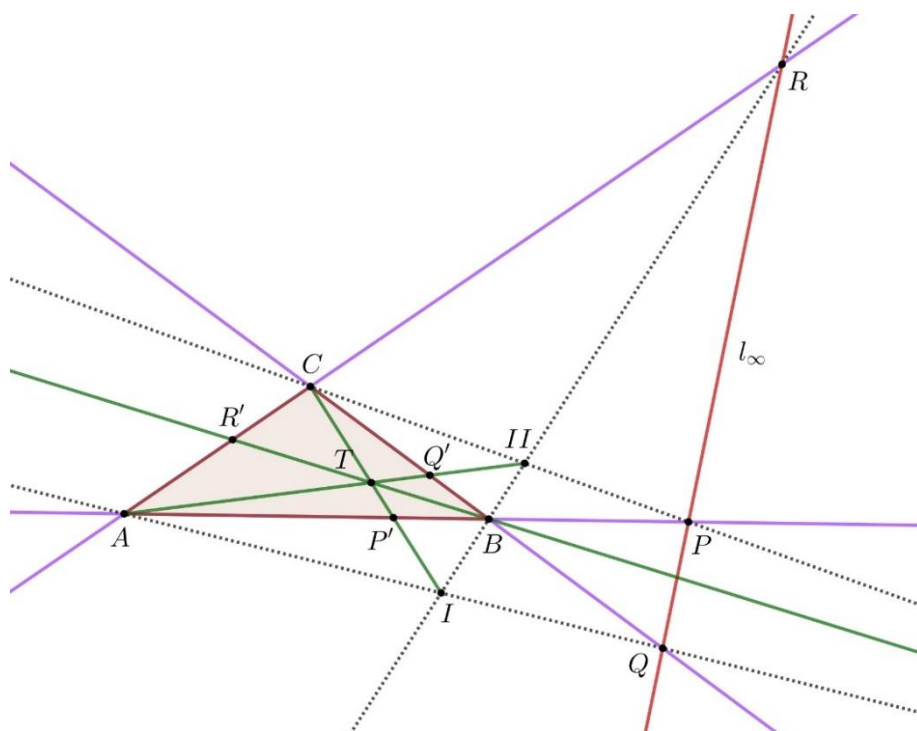
Jak si lze všimnout (Obrázek 1.24), v prostoru nám touto konstrukcí vznikl trojboký jehlan s podstavou  $ABC$  a vrcholem  $V$ . Trojúhelník  $A'B'C'$  je řezem jehlanové plochy rovinou  $\rho$  a oba trojúhelníky jsou vzájemně ve vztahu středové kolineace se středem  $V$ .

Pokud bychom úlohu poněkud změnili tak, že by přímka  $l_\infty$  byla přímkou v nekonečnu, pak by bod  $T$  byl těžištěm trojúhelníka  $ABC$  a jeho konstrukce je snadná.

Nyní se pojdme podívat, jak sestrojít bod  $T$  čistě v rovině, bez pomoci prostoru. Je to možné díky konstrukci harmonicky sdružených bodů (popsáno níže). Tato rovinná konstrukce je již skrytá v té prostorové, což by bylo vidět např. v případě, kdybychom vytvořili síť jehlanu a výše zmíněnou konstrukci znázornili v rovině (viz [5, s. 54]).

Rovinná konstrukce tedy může vypadat takto (Obrázek 1.25):

- 1) *Sestrojíme po řadě průsečíky  $P$ ,  $Q$  a  $R$  přímek  $AB$ ,  $BC$  a  $CA$  s přímkou  $l_\infty$ .*
- 2) *Vedeme přímku vždy jedním z průsečíků a třetím vrcholem trojúhelníka, tzn. vzniknou přímký  $CP$ ,  $AQ$  a  $BR$ . Sestrojíme vzájemné průsečíky těchto přímek:  $I = AQ \cap BR$ ,  $II = BR \cap CP$  a  $III = AQ \cap CP$ .*
- 3) *Spojíme průsečíky  $I$ ,  $II$  a  $III$  po řadě s vrcholy  $C$ ,  $A$  a  $B$ .*
- 4) *Sestrojíme body  $P'$ ,  $Q'$  a  $R'$ , které jsou vždy průsečíky přímek  $CI$ ,  $AII$  a  $BIII$  po řadě se stranami trojúhelníka  $AB$ ,  $BC$  a  $CA$ . Společný průsečík přímek  $CI$ ,  $AII$  a  $BIII$  je námi hledaný bod  $T$ .*



Obrázek 1.25 - Rovinná konstrukce pólu přímky vzhledem k trojúhelníku

Bod T (pól přímky  $l_\infty$ ) jsme tedy sestrojili taktéž rovinnou konstrukcí. Body konstrukce 2–4 lze jednodušeji shrnout slovy, že na stranách trojúhelníka ABC hledáme harmonicky sdružené body  $P'$ ,  $Q'$  a  $R'$  k bodům  $P$ ,  $Q$  a  $R$ . Následně je spojujeme s protějšími vrcholy a hledáme jejich průsečík T. Kdyby přímka  $l_\infty$  byla v nekonečnu, jak jsme již zmínili dříve, body  $P'$ ,  $Q'$  a  $R'$  by byly středy stran, jejich spojnice s protějším vrcholem by byly těžnice a jejich průsečík těžiště trojúhelníka.

## 2 Kvadriky

Geometrická tělesa (nebo spíše plochy) zahrnuté v této kapitole můžeme všechny zařadit mezi kvadratické plochy, jinak řečeno kvadriky. Kvadrikami rozumíme plochy druhého stupně, tj. takové plochy, které v pravoúhlé soustavě souřadnic mohou být vyjádřeny rovnicí:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Koeficienty  $a_{ij}$  musí být reálná čísla, zároveň čísla  $a_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) nejsou současně všechna rovna nule. Průnikem kvadriky a roviny, která není její součástí, je buď kuželosečka, jediný bod nebo prázdná množina. Průnikem kvadriky a přímky, která není její součástí, je buď dvojice různých bodů, jediný bod nebo prázdná množina. Čerpáno z [30, s. 141].

V této práci se vyskytují následující kvadriky: sféra, kuželová plocha, válcová plocha a paraboloid. Dále mezi ně mohou patřit např. dvě různoběžné roviny, elipsoid, hyperboloid, či dokonce jediný bod [34]. Tato druhá část práce je rozdělena na tři kapitoly – první je zaměřena na kužel a válec, ve druhé se objevuje sféra a ve třetí je řešena úloha s využitím paraboloidu.

### 2.1 Kužel a válec

V této kapitole zavedeme kuželosečky pomocí Quételetovy-Dandelinovy věty, ve které se využívá řez kuželové a válcové plochy. Dále se podíváme na prostorový důkaz Mongeovy věty a vlastností tětívového čtyřúhelníku, nakonec budeme řešit Apolloniovu úlohu pomocí cyklografie, kde využijeme taktéž kuželové plochy.

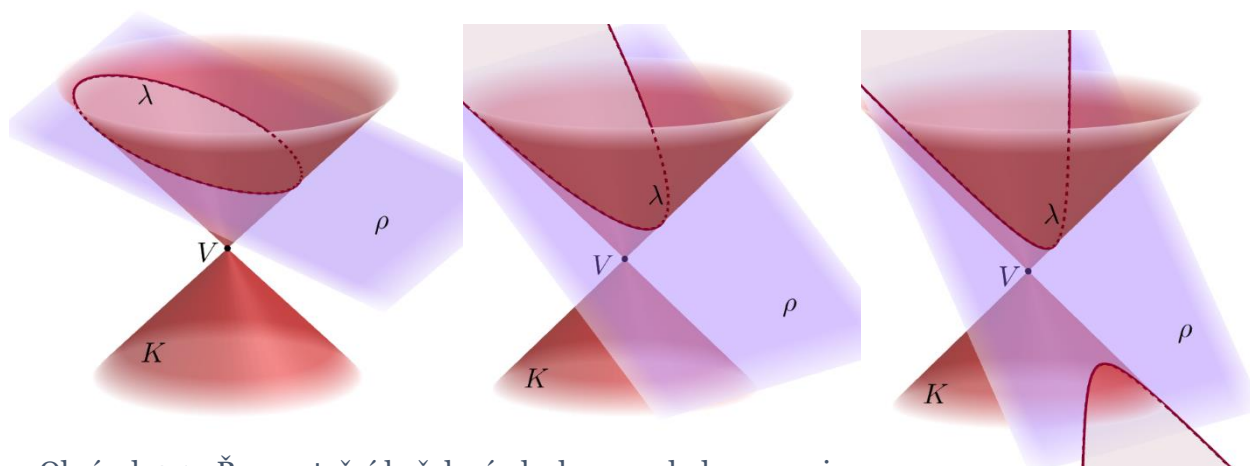
#### 2.1.1 Quételetova-Dandelinova věta.

Pojďme se tedy nyní podívat na to, jak můžeme zavést kuželosečky pomocí prostoru. Kuželosečky jsou rovinné křivky, tj. jsou definovány jako určitá množina bodů v rovině. Jejich odvození ovšem souvisí s prostorem. Jak už nám říká samotný název, křivky zvané kuželosečky lze získat tím, že „rozsekne“ kužel. Lépe můžeme říct, že provedeme řezy rotační kuželové plochy. Tímto způsobem tedy můžeme získat kružnici, elipsu, parabolu a hyperbolu (či singulární kuželosečky – bod,

přímku, dvě různoběžky). Jinou možností je řezat rotační válcovou plochu, díky čemuž lze získat kružnici nebo elipsu (ze singulárních kuželoseček to může být i přímka, dvě rovnoběžky či prázdná množina).

Je však takto vzniklá definice kuželoseček totožná s ohniskovou definicí v rovině? Věta, která tento vztah kuželoseček a rovinného řezu rotační kuželové plochy popisuje, se nazývá Quételetova-Dandelinova věta. Už v dobách antiky si významní matematici, jako např. Eukleides, Archimedes, Apollonios nebo Pappos, byli vědomi toho, jak souvisí kuželosečky s řezy rotačního kužele a píšou o tom ve svých spisech (viz [10]). Formálně byl však důkaz představen až mnohem později. Tímto tématem se zabýval matematik, astronom, sociolog a zakladatel matematické statistiky Lambert Adolphe Jacques Quételet (1796–1874) z Belgie. Nezávisle na něm stejný problém řešil matematik, fyzik a voják Germinal Pierre Dandelin (1794–1847), který měl belgicko-francouzský původ. Oba muži byli dobrými přáteli. A protože Dandelin v roce 1822 provedl důkaz pomocí sfér, které byly vepsány do kuželové plochy a dotýkaly se roviny řezu, nazývá se tato věta také často *Dandelinovy sféry* a obzvláště v jiných zemích je známa pod tímto názvem [2, s. 57].

Nejprve se podívejme na řezy rotační kuželové plochy takovými rovinami, které neprocházejí jejím vrcholem – právě o těchto řezech tato věta pojednává (Obrázek 2.1).



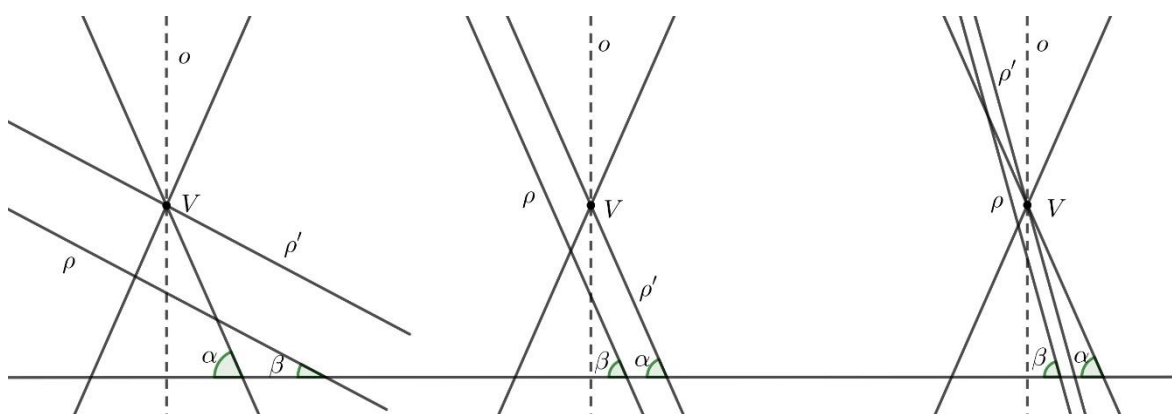
Obrázek 2.1 - Řezy rotační kuželové plochy nevrcholovou rovinou

**Věta 9** (Quételetova-Dandelinova). *Řezy rotační kuželové plochy rovinou, která není vrcholová, jsou kuželosečky. Jejich ohniska jsou body dotyku sfér vepsaných kuželové ploše a zároveň dotýkající se roviny řezu. Pokud rovina protíná všechny*

povrchové přímky (tzv. površky) rotační kuželové plochy, je řezem elipsa. Jestliže je rovina řezu rovnoběžná s jedinou površkou plochy, řezem je parabola. Je-li rovina řezu rovnoběžná se dvěma površkami, pak je řezem hyperbola a povrchové přímky udávají směry jejích asymptot [2, s. 58].

Z věty se dozvídáme nejen informaci, že řezem jsou opravdu kuželosečky, ale také to, kde leží jejich ohniska. Jak si lze všimnout, výsledný typ kuželosečky závisí na sklonu roviny řezu. Díky tomu lze větu vyslovit ještě jiným způsobem. Úhel, který svírají povrchové přímky rotační kuželové plochy s rovinou kolmou k ose rotační kuželové plochy, si označme  $\alpha$ , přičemž  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Jako  $\beta$  si dále označme úhel, který s téže rovinou svírá rovina řezu, přičemž  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Vzájemný vztah úhlů  $\alpha$  a  $\beta$  pak určuje konkrétní kuželosečku.

Je-li úhel  $\beta$  menší než úhel  $\alpha$ , protíná rovina řezu kuželovou plochu v elipse. Je-li úhel  $\alpha$  roven úhlu  $\beta$ , pak rovina protíná kuželovou plochu v parabole. Je-li úhel  $\beta$  větší než úhel  $\alpha$ , řezem kuželové plochy je hyperbola, viz obrázek (Obrázek 2.2) [4, s. 57].



Obrázek 2.2 - Narys řezů rotační kuželové plochy

V případě, že rovina řezu je kolmá na osu kuželové plochy, je řezem kružnice, což je speciální případ elipsy. Pokud by rovina řezu procházela vrcholem kuželové plochy (rovina je označena  $\rho$ ), vzniknou řezem singulární kuželosečky. V případě  $\beta < \alpha$  se jedná právě o jeden bod – vrchol plochy, v případě  $\beta = \alpha$  je řezem jedna povrchová přímka procházející vrcholem a nakonec, pokud je  $\beta > \alpha$ , jsou řezem dvě různoběžné površky protínající se ve vrcholu V [2, s. 59].

Nyní si pojdme dokázat pro jednotlivé případy řezů neprocházejících vrcholem, že toto zavedení kuželoseček jakožto řezů na kuželové ploše je ekvivalentní s jejich ohniskovou definicí. Jednotlivé případy jsou tedy následující: Pro  $\beta < \alpha$  je řezem elipsa, pro  $\beta = \alpha$  je řezem parabola a pro  $\beta > \alpha$  se jedná o hyperbolu. Důkaz se ve všech případech provádí pomocí vepsání sfér (označené  $\kappa_1, \kappa_2$ , případně  $\kappa$  v případě jedné sféry u paraboly) do kuželové plochy tak, že sféra se vždy dotýká roviny řezu  $\rho$  v bodech  $F_1$  a  $F_2$  (v případě paraboly pouze jeden bod  $F$ ). Při dokazování využíváme fakt, že pokud vedeme libovolným bodem tečny ke sféře, tak vzdálenost tohoto bodu od bodů dotyku je stále stejná. V důkazech budeme využívat značení uvedené v obrázcích – na nich je vždy zobrazen nárys kuželové plochy, vepsaných sfér, roviny  $\rho$ , přímky  $d$  atd. Důkazy byly čerpány z [2, s. 59–65] a [4, s. 57–60].

### Eliptický řez rotační kuželové plochy

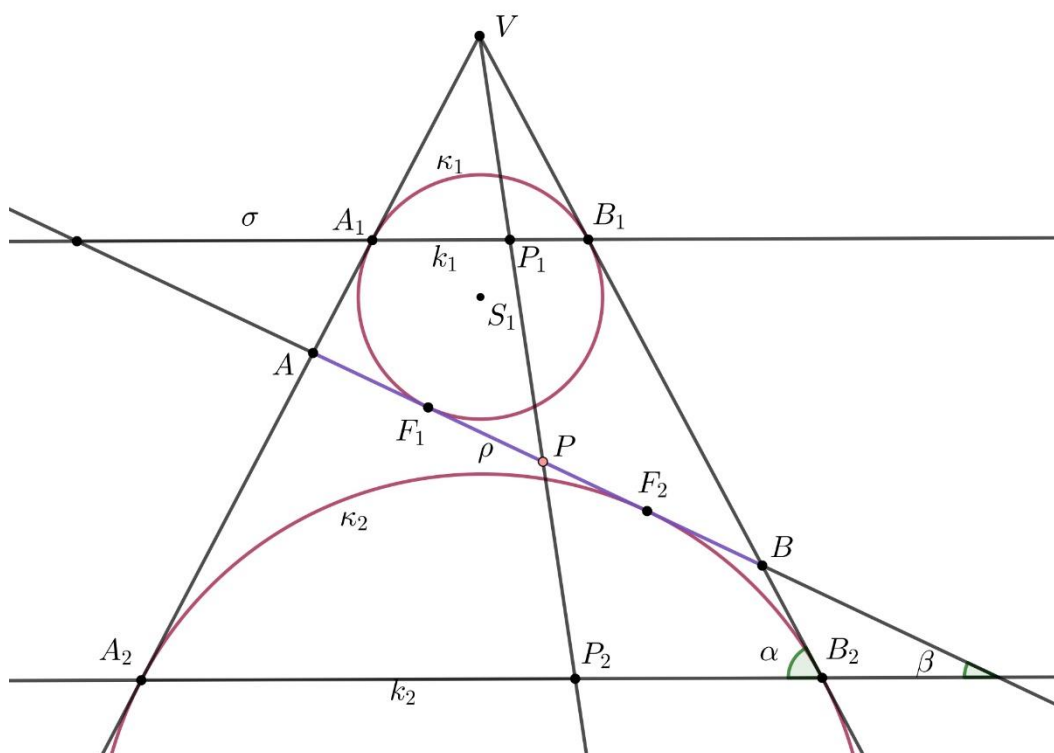
**Definice 6.** *Elipsou rozumíme množinu bodů v rovině, pro něž je součet vzdáleností od dvou daných různých bodů  $F_1$  a  $F_2$  konstantní a zároveň větší, než  $|F_1F_2|$  [4, s. 7].*

Body  $F_1$  a  $F_2$  nazveme ohniska elipsy, libovolný bod na elipse označíme  $P$  a konstantní součet vzdáleností tohoto bodu od ohnisek značíme  $2a$ . Přímku, na které leží ohniska, nazýváme hlavní osou a její průsečíky s elipsou hlavní vrcholy elipsy – značíme je  $A, B$ . Bod  $A$  je vrcholem blíže ohniska  $F_1$ , bod  $B$  vrchol blíže ohniska  $F_2$ . Součet vzdáleností ( $2a$ ) např. vrcholu  $A$  od ohnisek můžeme zapsat následovně:  $|AF_1| + |AF_2| = 2 \cdot |AF_1| + |F_1F_2|$ . Jelikož  $|AF_1| = |BF_2|$ , tak se konstanta  $2a$  rovná  $|AF_1| + |F_1F_2| + |BF_2|$ , což je vzdálenost  $|AB|$ . Chceme tedy dokázat, že libovolný bod  $P$  na řezu kuželové plochy má v součtu od ohnisek stejnou vzdálenost, jako je délka úsečky  $AB$ .



*Důkaz.* V tomto případě předpokládáme, že  $\beta < \alpha$ . Na řezu kuželové plochy rovinou  $\rho$  si zvolíme libovolný bod P. Bodem P a vrcholem V vedeme přímku (površku) a její body dotyku se sférami  $\kappa_1$  a  $\kappa_2$  označíme  $P_1$  a  $P_2$  (Obrázek 2.3). Díky tomu, že vzdálenost bodu P od bodů dotyku tečen z něj vedených k dané sféře je stejná, víme, že platí:

$$|PP_1| = |PF_1| \text{ a } |PP_2| = |PF_2|.$$



Obrázek 2.3 - Důkaz eliptického řezu

Pokud tyto rovnosti sečteme, získáme vztah pro součet vzdáleností bodu P od ohnisek:

$$|PF_1| + |PF_2| = |PP_1| + |PP_2| = |P_1P_2|$$

Jelikož vzdálenost  $P_1P_2$  nezávisí na volbě bodu P, je tato délka konstantní, a tudíž řezem je opravdu elipsa. Musíme ještě dokázat, že se tato vzdálenost rovná délce  $|AB|$  – pak bude platit, body dotyku  $F_1$  a  $F_2$  jsou skutečně ohnisky elipsy. Protože body  $A_1, B_1$  a  $P_1$  leží v rovnoběžné rovině s rovinou bodů  $A_2, B_2$  a  $P_2$  a zároveň všechny body leží na kuželové ploše, víme dále, že:

$$|P_1P_2| = |A_1A_2| = |B_1B_2|.$$

Všechny úsečky jsou stejně dlouhé části površek a vidíme tím pádem skutečnou délku  $2a$ . Obě tyto rovnosti lze rozepsat následovně:

$$|P_1P_2| = |AA_1| + |AA_2| = |AF_1| + |AF_2| = 2 \cdot |AF_1| + |F_1F_2|$$

$$|P_1P_2| = |BB_1| + |BB_2| = |BF_1| + |BF_2| = 2 \cdot |BF_2| + |F_1F_2|$$

Z těchto vztahů vyplývá, že  $|AF_1| = |BF_2|$ , tudíž vychází:

$$|P_1P_2| = |A_1A_2| = |AF_1| + |F_1F_2| + |BF_2| = |AB|$$

Protože se  $|P_1P_2|$  rovná  $|PF_1| + |PF_2|$ , získáváme hledanou rovnost pro vzdálenost bodu P od ohnisek:

$$|PF_1| + |PF_2| = |AB|.$$

### **Parabolický řez rotační kuželové plochy**

**Definice 7.** *Parabolou rozumíme množinu bodů v rovině, jejichž vzdálenost od dané přímky  $d$  a od daného bodu  $F$  je konstantní [4, s. 44].*

Bod  $F$  nazveme ohniskem paraboly a přímku  $d$  řídicí přímkou. Chceme dokázat, že vzdálenost libovolně zvoleného bodu  $P$  na řezu kuželové plochy od ohniska  $F$  je stejná, jako od přímky  $d$ .

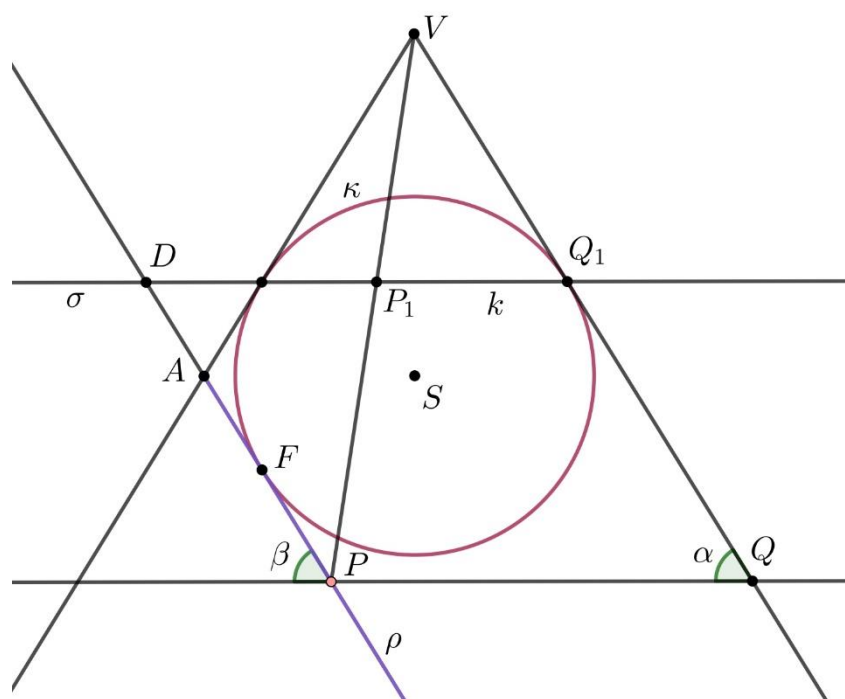
*Důkaz.* V tomto případě předpokládáme, že  $\beta = \alpha$ . Na řezu kuželové plochy rovinou  $\rho$  si zvolíme libovolný bod  $P$ . Bodem  $P$  a vrcholem  $V$  vedeme přímku (površku) a bod dotyku se sférou  $\kappa$  označíme  $P_1$  (Obrázek 2.4). Ze stejného důvodu jako u elipsy víme, že platí:

$$|PF| = |PP_1| = |QQ_1|,$$

a díky tomu vidíme i skutečnou délku  $|PF|$ . Nárýs přímky  $d$  je bod, který označme  $D$ . Čtyřúhelník  $PQQ_1D$  je rovnoběžníkem, neboť rovina řezu je rovnoběžná s površkou kuželové plochy a bodem  $P$  jsme záměrně vedli rovnoběžnou rovinu s rovinou, kde leží přímka  $d$  a body  $P_1, Q_1$ . Z tohoto rovnoběžníku vidíme vztah:

$$|QQ_1| = |PD|.$$

Jelikož vzdálenost  $|PD|$  vyjadřuje právě vzdálenost bodu  $P$  od přímky  $d$ , a protože se délka  $|PF|$  rovná  $|QQ_1|$ , vychází již hledaný výsledek:  $|PF| = |P, d|$ .



Obrázek 2.4 - Důkaz parabolického řezu

### Hyperbolický řez rotační kuželové plochy

**Definice 8.** *Hyperbolou rozumíme množinu bodů v rovině, pro něž je absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou daných různých bodů  $F_1$  a  $F_2$  konstantní [4, s. 26].*

Body  $F_1$  a  $F_2$  nazveme ohniska hyperboly, libovolný bod na hyperbole označíme  $P$  a konstantní rozdíl vzdáleností tohoto bodu od ohnisek značíme  $2a$ . Přímku, na které leží ohniska, nazýváme hlavní osou a její průsečíky s hyperbolou vrcholy hyperboly – značíme je  $A$ ,  $B$ . Bod  $A$  je vrcholem blíže ohniska  $F_1$ , bod  $B$  vrchol blíže ohniska  $F_2$ . Rozdíl vzdáleností ( $2a$ ) např. vrcholu  $A$  od ohnisek můžeme zapsat takto:  $|AF_2| - |AF_1| = |AB| + |BF_2| - |AF_1|$ . Jelikož  $|AF_1| = |BF_2|$ , tak se konstanta  $2a$  rovná vzdálenosti  $|AB|$ . Chceme tedy dokázat, že absolutní hodnota rozdílu vzdáleností libovolného bodu  $P$  na řezu kuželové plochy od ohnisek je stejný, jako je délka úsečky  $AB$ . Důkaz je podobný jako v případě elipsy.

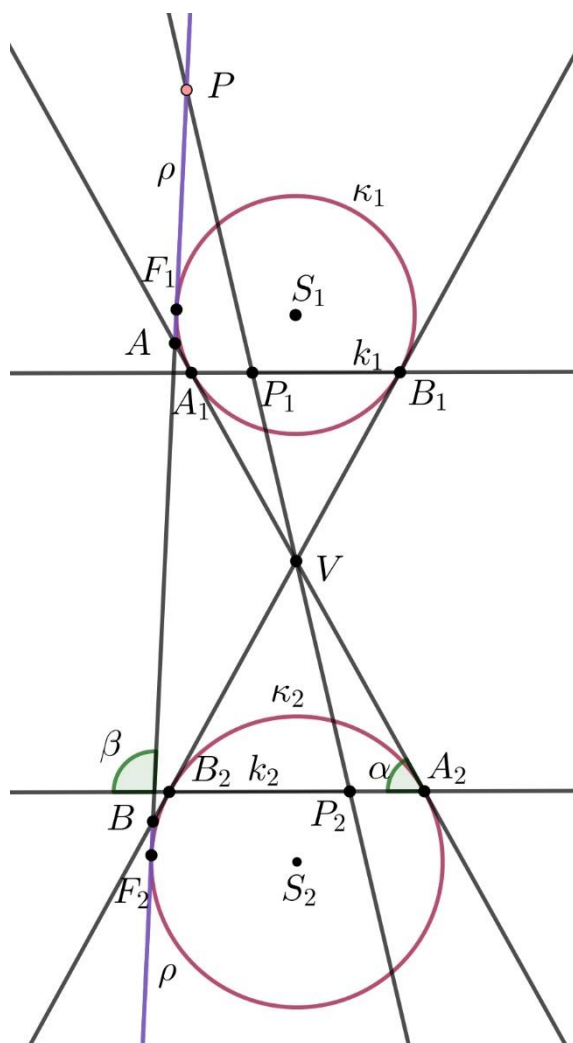
*Důkaz.* V tomto případě předpokládáme, že  $\beta > \alpha$ . Na řezu kuželové plochy rovinou  $\rho$  si zvolíme libovolný bod  $P$ , tímto bodem a vrcholem  $V$  vedeme přímku (površku)

a její body dotyku se sférami  $\kappa_1$  a  $\kappa_2$  označíme  $P_1$  a  $P_2$  (Obrázek 2.5). Ze stejného důvodu jako u elipsy je zřejmé, že platí:

$$|PP_1| = |PF_1| \text{ a } |PP_2| = |PF_2|.$$

Pokud první rovnost odečteme od druhé, získáme vztah pro rozdíl vzdáleností bodu  $P$  od ohnisek:

$$|PF_2| - |PF_1| = |PP_2| - |PP_1| = |P_1P_2|.$$



Obrázek 2.5 - Důkaz hyperbolického řezu

Rozdíl  $|PF_2| - |PF_1|$  by mohl být záporný, zatímco vzdálenost  $|P_1P_2|$  je kladná, proto budeme uvažovat absolutní hodnotu rozdílu:  $||PF_2| - |PF_1||$ . Jelikož vzdálenost  $P_1P_2$  nezávisí na volbě bodu  $P$ , je tato délka konstantní, a tudíž řezem je opravdu hyperbola. Musíme ještě dokázat, že se tato vzdálenost rovná délce  $|AB|$ , protože

pak bude platit, body dotyku  $F_1$  a  $F_2$  jsou skutečně ohnisky hyperboly. Stejně jako u elipsy dále víme, že:

$$|P_1P_2| = |A_1A_2| = |B_1B_2|$$

a tím známe skutečnou délku  $2a$ . Obě tyto rovnosti lze rozepsat následovně:

$$|P_1P_2| = |AA_2| - |AA_1| = |AF_2| - |AF_1| = |AB| + |BF_2| - |AF_1|$$

$$|P_1P_2| = |BB_1| - |BB_2| = |BF_1| - |BF_2| = |AB| + |AF_1| - |BF_2|$$

Z těchto vztahů vyplývá, že  $|AF_1| = |BF_2|$ , a tudíž již z výše uvedených rovností plyne:

$$|P_1P_2| = |AB|.$$

Protože se  $|P_1P_2|$  rovná  $||PF_1| - |PF_2||$ , získáváme hledanou rovnost pro vzdálenost bodu P od ohnisek:

$$||PF_1| - |PF_2|| = |AB|.$$

### Řezy rotační válcové plochy

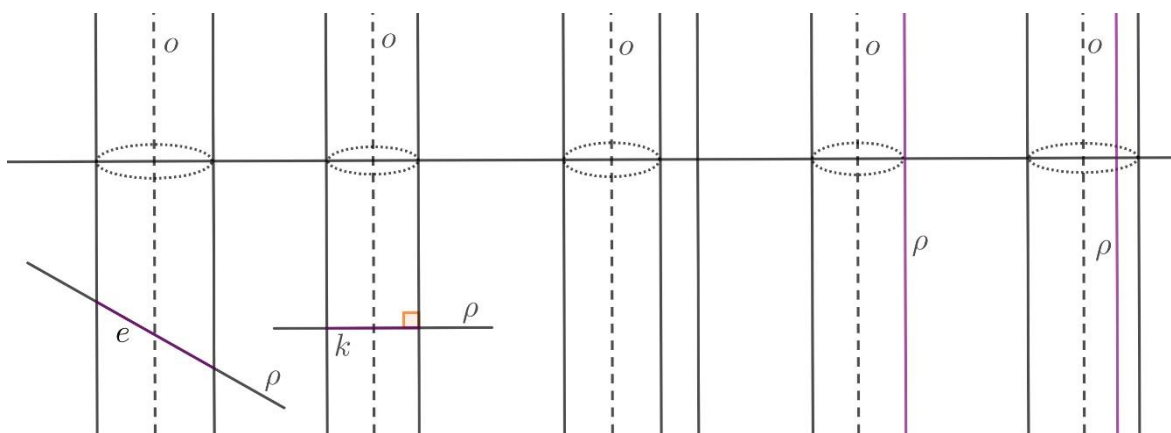
Ještě se v krátkosti zmiňme o řezech válcové plochy, neboť Quételetova-Dandelinova věta je vyslovena i pro tento případ a zní následovně:

**Věta 10** . *Řezem rotační válcové plochy rovinou kosou k ose této plochy je elipsa, přičemž její ohniska jsou dotykové body sfér, které jsou vepsané válcové ploše a zároveň se dotýkají roviny řezu. Délka vedlejší poloosy elipsy se rovná velikosti poloměru válcové plochy a střed elipsy leží na ose této plochy [2, s. 67].*

Tuto větu zde už ponecháme bez důkazu, ten lze najít např. v [2, s. 68].

Věta hovoří pouze o řezech takovými rovinami, které nejsou rovnoběžné s osou válcové plochy, a tudíž řezem je elipsa. Pokud by rovina řezu byla k ose válcové plochy kolmá, řezem bude kružnice, což je ovšem speciální případ elipsy. Co se týká singulárních kuželoseček, tak při řezu rovinou rovnoběžnou s osou  $o$  může být řezem a) prázdná množina – vzdálenost roviny řezu od osy  $o$  je větší než poloměr válcové plochy, b) jedna povrchová přímka – vzdálenost roviny řezu od osy  $o$  se rovná poloměru válcové plochy, c) dvě rovnoběžné povrchové přímky – vzdálenost roviny

řezu od osy  $o$  je menší než poloměr válcové plochy. Všechny zmíněné možnosti jsou znázorněny na obrázku (Obrázek 2.6).



Obrázek 2.6 - Narys řezů rotační válcové plochy

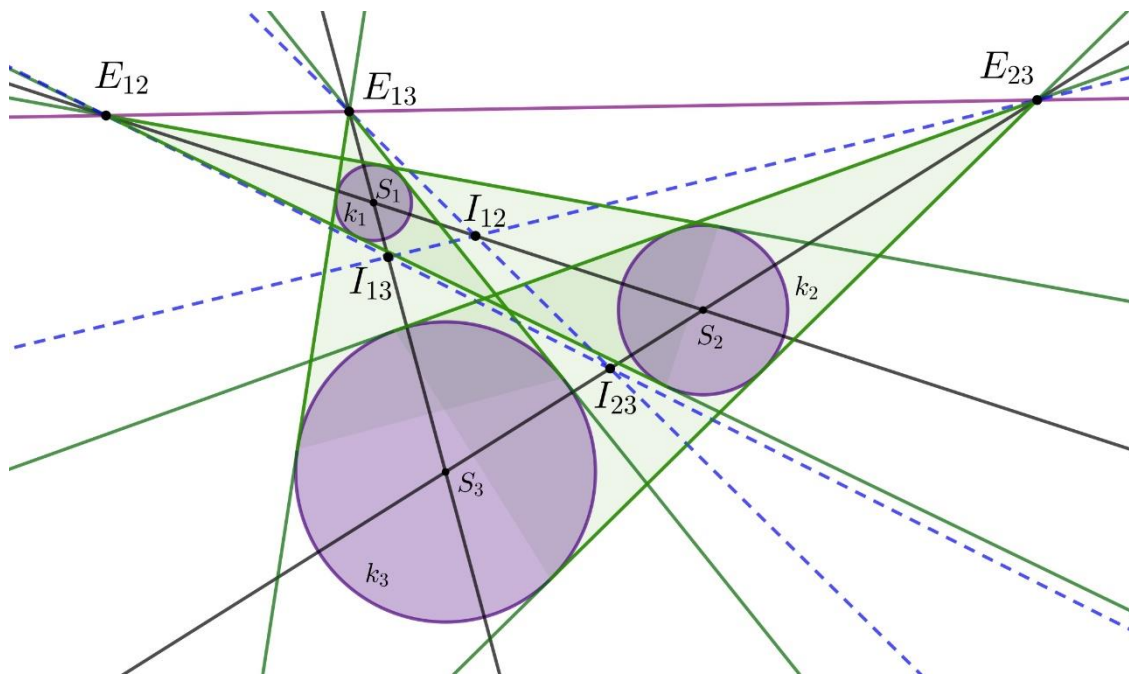
### 2.1.2 Mongeova věta

Gaspard Monge byl francouzský geometr a matematik žijící na přelomu 18. a 19. století. Je znám jako otec diferenciální a deskriptivní geometrie. Zformuloval větu, ve které se pojednává o třech různých kružnicích v rovině a o vztahu jejich středů stejnoolehlostí, příslušejícím ke každým dvěma z nich. Tuto větu vymyslel v souvislosti s prostorovou analogií úlohy z oblasti deskriptivní geometrie, a to, jak nalézt průsečnici tečných rovin ke třem sféram – k řešení využil tečné kužely [5, s. 59]. Věta je čerpána z [11, s. 138], inspirována z [7].

**Věta 11** (Mongeova). *Mějme tři kružnice  $k_1, k_2, k_3$  s nekolineárními středy a různými poloměry, pak pro vnější a vnitřní středy stejnoolehlosti každých dvou z těchto kružnic platí následující:*

- všechny 3 vnější středy stejnoolehlosti ( $E_{12}, E_{23}, E_{13}$ ) leží v jedné přímce
- každé dva vnitřní středy stejnoolehlosti a jeden vnější leží v jedné přímce
- 3 vnitřní středy stejnoolehlosti ( $I_{12}, I_{23}, I_{13}$ ) v jedné přímce neleží

*Důkaz – prostorový.* Opět se podíváme na to, jak by vypadal důkaz této věty, kdybychom na ni nahlédli prostorově. Zaměříme se na první tvrzení věty, totiž, že všechny vnější středy stejnolehlosti leží v jedné přímce. Důkaz s využitím válců je nastíněn v [5, s. 60], důkaz za pomoci kuželů je čerpán z [36].



Obrázek 2.7 - Mongeova věta

Představme si, že každá kružnice je obrysem jedné sféry v prostoru, přičemž všechny sféry jsou položeny na jedné rovině. Jinak řečeno, sféry jsou středově promítnuty do průmětny tak, že jejich obrysy jsou kružnice (roviny kružnic nejsou s průmětnou rovnoběžné) (viz také [31, s. 303]). Obrázek (Obrázek 2.7) znázorňující Mongeovu větu může být pak chápán jako perspektivní pohled na sféry vepsané válcové ploše, přičemž všechny sféry mají stejný poloměr a jsou v různé vzdálenosti od pozorovatele. Každá dvojice kružnic spolu s jejich vnějšími tečnami v prostorovém vnímání tedy představuje jednu válcovou plochu a obrysové kružnice sfér se dotýkají obrysu válcové plochy. Obrys válcové plochy je znázorněn vnějšími tečnami kružnic, tyto tečny se protínají právě ve vnějším středu stejnolehlosti. Válcová plocha ubíhá do nekonečna a ztrácí se nám z očí právě na horizontu, tedy na nevlastní přímce – každá válcová plocha se sbíhá do jednoho bodu. Průsečík vnějších tečen tak vidíme na horizontu u všech tří válcových ploch, proto všechny vnější středy stejnolehlosti leží na jedné přímce, což jsme chtěli dokázat.

Trochu odlišná prostorová interpretace může být nikoliv za pomoci válců, nýbrž kuželů – rozdíl oproti myšlence s válci spočívá v tom, že v tomto případě nepotřebujeme představu nekonečna. Představme si tedy kuželové plochy opsané vždy dvěma sféram, přičemž všechny tři sféry jsou opět položeny na jedné rovině  $\alpha$ . Tato rovina je společnou tečnou rovinou i pro všechny kuželové plochy, tudíž také všechny jejich vrcholy v této rovině leží. Pokud existuje druhá tečná rovina  $\beta$  k těmto třem sféram, je řešení intuitivní. Obě roviny jsou tečné i ke kuželovým plochám a mají společnou průsečnici  $p$ , na které musí všechny vrcholy ležet. Dále lze sestrojiti třetí rovinu  $\gamma$ , která prochází průsečnicí  $p$  a púlí prostorový úhel mezi rovinami  $\alpha$  a  $\beta$ . V této rovině musí ležet středy všech tří sfér. Pokud bychom tedy nemohli sestrojiti druhou tečnou rovinu  $\beta$ , nalezneme vrcholovou přímku kuželových ploch jako průsečnici roviny  $\alpha$  s rovinou procházející středy sfér ( $\gamma$ ).

Pro planimetrický důkaz lze nahlédnout do Kuřinovy publikace [11, s. 137–140]. K důkazu využívá vlastnosti Mongeovy grupy, kterou se v publikaci také předtím zabývá.

Ještě zmiňme jako zajímavost zcela odlišnou možnost prostorové interpretace této věty. Středy stejnolehlosti mohou být chápány jako vrcholy čtyřstěnu, kdy jedna stěna je tvořena třemi vnějšími středy stejnolehlosti a zbylé tři stěny jsou tvořeny vždy jedním vnějším středem a dvěma vnitřními [26, s. 22–23]. Tuto interpretaci bychom ovšem zařadili do kapitoly o jehlanu.

### 2.1.3 Tětivový čtyřúhelník

Nyní se zaměříme na další příklad prostorové interpretace rovinného útvaru, kterým je tětivový čtyřúhelník ABCD. Tětivový čtyřúhelník je definován jako takový čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici.

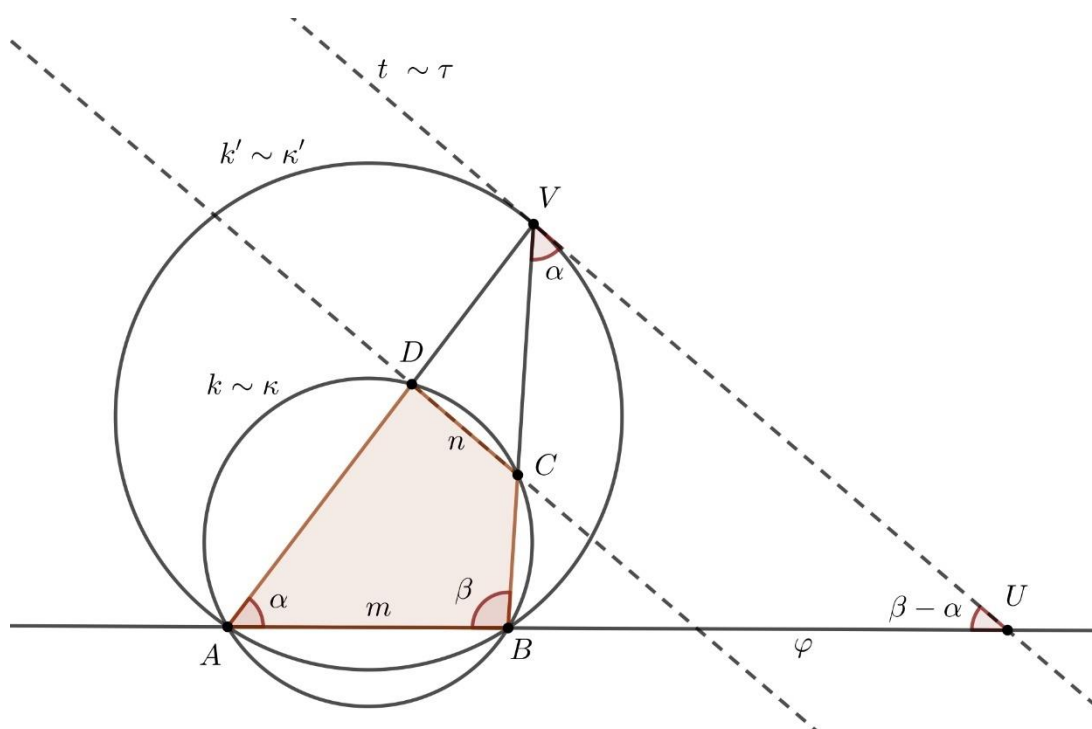
**Věta 12** . *Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když se součet jeho protějších úhlů rovná  $180^\circ$ , čili:  $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$ .* [3, s. 113–114]

*Důkaz (náznak) – planimetrický.* Důkaz této věty vychází z věty o středovém a obvodovém úhlu. Pokud všechny vrcholy leží na kružnici, plyne z této věty zcela zřejmý závěr o velikostech úhlů. A naopak z velikostí úhlů díky kružnici jakožto množiny bodů nad úsečkou plyne, že vrcholy musí ležet na stejné kružnici.



Tento speciální čtyřúhelník se nazývá tětiový právě proto, že všechny jeho strany tvoří tětivy kružnice jemu opsané. Jelikož je věta ekvivalencí, můžeme se setkat i s obrácenou formulací věty, a to, že čtyřúhelník je tětiový tehdy, když mu lze opsat kružnici. Záleží na tom, které tvrzení považujeme za definici a které vyslovíme jako větu.

V následujícím prostorovém důkazu budeme dokazovat jednostrannou implikaci, takže se nejedná o důkaz celé věty. Za předpoklad považujeme vlastnost, že všechny vrcholy tětiového čtyřúhelníku leží na kružnici. Budeme chtít tedy dokázat, že součet protějších úhlů se vždy rovná  $\pi$ . Čerpáno především z [1, s. 7–8].



Obrázek 2.8 - Důkaz vlastností v tětiovém čtyřúhelníku

*Důkaz (implikace) – prostorový.* Ve čtyřúhelníku můžeme protáhnout strany AD a BC do polopřímek a jejich průsečík označit V (Obrázek 2.8). V prostorové představě se bude jednat o vrchol kosého kužele, na který se díváme z boku – jeho podstava je kružnice ležící v horizontální rovině ( $\varphi$ ) sestavená nad průměrem AB a zobrazí se právě na úsečku AB, označíme ji  $m$ . Trojúhelník ABV tedy představuje hlavní řez kosého kužele. Kružnice  $k$  opsaná čtyřúhelníku ABCD může být považována za poledníkový řez sféry  $\kappa$ , úsečky AB a CD pak znázorňují kolmé průměty nerovnoběžných cyklických řezů kužele (kružnice  $m$  a  $n$ ) do roviny hlavního řezu, tj. ABV. Ovšem to, že průnikem sféry a kužele je v tomto případě

kružnice  $n$ , není zcela zřejmý fakt, protože v obecném případě tomu tak není. Řezem kuželu by klidně mohla být elipsa, jejíž průmět by byla také úsečka  $CD$ . Uvažujme tedy nejdřív, že kružnice  $n$  je řezem sféry  $\kappa$  (řezem sféry rovinou je vždy kružnice – kromě případů, kdy se spolu neprotnou vůbec, nebo je průsečíkem jediný bod [31, s. 212]). Jelikož obě kružnice  $m$  a  $n$  leží na sféře, tak jimi lze proložit kuželovou plochu. Toto tvrzení je i s důkazem uvedeno zde [38, s. 437–438], v obecném případě se jedná o proložení kuželové plochy dvěma kuželosečkami ležícími na kvadrice. Tímto jsme tedy dokázali, že kružnice  $n$  leží jak na kuželu, tak na sféře, a tedy že tento řez kuželu je skutečně cyklický. Dále kružnice  $k'$  představuje poledníkový řez sféry  $\kappa'$ , která je opsána celému kuželu, a tečna  $t$  kružnice  $k'$  v bodě  $V$  je v prostorové představě tečnou rovinou  $\tau$  této sféry. Průmět průsečnice roviny  $\tau$  s rovinou  $\varphi$  do nárysny označme  $U$ . Rovina  $\tau$  udává směr rovin, kterými řežeme kužel a vytváříme tím cyklické řezy [1, s. 7], neboť řezy rovnoběžné s cyklickým řezem musí být cyklické také. Každý z těchto řezů leží na sféře  $\kappa'$ , stejně jako podstavna kružnice  $AB$ . Tečna  $t$  tak určuje směr přímky, na které leží strana  $CD$  ve čtyřúhelníku  $ABCD$ . Díky vlastnosti úsekového úhlu víme, že úhel mezi rovinou  $\tau$  a površkou kuželu  $BV$  je roven  $\alpha$ . Z trojúhelníku  $BUV$  v nárysně je patrné, že úhel  $AUV$  (mezi rovinami  $\varphi$  a  $\tau$ ) je roven  $\beta - \alpha$ , proto by ke konstrukci již nebyla třeba druhá kružnice  $k'$ . Nyní lze snadno dopočítat, že úhel  $BCD$  musí být roven  $\pi - \alpha$  a úhel  $ADC$  roven  $\pi - \beta$ , což jsme chtěli dokázat.

#### 2.1.4 Apolloniova úloha ( $kkk$ ) – cyklografie

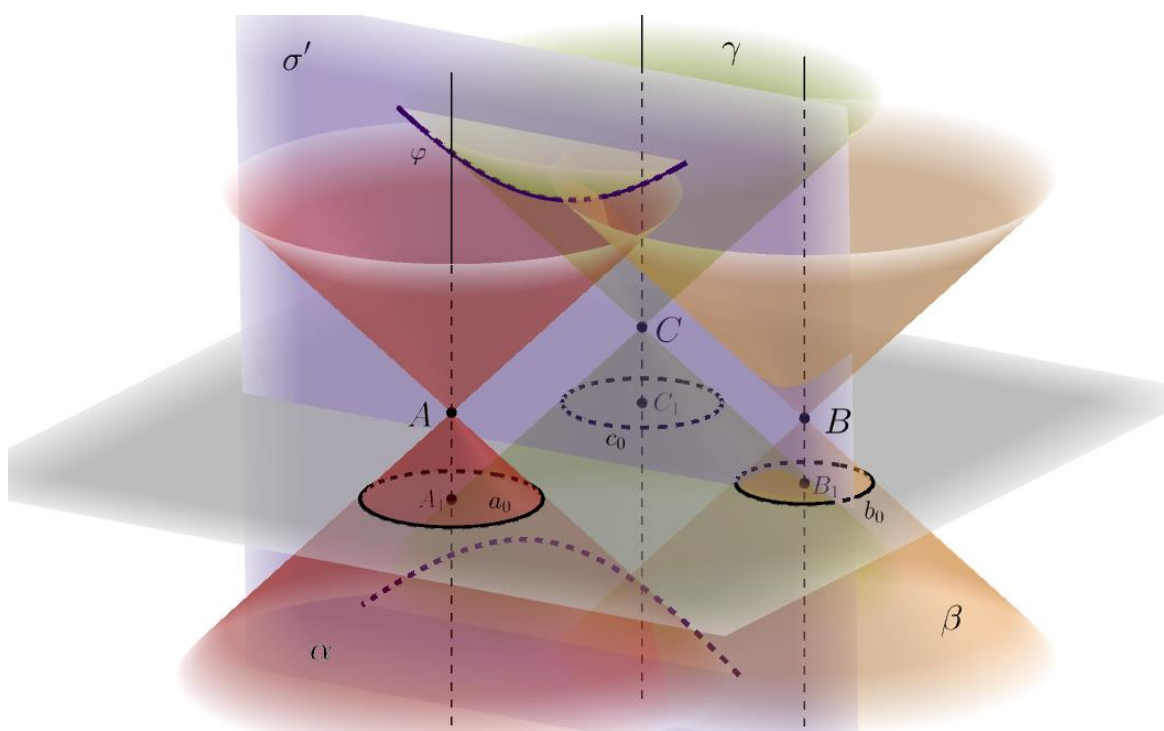
V této práci budeme Apolloniovu úlohu řešit několika způsoby, zmiňme proto o této úloze nejprve obecné informace. Apolloniova úloha se původně zabývá nalezením kružnic, které se dotýkají tří předem daných kružnic. V obecném případě je úloha Apolloniova chápána jako úloha, kdy konstruujeme kružnice dotýkající se třech kruhových útvarů, přičemž tyto útvary mohou být buď přímo kružnicí ( $k$ ), přímkou ( $p$  – kružnice s nekonečným poloměrem) nebo bodem ( $B$  – kružnice s nulovým poloměrem). Kombinací s opakováním z těchto tří typů kruhových útvarů ( $k, p, B$ ) získáme deset případů Apolloniovy úlohy [26, s. 15] [27]. Zmiňme ještě, že při řešení Apolloniových úloh v této práci nám nepůjde o konstrukci hledaných kruhových útvarů, nýbrž pouze o nalezení syntetického řešení.

Pojďme se nyní zaměřit na Apolloniovu úlohu typu (*kkk*). Tato úloha má jméno podle řeckého geometra Apollonia z Pergy (žil kolem r. 200 př.n.l.). Jeho spis „o dotycích“ s řešením úlohy se nezachoval, avšak soudí se, že stejné řešení uvedl v r. 1600 francouzský matematik Viète ve spisu „Apollonius Gallus...“ a jedná se o řešení dilatací [26, s. 14]. Dále byla úloha řešena mnoha dalšími způsoby, např. užitím kuželoseček či jinými cestami – syntetickými i analytickými. Úloha se stala velmi důležitým zdrojem nových geometrických tvrzení, které byly objeveny při jejím řešení. Mezi řešitele Apolloniových úloh patřili např. Gaultier nebo Fouché, kteří využívali cyklů. Jedno zvláště elegantní a jednoduché řešení taktéž pomocí cyklů představil francouzský matematik Gergonne v díle „Annales de math.“ (1816–1817). Správnost řešení byla potom dokázána např. německým geometrem W. Fiedlerem, který přiřazoval prostorové útvary rovinným a využíval cyklografii [26]. Právě řešením pomocí cyklografie se budeme zabývat v této kapitole, řešení je převzato z [1, s. 51–53].

Před samotným řešením si řekněme několik slov o cyklografii, což je pro řešení potřebné. Mějme v prostoru bod  $A$  a rovinu  $\rho$ , kterou považujeme za průmětnu v cyklografickém promítání, přičemž bod  $A$  v této průmětně neleží. Z bodu  $A$  spustíme kolmici k dané rovině a kolmý průmět bodu  $P$  do roviny  $\rho$  (patu kolmice) označme  $A_1$ . Nechť bod  $A_1$  je středem v průmětně ležící kružnice  $a_o$ , jejíž poloměr je roven  $|AA_1|$ . Kružnice  $a_o$  se nazývá cyklickým průmětem bodu  $A$ . Danému bodu  $A$  je takto přiřazena jediná kružnice  $a_o$ , zatímco kružnici náleží dva body na kolmici vztyčené z jejího středu  $A_1$  ve vzdálenosti poloměru – bod  $A$  (nad průmětnou) a bod  $A'$  (pod průmětnou). Tyto body jsou vzájemně souměrně sdružené podle roviny  $\rho$ . Abychom dosáhli vzájemně jednoznačného zobrazení, zavádí se tzv. cykly, což jsou orientované kružnice. Pak je kladně orientovanému cyklu přiřazen bod  $A$  a záporně orientovanému bod  $A'$ . Toto zobrazení bodu na cyklus je nazýváno cyklickým průmětem bodu. Čerpáno z [32, s. 7] a [1, s. 42–43].

**Definice 9.** Zobrazení množiny  $(E_3 \rightarrow C_\rho)$  všech vlastních bodů eukleidovského prostoru  $E_3$  na množinu všech cyklů  $C_\rho$  v průmětně  $\rho$  (prostor cyklů) výše popsaným způsobem je zobrazovací metoda nazývaná cyklografické promítání [27].

*Řešení (náznak) – cyklografické.* Mějme tři kružnice  $a_o$ ,  $b_o$  a  $c_o$  v rovině  $\rho$  se středy  $A_1$ ,  $B_1$  a  $C_1$ . (V případě cyklů uvažujme pouze kladné cykly.) Těmto cyklům pak přiřadíme cyklicky příslušné body  $A$ ,  $B$  a  $C$  nad průmětnou. Dále každou z kružnic proložíme pravouhrou rotační kuželovou plochu tak, že vrcholy těchto ploch budou právě body  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – površky těchto kuželových ploch nutně svírají s průmětnou  $\rho$  úhel  $45^\circ$ . Pro získání hledaného řešení je třeba nalézt společné body těchto tří kuželových ploch (plochy označme  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ). Obecně průnikem dvou kvadrik může být křivka 4. stupně, v případě takovýchto kuželových ploch je průnikem kuželosečka, tady se jedná konkrétně o hyperbolu  $\varphi$  (Obrázek 2.9). Touto kuželosečkou proložíme další rovinu – takto nalezneme dvě roviny  $\sigma$  a  $\sigma'$  díky průniku ploch  $\alpha \cap \beta$  a  $\alpha \cap \gamma$ . Společné body ( $S_1$  a  $S_2$ ) všech tří ploch leží na průniku průsečnice rovin  $\sigma$  a  $\sigma'$  s jednou z kuželových ploch, např.  $\alpha$ . Jinými slovy, hledali



Obrázek 2.9 - Cyklografické řešení Apolloniovy úlohy (kkk)

jsme společné body tří kuželoseček. Cyklické průměty bodů  $S_1$  a  $S_2$  do roviny  $\rho$  jsou dvě kružnice, které jsou tečnými kružnicemi všech tří cyklů  $a_o$ ,  $b_o$  a  $c_o$ , a řeší tudíž Apolloniovu úlohu. Jak je již zmíněno, toto řešení je náznakem. Jeho neúplnost spočívá především v tvrzení, že průnikem daných kuželových ploch je kuželosečka a v nalezení společných průsečíků kuželoseček. Řešení lze podrobně prozkoumat v [1, s. 51–56] nebo [27], odkud byla úloha čerpána.

## 2.2 Sféra

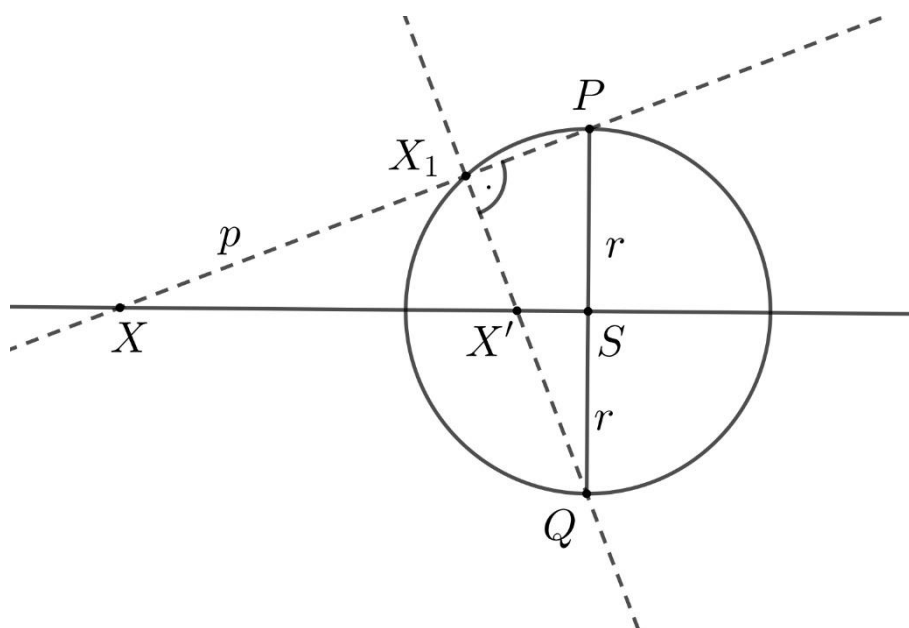
V kapitole o sféře se seznámíme se sférickou inverzí jakožto analogií k inverzi kruhové a zavedeme díky těmto zobrazením stereografickou projekci. Ta bude dále využita při řešení dvou typů Apolloniových úloh.

### 2.2.1 Kruhová a sférická inverze, stereografická projekce

V této kapitole si uvedeme příklad prostorové analogie rovinného zobrazení, a to konkrétně analogii kruhové inverze, kterou je inverze sférická. Zavedeme obecnou definici pro inverzi [23, s. 84], inspirováno také z [19]:

**Definice 10.** V eukleidovském prostoru  $E$  je inverze se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$  různým od nuly zobrazení množiny  $E - \{S\}$  na sebe, které zobrazí každý bod  $X$  na bod  $X'$  tak, že:

- polopřímky  $SX$  a  $SX'$  jsou pro  $\kappa > 0$  totožné a pro  $\kappa < 0$  opačné,
- $|SX'| = \frac{|\kappa|}{|SX|}$ .



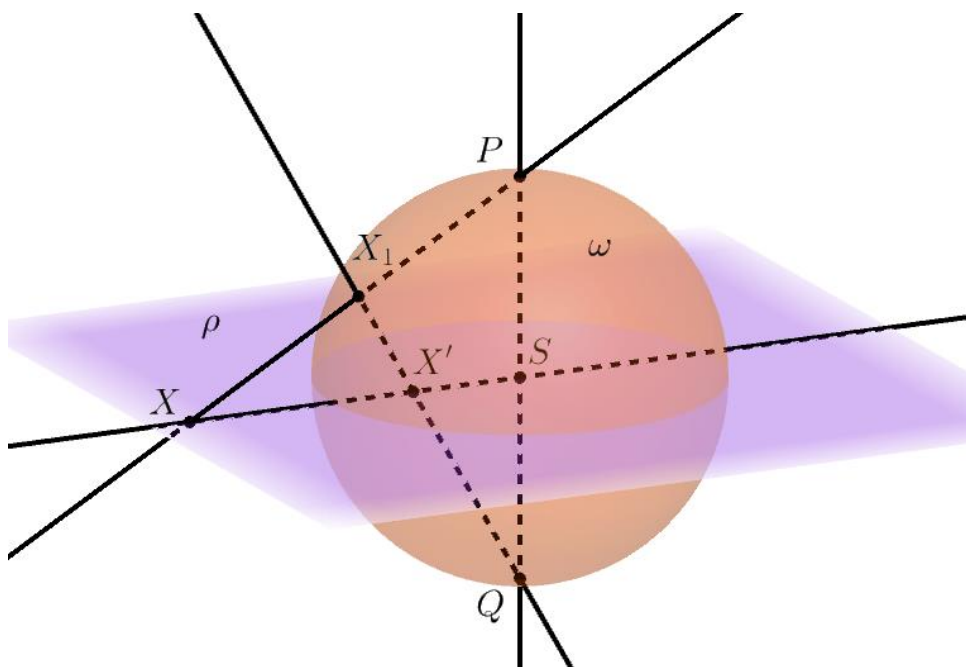
Obrázek 2.10 - Kruhová inverze

Body  $S$ ,  $X$  a  $X'$  ( $X' \neq S$ ) musí nutně být kolineární a kruhová inverze je jednoznačně určena středem a dvojicí odpovídajících si bodů (Obrázek 2.10).

Dále zmiňme, jaký je vztah mezi koeficientem  $\kappa$  a poloměrem řídicí kružnice inverze. Díky podobnosti trojúhelníků  $SXP$  a  $SQX'$ , kde platí:  $|SP| = |SQ| = r$  můžeme získat

následující vztah:  $|SX'| = \frac{r^2}{|SX|}$ , který odpovídá vztahu z definice pro inverzi. Z toho vyplývá, že:  $|\kappa| = r^2$ .

Pojďme se teď podívat na inverzi v prostoru – sférickou inverzi. Uvažujme sféru  $\omega$  se středem  $S$ , na ní dva body  $P$  a  $Q$  na pólech (diametrálně protilehlé) a rovinu  $\rho$  kolmou ke spojnici  $PQ$  procházející bodem  $S$ . Sférická inverze je tedy dána sférou, jejím středem a poloměrem. Zobrazení vzoru  $X \in \omega$  provedeme tak, že jej spojíme s jedním z bodů  $P, Q$  a průsečík této přímky se sférou označíme jako pomocný bod  $X_1$ . Následně tento bod spojíme s druhým z pólů a průsečík této přímky s rovinou  $\rho$  je hledaný obraz  $X'$  (Obrázek 2.11).



Obrázek 2.11 - Sférická inverze

Podobně jako u inverze kruhové, tak i inverze sférická se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$  zobrazuje vnitřní část sféry na část vnější a naopak, samotná sféra je samodružná. V případě kladného  $\kappa$  je samodružný i každý bod sféry, v případě záporného  $\kappa$  se body zobrazí vždy na bod diametrálně protilehlý. Poloměr sféry se rovná  $\sqrt{|\kappa|}$ , neboť pro body na sféře z definice inverze platí, že  $|SX|=|SX'| = \sqrt{|\kappa|}$ . Z toho plyne i již zmíněný fakt, že vnější body sféry se zobrazí na vnitřní a naopak, protože pokud  $|SX| < \sqrt{|\kappa|}$ , je  $|SX'| > \sqrt{|\kappa|}$  [23, s. 85].

Součástí zobrazování ve sférické inverzi je stereografická projekce sféry na rovinu  $\rho$ , která přiřazuje bodu sféry  $X_1$  (uvažujme bod různý od pólu) bod v rovině  $\rho$  tak, že vedeme přímkou jedním z pólů a bodem  $X_1$  (přímky  $X_1P$  nebo  $X_1Q$ ) – hledaný obraz ( $X$  nebo  $X'$ ) je průsečíkem této přímky s rovinou  $\rho$ . V takovémto případě je obraz bodu  $X_1$  různý od středu  $S$ . Můžeme tak např. bodu  $X$  přiřadit bod  $X_1$  tak, že  $X$  je jeho stereografickým průmětem z bodu  $P$  a zároveň lze k bodu  $X_1$  sestrojít stereografický průmět  $X'$  z bodu  $Q$ . Body  $X_1$ ,  $X$  a  $X'$  leží v jedné polorovině, takže polopřímky  $SX$  a  $SX'$  jsou i v této prostorové inverzi totožné. V případě, že by bod  $X_1$  byl totožný s jedním z pólů, můžeme k němu také sestrojít stereografický průmět z druhého pólu – jeho průmětem (obrazem) by pak byl bod  $S$ .

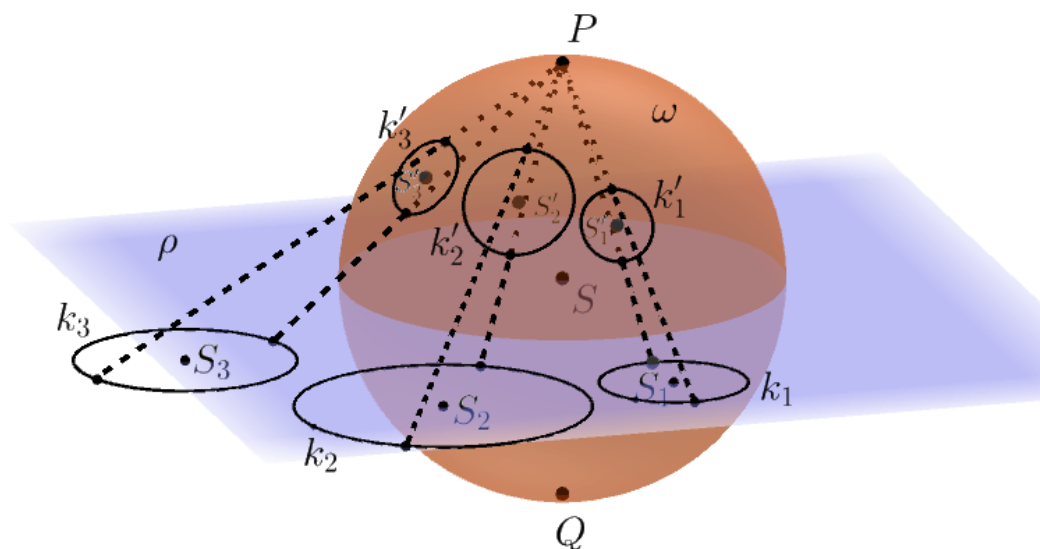
**Definice 11.** *Zobrazení, které každému bodu  $X_1 \neq P$  sféry  $\omega$  přiřazuje průsečík polopřímky  $PX_1$  s rovinou  $\rho$ , nazýváme stereografická projekce. Formulace je inspirována z [28].*

Jak je možná již zřejmé, sférickou inverzi lze popsat jako složení stereografické projekce a zobrazení k ní inverzního – bod  $X$  se na  $X_1$  zobrazí inverzním zobrazením ke stereografické projekci z bodu  $P$  a následně bod  $X'$  je stereografickým průmětem  $X_1$  z bodu  $Q$ . Mezi vlastnosti stereografické projekce patří např. to, že se jedná o konformní zobrazení, tzn. zachovává se velikost úhlů. Další důležitou vlastností je, že kružnice na sféře zůstávají kružnicemi i po zobrazení do roviny. K důkazu těchto vlastností se využívá středového osvětlení sféry, což je důsledek Quételetovy-Dandelinovy věty – důkaz lze nalézt např. zde [1, s. 86–88]. Tato projekce se využívá především v kartografii, vznik stereografické projekce je spjat s astronomickými potřebami zobrazování nebeské koule již v 2. stol. př.n.l. V naší práci se podíváme na využití při řešení Apolloniovy úlohy.

Zajímavostí je, že stereografickou projekci lze vztáhnout nejen na sféru, ale také např. rotační elipsoid, paraboloid či hyperboloid.

### 2.2.2 Apolloniova úloha (*kkk*) – stereografická projekce

Již jsme se zabývali řešením Apolloniovy úlohy pomocí cyklografie. Nyní pojďme využít stereografické projekce k jinému prostorovému řešení této úlohy. Mějme tedy tři kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  a  $k_3$  rovině ( $\rho$ ). Naším úkolem je nalézt takové kružnice, které se dotýkají všech třech daných kružnic. Řešení je převzato z [1, s. 88–89].



Obrázek 2.12 - Náznak stereografického řešení Apolloniovy úlohy (*kkk*)

*Řešení – stereografické.* Zvolme si sféru  $\omega$  tak, že její střed  $S$  náleží rovině  $\rho$  a spojnice jejich pólů  $PQ$  je k rovině  $\rho$  kolmá. Promítněme inverzním zobrazením ke stereografické projekci kružnice z roviny na sféru z bodu  $P$  (Obrázek 2.12). Jak už víme, kružnice se zobrazí opět na kružnice  $k_1', k_2', k_3'$ . Můžeme teď vyřešit Apolloniovu úlohu pro kružnice na sféře a stereografickým promítnutím řešení do roviny  $\rho$  získáme i řešení pro kružnice v rovině. Nyní lze vždy dvěma kružnicemi na sféře, např.  $k_1'$  a  $k_2'$ , proložit dvě kuželové plochy s vrcholy  $V_{12}, V_{12}'$ . Toto tvrzení lze nalézt i důkazem zde [38, s. 437–438]. V případě jedné kuželové plochy se vrchol nachází mezi kružnicemi (každá kružnice je v jiné polovině), v případě druhé plochy jsou obě kružnice ve stejné polovině<sup>4</sup>. Každá tečná rovina takovéto kuželové plochy protíná sféru v kružnici (tj. řezem sféry touto rovinou je kružnice), která se dotýká obou kružnic  $k_1', k_2'$ . Dále sestrojíme další dvě kuželové plochy proložené kružnicemi  $k_1', k_3'$  s vrcholy  $V_{13}, V_{13}'$ . Uvažujeme dvojici kuželových ploch, které mají společnou kružnici  $k_1$  (a rozdílnou kružnici druhou), například plochy  $V_{12}$  a  $V_{13}$ . K těmto dvěma plochám je možné sestavit dvě společné tečné roviny – ty lze nalézt tak, že vedeme přímku  $v$  vrcholy  $V_{12}$  a  $V_{13}$ , najdeme její průsečík s rovinou kružnice  $k_1$  a z něj k této kružnici vedeme tečny, které jsou dvě. Pak je vždy tato rovina dána přímkou  $v$  a jednou z tečen. Řezem sféry těmito dvěma rovinami jsou dvě kružnice, z nichž

<sup>4</sup> Polovinou kuželové plochy myslíme jednu ze dvou jejích částí, které jsou oddělené vrcholem kuželové plochy.



každá se dotýká všech tří kružnic  $k_1', k_2', k_3'$ . Tyto kružnice po stereografickém promítnutí do roviny  $\rho$  tvoří kružnice, které se dotýkají všech původních tří kružnic  $k_1, k_2$  a  $k_3$ . Ze sestrojených kuželových ploch lze sestroit celkem čtyři takové dvojice  $(V_{12}, V_{13}; V_{12}, V_{13}'; V_{12}', V_{13}; V_{12}', V_{13}')$ , takže tím získáme v obecném případě celkem osm kružnic jako řešení této Apolloniovy úlohy – některé z kružnic, která jsou řešením, ovšem nemusí být reálná.

### 2.2.3 Apolloniova úloha ( $kBB$ ) – stereografická projekce

Z Apolloniových úloh jsme zatím řešili pouze úlohu typu  $(kkk)$ . Jak bychom mohli obdobně stereografickým způsobem vyřešit zvláštní případ Apolloniovy úlohy ( $kBB$ ), kdy dvě z kružnic mají nulový poloměr, a tudíž se stávají body? Úloha se nám tímto zjednoduší. Kružnici  $(k)$  i oba body  $(X, Y)$  ležící v rovině  $\rho$  opět promítneme přes pól  $P$  na sféru  $\omega$ . Kružnici  $k'$  a body  $X', Y'$  na sféře můžeme proložit dvě kuželové plochy neboli přímo kužely – oba mají podstavu kružnici  $k'$  a vrcholy jsou body  $X', Y'$ . K těmto dvěma kuželům tedy dále sestrojíme dvě tečné plochy, které nám na sféře vytnou kružnice dotýkající se všech tří kruhových útvarů. Takto vzniklé kružnice stereografickou projekcí promítneme do roviny  $\rho$  a tím jsme našli hledané řešení, v tomto případě jím jsou dvě kružnice.

Ve svém řešení využil stereografie také Gaultier, jeho konstrukce je uvedena třeba v [1, s. 89–91]. Pomocí stereografické projekce lze řešit i další případy Apolloniovy úlohy a planimetrické řešení může být právě z tohoto stereometrického odvozeno.

## 2.3 Paraboloid

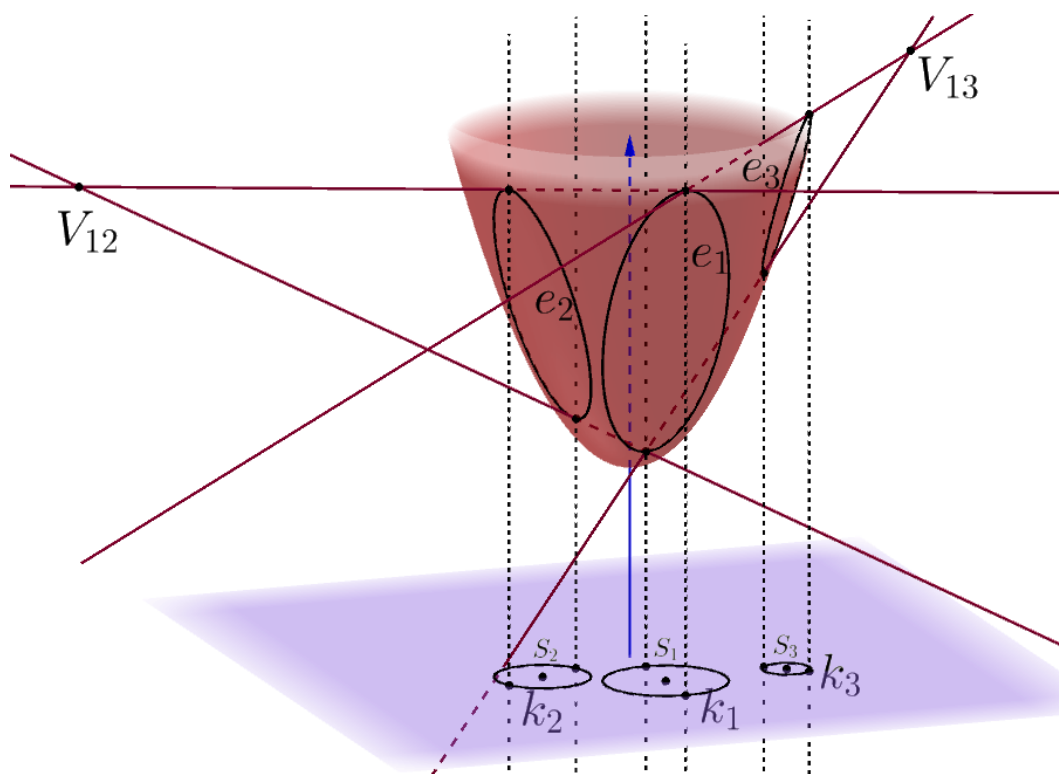
Na závěr práce uvedeme ještě využití další kvadriky při řešení rovinné úlohy, konkrétně využijeme rotační paraboloid k řešení již řešené Apolloniovy úlohy.

### 2.3.1 Apolloniova úloha ( $kkk$ ) – paraboloid

Již jsme se zabývali Apolloniovou úlohou ( $kkk$ ) řešenou v metodě cyklografické a ve stereografické projekci. Nyní si předvedme metodu třetí, která využívá plochy rotačního paraboloidu a jejíž princip se podobá řešení stereografickému.

Před samotným řešením zmiňme, že ortogonálním průmětem eliptických řezů paraboloidu rovinou různoběžnou s osou do zvolené roviny  $\rho$  kolmé k ose paraboloidu jsou kružnice [1, s. 35] a [38, s. 439]. Můžeme tudíž i každou kružnici v průmětně považovat za kolmý průmět elipsy ležící na zvolené parabolické ploše. Toto přiřazení kružnic v rovině  $\rho$  a elips na ploše rotačního paraboloidu je vzájemně jednoznačné, a díky němu lze řešit planimetrické úlohy v prostoru, zejména pokud se jedná o úlohy týkající se kružnic. Tak je tomu i v případě Apolloniovy úlohy (*kkk*), kdy hledáme kružnici dotýkající se tří daných kružnic. Řešení je čerpáno opět z [1, s. 35–36, 38–39].

*Řešení – rotační paraboloid.* V rovině  $\rho$  mějme tři kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  a  $k_3$  a zvolme plochu rotačního paraboloidu, jehož osa je kolmá k rovině  $\rho$ . Promítněme dále ortogonálně kružnice na parabolickou plochu – tím získáme elipsy  $e_1$ ,  $e_2$  a  $e_3$ . Podobně jako u kružnic na sféře můžeme i tady proložit každou dvojicí elips (např.  $e_1$ ,  $e_2$ ) na paraboloidu dvě kuželové plochy. Toto tvrzení je platné obecně pro dvě kuželosečky na kvadratické ploše a lze ho opět nalézt zde [38, s. 437–438]. Řezem parabolické plochy tečnou rovinou k ploše kuželové je elipsa, která se dotýká obou elips  $e_1$ ,  $e_2$ . Pak průmět této elipsy do roviny  $\rho$  je kružnice dotýkající se kružnic  $k_1$ ,  $k_2$ .



Obrázek 2.13 - Náznak řešení Apolloniovy úlohy (*kkk*) pomocí rotačního paraboloidu

Pro nalezení kružnice dotýkající se všech kružnic  $k_1, k_2$  a  $k_3$  tedy zvolme dvě kuželové plochy s jednou společnou elipsou, např. plochu procházející elipsami  $e_1, e_2$  (s vrcholem  $V_{12}$ ) a plochu procházející elipsami  $e_1, e_3$  (s vrcholem  $V_{13}$ ) – vždy s oběma elipsami v jedné polovině kuželové plochy (Obrázek 2.13). K těmto dvěma plochám existují dvě společné tečné roviny (díky společné elipse  $e_1$ ) – nalezneme je opět obdobně jako v kapitole 2.2.2 u stereografického řešení, pomocí spojnice vrcholů  $v$ , roviny elipsy  $e_1$  a jejích tečen. Řezy těmito rovinami na parabolické ploše jsou dvě elipsy, jejichž promítnutím do roviny  $\rho$  získáme dvě hledané kružnice.

Na přímce  $v$  leží kromě vrcholů  $V_{12}$  a  $V_{13}$  také vrchol kuželové plochy dané elipsami  $e_2$  a  $e_3$  ( $V_{23}$ ), což vyplývá z Mongeovy věty a její prostorové interpretace, řešení v kapitole 2.1.2. V případě využití kuželových ploch ( $V_{12}', V_{13}', V_{23}'$ ) s vrcholy mezi určujícími elipsami získáme (opět analogicky jako ve 2.2.2) celkem čtyři přímky procházející vrcholy, a tudíž osm elips vzniklých tečnými rovinami kuželových ploch a potažmo osm kružnic v rovině  $\rho$ , které jsou řešením Apolloniovy úlohy (opět některé z nich mohou být imaginární v závislosti na tom, zda jsou reálné či imaginární společné tečné roviny kuželových ploch).

Zabývali jsme se pouze původní Apolloniovou úlohou ( $kkk$ ), nicméně i tento způsob řešení je dobře využitelný pro ostatní Apolloniovy úlohy, kdy je některým z kruhových útvarů přímka či bod. Jakýkoliv bod roviny  $\rho$  lze ortogonálně promítnout na parabolickou plochu (zůstává bodem) a jakoukoliv přímku v rovině  $\rho$  lze promítnout na tuto plochu – jejím průmětem je parabola. Rovina, ve které leží přímka i parabola, je rovnoběžná s osou rotačního paraboloidu, jak již bylo zmíněno. Můžeme tedy pomocí plochy rotačního paraboloidu řešit i další případy úlohy Apolloniovy.

## Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit přehlednou publikaci o rovinných úlohách využívajících prostorovou představu ke svému řešení, jak již bylo zmíněno v úvodu. Snažila jsem se propojit planimetrické a stereometrické možnosti řešení na konkrétních příkladech, především ovšem představit prostorová řešení u úloh z planimetrie, což není zcela obvyklé.

V práci jsem shromáždila různé úlohy z planimetrie, které lze řešit prostorově. Představila jsem důkazy některých vět v rovině pomocí prostorové interpretace a uvedla jsem několik analogií mezi vztahy v rovině a v prostoru, což může pomoci k hlubšímu porozumění tématu. Práci jsem uspořádala do kapitol podle jednotlivých prostorových těles, aby bylo možné se v práci lépe orientovat. Také jsem vytvořila mnoho názorných obrázků, díky kterým může být čtenáři prostorová představa při řešení podstatně jasnější a ideu řešení může pochopit dříve, než si vůbec samotný postup řešení přečte. Přínos práce lze spatřit právě ve shromáždění rovinných úloh řešených netradičním způsobem, přičemž toto řešení mnohdy v jiných publikacích chybí.

Práce může být využita zejména studenty matematiky na vysokých školách – může jim sloužit k propojení souvislostí a rozšíření obzorů během studia, především v syntetické geometrii. Dále může práce sloužit pedagogům na středních školách jako inspirace ve výuce a díky ní mohou vnést oživení do hodin geometrie. Z didaktického pohledu může být práce užitečná také k výzkumu v oblasti prostorové představivosti a analogie. Věřím, že je částečně využitelná i pro ty studenty středních škol, které toto téma baví a budou se mu chtít věnovat např. v seminární práci.

Případné rozšíření práce by mohlo spočívat v přidání dalších úloh, důkazů či analogií mezi rovinou a prostorem, kterých je možné nalézt více než zde uvedených. Některé důkazy v této práci by mohly být provedeny více precizně místo odkazování na ně do jiných publikací. Dále by mohla být práce obohacena ještě důkladnějším zkoumáním vztahu roviny a prostoru nebo přidáním neřešených konstrukčních úloh, jejichž syntetické řešení by čtenář mohl hledat sám.

## Seznam obrázků

Obrázek 1.1 - Příklad osové afinity v běžném životě .....	11
Obrázek 1.2 - Promítání osové afinity v prostoru do roviny .....	12
Obrázek 1.3 - Osová afinita v rovině skládáním dvou afinit mezi rovinami .....	13
Obrázek 1.4 - Daný čtyřúhelník pro důkaz Pohlkeovy věty .....	15
Obrázek 1.5 - Důkaz Pohlkeovy věty .....	15
Obrázek 1.6 - Řešení úlohy o kruhové inverzi.....	18
Obrázek 1.7 - Důkaz pomocí rovnoběžnostěnu 1 .....	19
Obrázek 1.8 - Důkaz pomocí rovnoběžnostěnu 2 .....	19
Obrázek 1.9 - Lichoběžník řezem krychle .....	20
Obrázek 1.10 - Náznak možného řešení úlohy o lichoběžníku .....	21
Obrázek 1.11 - Příklad středové kolineace v běžném životě.....	23
Obrázek 1.12 - Promítání středové kolineace v prostoru do roviny .....	24
Obrázek 1.13 - Desarguesova věta .....	25
Obrázek 1.14 - Desarguesova věta, podobnost.....	26
Obrázek 1.15 - Desarguesova věta, osová afinita .....	27
Obrázek 1.16 - Středové promítání, středová kolineace .....	30
Obrázek 1.17 - Středové promítání, stejnolehlost .....	31
Obrázek 1.18 - Rovnoběžné promítání, osová afinita .....	32
Obrázek 1.19 - Rovnoběžné promítání, posunutí .....	33
Obrázek 1.20 - Výšky v trojúhelníku .....	34
Obrázek 1.21 - Rozdělení krychle na tři shodné jehlany.....	37
Obrázek 1.22 - Faulhaberova věta.....	39
Obrázek 1.23 - Konstrukce harmonické čtveřice .....	41
Obrázek 1.24 - Prostorová konstrukce pólu přímky vzhledem k trojúhelníku .....	42
Obrázek 1.25 - Rovinná konstrukce pólu přímky vzhledem k trojúhelníku.....	44
Obrázek 2.1 - Řezy rotační kuželové plochy nevrcholovou rovinou .....	46
Obrázek 2.2 - Nárys řezů rotační kuželové plochy .....	47
Obrázek 2.3 - Důkaz eliptického řezu .....	49
Obrázek 2.4 - Důkaz parabolického řezu .....	51
Obrázek 2.5 - Důkaz hyperbolického řezu .....	52
Obrázek 2.6 - Nárys řezů rotační válcové plochy.....	54

Obrázek 2.7 - Mongeova věta .....	55
Obrázek 2.8 - Důkaz vlastností v tětívovém čtyřúhelníku.....	57
Obrázek 2.9 - Cyklografické řešení Apolloniovy úlohy (kkk) .....	60
Obrázek 2.10 - Kruhová inverze.....	61
Obrázek 2.11 - Sférická inverze .....	62
Obrázek 2.12 - Názna stereografického řešení Apolloniovy úlohy (kkk) .....	64
Obrázek 2.13 - Názna řešení Apolloniovy úlohy (kkk) pomocí rotačního paraboloidu .....	66

## Literatura

- [1] HOLUBÁŘ, Josef. *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů*. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1948. Cesta k vědě (Jednota československých matematiků a fyziků).
- [2] EFFENBERGER, Věra. *Využití internetu při výuce kuželoseček na střední škole*. Praha, 2011. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce Hromadová, Jana. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/20.500.11956/49433>
- [3] BOČEK, Leo a ZHOUF, Jaroslav. *Planimetrie*, 2. rozš. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2.
- [4] PECH, Pavel. *Kuželosečky*. České Budějovice: Jihočeská Univerzita, 2004. ISBN 80-7040-755-7. Dostupné z: <https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/Kuzelosecky.pdf>
- [5] ZAMBOJ, Michal. *Synthetic projective geometry*. Praha, 2018. Disertační práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Matematický ústav UK. Vedoucí práce Krump, Lukáš. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/20.500.11956/104445>
- [6] ZAMBOJ, Michal. Syntetická geometrie I. – *Kolineace* [online]. [cit. 2020-07-12]. Dostupné z: [http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/documents/sg1/SGI\\_2\\_Kolineace\\_handout.pdf](http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/documents/sg1/SGI_2_Kolineace_handout.pdf)
- [7] ZAMBOJ, Michal. Syntetická geometrie I. – *Kružnice* [online]. [cit. 2020-04-03]. Dostupné z: [http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/documents/sg1/SGI\\_6\\_Kruznice\\_handout.pdf](http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/documents/sg1/SGI_6_Kruznice_handout.pdf)
- [8] PLICHTOVÁ, Petra. *Webová aplikace pro výuku osové afinity a středové kolineace*. Praha, 2013. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce Hromadová, Jana. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/20.500.11956/61432>

- [9] HROMADOVÁ, Jana. Deskriptivní geometrie I. – *Afinita a kolineace* [online]. [cit. 2020-04-23]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jole/deskriptiva/DG1-Afinitaakolineace.html>
- [10] VESELÁ, Klára Alexandra. *Antické definice kuželoseček*. Praha, 2017. Bakalářská práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce Halas, Zdeněk. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/20.500.11956/92749>
- [11] KUŘINA, František. *Deset geometrických transformací*. Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-231-7.
- [12] ZAMBOJ, Michal. Syntetická geometrie II. – *cvičení: Kruhová inverze a Apolloniovy úlohy* [online]. [cit. 2020-06-23]. Dostupné z: [http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/documents/sg2/SGI\\_7\\_Kruhova\\_inverze\\_cv.pdf](http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/documents/sg2/SGI_7_Kruhova_inverze_cv.pdf)
- [13] EMCH, Arnold. Proof of Pohlke's Theorem and Its Generalizations by Affinity. *American Journal of Mathematics*. [online]. The Johns Hopkins University Press, 1918, 40 (4), s. 366–374 [cit. 2020-06-20]. Dostupné z: <http://www.jstor.com/stable/2370435>
- [14] JIROTKOVÁ, Darina. Ze života lichoběžníku. In: *Dva dny s didaktikou matematiky 2017*. Sborník příspěvků. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Společnost učitelů matematiky JČMF, 2017, s. 111–116. ISBN 978-80-7290-965-0. Dostupné z: [https://suma.jcmf.cz/\\_files/200000117-086c50966f/Dva%20dny%20s%20DM2017.pdf](https://suma.jcmf.cz/_files/200000117-086c50966f/Dva%20dny%20s%20DM2017.pdf)
- [15] ŠVRČEK, Jaroslav. Prostorové analogie dvou planimetrických vět. *Matematika – fyzika – informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách* [online]. Praha: Prometheus, 2014, 23 (2), s. 81–85 [cit. 2020-06-16]. ISSN 1805-7705. Dostupné z: [http://mfi.upol.cz/files/23/2302/mfi\\_2302\\_081\\_085.pdf](http://mfi.upol.cz/files/23/2302/mfi_2302_081_085.pdf)



- [16] LÉVY-LEBLOND, Jean-Marc. N-Dimensional Variations on Themes of Pythagoras, Euclid, and Archimedes. *The Mathematical Intelligencer*. [online]. Nice: 2004, 26 (3), s. 43–53 [cit 2020-06-17]. ISSN 1866-7414. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/BF02986751>
- [17] LÉVY-LEBLOND, Jean-Marc. Letters to the editor. The Pythagorean theorem extended-and deflated. *The Mathematical Intelligencer*. [online]. Nice: 2005, 27 (2), s. 5–6 [cit 2020-06-17]. ISSN 1866-7414. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/BF02985787>
- [18] ROWE, David E. Euclidean Geometry and Physical Space. *The Mathematical Intelligencer*. [online]. Nice: 2006, 28 (2), s. 51–59 [cit 2020-06-17]. ISSN 1866-7414. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/BF02987157>
- [19] GUSEVA, Naděžda, IVAKINA, Anastasia a CHODOROVÁ, Marie. Kruhová inverze a její aplikace. *Matematika – fyzika – informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách* [online]. Praha: Prometheus, 2016, 25 (2), s. 84–88 [cit. 2020-06-27]. ISSN 1805-7705. Dostupné z: [http://mfi.upol.cz/files/25/2502/mfi\\_2502\\_084\\_089.pdf](http://mfi.upol.cz/files/25/2502/mfi_2502_084_089.pdf)
- [20] KUŘINA, František. *Matematika a řešení úloh*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2011. ISBN 978-80-7394-307-3.
- [21] SCHWARZ, Hermann. Elementarer Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der Axonometrie. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1864, s. 309–314. ISSN 1435-5345. Dostupné z: <https://doi.org/10.1515/crll.1864.63.309>
- [22] SKLENÁRIKOVÁ, Zita a PÉMOVÁ, Marta. The Pohlke-Schwarz Theorem and its Relevancy in the Didactics of Mathematics. „*Quaderni di Ricerca in Didattica*“ of G.R.I.M. [online]. Palermo: Department of Mathematics, University of Palermo, 2007, 17, s. 145–157 [cit. 2020-06-22]. ISSN 1592-4424. Dostupné z: [http://math.unipa.it/~grim/quad17\\_sklenarikova-pemova\\_07.pdf](http://math.unipa.it/~grim/quad17_sklenarikova-pemova_07.pdf)

- [23] SEKANINA, Milan, BOČEK, Leo, KOČANDRLE, Milan a ŠEDIVÝ, Jaroslav. *Geometrie II*. [online] Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. [cit 2020-06-28] Dostupné z:  
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Geometrie/G2.pdf>
- [24] BOGOMOLNY, Alexander. Inversion in the Incircle. *Cut The Knot*. [online]. [cit. 2020-06-25]. Dostupné z: <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/ThreeEqualCircles.shtml#Explanation>
- [25] BOGOMOLNY, Alexander. Three equal circles. *Cut The Knot*. [online]. [cit. 2020-06-27]. Dostupné z:  
<https://www.cut-the-knot.org/proofs/3circles.shtml>
- [26] HOLUBÁŘ, Josef. *O metodách rovinných konstrukcí: (úloha Apolloniova a úlohy příbuzné)*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1940. Cesta k vědě (Jednota českých matematiků a fyziků).
- [27] PANÁČKOVÁ, Jitka. Apolloniova úloha v cyklografické metodě, *Učitel matematiky*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2019, 27 (4), s. 212–229. ISSN 1210-9037.
- [28] *Stereografická projekce* [online]. [cit. 2020-07-05]. Dostupné z:  
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~tuma/Linalggeom11a/LinAG30.pdf>
- [29] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965. Řada teoretické literatury.
- [30] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie II*, 2. rozš. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1979. Řada teoretické literatury.
- [31] PISKA, Rudolf a MEDEK, Václav. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1966. Řada teoretické literatury.
- [32] SEIFERT, Ladislav. *Cyklografie*. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1949. Kruh (Jednota československých matematiků a fyziků).

- [33] ZAMBOJ, Michal. *Visualizing Objects of Four-Dimensional Space: From Flatland to the Hopf Fibration*. [online]. Bratislava, 2020 [cit. 2020-07-20]. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/publication/340792602\\_Visualizing\\_Objects\\_of\\_Four-Dimensional\\_Space\\_From\\_Flatland\\_to\\_the\\_Hopf\\_Fibration\\_preprint](https://www.researchgate.net/publication/340792602_Visualizing_Objects_of_Four-Dimensional_Space_From_Flatland_to_the_Hopf_Fibration_preprint)
- [34] HAŠEK, Roman a PECH, Pavel. *Kvadratické plochy a jejich prezentace v programu Maple*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2010. ISBN 978-80-7394-271-7.
- [35] TRKOVSKÁ, Dana. Historický přehled geometrických transformací In: Dana Trkowská. *Historický vývoj geometrických transformací*. [online] Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2015, s. 7–30 [cit. 2020-07-22]. Dostupné z: <http://dml.cz/dmlcz/403408>
- [36] BOGOMOLNY, Alexander. Monge's Theorem of three circles and common tangents. *Cut The Knot*. [online]. [cit. 2020-07-22]. Dostupné z: <https://www.cut-the-knot.org/proofs/threecircles.shtml#solution>
- [37] KADEŘÁVEK, František, KLÍMA, Josef a KOUNOVSKÝ, Josef. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1929.
- [38] KADEŘÁVEK, František, KLÍMA, Josef a KOUNOVSKÝ, Josef. *Deskriptivní geometrie II*. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1932.