Univerzita Karlova v Praze
Filozofická fakulta
Katedra Logiky
obor Logika

Vzájemná srovnání axiomatických systémů modálních logik

Práci vypracoval:
David Pelikán

Vedoucí diplomové práce:
Doc. PhDr. Petr Jirků, CSc.

2007

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a použil výhradně citovaných pramenů.

....

Univerzita Karlova v Praze
Filozofická fakulta, Katedra logiky

Zadání diplomové práce

Davida Pelikána

Datum narození: **23. 7. 1980**

logika

Vedoucí katedry Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu Filozofické fakulty Univerzity Karlovy ze dne 24. 9. roku 1999 určuje tuto diplomovou práci:

Téma: **Vzájemná srovnání axiomatických systémů modálních logik**

Zásady pro vypracování:

Studujte rozmanité systémy modálních logik třídy S s důrazem na systémy S4 a S5 z hlediska axiomatického.
Prostudujte web stránky Johna Hallecka:
http://www.cc.utah.edu/~nahaj/logic/structures/index.html
a porovnejte tyto systémy s dalšími druhy modalit. Charakterizujte jejich nejvýznamnější logické vlastnosti.

Seznam doporučené odborné literatury:

1. *Alexander Chargov and Michael Zakharyaschev*: **Modal Logic**, Oxford, Clarendon Press, 1997.
2. *D.M. Gabbay and F.Guenthner (eds.)*: **Handbook of Logic. 2nd Edition**. Kluwer Academic Pbublishers 2001-2004.

Vedoucí diplomové práce (Jméno a pokud je mimo katedru logiky i adresa):
Doc. PhDr. Petr Jirků, CSc,

Datum zadání diplomové práce: **červen 2005**
Termín odevzdání diplomové práce: **leden 2006**

Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Jaroslav Peregrin, CSc, PP
V Praze, dne 27. června 2005

Sit: Zadání DP.doc

Obsah

Úvod

Tato práce si klade za úkol srovnávat modální logiky. Co jsou to však modální logiky, o tom nemá laická veřejnost příliš dobrou představu. Podívejme se proto, co o pojmu modalita říká slovník cizích slov.[1]

modalita ž. 1. (zprav. mn.) možný způsob, jak se něco provádí, n. okolnost, za níž se (podle úmluvy) něco provádí 2. stupeň jistoty určitého soudu, jeho charakteristika z hlediska „síly“ tvrzení, např. soud apodiktický ↑ , problematický atp. (soud je myšlenka, která je pravdivá, nebo nepravdivá) 3. *jaz.* modálnost (v. též modální)

modální příd. k modus; způsobový; *jaz.* m. slovesa (způsobová) = obměňující význam slovesa po stránce způsobové (možnosti, vůle, nutnosti apod.): chtít, mít (za povinnost), moci, musit, smět, např. nemocný chce jíst, ale smí jen pít; m. částice = vyjadřující stanovisko mluvčího k obsahu věty, např. možná, prý atp.; m. věta = způsobová, tj. vedlejší věta příslovečná, adverbiální vyjadřující příslovečné určení způsobu, např.: Dělal všechno tak, jak mu to lékař doporučil.

modálnost ž. *jaz.* uplatňování postoje mluvčího ve výpovědi, tj. že ji považuje za skutečnou, chtěnou atp.

Z hlediska logiky se bude modalita omezovat většinou na slůvka „nutnost“ a „možnost“ (formálně značíme $\Box$ a $\Diamond$). Někdy také používáme modalitu pro jiné výrazy, například „vím, že“, „věřím“, „je přikázáno“, „je dokazatelné“ a další. Podle toho, v jakém významu modalitu používáme, mluvíme například o „Logice znalostí“, „Deontické logice“, „Logice dokazatelnosti“ a dalších. Všechny tyto systémy pak souhrnně nazýváme „Modální logiky“.

Je zřejmé, že modalita se v každém z těchto systémů chová jinak. Například to, co je „dokazatelné“, je zcela evidentně i „pravdivé“, ale ne vše, čemu „věřím“, musí být „pravda“. Pro každý z těchto systémů je proto nutné formulovat jiný soubor pravidel (axiomů). Jak ukážeme později, často stačí pozměnit jediný axiom a vlastnosti modality se výrazně změní. Přesto (nebo právě proto) existuje soubor modálních axiomů, které formalizují modální logiky. Pro účely té které modální logiky jen musíme zvolit, které axiomy přijmeme, a které nebudeme používat, aby výsledná formalizace popisovala námi zvolenou modalitu.

[1] Doc. dr. Lubomír Klimeš, CSc: Slovník cizích slov 1983

Z hlediska této práce je však zajímavější srovnání jednotlivých formálních systémů než jejich vztah k přirozenému jazyku. Z tohoto důvodu se v následujícím textu nebudu o tomto vztahu zmiňovat příliš podrobně.

Ještě než přistoupím k vlastní práci, pokusím se formulovat přibližnou představu toho, co by tato práce měla obsahovat. Nejdříve bych se chtěl krátce věnovat historii modální logiky. Poté se pokusím nadefinovat formální aparát, který budu potřebovat pro práci s modálními logikami. To znamená, že nadefinuji Kripkovské rámce pro modální logiky a ukážu některé axiomy modálních logik. Na závěr bych se již měl zabývat jednotlivými modálními teoriemi a jejich vzájemným vztahem. V této části bych se rád zaměřil na modální teorie vzhledem k jejich síle, ale chtěl bych také ukázal příklady formulí dokazatelných pouze v některých systémech.

V dalším textu se již nebudu vracet k podrobnějšímu vysvětlování pojmu modální logika, stejně tak jako budu předpokládat, že je čtenář seznámen s tím, co je to logika a orientuje se ve formalizovaném zápisu formulí. Případně, že čtenář chápe formální zápis axiomatických systémů různých teorií.

1 Historie modální logiky

1.1 Antická modální logika

Základy modální logiky byly položeny už v antických dobách. Problematiku modální logiky intenzivně studoval **Diodóros Kronos** (* ? – † 307 před n.l.), který definoval následující definice modalit:

> Možné je to, co je pravdivé nebo bude pravdivé.
>
> Nemožné je to, co jsouc nepravdivé nebude pravdivé.
>
> Nutné je to, co jsouc pravdivé, nebude nepravdivé.
>
> Nikoli nutné je to, co buď je nebo bude nepravdivé.

Z toho je vidět, že Diodóros vnímá modality pouze v souvislosti s časem. A vše, co již nikdy nenastane, nepovažuje za možné. I přes tyto nedostatky položily Diodórovy formulace základ pro budoucí rozvoj modální logiky. Pokud se tyto definice pokusíme vyjádřit formálně, dostaneme následující:

$$\begin{array}{rcl} Dp & =_{df} & p(t_0) \vee (\exists t)p(t) \\ Ip & =_{df} & \neg p(t_0) \wedge \neg(\exists t)p(t) \\ Np & =_{df} & p(t_0) \wedge \neg(\exists t)\neg p(t) \\ \neg Np & =_{df} & \neg p(t_0) \vee (\exists t)\neg p(t) \end{array}$$

přičemž t_0 označuje daný časový okamžik a t libovolný *budoucí* časový okamžik. D nazýváme funktor možnosti, I funktor nemožnosti a N funktor nutnosti.

Jiný způsob definice modality zvolil **Filón** (kolem roku 300 před n. l.). Ve svých definicích se opírá o termín „vlastní povaha výroku“. Tento termín ale není blíže určen:

> Možné je to, co je vlastní povahou výroku schopné pravdivosti.
>
> Nemožné je to, co není svou vlastní povahou schopné pravdivosti.
>
> Nutné je to, co jsouc pravdivé není samo o sobě schopné nepravdivosti.
>
> Nikoli nutné je to, co samo o sobě je schopné nepravdivosti.

[1] Při psaní této kapitoly bylo čerpáno z: Berka, K.: Stručné dějiny logiky

Je evidentní, že lze Filónův systém intuitivně přijmout, ale bez bližšího definování pojmu „vlastní povaha výroku“ lze jen těžko dále rozvíjet.

Odlišný pohled na modální logiku měl **Chrysippos** (asi * 282 – † 206 před n.l.), který uznával následující definice modalit:

> Možné je to, co lze pokládat za pravdivé, nebrání-li tomu žádné vnější okolnosti, aby se tak pokládalo.
>
> Nemožné je to, co nelze pokládat za pravdivé.
>
> Nutné je to, co je pravdivé a o čem nelze připustit, že je nepravdivé anebo to, co sice připouští nepravdivost, ale vnější okolnosti brání tomu, aby se to považovalo za nepravdivé.
>
> Nikoli nutné je to, co je pravdivé, ale může být i nepravdivé, když tomu nebrání vnější okolnosti.

V Chrysipposově pojetí se však nejedná o klasickou modální logiku, jak ji rozumíme dnes. Pro Chrysippa je možnost výroku dána jedině tím, že nám nejsou známé všechny vnější okolnosti, které vedou k jeho uskutečnění nebo neuskutečnění. Jev, pro který jsme z neznalosti vnějších okolností vyslovili výrok možnosti, je podle Chrysippa reálně buď nutný nebo nemožný. Důsledkem tohoto stanoviska je popření fakticity výroků možnosti, které jsou připuštěny pouze v rovině epistemické.

Diodórův systém přejal také **Aristotelés** (* 384 – † 322 před n.l.), který poukázal na platnost následujících ekvivalencí mezi modálními výroky:

$$Dp \leftrightarrow \neg N\neg p \leftrightarrow \neg Ip$$

$$\neg Dp \leftrightarrow N\neg p \leftrightarrow Ip$$

$$\neg D\neg p \leftrightarrow Np \leftrightarrow I\neg p$$

$$D\neg p \leftrightarrow \neg Np \leftrightarrow \neg I\neg p$$

Pokud tyto výroky přepíšeme v jazyce současné modální logiky, dostaneme následující známé vztahy:

$$\begin{array}{rcl} \Diamond\varphi & \Leftrightarrow & \neg\Box\neg\varphi \\ \Box\varphi & \Leftrightarrow & \neg\Diamond\neg\varphi \end{array}$$

Dalším rozvinutím Diodórova systému Aristotelés vybudoval systém modální logiky S1. V tomto systému Aristotelés formuloval například pravidlo

$$Np \vdash Dp$$

a naznačil pravidla

$$\neg Dp \vdash \neg p$$

$$Np \vdash p$$

Ve formálním jazyce dnešní logiky:

$$\begin{array}{rcl}\Box\varphi & \vdash & \Diamond\varphi \\ \neg\Diamond\varphi & \vdash & \neg\varphi \\ \Box\varphi & \vdash & \varphi\end{array}$$

Diodórovy ekvivalence ještě rozšířil o modální výroky nahodilosti – o C-výroky, které jsou obsahově totožné s výroky možnosti.

Dále Aristotelés formuloval vlastní modální systém S2, pro který definoval modalitu oboustranné možnosti. Tuto nahodilost vyjádřil následující definicí:

> Nahodilým rozumím to, co není nutné a o čem lze předpokládat, že existuje, aniž by v tom byla nemožnost.

Vyjádříme li tuto definici formálně, dostaneme

$$Ep \quad =_{df} \quad \neg Np \wedge \neg Ip$$

Skutečnost, že E-výrok je složeným výrazem a tudíž není ekvivalentní s žádným modálním výrazem systému S1, vedla spolu se snadnou jazykovou záměnou mezi E-funktorem a C-funktorem ke sporným důsledkům v modální sylogistice, kterou se Aristotelés snažil vybudovat. Další problém, který musel Aristotelés v systému S2 řešit, byla otázka, na co se vztahuje modální funktor. Takto zatížený modální systém S2 se jen těžko vyrovnával s mnoha problémy.

Aristotelovým systémem S1 se zabýval i římský filozof **Boethius** (* 480 – † 525), který jej komentuje a dále rozpracovává. Boethius pojímá modální výroky jako jednoargumentové výrokové funkce s funktory D, C, N a I s nemodálním argumentem. Boethius explicitně definuje základní pravidla postihující vztahy mezi modalitami. A to jak pravidla zmíněná Aristotelem tak i jejich následující varianty:

$$\neg Dp \vdash \neg Np$$

$$p \vdash Dp$$

$$\neg p \vdash \neg Np$$

Navíc formuloval další na ně navazující pravidla:

$$Np \vdash (p \wedge Dp)$$

$$(\neg Dp \vee \neg p) \vdash \neg Np$$

Boethiův výklad modality se stal podkladem pro rozvoj a rozpracování doktríny o modalitě ve středověké logice.

1.2 Středověká modální logika

Z hlediska vývoje logiky v období středověku byla nejvyspělejší *teorie důsledků*. Teorie důsledků zahrnuje analýzu složených výroků a na ně navazující výstavbu středověké logiky. Z našeho hlediska je důležitější, že obsahuje i systém striktní implikace a modální extenzi výrokové logiky.

Středověcí logikové rozlišovali v teorii důsledků mezi *důsledkem platným „nyní“* a *důsledkem platným prostě*. V následujících odstavcích si ukážeme rozdíly v systémech vybudovaných na základě těchto důsledků.

Systém důsledkového vztahu „nyní“ je vybudován pomocí *materiální implikace*. V dnešním formálním jazyce jej lze vyjádřit takto:

A. základní pojmy:

výrokové proměnné	–	$p, q, r, \ldots$
logické konstanty	–	negace, konjunkce $\neg\ \wedge$

B. definice:

$p \vee q \ =_{df}\ \neg(\neg p \wedge \neg q)$ (De Morganův zákon)

$p \to q \ =_{df}\ \neg(p \wedge \neg q)$ (materiální implikace)

$p \leftrightarrow q \ =_{df}\ (p \to q) \wedge (q \to p)$

V tomto systému byly formulovány i paradoxy materiální implikace, tedy následující formule:

$$\neg p \vdash p \to q$$

$$p \vdash q \to p$$

Paradox implikace byl vyjádřen i následující formulí:

$$p \wedge \neg p \vdash q$$

Oproti tomu systém důsledkového vztahu platného prostě je vybudován na základě striktní implikace. Tento systém odpovídá pozdějšímu systému S3 tak, jak jej vybudoval *Lewis*. Lze jej rekonstruovat následující definicí:

A. základní pojmy:

výrokové proměnné	–	$p, q, r, \ldots$
logické konstanty	–	negace, konjunkce, možnost, konzistence $\neg\ \wedge\ \Diamond\ \circ$

B. definice:

$p \vee q \ =_{df}\ \neg(\neg p \wedge \neg q)$

$p \xrightarrow{S} q \ =_{df}\ \neg\Diamond(p \wedge \neg q)$ (striktní implikace)

$p \xleftrightarrow{S} q \ =_{df}\ (p \xrightarrow{S} q) \wedge (q \xrightarrow{S} p)$ (striktní ekvivalence)

Je jasně vidět, že tento systém se od předchozího liší pouze v tom, že používá striktní implikaci namísto materiální. Tím se lze vyhnout paradoxům implikace. Tento systém byl již ve středověku dobře rozpracován a byla v něm formulována například pravidla: $p \wedge q \vdash p$; $p \vdash p \vee q$; $\vdash p \vee \neg p$; $p \xrightarrow{S} q, p \vdash q$ a mnohá další.

Vedle systému vybudovaného na základě striktní implikace se ve středověku rozvíjela i modální logika. Velmi detailní analýzy se ale často odlišovaly. Zaprvé byla na základě Aristotelova systému S2 rozpracována modální sylogistika. Pod Boethiovým vlivem bylo přijato pojetí modality podle systému S1. Dále byly modální funktory rozšířeny o funktory pravdivosti a nepravdivosti a o celou řadu dalších funktorů, jako například vím, je věděno, míním, je míněno, chci, je chtěno, věřím, je věřeno, zaznamenávam, ...

Středověká *modální pojmová logika* obsahuje kromě složitého systému modální sylogistiky i soubor vzájemných vztahů mezi modálními výroky podle logického čtverce. Modální sylogistiku rozpracoval formálně především **W. Occam** (* 1300 – † 1340 nebo 1350). Tato modální sylogistika však zahrnuje 1368 teoreticky platných modů.

Naproti tomu *modální výroková logika* je rozvíjena jako modální extenze nauky o důsledcích. Především o důsledcích platných prostě. V této logice bylo již známo mnoho důsledků, jako například:

$$p \xrightarrow{S} q, \Box p \vdash \Box q$$

$$\neg \Diamond p \vdash \neg \Diamond (p \wedge q)$$

$$\Box (p \wedge q) \vdash \Box p \wedge \Box q$$

Kromě těchto a mnoha dalších důsledků byly rozvedeny i důsledky postihující vztahy mezi modálními funktory, z nichž některé byly známé již v antice, například:

$$\neg \Diamond p \vdash \neg p$$

Navíc byly zavedeny ekvivalence umožňující zjednodušování modálních určení:

$$\Diamond p \vdash \Diamond(\Diamond p) \qquad \Diamond(\Diamond p) \vdash \Diamond p$$

$$\Box p \vdash \Box(\Box p) \qquad \Box(\Box p) \vdash \Box p$$

Byly známé i modalizované verze obou paradoxů implikace:

$$\neg \Diamond p \vdash p \xrightarrow{S} q$$

$$\Box q \vdash p \xrightarrow{S} q$$

Vzhledem ke složitosti středověkých systémů logiky se nelze divit, že modální logika byla spíše na okraji zájmu a většího rozvoje se dočkala až v moderních systémech.

1.3 Moderní modální logika

Základ pro možnost rozvoje současné modální logiky lze hledat v rozvoji moderní formální logiky. První významný krok pro formalizaci logiky učinil **G. Boole** (* 1815 – † 1864), který opustil sylogistku a začal logiku vnímat jako algebraický systém. Poněkud odlišný přístup než Boole, který se pokoušel matematizovat logiku, zvolil **G. Frege** (* 1848 – † 1925) nebo **B. Russell** (* 1872 – † 1970). Frege se pokusil vytvořit formální jazyk, který by měl umožnit přesné vyjadřování logických vztahů mezi pojmy a výroky. Mimo toho podal první axiomatický systém klasické logiky. V současné symbolice by tento systém vypadal takto:

1. $p \to (q \to p)$
2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
3. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$
4. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
5. $\neg\neg p \to p$
6. $p \to \neg\neg p$
7. $(\forall x)Fx \to Fy$

Frege také zastával názor, že aritmetika je pouze rozpracovanou logikou a zdůvodnění aritmetických zákonů je dáno jejich redukcí na ryze logické zákony. Toto pojetí se nazývá *logicismus*. Na Fregovy práce dále navázal Russell, který se pokusil odstranit některé paradoxy Fregova systému. Z hlediska vývoje logiky je také důležité, že používal jednodušší symboliku než Frege, čímž umožnil položení pevných základů k moderní formální logice.

V takto položené formální logice upoutal pozornost na modální logiku **C. I. Lewis** (* 1883 – † 1964), který se snažil eliminovat „paradoxní“ vlastnosti (materiální) implikace. Lewis vybudoval svůj systém s pomocí pojmů konjunkce, negace a možnosti ($\Diamond p$). Dále definoval striktní implikaci následujícím způsobem:

$$p \prec q \;=_{df}\; \neg\Diamond(p \wedge \neg q)$$

Svůj systém striktní implikace měl založen na sedmi axiomech:

I	$p \wedge q \prec q \wedge p$
II	$p \wedge q \prec p$
III	$p \prec p \wedge p$
IV	$(p \wedge q) \wedge r \prec p \wedge (q \wedge r)$
V	$p \prec \neg\neg p$
VI	$(p \prec q) \wedge (q \wedge r) \prec (p \prec r)$
VII	$p \wedge (p \prec q) \prec q$

a čtyřech pravidlech: *pravidlo nahrazování ekvivalentních výroků*, *pravidlo substituce*, *pravidlo modus ponens (pro striktní implikaci)*, *pravidlo adjunkce* (pravidlo, podle něhož na základě pravdivosti dvou výroků platí i jejich konjunkce).

Pomocí striktní implikace zavádí Lewis i modální funktory nutnosti a nemožnosti. Také rozpracoval strukturu modálních systémů S1–S5, jež jsou založené na axiomatizaci systému striktní implikace.

Systém S1 zahrnuje axiomy I–IV, axiom VI systému striktní implikace a axiom $p \prec \Diamond p$
axiomy S2 jsou axiomy S1 a $\Diamond(p \wedge q) \prec \Diamond p$
axiomy S3 jsou aximoy S2 a $(p \prec q) \prec (\Diamond p \prec \Diamond q)$
axiomy S4 jsou axiomy S3 a $\Diamond\Diamond p \prec \Diamond p$
axiomy S5 jsou axiomy S4 a $\Diamond p \prec \Box\Diamond p$

Jiný aximatický systém vytvořil **K. Gödel** (* 1906 – † 1978). Gödelův systém představuje modální rozšíření klasického výrokového kalkulu o pojem *dokazatelnosti* (Prp), který můžeme interpretovat ve smyslu nutnosti, dále o definici možnosti $\Diamond p =_{df} \neg\Box\neg p$, *Závěrové pravidlo* (je-li A odvoditelnou formulí daného systému, pak také $\Box A$ je odvoditelnou formulí) a o čtyři axiomy:

I $\Box p \to p$
II $\Box p \to (\Box(p \to q) \to \Box q)$
III $\Box p \to \Box\Box p$
IV $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$

Podobně vytvořil **G. H. Wright** (* 1916 – † 2003) na základě výrokového kalkulu tři modální systémy. Jako primitivní pojmy používá negaci, implikaci a funktor nutnosti. K pravidlům modus ponens a substituce přidává ještě pravidlo vztahující se na funktor nutnosti (z platnosti formule A plyne platnost formule $\Box A$). První modální systém pak vzniká, přidají-li se ke klasickému výrokovému kalkulu axiomy

Ax. 1 $\Box p \to p$
Ax. 2 $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

Druhý systém obsahuje kromě axiomů 1 a 2 i axiom

Ax. 3 $\Box p \to \Box\Box p$

Třetí Wrightův axiomatický systém obsahuje axiomy 1 a 2 a místo axiomu 3 axiom

Ax. 4 $\Diamond\Box p \to \Box p$

Všechny tyto systémy se snaží postihnout logické vlastnosti tzv. *alethických* modalit, k nimž se řadí nutnost, možnost, nahodilost a nemožnost. Od poloviny 20. století se však rozšiřuje zájem o modální logiky, které překračují oblast alethických modalit. Mluvíme pak o *epistemických* modalitách (vím, že ..., věřím, že ..., jsem přesvědčen, že ...), *deontických* modalitách (je dovoleno, že ..., je zakázáno, že ...), o *axiologických* modalitách (je dobré, že ..., je špatné, že ...) a o *existenčních* modalitách (je logicky pravdivé, že ..., je nesplnitelné, že ...).

2 Kripkovské modely

Pro práci s modálními logikami je velmi důležitým nástrojem Kripkovská sémantika, proto dříve než přistoupím k axiomatice modálních logik, věnuji jednu kapitolu Kripkovským modelům.

2.1 Kripkovský model pro klasickou logiku

Nejprve se budu zabývat modelem pro klasickou logiku. Modelem M rozumím dvojici (w, V), kde w je množina všech atomických proměnných a V je *valuační* funkce, která každé proměnné z w přiřadí hodnotu pravda (T) nebo nepravda (F). Nyní platí, že pro každou formuli A klasické výrokové logiky, můžeme rozhodnout, zda je v modelu M pravdivá nebo nepravdivá. K tomuto účelu nám slouží následující vztahy:

pro A atomickou, je A v M pravdivá	iff	$V(A) = T$
$\neg A$ je pravdivá v M	iff	A je nepravdivá v M
$A \wedge B$ je pravdivá v M	iff	A i B jsou pravdivé v M
$A \vee B$ je pravdivá v M	iff	A nebo B je pravdivá v M
$A \rightarrow B$ je pravdivá v M	iff	A je nepravdivá v M nebo B je pravdivá v M

Formálně tyto vztahy můžeme zapsat takto:

$$\begin{array}{rcl} A \in w \quad \wedge \quad v(A) = T & \Leftrightarrow & V(A) = T \\ v(\neg A) = T & \Leftrightarrow & v(A) = F \\ v(A \wedge B) & \Leftrightarrow & v(A) = T \quad \wedge \quad v(B) = T \\ v(A \vee B) = T & \Leftrightarrow & v(A) = T \quad \vee \quad v(B) = T \\ v(A \rightarrow B) = T & \Leftrightarrow & v(A) = F \quad \vee \quad v(B) = T \end{array}$$

Kde funkci v definujeme jako pravdivostní ohodnocení formule vzhledem k modelu M.

Říkáme, že formule je *tautologií*, pokud je pravdivá ve všech modelech a že je *splnitelná*, pokud je pravdivá v některém modelu.

Tuto definici můžeme ještě rozšířit následujícím způsobem: *Nechť A' je množina formulí a nechť M' je třída všech modelů, ve kterých jsou pravdivé všechny*

[1] Kripkovský modelu pro klasickou logiku byl definován podle: Burgess, J. P., Kripke models

formule z A'. Pak o každé formuli A, která je pravdivá ve všech modelech z M', říkáme, že je (tautologicky) odvoditelná z množiny předpokladů A'. Upravením tohoto systému získáme systém modelů pro modální logiky.

2.2 Kripkovské modely pro modální logiky

Kripkovský model M pro modální logiku je definován jako trojice (W, R, V), kde W je množina „možných světů“, R je binární relace „dosažitelnosti“ na množině W a V je množina *valuačních* funkcí V_w pro každé w z množiny W.[2]

Obdobně jako v modelu pro klasickou logiku platí pro modální formule A, B následující vztahy:

pro A atomickou je A v w pravdivá v M	iff	$V_w(A) = T$
$\neg A$ je v w pravdivá v M	iff	A je v w nepravdivá v M
$A \wedge B$ je v w pravdivá v M	iff	A i B jsou v w pravdivé v M
$A \vee B$ je v w pravdivá v M	iff	A nebo B je v w pravdivá v M
$A \rightarrow B$ je v w pravdivá v M	iff	A je v w nepravdivá v M nebo B je v w pravdivá v M
$\Box A$ je v w pravdivá v M	iff	pro všechna x tak že wRx je A v x pravdivá v M

Pokud toto přepíšeme formálně, dostaneme:

$$\begin{aligned}
A \in w \quad \wedge \quad v_w(A) = T &\Leftrightarrow V_w(A) = T \\
v_w(\neg A) = T &\Leftrightarrow v_w(A) = F \\
v_w(A \wedge B) &\Leftrightarrow v_w(A) = T \quad \wedge \quad v_w(B) = T \\
v_w(A \vee B) = T &\Leftrightarrow v_w(A) = T \quad \vee \quad v_w(B) = T \\
v_w(A \rightarrow B) = T &\Leftrightarrow v_w(A) = F \quad \vee \quad v_w(B) = T \\
v_w(\Box A) = T &\Leftrightarrow \forall x \in W(wRx \ \rightarrow \ v_x(A) = T)
\end{aligned}$$

Nyní je ještě třeba se zmínit o vlastnostech, které požadujeme od relace „dosažitelnosti“ R. Pokud na relaci R nebudeme klást žádné další podmínky, získáme třídu modelů, ve které můžeme obdobně jako v systému pro klasickou logiku hledat tautologie pro modální logiku s jedním modálním axiomem: $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.

Důkaz: Potřebuji ukázat, že v libovolném modelu $M = (W, R, V)$ a libovolném $w \in W$ platí formule $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$, přičemž můžu předpokládat $v_w(\Box(A \rightarrow B)) = T$. Chci ukázat na pravdivost $(\Box A \rightarrow \Box B)$ v w. Je zjevné, že můžu předpokládat i $v_w(\Box A) = T$, protože v opačném případě je implikace $(\Box A \rightarrow \Box B)$ v w pravdivá a není co dokazovat.

Nyní podle definice pro $\forall x \in W(wRx)$ platí:

$$v_x(A \rightarrow B) = T \tag{2.1}$$

[2] Alternativně lze Kripkovské rámce pro modální logiky definovat pouze jako dvojici (W,R). Formule je pak v modelu splněna pokud je splněna všemi ohodnoceními proměnných

$$v_x(A) = F \ \vee \ v_x(B) = T \tag{2.2}$$

$$v_x(A) = T \tag{2.3}$$

Z pravdivosti (2.2) a (2.3) můžeme ukázat, že platí i:

$$v_x(B) = T \tag{2.4}$$

$$v_w(\Box B) = T \tag{2.5}$$

Z čehož plyne i platnost implikace $(\Box A \to \Box B)$ v w.
$\Box$

Pokud však od relace R budeme vyžadovat nějaké vlastnosti, například reflexivitu, získáme třídu modelů, která odpovídá určitému modálnímu axiomu. Například pro reflexivní relaci R získáme třídu modelů, ve kterých můžeme zkoumat odvoditelnost z axiomu $\Box A \to A$. Takto definovanou třídu modelů budeme nazývat *Kripkovský rámec*. V našem příkladě tedy mluvíme o „Kripkovském rámci pro formuli $\Box A \to A$“.

3 Axiomy modální logiky a jejich rámce

V této kapitole vytvořím seznam axiomů, kterými se budeme dále zabývat. Dále si ukážeme, jaké požadavky na relaci R budeme pro jednotlivé axiomy klást. Prozatím se ještě nebudu zabývat tím, jaké modální systémy jsou definovány kterými axiomy.

Než začneme zkoumat jednotlivé axiomy, ukážeme si ještě, že pro formuli $\Diamond A$ platí v Kripkovském modelu následující vztah

$$v_w(\Diamond A) = T \;\Leftrightarrow\; \exists x \in W(wRx \;\wedge\; v_x(A) = T)$$

Důkaz: Výraz $\Diamond A$ je definován jako $\Diamond A =_{df} \neg\Box\neg A$, takže můžeme zkoumat vztah pro $v_w(\neg\Box\neg A) = T$.

Podle definice platí:

$$v_w(\neg\Box\neg A) = T \;\Leftrightarrow\; v_w(\Box\neg A) = F \tag{3.1}$$

$$v_w(\Box\neg A) = T \;\Leftrightarrow\; \forall x \in W(wRx \;\rightarrow\; v_x(\neg A) = T) \tag{3.2}$$

$$v_x(\neg A) = T \;\Leftrightarrow\; v_x(A) = F \tag{3.3}$$

Z (3.2) a (3.3) dostáváme:

$$v_w(\Box\neg A) = T \;\Leftrightarrow\; \forall x \in W(wRx \;\rightarrow\; v_x(A) = F) \tag{3.4}$$

Vztah (3.4) se dá ekvivalentně přepsat jako:

$$v_w(\Box\neg A) = F \;\Leftrightarrow\; \exists x \in W(wRx \;\wedge\; v_x(A) = T) \tag{3.5}$$

Nyní z (3.1) a (3.5) dostáváme vztah:

$$v_w(\neg\Box\neg A) = T \;\Leftrightarrow\; \exists x \in W(wRx \;\wedge\; v_x(A) = T) \tag{3.6}$$

□

Nyní mohu přistoupit k jednotlivým axiomům:
Axiom $\Box A \rightarrow \Diamond A$ budeme nazývat axiomem D a odpovídá mu rámec, ve kterém pro relaci R platí $\exists u \; wRu$.
Důkaz: Výraz $\Box A \rightarrow \Diamond A$ se dá podle definice napsat takto:

$$\forall x(wRx \rightarrow v_x(A) = T) \;\rightarrow\; \exists x(wRx \wedge v_x(A) = T) \tag{3.7}$$

$$\exists x(wRx \wedge v_x(A) = F) \;\vee\; \exists x(wRx \wedge v_x(A) = T) \tag{3.8}$$

Což lze zapsat jako $\exists x \; wRx$.
□

Axiom $\Box A \to A$ nazveme M[1] a odpovídá mu rámec, ve kterém pro relaci R platí wRw.

Důkaz: Nechť M je třída modelů, ve kterých platí wRw.
Nechť $\overline{M}$ je třída modelů, ve kterých platí $\Box A \to A$.
Nyní platí $M \models \varphi \Leftrightarrow \overline{M} \models \varphi$.

Důkaz: Zprava doleva:
V M platí dle definice: $v_w(\Box A) = T \Rightarrow \forall x(wRx \to v_x(A) = T)$. Protože wRw, tak $(v_w(\Box A) = T \Rightarrow v_w(A) = T)$, tudíž i $v_w(\Box A \to A) = T$. To znamená

$$M \models \Box A \to A$$

$$M \subseteq \overline{M}$$

Zleva doprava:
Nechť $M \models \varphi$ a nechť $M' \in \overline{M}$ taková, že $M' = (W', R', V')$ a $M' \not\models \varphi$. Vytvoříme model $M'' = (W'', R'', V'')$ tak, že $W'' = W'$; $R'' = R' \cup R$, kde R je binární relace na W' taková, že $\forall a, b \in W'(aRb \Leftrightarrow a = b)$; $V'' = V'$. Nyní platí $M' \models \psi \Leftrightarrow M'' = \psi$.

Důkaz: Indukcí dle složitosti formule:
Pro atomické formule, negaci, disjunkci, konjunkci a implikaci se pravdivost přenáší dle definice. Potřebujeme ukázat, že $v'_w(\Box A) = T \Leftrightarrow v''_w(\Box A) = T$.

$$v'_w(\Box A) = T \Leftrightarrow \forall x \in W'(wR'x \to v'_x(A) = T) \tag{3.9}$$

$$v''_w(\Box A) = T \Leftrightarrow \forall x \in W''(wR''x \to v''_x(A) = T) \tag{3.10}$$

$$v''_w(\Box A) = T \Leftrightarrow \forall x \in W'((wR'x \to v'_x(A) = T) \wedge v'_w(A) = T) \tag{3.11}$$

Pravdivost $V'_w(A) = T$ plyne z pravdivosti $\Box A \to A$ v M'.
□
Speciálně $M' \not\models \varphi$, takže $M'' \not\models \varphi$. Což je spor, protože $M'' \in M$.
□

□

Axiom $\Box A \to \Box\Box A$ nazveme *4* a odpovídá mu rámec, ve kterém pro relaci R platí $(wRv \wedge vRu) \Rightarrow wRu$.

Důkaz: Nechť M je třída modelů, ve kterých platí $(wRv \wedge vRu) \Rightarrow wRu$.
Nechť $\overline{M}$ je třída modelů, ve kterých platí $\Box A \to \Box\Box A$.
Nyní platí $M \models \varphi \Leftrightarrow \overline{M} \models \varphi$.

Důkaz: Zprava doleva:
V M platí:

$$v_w(\Box A \to \Box\Box A) = T \Leftrightarrow (\forall x(wRx \to v_x(A) = T) \to \forall a, b((wRa \wedge aRb) \to v_b(A) = T)) \tag{3.12}$$

Protože platí $(wRa \wedge aRb) \Rightarrow wRb$, musí pravá strana (3.12) platit vždy. Takže

$$M \models \Box A \to \Box\Box A$$

$$M \subseteq \overline{M}$$

[1] V některých zdrojích se axiom $\Box A \to A$ nazývá T, čemuž odpovídá i název logiky $\boldsymbol{T}$, jak uvidíme později

Zleva doprava:
Nechť $M \models \varphi$ a $M' \in \overline{M}$ taková, že $M' = (W', R', V')$ a $M' \not\models \varphi$. Vytvoříme model $M'' = (W'', R'', V'')$ tak, že $W'' = W'$; $R'' = R' \cup R$, kde R je binární relace na W' taková, že $\forall a, b \in W'(aRb)$ právě tehdy, když existuje posloupnost $x_0, \ldots, x_n$ tak, že $n \neq 0$, $a = x_0$, $b = x_n$ a $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}(x_i R' x_{i+1})$; $V'' = V'$. Nyní platí $M' \models \psi \Leftrightarrow M'' = \psi$.

Důkaz: Indukcí dle složitosti formule:
Pro atomické formule, negaci, disjunkci, konjunkci a implikaci se pravdivost přenáší dle definice. Potřebujeme ukázat, že $v'_w(\Box A) = T \Leftrightarrow v''_w(\Box A) = T$.

$$v'_w(\Box A) = T \Leftrightarrow \forall x \in W'(wR'x \rightarrow v'_x(A) = T) \tag{3.13}$$

$$v''_w(\Box A) = T \Leftrightarrow \forall x \in W''(wR''x \rightarrow v''_x(A) = T) \tag{3.14}$$

Nechť $\{x_0, \ldots, x_n\}$ je posloupnost taková, že $n \neq 0$, $w = x_0$, $x = x_n$ a $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}(x_i R' x_{i+1})$. Z pravdivosti formule $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ a z $v'_w(\Box A) = T$ plyne:

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\} \qquad v'_{x_i}(\Box A) = T \tag{3.15}$$

$$v'_{x_i}(\Box\Box A) = T \tag{3.16}$$

$$v'_{x_{i+1}}(\Box A) = T \tag{3.17}$$

$$v'_{x_{n-1}}(\Box A) = T \tag{3.18}$$

$$v'_x(A) = T \tag{3.19}$$

□
Speciálně $M' \not\models \varphi$, takže $M'' \not\models \varphi$. Což je spor, protože $M'' \in M$.
□

□

Axiom $A \rightarrow \Box\Diamond A$ nazveme B a odpovídá mu rámec, ve kterém pro relaci R platí $wRv \Rightarrow vRw$.

Důkaz: Nechť M je třída modelů, ve kterých platí $wRv \Rightarrow vRw$.
Nechť $\overline{M}$ je třída modelů, ve kterých platí $A \rightarrow \Box\Diamond A$.
Nyní platí $M \models \varphi \Leftrightarrow \overline{M} \models \varphi$.

Důkaz: Zprava doleva:
V M platí:

$$v_w(A \rightarrow \Box\Diamond A) = T \Leftrightarrow (v_w(A) = T \rightarrow \forall a \exists b(wRa \rightarrow (aRb \wedge v_b(A) = T))) \tag{3.20}$$

Protože platí $wRa \Rightarrow aRw$, musí pravá strana (3.20) platit vždy. Takže

$$M \models A \rightarrow \Box\Diamond A$$

$$M \subseteq \overline{M}$$

Zleva doprava:
Nechť $M \models \varphi$ a nechť $M' \in \overline{M}$ taková, že $M' = (W', R', V')$ a $M' \not\models \varphi$. Vytvoříme model $M'' = (W'', R'', V'')$ tak, že $W'' = W'$; $R'' = R' \cup R$, $R = (R')^{-1}$; $V'' = V'$. Nyní platí $M' \models \psi \Leftrightarrow M'' = \psi$.

Důkaz: Indukcí dle složitosti formule:
Pro atomické formule, negaci, disjunkci, konjunkci a implikaci se pravdivost přenáší dle definice. Potřebujeme ukázat, že $v'_w(\Box A) = T \Leftrightarrow v''_w(\Box A) = T$.

$$v'_w(\Box A) = T \Leftrightarrow \forall x \in W'(wR'x \to v'_x(A) = T) \tag{3.21}$$

$$v''_w(\Box A) = T \Leftrightarrow \forall x \in W''(wR''x \to v''_x(A) = T) \tag{3.22}$$

$$v''_w(\Box A) = T \Leftrightarrow \forall x \in W'((wR'x \vee xR'w) \to v'_x(A) = T) \tag{3.23}$$

Nechť $xR'w$ pak

$$v'_x(\neg A \to \Box\Diamond\neg A) = T \tag{3.24}$$

$$v'_x(A) = T \ \vee \ v'_x(\Box\Diamond\neg A) = T \tag{3.25}$$

$$v'_x(\Box\Diamond\neg A) = T \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \exists b(xR'a \to (aR'b \wedge v'_b(\neg A) = T)) \tag{3.26}$$

$$v'_x(\Box\Diamond\neg A) = T \quad \Rightarrow \quad \exists b(wR'b \wedge v'_b(\neg A) = T) \tag{3.27}$$

$$v'_x(\Box\Diamond\neg A) = T \quad \Rightarrow \quad \exists b(wR'b \wedge v'_b(A) = F) \tag{3.28}$$

Z nepravdivosti pravé strany (3.28) můžeme odvodit

$$v'_x(\Box\Diamond\neg A) = F \tag{3.29}$$

Nyní z (3.25) a (3.29) dostáváme

$$v'_x(A) = T \tag{3.30}$$

□
Speciálně $M' \not\models \varphi$, takže $M'' \not\models \varphi$. Což je spor, protože $M'' \in M$.
□

□

Axiom $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ nazveme *5* a odpovídá mu rámec, ve kterém pro relaci R platí $(wRv \wedge wRu) \Rightarrow vRu$.

Důkaz: Nechť M je třída modelů, ve kterých platí $(wRv \wedge wRu) \Rightarrow vRu$.
Nechť $\overline{M}$ je třída modelů, ve kterých platí $\Diamond A \to \Box\Diamond A$.
Nyní platí $M \models \varphi \Leftrightarrow \overline{M} \models \varphi$.

Důkaz: Zprava doleva:
V M platí:

$$v_w(\Diamond A \to \Box\Diamond A) = T \Leftrightarrow \exists x(wRx \wedge v_x(A) = T) \to (\forall a \exists b(wRa \to (aRb \wedge v_b(A) = T))) \tag{3.31}$$

Protože platí $(wRa \wedge wRx) \to aRx$, musí pravá strana (3.31) platit vždy. Takže

$$M \models \Diamond A \to \Box\Diamond A$$

$$M \subseteq \overline{M}$$

Zleva doprava:
Nechť $M \models \varphi$ a nechť $M' \in \overline{M}$ taková, že $M' = (W', R', V')$ a $M' \not\models \varphi$. Vytvoříme model $M'' = (W'', R'', V'')$ tak, že $W'' = W'$; $R'' = R' \cup R$, přičemž R je binární relace na W' taková, že $\forall a, b \in W'(aRb)$ právě tehdy, když $\exists x_0 \in W'$ a existují posloupnosti $a_0, \ldots, a_n$ a $b_0, \ldots, b_m$, kde $n \neq 0 \wedge m \neq 0$, $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}(a_i R a_{i+1})$, $\forall j \in \{0, \ldots, m-1\}(b_j R b_{j+1})$, $a_n = a$, $b_m = b$ a $a_0 = b_0 = x_0$; $V'' = V'$. Nyní platí $M' \models \psi \Leftrightarrow M'' = \psi$.

Důkaz: Indukcí dle složitosti formule:
Pro atomické formule, negaci, disjunkci, konjunkci a implikaci se pravdivost přenáší dle definice. Potřebujeme ukázat, že $v'_w(\Box A) = T \Leftrightarrow v''_w(\Box A) = T$.

$$v'_w(\Box A) = T \Leftrightarrow \forall x \in W'(wR'x \rightarrow v'_x(A) = T) \tag{3.32}$$

$$v''_w(\Box A) = T \Leftrightarrow \forall x \in W''(wR''x \rightarrow v''_x(A) = T) \tag{3.33}$$

$$v''_w(\Box A) = T \Leftrightarrow \forall x \in W'((wR'x \vee wRx) \rightarrow v'_x(A) = T) \tag{3.34}$$

Nechť wRx, pak existuje x_0 a posloupnosti $a_0, \ldots, a_n$; $b_0, \ldots, b_m$ dle definice. Nyní platí

$$v'_{x_0}(\Diamond\neg A) = F \tag{3.35}$$

$$v'_{x_0}(\Box A) = T \tag{3.36}$$

Protože pro $v'_{x_0}(\Diamond\neg A) = T$ by z pravdivosti $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ platilo

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}\ v'a_i(\Diamond\neg A) = T \tag{3.37}$$

$$v'_{a_n}(\Diamond\neg A) = T \tag{3.38}$$

Obdobně se ukáže platnost

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}\ v'_{a_i}(\Box A) = T \tag{3.39}$$

Takže platí

$$v'_{a_1}(\Box A) = T \tag{3.40}$$

$$v'_{a_0}(\Diamond\Box A) = T \tag{3.41}$$

Z (3.41) a $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ dostáváme

$$\forall j \in \{0, \ldots, m\}\ v'_{b_j}(\Diamond\Box A) = T \tag{3.42}$$

Speciálně

$$v'_{b_{m-1}}(\Diamond\Box A) = T \tag{3.43}$$

Pokud by platilo $v'_x(A) = F$, pak

$$v'_{b_{m-1}}(\Diamond\neg A) = T \tag{3.44}$$

Přičemž z (3.44) a $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ dostáváme

$$v'_{b_{m-1}}(\Box\Diamond\neg A) = T \tag{3.45}$$

Pravdivost (3.43) a (3.45) by ale vedla k existenci b' tak, že $b_{m-1}R'b'$ a

$$v'_{b'}(\Diamond\neg A) = T \wedge v'_{b'}(\Box A) = T \tag{3.46}$$

Což je spor.
□
Speciálně $M' \not\models \varphi$, takže $M'' \not\models \varphi$. Což je spor, protože $M'' \in M$.
□

□

Na závěr této kapitoly ještě uvedu přehlednou tabulku axiomů a jim odpovídajících požadavků na relaci R.

axiom	**jméno**	**vlastnost relace** R
$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$	K	žádné požadavky
$\Box A \to \Diamond A$	D	$\exists u(wRu)$
$\Box A \to A$	M	wRw
$\Box A \to \Box\Box A$	4	$(wRv \wedge vRu) \Rightarrow wRu$
$A \to \Box\Diamond A$	B	$wRv \Rightarrow vRw$
$\Diamond A \to \Box\Diamond A$	5	$(wRv \wedge wRu) \Rightarrow vRu$

4 Axiomatické systémy modálních logik

V této kapitole se dostáváme k ukázce axiomatických systémů, kterými se budeme zabývat. Dříve, než přejdu k jednotlivým systémům, je nutno nadefinovat nové odvozovací pravidlo „přidání nutnosti“, které budeme značit *Nec* (Necessitation Rule).

$$\frac{A}{\Box A}$$

V případě, že je dokázána formule A, nám toto pravidlo umožní usoudit, že platí i formule $\Box A$. Přesto v žádném z našich systémů není tautologií formule $A \rightarrow \Box A$, což ukážu později. Z toho je vidět, že v modální logice neplatí *věta o dedukci*[1].

Nyní už můžeme přejít k jednotlivým systémům.

Nejjednodušším systémem je systém ***K***, který vznikne přidáním axiomu K a pravidla *Nec* k výrokové logice. Systém ***K*** je tedy definován takto:

axiomy:

	tautologie výrokové logiky
K	$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

odvozovací pravidla:

MP	$A, A \rightarrow B \;/\; B$
Nec	$A \;/\; \Box A$

Všechny ostatní systémy už budeme definovat pomocí ***K***.

Dalším jednoduchým systémem je systém ***T***, který vznikne přidáme-li k systému ***K*** axiom M.

Prvním složitějším systémem je systém ***S4***, který vznikne ze systému ***K*** přidáním axiomů M a *4*.

Obdobně přidáním axiomů M a *5* k systému ***K*** získáme systém ***S5***.

Poslední systém, který nás bude zajímat, je systém pro deontickou logiku ***D***. Ten získáme přidáním axiomu D k systému ***K***.

[1] V modálních logikách však platí modalizovaná verze věty o dedukci ve tvaru $\Gamma, A \vdash B \Leftrightarrow \Gamma \vdash \Box A \rightarrow B$

Přehledněji zapsáno:

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{T} & = & \boldsymbol{K} + M \\ \boldsymbol{S4} & = & \boldsymbol{K} + M + 4 \\ \boldsymbol{S5} & = & \boldsymbol{K} + M + 5 \\ \boldsymbol{D} & = & \boldsymbol{K} + D \end{array}$$

Ještě než budu pokračovat dále, podíváme se, jaké vlastnosti mají Kripkovské rámce pro jednotlivé systémy.

Pro systém $\boldsymbol{K}$ nejsou kladeny na relaci R žádné požadavky.

V rámci pro systém $\boldsymbol{T}$ musí relace R splňovat vztah wRw.

Pro systém $\boldsymbol{S4}$ relace R splňuje vztahy wRw a $(wRu \wedge uRv) \rightarrow wRv$.

Relace R pro systém $\boldsymbol{S5}$ musí splňovat jak wRw, tak $(wRu \wedge wRv) \rightarrow uRv$. Což znamená, že pro systém $\boldsymbol{S5}$ je relace R ekvivalencí.

Důkaz: Víme, že R je reflexivní. Potřebuji ukázat, že je také tranzitivní a symetrická. Symetrii dokážu takto:

$$wRw \tag{4.1}$$

$$(wRu \wedge wRw) \rightarrow uRw \tag{4.2}$$

$$wRu \rightarrow uRw \tag{4.3}$$

Když už máme symetrii relace R, dokážu tranzitivitu snadno:

$$wRu \leftrightarrow uRw \tag{4.4}$$

$$(uRw \wedge uRv) \rightarrow wRv \tag{4.5}$$

$$(wRu \wedge uRv) \rightarrow wRv \tag{4.6}$$

□

V rámci pro systém $\boldsymbol{D}$ platí pro relaci R vlastnost $\exists u(wRu)$.

Dříve, než budeme pokračovat, musíme se na tomto místě zastavit a podívat se, jak je to s úplností a korektností jednotlivých modálních logik vůči Kripkovským rámcům. Lze rovnou říci, že korektnost všech logik je zjevná na základě důkazů správnosti rámců pro jednotlivé axiomy, které jsem provedl v předchozí kapitole.

Logika $\boldsymbol{K}$ je úplná a korektní vůči Kripkovským modelům. To znamená $\mathbf{K} \vdash \varphi$ právě tehdy, když $\mathbf{M} \models \varphi$ kde $\mathbf{M}$ je množina všech Kripkovských modelů.

Důkaz: Korektnost jsem ukázal výše. Nyní proto stačí ukázat: Jestliže $\mathbf{K} \nvdash \varphi$, pak existuje Kripkovský model $\mathcal{M}$ takový, že $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Dvojici množin formulí (Γ, Δ) nazveme *konzistentní*, jestliže neplatí $\mathbf{K}, \Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n$ pro žádné $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \Delta, n \geq 0$. Je zjevné, že množina Γ musí být bezesporná. A také, že dvojice $(\emptyset, \{\varphi\})$ je *konzistentní*.

Dvojici (Γ, Δ) nazveme *maximální konzistentní*, jestliže je *konzistentní* a navíc platí $\Gamma \cup \Delta = \mathbf{Sub}\varphi$, kde $\mathbf{Sub}\varphi$ je množina všech podformulí formule φ.

Nyní si označme W množinu všech *maximálních konzistentních* dvojic (Γ, Δ). Nadefinujme relaci R následujícím způsobem: nechť $w_1 = (\Gamma_1, \Delta_1), w_2 = (\Gamma_2, \Delta_2)$, pak $w_1 R w_2$ právě tehdy, když existuje ψ tak, že $\Box\psi \in \Gamma_1 \wedge \psi \in \Gamma_2$.

Nyní mohu vytvořit model $\mathcal{M} = (W, R, V)$. Valuační funkci zvolím tak, aby každá formule v Γ byla pravdivá a každá formule v Δ nepravdivá. Protože $(\emptyset, \{\varphi\})$ je *konzistentní*, musí existovat nějaká *maximální konzistentní* dvojice (Γ, Δ), která je jejím rozšířením. Proto $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

□

Úpravou předchozího důkazu můžeme ukázat úplnost i ostatních modálních logik.[2]

Pro námi definované systémy platí: $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{D} \subseteq \mathbf{T} \subseteq \mathbf{S4} \subseteq \mathbf{S5}$.

Důkaz: Ukážu dva způsoby důkazu.

1. Nejprve inkluze prokážu důkazem jednotlivých axiomů. Vztahy $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{D}$ a $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{S4}$ jsou zjevné.

   $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{T}$ ukážu jednoduše:

$$\mathbf{T} \vdash \Box\neg A \to \neg A \tag{4.7}$$
$$\mathbf{T} \vdash \neg\neg A \to \neg\Box\neg A \tag{4.8}$$
$$\mathbf{T} \vdash A \to \Diamond A \tag{4.9}$$
$$\mathbf{T} \vdash \Box A \to A \tag{4.10}$$
$$\mathbf{T} \vdash \Box A \to \Diamond A \tag{4.11}$$

   důkaz $\mathbf{S4} \subseteq \mathbf{S5}$ již bude o něco složitější:

$$(M) \quad \mathbf{S5} \vdash \Box A \to \Diamond\Box A \tag{4.12}$$
$$(5) \quad \mathbf{S5} \vdash \Diamond\Box A \to \Box\Diamond\Box A \tag{4.13}$$
$$(4.12, 4.13) \quad \mathbf{S5} \vdash \Box A \to \Box\Diamond\Box A \tag{4.14}$$
$$(5) \quad \mathbf{S5} \vdash \Diamond\neg A \to \Box\Diamond\neg A \tag{4.15}$$
$$(4.15) \quad \mathbf{S5} \vdash \neg\Box\Diamond\neg A \to \neg\Diamond\neg A \tag{4.16}$$
$$(4.16) \quad \mathbf{S5} \vdash \Diamond\Box A \to \Box A \tag{4.17}$$
$$(4.17, Nec) \quad \mathbf{S5} \vdash \Box(\Diamond\Box A \to \Box A) \tag{4.18}$$
$$(K) \quad \mathbf{S5} \vdash \Box(\Diamond\Box A \to \Box A) \to (\Box\Diamond\Box A \to \Box\Box A) \tag{4.19}$$
$$(4.18, 4.19, MP) \quad \mathbf{S5} \vdash \Box\Diamond\Box A \to \Box\Box A \tag{4.20}$$
$$(4.14, 4.20) \quad \mathbf{S5} \vdash \Box A \to \Box\Box A \tag{4.21}$$

2. Nyní provedu důkaz pomocí Kripkovských rámců. Inkuze $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{D}$ a $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{S4}$ jsou opět triviální.

   $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{T}$ lze dokázat pomocí tautologie predikátové logiky $wRw \to \exists u(wRu)$, která nám zaručí vlastnost $\exists u(wRu)$ pro relaci R z rámce pro systém ***T***.

   Relace R v rámci pro systém ***S5*** je enkvivalence, proto musí být tranzitivní. Což přímo dokazuje $\mathbf{S4} \subseteq \mathbf{S5}$.

□

Na právě předvedeném důkazu je vidět, že někdy je výhodné ukázat dokazatelnost formule v daném systému pomocí Kripkovských rámců, namísto klasického důkazu. Proto tento postup budu využívat i v následujících kapitolách.

[2] Podrobný důkaz lze najít například v A. Chagrov & M. Zakharyaschev, Modal Logic, kapitola 5.

5 Srovnání síly axiomatických systémů

Na závěr předchozí kapitoly jsme si ukázali platnost inkluzí $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{D} \subseteq \mathbf{T} \subseteq \mathbf{S4} \subseteq \mathbf{S5}$. Nyní dokážu ještě silnější tvrzení:

K ⊂ D

Důkaz: Vytvoříme Kripkovský model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ tak, že $W = \{w\}$, $R = \{\}$ a V zvolíme libovolně. Nyní pro libovolnou formuli φ platí

$$v_w(\Box\varphi) = T \tag{5.1}$$

$$v_w(\Diamond\varphi) = F \tag{5.2}$$

$$v_w(\Box\varphi \to \Diamond\varphi) = F \tag{5.3}$$

$$\mathcal{M} \not\models D \tag{5.4}$$

$$\mathbf{K} \not\vdash D \tag{5.5}$$

□

D ⊂ T

Důkaz: Vytvoříme Kripkovský model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ tak, že $W = \{u, w\}$; $R = \{(w, u), (u, u)\}$. Zvolme libovolný atom $a \in (u \cap w)$. Valuační funkci nyní zvolíme tak, že $V_w(a) = F$, $V_u(a) = T$, ohodnocení na ostatních proměnných zvolíme libovolně. Nyní platí:

$$v_w(\Box a) = T \tag{5.6}$$

$$v_w(a) = F \tag{5.7}$$

$$v_w(\Box a \to a) = F \tag{5.8}$$

$$\mathcal{M} \not\models M \tag{5.9}$$

$$\mathbf{D} \not\vdash M \tag{5.10}$$

□

T ⊂ S4

Důkaz: Vytvoříme Kripkovský model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ tak, že $W = (u, v, w)$, $R = \{(w, w), (w, v), (v, v), (v, u), (u, u)\}$. Zvolme libovolný atom $a \in (u \cap v \cap w)$. Valuační funkci nyní zvolíme tak, že $V_w(a) = T$, $V_v(a) = T$, $V_u(a) = F$, ohodnocení na ostatních proměnných zvolíme libovolně. Nyní platí:

$$v_v(\Box a) = F \tag{5.11}$$

$$v_w(\Box\Box a) = F \tag{5.12}$$

$$v_w(\Box a) = T \tag{5.13}$$

$$v_w(\Box a \to \Box\Box a) = F \tag{5.14}$$

$$\mathcal{M} \not\models 4 \tag{5.15}$$

$$\mathbf{T} \nvdash 4 \tag{5.16}$$

□

S4 ⊂ S5

Důkaz: Vytvoříme Kripkovský model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ tak, že $W = \{u, w\}$, $R = \{(w, w), (w, u), (u, u)\}$. Zvolme libovolný atom $a \in (u \cap w)$. Valuační funkci nyní zvolíme tak, že $V_w(a) = T$, $V_u(a) = F$, ohodnocení na ostatních proměnných zvolíme libovolně. Nyní platí:

$$v_u(\Diamond a) = F \tag{5.17}$$

$$v_w(\Box\Diamond a) = F \tag{5.18}$$

$$v_w(\Diamond a) = T \tag{5.19}$$

$$v_w(\Diamond a \to \Box\Diamond a) = F \tag{5.20}$$

$$\mathcal{M} \not\models 5 \tag{5.21}$$

$$\mathbf{S4} \nvdash 5 \tag{5.22}$$

□

Na závěr této kapitoly ještě dokážu několik zajímavých tvrzení. Nejprve dokážu nezávislost formule $A \to \Box A$. Protože stačí ukázat nedokazatelnost v nejsilnějším systému, dokážu pouze $\mathbf{S5} \nvdash A \to \Box A$.

Důkaz: Vytvoříme Kripkovský model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ tak, že $W = \{u, w\}$, $R = \{(w, w), (w, u), (u, u), (u, w)\}$. Zvolme libovolný atom $a \in (u \cap w)$. Valuační funkci nyní zvolíme tak, že $V_w(a) = T$, $V_u(a) = F$, ohodnocení na ostatních proměnných zvolíme libovolně. Nyní platí:

$$v_w(\Box a) = F \tag{5.23}$$

$$v_w(a) = T \tag{5.24}$$

$$v_w(a \to \Box a) = F \tag{5.25}$$

$$\mathcal{M} \not\models A \to \Box A \tag{5.26}$$

$$\mathbf{S5} \nvdash A \to \Box A \tag{5.27}$$

□

Dalším zajímavým tvrzením je nezávislost axiomů *4* a B na axiomu *5*. Dokážeme tedy

$$5 \nvdash 4 \qquad\qquad 5 \nvdash B$$

Důkaz: Nejprve dokážu $5 \nvdash 4$. Vytvoříme Kripkovský model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ tak, že $W = \{u, v, w\}$, $R = \{(w, u), (u, u), (u, v), (v, u), (v, v)\}$. Zvolme libovolný atom $a \in (u \cap v \cap w)$. Valuační funkci nyní zvolíme tak, že $V_u(a) = T$, $V_v(a) = F$, ohodnocení na ostatních proměnných zvolíme libovolně. Nyní platí:

$$v_w(\Box a) = T \tag{5.28}$$

$$v_u(\Box a) = F \tag{5.29}$$

$$v_w(\Box\Box a) = F \tag{5.30}$$

$$v_w(\Box a \to \Box\Box a) = F \tag{5.31}$$

$$\mathcal{M} \not\models 4 \tag{5.32}$$

$$5 \nvdash 4 \tag{5.33}$$

Nyní ukážu $5 \nvdash B$. Vytvoříme Kripkovský model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ tak, že $W = \{u, w\}$, $R = \{(w, u), (u, u)\}$. Zvolme libovolný atom $a \in (u \cap w)$. Valuační funkci nyní zvolíme tak, že $V_u(a) = F$, $V_w(a) = T$, ohodnocení na ostatních proměnných zvolíme libovolně. Nyní platí:

$$v_w(a) = T \tag{5.34}$$

$$v_u(\Diamond a) = F \tag{5.35}$$

$$v_w(\Box\Diamond a) = F \tag{5.36}$$

$$v_w(a \to \Box\Diamond a) = F \tag{5.37}$$

$$\mathcal{M} \not\models B \tag{5.38}$$

$$5 \nvdash B \tag{5.39}$$

□

6 Dokazatelnost v systémech *S4* a *S5*

V této kapitole si ukážeme některé formule a zaměříme se na jejich dokazatelnost v jednotlivých systémech.

Formule $\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$ a $\Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$ jsou dokazatelné jak v ***S4***, tak v ***S5***. Platí však ještě silnější tvrzení:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &\vdash \Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \\ \mathbf{K} &\vdash \Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \end{aligned}$$

Důkaz:

$$\begin{array}{rlll}
 & \mathbf{K} \vdash & (\varphi \wedge \psi) \to \varphi & (6.1) \\
(6.1, Nec) & \mathbf{K} \vdash & \Box((\varphi \wedge \psi) \to \varphi) & (6.2) \\
(K) & \mathbf{K} \vdash & \Box((\varphi \wedge \psi) \to \varphi) \to (\Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\varphi) & (6.3) \\
(6.2, 6.3, MP) & \mathbf{K} \vdash & \Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\varphi & (6.4) \\
 & \mathbf{K} \vdash & \Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\psi & (6.5) \\
(6.4, 6.5) & \mathbf{K} \vdash & \Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi) & (6.6) \\
 & \mathbf{K} \vdash & \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi)) & (6.7) \\
(6.7, Nec) & \mathbf{K} \vdash & \Box(\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))) & (6.8) \\
(K) & \mathbf{K} \vdash & \Box(\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))) \to (\Box\varphi \to \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi))) & (6.9) \\
(6.8, 6.9, MP) & \mathbf{K} \vdash & \Box\varphi \to \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi)) & (6.10) \\
(K) & \mathbf{K} \vdash & \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi)) \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi)) & (6.11) \\
(6.10, 6.11) & \mathbf{K} \vdash & \Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi)) & (6.12) \\
(6.12) & \mathbf{K} \vdash & (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi) & (6.13) \\
(6.6, 6.13) & \mathbf{K} \vdash & (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \leftrightarrow \Box(\varphi \wedge \psi) & (6.14) \\
(6.14) & \mathbf{K} \vdash & \neg(\Box\neg\varphi \wedge \Box\neg\psi) \leftrightarrow \neg\Box(\neg\varphi \wedge \neg\psi) & (6.15) \\
(6.15) & \mathbf{K} \vdash & (\neg\Box\neg\varphi \vee \neg\Box\neg\psi) \leftrightarrow \neg\Box\neg(\varphi \vee \psi) & (6.16) \\
(6.16) & \mathbf{K} \vdash & (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \leftrightarrow \Diamond(\varphi \vee \psi)) & (6.17)
\end{array}$$

$\Box$

6.1 $\mathbf{T}+5=\mathbf{S4}+B$

Nyní si ukážeme alternativní definici systému ***S5*** a to pomocí následujícího vztahu

$$\mathbf{S5}=\mathbf{T}+5=\mathbf{S4}+B$$

Důkaz: Nejprve dokážu inkluzi $\mathbf{T}+5\supseteq\mathbf{S4}+B$. Platnost $\mathbf{T}+5\supseteq\mathbf{S4}$ jsme již ukázali na straně 25. Stačí tedy ukázat $\mathbf{T}+5\vdash B$.

$$\begin{array}{rlll} (M) & \mathbf{T}+5 & \vdash & A\rightarrow\Diamond A \quad (6.18)\\ (5) & \mathbf{T}+5 & \vdash & \Diamond A\rightarrow\Box\Diamond A \quad (6.19)\\ (6.18, 6.19) & \mathbf{T}+5 & \vdash & A\rightarrow\Box\Diamond A \quad (6.20) \end{array}$$

Nyní dokážu opačnou inkluzi. Obdobně jako v předchozím případě jsme platnost $\mathbf{T}\subseteq\mathbf{S4}$ dokázali na straně 25. Zbývá dokázat $\mathbf{S4}+B\vdash 5$.

$$\begin{array}{rlll} (4) & \mathbf{S4}+B & \vdash & \Diamond\Diamond A\rightarrow\Diamond A \quad (6.21)\\ (6.21, Nec) & \mathbf{S4}+B & \vdash & \Box(\Diamond\Diamond A\rightarrow\Diamond A) \quad (6.22)\\ (K) & \mathbf{S4}+B & \vdash & \Box(\Diamond\Diamond A\rightarrow\Diamond A)\rightarrow(\Box\Diamond\Diamond A\rightarrow\Box\Diamond A) \quad (6.23)\\ (6.22, 6.23, MP) & \mathbf{S4}+B & \vdash & \Box\Diamond\Diamond A\rightarrow\Box\Diamond A \quad (6.24)\\ (B) & \mathbf{S4}+B & \vdash & \Diamond A\rightarrow\Box\Diamond\Diamond A \quad (6.25)\\ (6.24, 6.25) & \mathbf{S4}+B & \vdash & \Diamond A\rightarrow\Box\Diamond A \quad (6.26) \end{array}$$

□

6.2 Eliminovatelnost modalit v *S4* a *S5*

Z předchozí věty a zjištěné skutečnosti $\mathbf{S4}\subset\mathbf{S5}$ ihned vyplývá $\mathbf{S4}\not\vdash B$.

Formule $\Diamond\Box A\rightarrow\Box A$ je triviálně ekvivalentní axiomu *5*, takže vztahy

$$\mathbf{S5}\vdash\Diamond\Box A\rightarrow\Box A \quad (6.27)$$

$$\mathbf{S4}\not\vdash\Diamond\Box A\rightarrow\Box A \quad (6.28)$$

platí triviálně. Přesto na ně upozorním, protože je využijeme při následujícím důkazu.

Označme $X_{\Box\Diamond}$ libovolnou konečnou posloupnost □ a ◇. Nyní platí

$$\mathbf{S5}\vdash\Box A\leftrightarrow X_{\Box\Diamond}\Box A \quad (6.29)$$

$$\mathbf{S5}\vdash\Diamond A\leftrightarrow X_{\Box\Diamond}\Diamond A \quad (6.30)$$

To znamená, že v systému ***S5*** je každá konečná posloupnost □ a ◇ ekvivalentní jejímu poslednímu členu.

Důkaz: Stačí dokázat následující čtyři ekvivalence

$$\mathbf{S5} \vdash \Box A \leftrightarrow \Box\Box A \tag{6.31}$$
$$\mathbf{S5} \vdash \Box A \leftrightarrow \Diamond\Box A \tag{6.32}$$
$$\mathbf{S5} \vdash \Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond A \tag{6.33}$$
$$\mathbf{S5} \vdash \Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Diamond A \tag{6.34}$$

Důkaz:

$$(4) \quad \mathbf{S5} \vdash \Box A \rightarrow \Box\Box A \tag{6.35}$$
$$(M) \quad \mathbf{S5} \vdash \Box\Box A \rightarrow \Box A \tag{6.36}$$
$$(M) \quad \mathbf{S5} \vdash \Box A \rightarrow \Diamond\Box A \tag{6.37}$$
$$(5) \quad \mathbf{S5} \vdash \Diamond\Box A \rightarrow \Box A \tag{6.38}$$
$$(5) \quad \mathbf{S5} \vdash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A \tag{6.39}$$
$$(M) \quad \mathbf{S5} \vdash \Box\Diamond A \rightarrow \Diamond A \tag{6.40}$$
$$(M) \quad \mathbf{S5} \vdash \Diamond A \rightarrow \Diamond\Diamond A \tag{6.41}$$
$$(4) \quad \mathbf{S5} \vdash \Diamond\Diamond A \rightarrow \Diamond A \tag{6.42}$$

□

□

Z toho, jak jsme provedli předchozí důkaz, je zřejmé, že v ***S4*** platí následující ekvivalence:

$$\mathbf{S4} \vdash \Box A \leftrightarrow \Box\Box A \tag{6.43}$$
$$\mathbf{S4} \vdash \Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Diamond A \tag{6.44}$$

Zbývající dvě ekvivalence jsou platné pouze jedním směrem:

$$\mathbf{S4} \vdash \Box A \rightarrow \Diamond\Box A \tag{6.45}$$
$$\mathbf{S4} \vdash \Box\Diamond A \rightarrow \Diamond A \tag{6.46}$$

6.3 Příklady formulí dokazatených v *S5* a nedokazatelných v *S4*

Následující formule mají jedno společné. Žádná z nich není dokazatelná v ***S4***, ale všechny jsou dokazatelné v ***S5***. Navíc přidáme-li kteroukoliv z nich k axiomům ***S4***, získáme logiku, která je slabší než ***S5***.

Formule $\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$ je dokazatelná v ***S5***, není však dokazatelná v ***S4***. Formálně zapsáno:

$$\mathbf{S5} \vdash \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$$
$$\mathbf{S4} \nvdash \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$$

Důkaz: Nejprve ukážu $\mathbf{S4} \nvdash \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$. Vytvoříme Kripkovský model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ tak, že $W = \{u, v, w\}$, $R = \{(w, w), (v, v), (u, u), (w, v), (w, u)\}$. Zvolme libovolný atom $a \in (u \cap v \cap w)$. Valuační funkci nyní zvolíme tak, že $V_u(a) = T$, $V_v(a) = F$, ohodnocení na ostatních proměnných zvolíme libovolně. Nyní platí:

$$v_u(\Box a) = T \tag{6.47}$$

$$v_w(\Diamond\Box a) = T \tag{6.48}$$

$$v_v(\Diamond a) = F \tag{6.49}$$

$$v_w(\Box\Diamond a) = F \tag{6.50}$$

$$v_w(\Diamond\Box a \rightarrow \Box\Diamond a) = F \tag{6.51}$$

$$\mathcal{M} \not\models \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A \tag{6.52}$$

$$\mathbf{S4} \nvdash \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A \tag{6.53}$$

Nyní dokážu $\mathbf{S5} \vdash \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$.

$$\mathbf{S5} \vdash \Diamond\Box A \rightarrow \Box A \tag{6.54}$$

$$\mathbf{S5} \vdash \Box A \rightarrow \Diamond A \tag{6.55}$$

$$\mathbf{S5} \vdash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A \tag{6.56}$$

$$\mathbf{S5} \vdash \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A \tag{6.57}$$

□

Formule $\Box(\Box\varphi \rightarrow \psi) \vee \Box(\Box\psi \rightarrow \varphi)$ je dokazatelná v ***S5***, není však dokazatelná v ***S4***. Formálně zapsáno:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{S5} & \vdash & \Box(\Box\varphi \rightarrow \psi) \vee \Box(\Box\psi \rightarrow \varphi) \\ \mathbf{S4} & \nvdash & \Box(\Box\varphi \rightarrow \psi) \vee \Box(\Box\psi \rightarrow \varphi) \end{array}$$

Důkaz: Nejprve ukážu $\mathbf{S4} \nvdash \Box(\Box\varphi \rightarrow \psi) \vee \Box(\Box\psi \rightarrow \varphi)$. Vytvoříme Kripkovský model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ tak, že $W = \{u, v, w\}$, $R = \{(w, w), (v, v), (u, u), (w, v), (w, u)\}$. Zvolme libovolné atomy $a, b \in (u \cap v \cap w)$. Valuační funkci nyní zvolíme tak, že $V_u(a) = T$, $V_v(a) = F$, $V_u(b) = F$, $V_v(b) = T$, ohodnocení na ostatních proměnných zvolíme libovolně. Nyní platí:

$$v_u(\Box a) = T \tag{6.58}$$

$$v_u(\Box a \rightarrow b) = F \tag{6.59}$$

$$v_w(\Box(\Box a \rightarrow b)) = F \tag{6.60}$$

$$v_v(\Box b) = T \tag{6.61}$$

$$v_v(\Box b \rightarrow a) = F \tag{6.62}$$

$$v_w(\Box(\Box b \rightarrow a)) = F \tag{6.63}$$

$$v_w((\Box(\Box a \rightarrow b)) \vee (\Box(\Box b \rightarrow a))) = F \tag{6.64}$$

$$\mathcal{M} \not\models \Box(\Box\varphi \rightarrow \psi) \vee \Box(\Box\psi \rightarrow \varphi) \tag{6.65}$$

$$\mathbf{S4} \nvdash \Box(\Box\varphi \rightarrow \psi) \vee \Box(\Box\psi \rightarrow \varphi) \tag{6.66}$$

Nyní dokážu $\mathbf{S5} \vdash \Box(\Box\varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \to \varphi)$.

$$
\begin{array}{rlcll}
 & \mathbf{S5} & \vdash & \psi \to (\Box\varphi \to \psi) & (6.67)\\
(6.67, Nec) & \mathbf{S5} & \vdash & \Box(\psi \to (\Box\varphi \to \psi)) & (6.68)\\
(K) & \mathbf{S5} & \vdash & \Box(\psi \to (\Box\varphi \to \psi)) \to (\Box\psi \to \Box(\Box\varphi \to \psi)) & (6.69)\\
(6.68, 6.69, MP) & \mathbf{S5} & \vdash & \Box\psi \to \Box(\Box\varphi \to \psi) & (6.70)\\
 & \mathbf{S5} & \vdash & \neg\Box\varphi \to (\Box\varphi \to \psi)) & (6.71)\\
(6.71, Nec) & \mathbf{S5} & \vdash & \Box(\neg\Box\varphi \to (\Box\varphi \to \psi)) & (6.72)\\
(K) & \mathbf{S5} & \vdash & \Box(\neg\Box\varphi \to (\Box\varphi \to \psi)) \to (\Box\neg\Box\varphi \to \Box(\Box\varphi \to \psi)) & (6.73)\\
(6.72, 6.73, MP) & \mathbf{S5} & \vdash & \Box\neg\Box\varphi \to \Box(\Box\varphi \to \psi) & (6.74)\\
(6.74) & \mathbf{S5} & \vdash & \Box\Diamond\neg\varphi \to \Box(\Box\varphi \to \psi) & (6.75)\\
(5) & \mathbf{S5} & \vdash & \Diamond\neg\varphi \to \Box\Diamond\neg\varphi & (6.76)\\
(6.75, 6.76) & \mathbf{S5} & \vdash & \Diamond\neg\varphi \to \Box(\Box\varphi \to \psi) & (6.77)\\
(6.77) & \mathbf{S5} & \vdash & \neg\Box\varphi \to \Box(\Box\varphi \to \psi) & (6.78)\\
(6.70) & \mathbf{S5} & \vdash & \Box\varphi \to \Box(\Box\psi \to \varphi) & (6.79)\\
(6.78) & \mathbf{S5} & \vdash & \neg\Box\psi \to \Box(\Box\psi \to \varphi) & (6.80)\\
(6.70, 6.78) & \mathbf{S5} & \vdash & (\Box\psi \vee \neg\Box\varphi) \to \Box(\Box\varphi \to \psi) & (6.81)\\
(6.81) & \mathbf{S5} & \vdash & (\Box\psi \vee \neg\Box\varphi) \to (\Box(\Box\varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \to \varphi)) & (6.82)\\
(6.79, 6.80) & \mathbf{S5} & \vdash & (\Box\varphi \vee \neg\Box\psi) \to \Box(\Box\psi \to \varphi) & (6.83)\\
(6.83) & \mathbf{S5} & \vdash & (\Box\varphi \vee \neg\Box\psi) \to (\Box(\Box\varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \to \varphi)) & (6.84)\\
(6.82, 6.84) & \mathbf{S5} & \vdash & (\Box\varphi \vee \neg\Box\varphi \vee \Box\psi \vee \neg\Box\psi) \to (\Box(\Box\varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \to \varphi)) & \\
 & & & & (6.85)\\
 & \mathbf{S5} & \vdash & \Box\varphi \vee \neg\Box\varphi \vee \Box\psi \vee \neg\Box\psi & (6.86)\\
(6.85, 6.86, MP) & \mathbf{S5} & \vdash & \Box(\Box\varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \to \varphi) & (6.87)
\end{array}
$$

□

Závěr

V této práci jsem se pokusil ukázat přehled základních systémů modálních logik. Podařilo se nadefinovat běžně používané systémy ***K***, ***T***, ***S4***, ***S5*** a ***D***. Ostatní méně známé systémy jsem však nedefinoval. Dva z těchto systémů jsem ale použil v poslední kapitole k demonstraci formule mezi ***S4*** a ***S5***. Jedná se konkrétně o systémy $\mathbf{S4.2} = \mathbf{S4} + \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$ a $\mathbf{S4.3} = \mathbf{S4} + \Box(\Box\varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \to \varphi)$. Jiné systémy, které jsou často mimo námi utvořenou hierarchii, jsem již nezmínil.

Námi definované systémy jsem seřadil podle jejich síly. K tomuto uspořádání jsem předvedl důkaz, který jej potvrzuje. Tento důkaz, stejně jako většinu důkazů použitých v této práci, jsem vytvořil samostatně. Z literatury jsem převzal pouze důkaz $\mathbf{S5} \vdash 4$ a důkaz úplnosti modálních systémů vůči Kripkovské sémantice, který byl převzat z [5].

V závěrečné části práce jsem ukázal na známé rozdíly mezi systémy ***S4*** a ***S5***. Také jsem předvedl některé formule, které leží mezi systémy ***S4*** a ***S5***.

Musím ještě poznamenat, že úkolem této práce nebylo nalézt „nejlepší“ axiomatický systém pro modální logiku. Žádný takový systém ani nemůže existovat, protože pro každou interpretaci funkce $\Box$ je vhodný jiný axiomatický systém. V této práci jsem se pouze snažil porovnat axiomatické systémy z hlediska formálního. Ačkoli jsem srovnal sílu všech námi definovaných systémů, lze stále nlézt velké množství formulí, u kterých bychom mohli rozhodnout, ve kterém systému jsou dokazatelné. Proto jsem se alespoň pokusil naznačit jakým způsobem by se dala ukázat dokazatelnost a nedokazatelnost takových formulí v jednotlivých systémech. Přesto jsem nezmínil Hintikův systém pro hledání Kripkovských protipříkladů dané formule. Tento systém jsem nedefinoval, protože v žádném z předvedených důkazů, jej nebylo zapotřebí.

Z těchto důvodů nemůže být tato práce chápána jako vyčerpávající úvod do problému *Modální logiky*, ale pouze jako formální pohled na základní modální systémy. Zájemcům o bližší studium doporučuji zejména [5].

Literatura

[1] Jirků, P. Knowledge, Epistemology and Epistemic Logic

[2] Berka, K. Stručné dějiny logiky. Karolinum 1994

[3] Švejdar, V. Logika. Academia 2002

[4] Burgess, J. P. Kripke models.

[5] Chargov, A. & Zakharyaschev, M. Modal Logic. Clarendon press, Oxford 1997

[6] Kripke, S. A. A completeness theorem in Modal logic. The Journal of Symbolic Logic 1959

[7] Wikipedia, the free encyclopedia

Anotace

Tato diplomová práce se zabývá modálními logikami z formálního pohledu. Jsou v ní definovány základní formální systémy a jsou předvedeny hlavní vztahy mezi nimi.

Klíčová slova

Modální logika; Formální logika