



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Jan Střeleček

**Vliv jednotlivých galaxií na gravitační  
čočkování kupou galaxií**

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.

Studijní program: fyzika

Studijní obor: obecná fyzika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Především děkuji Mgr. Davidu Heyrovskému, Ph.D. za obsáhlé konzultace k danému tématu a konstruktivní připomínky k samotné práci. Dále děkuji Mgr. Michalu Karamazovi za poskytnutí jeho výpočtů pro kontrolu a vylepšení mnou používaných programů a celé řadě dalších fyziků, kteří se již v historii danou problematikou zabývali.

Název práce: Vliv jednotlivých galaxií na gravitační čočkování kupou galaxií

Autor: Jan Střeleček

Ústav teoretické fyziky: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: V rámci práce je zkoumáno gravitační čočkování kupou galaxií s důrazem na lokální vliv jednotlivých galaxií kupy. Kupě svou hmotností dominuje halo temné hmoty, které lze popsat hustotním profilem Navarro, Frenka a Whitea. V našem modelu je používáno sférické halo řídicí se tímto profilem a hmotné body jako nejjednodušší aproximace působení jednotlivých galaxií. Analýza vlivu parametrů hala na režimy gravitačního čočkování tohoto kombinovaného modelu prokázala výraznou symetrii, na základě které lze z parametrů modelu určit charakter kritické křivky a kaustické struktury. V práci je dále popsána numericky výhodnější úprava celého modelu a analyzováno několik konkrétních případů kombinovaného modelu se dvěma galaxiemi.

Klíčová slova: gravitační čočkování, kritické křivky, kaustiky, NFW, halo temné hmoty

Title: Imprint of individual galaxies on gravitational lensing by galaxy clusters

Author: Jan Střeleček

Institute of Theoretical Physics: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. David Heyrovský, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: The aim of this work is to study gravitational lensing of galaxy–cluster halos influenced by individual galaxies in the halo. The halo mass is generally dominated by dark matter, which can be described using a Navarro, Frenk–White density profile. In our model, we use a spherical halo defined by this model and point masses as simplest approximation for individual galaxies. The analysis of halo–parameter influence on gravitational lensing regimes of the combined model yields a complete parameter–space map of critical curves and caustics. In addition we present an adaptation that makes this model numerically more advantageous and we illustrate special cases of the combined influence of two galaxies.

Keywords: gravitational lensing, critical curves, caustics, NFW, dark matter halo

# Obsah

Seznam používaného značení	2
Úvod	3
<b>1 Gravitační čočkování</b>	<b>4</b>
1.1 Čočkovací potenciál a zjasnění . . . . .	5
1.2 Einsteinův poloměr . . . . .	6
1.3 Jednotky . . . . .	6
1.4 Kritické křivky a kaustiky . . . . .	7
<b>2 Čočkování komponentami modelu</b>	<b>9</b>
2.1 Hmotný bod . . . . .	9
2.2 Model Navarro Frenka a Whitea . . . . .	10
2.2.1 Volné parametry NFW modelu . . . . .	11
2.2.2 Gravitační čočkování NFW halem . . . . .	12
<b>3 Kombinovaný model s fixním NFW profilem hala</b>	<b>15</b>
3.1 Možné tvary kritických křivek a kaustik kombinovaného modelu . . . . .	16
<b>4 Kombinovaný model s různými NFW profily hala</b>	<b>19</b>
4.1 Polohy spojných bodů . . . . .	19
<b>5 Kombinovaný model se sféricky omezeným NFW profilem</b>	<b>23</b>
5.1 Úhel odklonu pro sféricky omezený NFW profil . . . . .	23
5.2 Srovnání čočkování kombinovaných modelů . . . . .	24
<b>6 Kombinovaný model se dvěma hmotnými body</b>	<b>29</b>
6.1 Dva stejně hmotné body podél radiální osy . . . . .	29
6.2 Obecná poloha druhého hmotného bodu . . . . .	29
<b>7 Numerické problémy a aproximace</b>	<b>36</b>
<b>Závěr</b>	<b>38</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>39</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>40</b>
<b>A Přílohy</b>	<b>42</b>
A.1 Kód pro nalezení kritické křivky a kaustiky . . . . .	42

# Seznam používaného značení

Veličina	SI	Einsteinův poloměr	Jednotky úhlového škálového parametru	Přepoččet
poloha zdroje:	$\beta$	$\beta^*$	$\mathbf{y}$	$\beta^*/\theta_s^* = \beta/\theta_s = \mathbf{y}$
poloha obrazu:	$\theta$	$\theta^*$	$\mathbf{x}$	$\theta^*/\theta_s^* = \theta/\theta_s = \mathbf{x}$
úhlová odchylka u pozorovatele:	$\alpha$	$\alpha^*$	$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	$\alpha^*/\theta_s^* = \alpha/\theta_s = \mathbf{a}$
úhlová škála NFW modelu:	$\theta_s$	$\theta_s^*$	1	$\theta_s = r_s/D_L = \theta_s^*\theta_E$

Značení	Veličina	Přepoččet
$\mathcal{A}$	Jacobiho matice čočkování	$\mathcal{A}_{ij} =  \partial\beta_i/\partial\theta_j $
$c$	rychlost světla	—
$c_{200}$	koncentrační parametr kupy	$c_{200} = r_{200}/r_s$
$\delta$	Kroneckerovo delta	—
$D_S$	vzdálenost zdroj–pozorovatel	—
$D_L$	vzdálenost čočka–pozorovatel	—
$D_{LS}$	vzdálenost zdroj–čočka	—
$\Phi$	gravitační potenciál	—
$G$	gravitační konstanta	—
$\gamma$	shear	—
$H$	Hubbleův parametr	—
$H_0$	Hubbleova konstanta	—
$\kappa_p$	hmotnostní parametr galaxie	$\kappa_p = \sigma/\theta_s^2$
$\kappa_s$	hustotní parametr modelu NFW	—
$\mu$	zjasnění obrazu bodového zdroje	$\mu = 1/ \det \mathcal{A} $
$\Omega_M$	hustotní parametr hmoty	—
$\Omega_\Lambda$	hustotní parametr vakua	—
$r_{200}$	poloměr kupy, uvnitř kterého je průměrná hustota rovna $200\rho_{cr}$	$r_{200} = r_s c_{200}$
$r_s$	škálový poloměr kupy	—
$\rho_{cr}$	kritická hustota vesmíru	$\rho_{cr} = 3H^2/8\pi G$
$\rho_s$	charakteristická hustota modelu NFW	—
$\sigma$	relativní hmotnost galaxie vůči kupě	—
$\psi$	čočkovací potenciál	—
$\theta_E$	úhlový Einsteinův poloměr kupy	—
$\xi$	vzd. středu čočky od paprsku v rovině čočky	$\xi = D_L\theta$
$z_c$	rudý posuv	—

# Úvod

Současné modely vesmíru často připouštějí existenci hmoty, kterou lze pozorovat pouze skrz její gravitační vliv. Jelikož podle dosavadních měření tato hmota neinteraguje elektromagnetickou silou, byl jí přiřazen název *temná hmota*. Její existence dokáže např. vysvětlit hmotnosti některých galaxií, či rozložení orbitálních rychlostí objektů v nich. Máme však i přímější pozorování, jako ohyb světla kolem míst ve vesmíru, kde potřebné množství baryonické hmoty pozorováno nebylo, a právě zkoumáním těchto objektů se zabývá *gravitační čočkování*.

Jedním z hlavních cílů gravitačního čočkování je pochopení toho, jak se temná hmota shlukuje, jak gravitačně působí, a doufejme, i co temná hmota je. Pro začátek je však třeba porozumět tomu, co pomocí teleskopů vidíme. Z pozorovaných tvarů, počtu a svítivosti obrazů vesmírných objektů v pozadí lze zmapovat rozložení hmoty v čočkujícím objektu.

Cílem této práce bylo zkoumat čočkovací vlastnosti kup galaxií dominovaných spojitě rozloženou temnou hmotou. Rozložení hmoty kupy lze popsat profilem Navarro, Frenka a Whitea (NFW), viz Navarro a kol. (1996), vycházejícího ze statistických zpracování rozložení hmoty v kupách galaxií, který i přes svou jednoduchost poskytuje vhodnou aproximaci pro hala temné hmoty. Pro vliv jednotlivých galaxií byly zvoleny hmotné body, které lze zde chápat jako perturbaci čočkování halem.

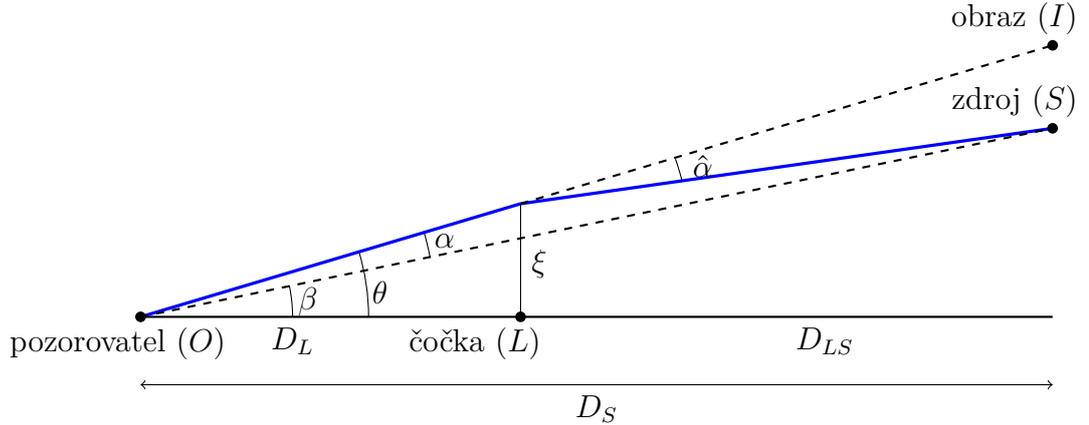
Kapitola 1 se zabývá některými obecnými vlastnostmi gravitačního čočkování a kapitola 2 obecnými vlastnostmi modelu NFW. Kombinovaný model NFW s hmotným bodem již byl částečně zmapován pro konkrétní parametry hala v rámci bakalářské práce Lukáše Timka (Timko, 2017), což je v rámci kapitoly 3 rozšířeno. Kapitola 4 se zabývá chováním modelu při změně parametrů hala, kapitola 5 pak modelem s podobným rozložením hmoty NFW, který více odpovídá intuici o rozložení hmoty v kupách galaxií. V rámci kapitoly 6 jsou zmapovány některé konkrétní situace, ke kterým může dojít při sperturování NFW modelu dvěma galaxiemi. V poslední kapitole 7 jsou diskutovány některé numerické problémy spojené s použitými modely.

# 1. Gravitační čočkování

Režim *slabého čočkování*, kterým se po celou dobu budeme zabývat vychází z postnewtonovské aproximace. V rámci obecné teorie relativity je používán rozvoj metrického tenzoru do prvního řádu

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2\Phi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2\Phi}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{2\Phi}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{2\Phi}{c^2} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

pro Minkowského metrický tenzor  $\eta_{\mu\nu}$  a tenzor  $h_{\mu\nu}$  jakožto lineární člen rozvoje gravitačního potenciálu  $\Phi$ . Často se uvažují rozvoje vyšších řádů (Meneghetti, 2016), které jdou nad rámec této práce. Obr. 1.1 znázorňuje situace, kdy paprsek (značený modře) vycházející ze zdroje  $S$  (světelný zdroj v pozadí, např. jiná kupa galaxií) prolétá gravitačním polem kupy, která zde funguje jako *gravitační čočka*  $L$ . V rovině čočky paprsek prolétá v kolmé vzdálenosti  $\xi$  od osy  $OL$  a pokračuje směrem k pozorovateli  $O$ . V důsledku toho je světelný zdroj pozorován pod úhlem  $\theta$ , místo jeho skutečné polohy  $\beta$ . *Redukovaný úhel odklonu* se definuje  $\alpha = \theta - \beta$  a pro *úhel odklonu* pak platí  $\hat{\alpha} = \alpha D_{LS}/D_S$ .



Obrázek 1.1: Schéma ohybu světelného paprsku (modře) gravitační čočkou

Úhel odklonu paprsku procházejícího ve vzdálenosti  $\xi$  pro axiálně symetrickou čočku lze vyjádřit ze znalosti hmotnosti čočky  $M(\xi)$  pod poloměrem  $\xi$ , rychlosti světla  $c$  a gravitační konstanty  $G$ , jako

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM(\xi)}{c^2\xi}. \quad (1.2)$$

Pro zjištění hmotnosti je obvykle integrována hustota  $\rho$  přes válcovou oblast poloměru  $\xi$  protaženou v podélné souřadnici  $z$  od centra čočky na obě strany do asymptotické vzdálenosti, neboli

$$M(\xi) = \int_{|\xi'| < \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi', z) dz d^2\xi' \equiv \int_{|\xi'| < \xi} \Sigma(\xi') d^2\xi', \quad (1.3)$$

kde se zavádí *plošná hustota*

$$\Sigma(\boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\boldsymbol{\xi}, z) dz. \quad (1.4)$$

Vztah mezi polohou obrazu a zdroje lze vyjádřit tzv. *čočkovací rovnicí*

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}), \quad (1.5)$$

psanou vektorově, jelikož čočka obecně nemusí být axiálně symetrická. Kvůli malé obloukové míře úhlů  $\beta := |\boldsymbol{\beta}|$ ,  $\alpha := |\boldsymbol{\alpha}|$ ,  $\hat{\alpha} := |\hat{\boldsymbol{\alpha}}|$  platí aproximace

$$\xi(\theta) = D_L \theta, \quad (1.6)$$

pročež čočkovací rovnice (1.5) přechází do tvaru

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} - \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \frac{4GM(\theta)}{c^2} \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta^2} \quad (1.7)$$

Pro jednu polohu zdroje dle této rovnice může existovat více obrazů. Naopak pokud jsou rozložení hmoty  $M(\theta)$  a polohy obrazů známé, je nalezení polohy zdroje dle rovnice (1.7) jednoznačná úloha.

Podrobnější poznámky lze nalézt např. v knize od autorů Narayan a Bartelmann (1996, kap. 1.2).

## 1.1 Čočkovací potenciál a zjasnění

Na základě gravitačního potenciálu  $\Phi \equiv \Phi(\boldsymbol{\xi}, z)$  lze definovat čočkovací potenciál

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \frac{2}{c^2} \int \Phi(D_L \boldsymbol{\theta}, z) dz. \quad (1.8)$$

Pro takto zavedený potenciál platí

$$\alpha_i = \frac{\partial \psi}{\partial \theta_i}. \quad (1.9)$$

Dále se zavádí Jacobiho matice  $\mathcal{A}$  vztahem

$$\mathcal{A}_{ij} := \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \equiv \delta_{ij} - \psi_{,ij}(\boldsymbol{\theta}) \quad (1.10)$$

kde druhá rovnost plyne z čočkovací rovnice a v poslední rovnosti je využito zkrácené značení pro derivaci.

V oboru gravitačního čočkování je obecně definována *konvergence*

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\Sigma(D_L \boldsymbol{\theta})}{\Sigma_{cr}}, \quad (1.11)$$

pro *kritickou hustotu*

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_L D_{LS}}. \quad (1.12)$$

Pro konvergenci  $\kappa$  s využitím sumační konvence pak platí

$$\psi_{,ii} = 2\kappa(\boldsymbol{\theta}). \quad (1.13)$$

Dalším důležitým pojmem je *shear*

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_{,11}(\boldsymbol{\theta}) - \psi_{,22}(\boldsymbol{\theta}) \\ 2\psi_{,12}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\phi \\ \sin 2\phi \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

kde je druhou rovností zavedena parametrizace pomocí úhlu  $\phi$ , definovaného  $\boldsymbol{\xi} = \xi(\cos \phi, \sin \phi)$ . Pak lze psát Jacobiho matici ve tvaru

$$\mathcal{A} = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Při gravitačním čočkování je zachován plošný jas, ale obecně dochází k úhlovému zvětšení obrazů a s ním souvisejícímu zjasnění jejich světelného toku. Zjasnění v dané poloze  $\xi$  je obecně definováno, jako poměr plochy infinitezimálního obrazu a plochy příslušného infinitezimálního zdroje. Pro axiálně symetrickou čočku vyjde

$$\mu := \frac{\theta}{\beta} \left| \frac{d\theta}{d\beta} \right|, \quad (1.16)$$

které lze v obecném případě zapsat, jako převrácenou hodnotu jakobiánu

$$\mu = \frac{1}{|\det \mathcal{A}|} = \frac{1}{|(1 - \kappa)^2 - \gamma^2|}. \quad (1.17)$$

(Narayan a Bartelmann, 1996, kap. 1.3), (Wambsganss, 1998, kap. 3.6).

## 1.2 Einsteinův poloměr

Pro klasifikaci rozličných systémů, lišících se ve hmotnosti a vzdálenostech  $D_{LS}$ ,  $D_L$ ,  $D_S$  je zaváděno škálování pomocí *Einsteinova poloměru*. V případě, kdy bodový zdroj, bodová čočka hmotnosti  $M$  i pozorovatel jsou na jedné ose, musí být obrazem zdroje kružnice (tzv. Einsteinova kružnice), jejíž úhlový poloměr se definuje jako Einsteinův (Narayan a Bartelmann, 1996, kap. 1.2.1.4). Ten lze vyjádřit z čočkovací rovnice (1.7) položením  $\beta = 0$  a  $M(\theta) = M$ , jako

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}. \quad (1.18)$$

## 1.3 Jednotky

Pro eliminaci některých volných parametrů se často používají jednotky Einsteinova poloměru, v případě NFW modelu pak lze využít jednotky úhlového škálového parametru. Pro úhly v radiánech bylo nadále použito značení  $\beta$ ,  $\boldsymbol{\theta}$ .

## Přechod k jednotkám Einsteinova poloměru

Úhly v jednotkách Einsteinova poloměru budou nadále značeny hvězdičkou v horním indexu, tedy čočkovací rovnice má přepisem rovnice (1.5) tvar

$$\boldsymbol{\beta}^* = \boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\theta}^*), \quad (1.19)$$

kde  $\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\theta}/\theta_E$ ,  $\boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\alpha}/\theta_E$ . Škálový poloměr NFW kupy  $r_s$  lze převést na úhlový škálový poloměr  $\theta_s = r_s/D_L$ , v jednotkách Einsteinova poloměru je pak

$$\theta_s^* = \frac{r_s}{D_L\theta_E}. \quad (1.20)$$

## Úhlový škálový poloměr

Nově je definována zdroje a obrazu v jednotkách  $\theta_s$

$$\mathbf{y} := \frac{\boldsymbol{\beta}^*}{\theta_s^*} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\theta_s}; \quad \mathbf{x} := \frac{\boldsymbol{\theta}^*}{\theta_s^*} = \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta_s}; \quad \mathbf{a} := \frac{\boldsymbol{\alpha}^*}{\theta_s^*} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta_s}, \quad (1.21)$$

ve kterých je čočkovací rovnice

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (1.22)$$

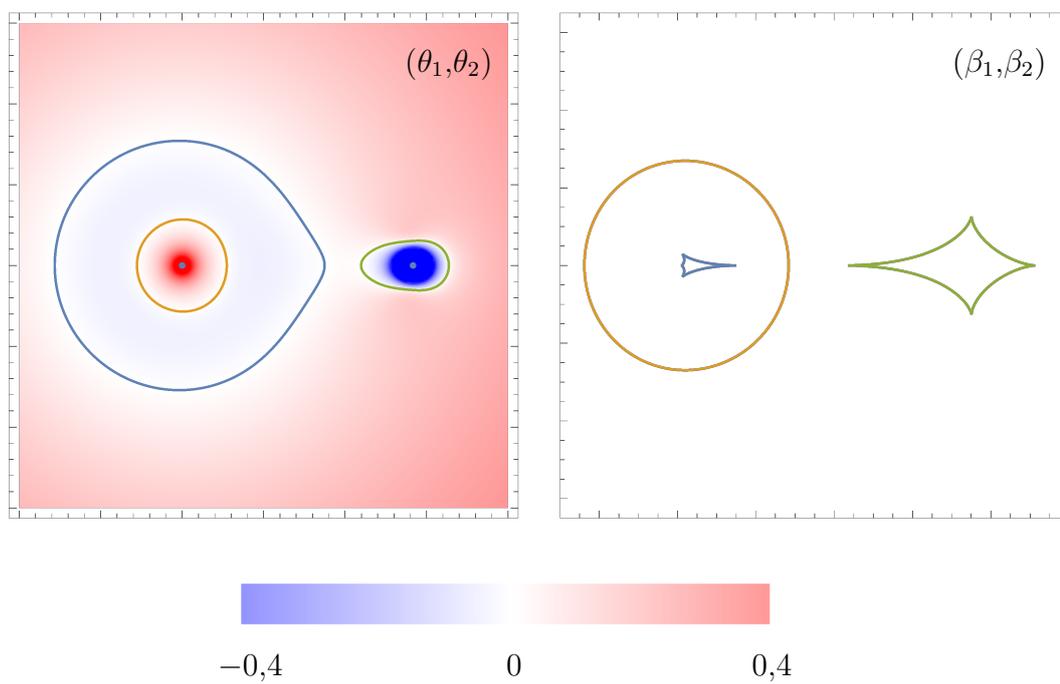
## 1.4 Kritické křivky a kaustiky

Z rovnice čočkovací rovnice a definice zjasnění (1.17) vyplývá, že pro určité parametry mohou existovat polohy obrazu s nekonečným zjasněním. Tyto body, def.  $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ , se vyznačují nulovým Jakobiánem zjasnění

$$\det \mathcal{A}(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = 0. \quad (1.23)$$

Vzhledem k charakteru používaných rovnic jsou tyto body většinou spojeny do křivek v rovině  $(\theta_1, \theta_2)$ , proto se souboru těchto bodů říká *kritická křivka*. Té přísluší křivka v rovině zdroje  $(\beta_1(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2), \beta_2(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2))$ , tzv. *kaustika* a lze ji dopočítat z čočkovací rovnice. Na Obrázku 1.2 je znázorněna situace silné gravitační čočky (konkrétně model NFW, viz kapitola 2.2) a hmotného bodu o nižší hmotnosti. Linky v levém panelu vyznačují kritickou křivku. Hodnoty Jakobiánu jsou vyznačeny barevně. Bílá barva na křivce odpovídá nulovému jakobiánu, modrá zápornému a červená kladnému. Barvy jednotlivých částí kaustiky odpovídají barvám příslušných částí kritické křivky v levém panelu.

Znalost kaustik je důležitá při analýze pozorování, jelikož pokud zdroj leží na kaustice, dochází k extrémnímu zjasnění příslušných obrazů, které jsou protažené podél příslušné kritické křivky. Další důležitou vlastností kaustiky je, že při přechodu zdroje přes ni se mění počet vytvořených obrazů, konkrétně vznikají, či zanikají právě dva obrazy (Narayan a Bartelmann, 1996, kap. 1.2).



Obrázek 1.2: Jakobián zjasnění s vyznačenou kritickou křivkou (vlevo), kaustická struktura (vpravo). Legenda je v rozsahu  $(-0,4; 0,4)$  kvůli vzhledem k příliš vysokým hodnotám Jakobiánu v blízkosti centra hala a hmotného bodu.

## 2. Čočkování komponentami modelu

Nejjednodušším sféricky symetrickým modelem je *hmotný bod*. Ač se rozložené hustoty ve vesmírných objektech, jako např. galaxiích, kup galaxií, či hal temné hmoty řídí obecně složitými předpisy, lze hmotný bod využít pro popis účinku příslušně hmotného objektu na čočkování kupou. Tímto modelem může být model Navarro, Frenka a Whitea, kterým lze aproximovat rozložení hmoty v kupě galaxií dominované temnou hmotou. Dále se často využívá modelů singulární izotermální sféry, či elipsoidálního modelu (Wambsganss, 1998, kap. 3.5). Cílem rozboru jednoduchých modelů je obvykle explicitní tvar čočkovací rovnice, jejíž znalost je postačující pro analýzu kritické křivky a kaustiky.

### 2.1 Hmotný bod

Rozložení hustoty hmotného bodu lze popsat pomocí Diracovy delta distribuce umístěné v počátku. Deflekční úhel je dle Meneghetti (2016, kap. 3.1)

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 D_L \theta} \quad (2.1)$$

a čočkovací potenciál

$$\psi = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \ln \theta. \quad (2.2)$$

Z toho plyne čočkovací rovnice

$$\beta = \theta - \frac{4GM D_{LS}}{c^2 D_L D_S} \frac{1}{\theta} = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}, \quad (2.3)$$

kde bylo využito definici Einsteinova poloměru (1.18). Tato rovnice má vždy právě dvě řešení pro  $\theta$ , a sice v jednotkách Einsteinova poloměru

$$\theta_{\pm}^* = \frac{1}{2} \left( \beta^* \pm \sqrt{\beta^{*2} - 4} \right), \quad (2.4)$$

z čehož vyplývá existence dvou obrazů pro libovolnou polohu zdroje.

Z čočkovací rovnice lze pak ze vztahu pro sféricky symetrickou čočku (1.16) odvodit přímým výpočtem dopočítat zjasnění

$$\mu = \frac{1}{|1 - \theta^{*-4}|}. \quad (2.5)$$

Dosadí-li se do tohoto vztahu hodnoty  $\theta_{\pm}^*$ , dostaneme v limitě  $\lim_{\beta^* \rightarrow \infty} \mu_- = 0$ ,  $\lim_{\beta^* \rightarrow \infty} \mu_+ = 1$ . Tedy jak uvádí Narayan a Bartelmann (1996), ač pro každý zdroj existují 2 obrazy, jeden z nich může vymizet v důsledku nulového zjasnění.

## 2.2 Model Navarro Frenka a Whitea

Model Navarro, Frenka a Whitea (NFW), viz Navarro a kol. (1996), pochází z numerické analýzy modelů hal temné hmoty a lze ve sférických souřadnicích definovat vztahem

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}, \quad (2.6)$$

kde  $r$  je vzdálenost od centra hala,  $r_s$  škálový poloměr a  $\rho_s$  charakteristická hustota modelu NFW. Definujme *koncentrační parametr*

$$c_{200} := r_{200}/r_s \quad (2.7)$$

ve vzdálenosti od centra hala  $r_{200}$ , pod kterou je průměrná hustota hala rovna dvoustnásobku kritické hustoty vesmíru  $\rho_{cr} := 3H^2/8\pi G$ , kde  $H$  je Hubbleův parametr závisující na rudém posuvu a  $G$  gravitační konstanta. Hmotnost pod poloměrem  $r_{200}$  je

$$M = \int_0^{r_{200}} 4\pi r^2 \rho(r) dr, \quad (2.8)$$

což lze na základě

$$\rho_s = \frac{200}{3} \rho_{cr} \frac{c_{200}^3}{\ln(c_{200} + 1) - \frac{c_{200}}{c_{200}+1}}, \quad (2.9)$$

viz Schnaider (2006, kap. 7.5.4), přepsat do tvaru

$$M = 4\pi r_s^3 \rho_s \left[ \ln(c_{200} + 1) - \frac{c_{200}}{c_{200} + 1} \right]. \quad (2.10)$$

NFW model lze popsat ze znalosti čočkovacího potenciálu. Definujme nejprve konstantu

$$\kappa_s := \frac{\rho_s r_s}{\Sigma_{cr}} = \frac{1}{4 \left[ \ln(c_{200} + 1) - \frac{c_{200}}{c_{200}+1} \right] \theta_s^2}, \quad (2.11)$$

kde kritická hustota byla zavedena vztahem (1.12)

Pak lze dle rovnice (Meneghetti (2016)) v jednotkách úhlového škálového parametru, tedy pro  $x = \theta/\theta_s$  pro

$$g(x) := \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{x}{2}\right) + \begin{cases} -2 \operatorname{arctanh}^2\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) & ; x < 1 \\ 0 & ; x = 1 \\ 2 \operatorname{arctan}^2\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) & ; x > 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

zapsat čočkovací potenciál

$$\psi(x) = 4\kappa_s g(x) \theta_s^2, \quad (2.13)$$

jehož derivováním dle rovnice (1.10) lze získat jakobián  $\mathcal{A}$  a zjasnění jako jeho převrácenou hodnotu.

Jiný přístup spočívá v přímé integraci

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{4GD_L}{c^2} \Sigma_{cr} \int \kappa \left( \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta_s \theta_E} \right) \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} d^2 \boldsymbol{\theta}', \quad (2.14)$$

kde  $\kappa$  je *konvergence*, pro kterou platí (Meneghetti, 2016, kap. 3.2.3)

$$\kappa(x) = 2\kappa_s \frac{1 - F(x)}{x^2 - 1} \quad (2.15)$$

pro

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctanh} \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} & ; x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \\ \frac{\operatorname{arctan} \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} & ; x > 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Čočkovací rovnice je v jednotkách Einsteinova poloměru

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}^* - \frac{\ln \left( \frac{\theta^*}{2\theta_s^*} \right) + F \left( \frac{\theta^*}{\theta_s^*} \right)}{\ln(c_{200} + 1) - \frac{c_{200}}{c_{200}+1}} \frac{\boldsymbol{\theta}^*}{\theta^{*2}} \quad (2.17)$$

a v jednotkách úhlového škálového parametru

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - 4\kappa_s \left[ \ln \frac{x}{2} + F(x) \right] \frac{\boldsymbol{x}}{x^2}, \quad (2.18)$$

ve kterých dochází k eliminaci jednoho volného parametru. Místo parametrů  $\theta_s^*$ ,  $c_{200}$  je zde využíváno jediného parametru  $\kappa_s$ , čehož bude později využito při analýze kritických křivek a kaustik.

## 2.2.1 Volné parametry NFW modelu

Jak bylo výše zmíněno, má NFW model dva volné parametry, a sice škálovací  $r_s$  a koncentrační  $c_{200}$ . Souvislostí mezi koncentračními parametry kup a jejich hmotnostmi se zabýval projekt založený na datech OmegaWINGS (Biviano a kol., 2017). Parametry  $\theta_s^* = r_{-2}/\theta_E$  a  $c_{200} = r_{200}/r_{-2}$  byly dopočítány z Tabulky B.1. z této publikace. Vzdálenost kupy  $D_L$  byla zjištěna z rudého posuvu  $z_c$  pomocí online nástroje CosmosCalc<sup>1</sup> s uvážením Hubbleovy konstanty<sup>2</sup>  $H_0 = 67,4 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ , hustotního parametru baryonové hmoty  $\Omega_M = 0,315$  a hustotního parametru vakua  $\Omega_L = 0,685$ . Je tedy pracováno v plochem vesmíru  $\Omega_M + \Omega_L = 1$ . Hmotnost  $M$  bylo nutné odečíst pro příslušná  $c_{200}$  z grafu na Obr. 4 stejné publikace.

Takto přepočítané hodnoty  $c_{200}$ ,  $\theta_s^*$  jsou označeny na Obr. 2.1 černě, společně s proloženou závislostí pro NFW, fitovanou metodou nejmenších čtverců, která může soužit pro volbu testovacích parametrů. Fitován zde byl předpis  $\theta_s^* = A + B \cdot c_{200}^C$  s volnými parametry  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a metodou nejmenších čtverců byl stanoven

$$\theta_s^* = -0,30(1,5) + 11(1,3) \cdot c_{200}^{-0,95(0,28)} \quad (2.19)$$

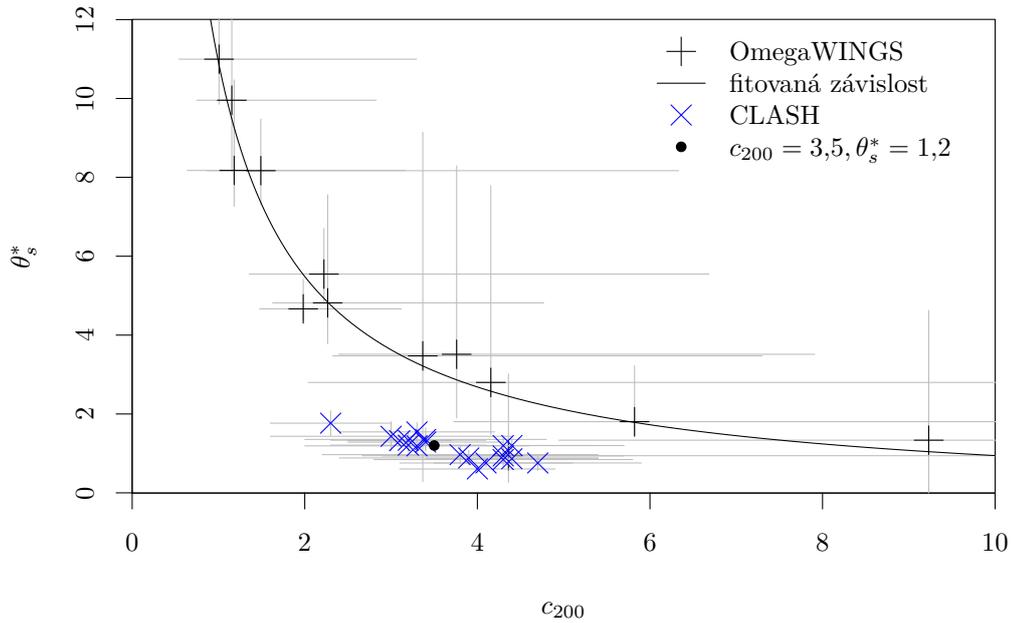
<sup>1</sup><http://www.astro.ucla.edu/wright/CosmoCalc.html> (2020)

<sup>2</sup>na základě projektu Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), oficiální webová stránka projektu <https://map.gsfc.nasa.gov>, (2020)

s  $1\sigma$  nejistotami fitovaných parametrů uvedených v závorkách. Platnost tohoto vztahu je omezena pouze na rozmezí fitovaných hodnot  $c_{200}$ .

V práci Timko (2017) byla použita data z projektu Cluster Lensing and Supernova Survey with Hubble (CLASH), viz Merten a kol. (2015), dle kterých byly za výchozí parametry zvoleny  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$ . Hodnoty z CLASH jsou v grafu na Obr. 2.1 vyneseny modře spolu s výchozími parametry  $c_{200}$  a  $\theta_s^*$  (černě). Z grafu je mimo jiné patrné, že analýzy různých týmů dávají systematicky odlišné závislosti. V obou případech (OmegaWINGS, CLASH) je patrná korelace mezi oběma parametry, navíc je nutné nezapomínat na vliv výběrových

r z  
C



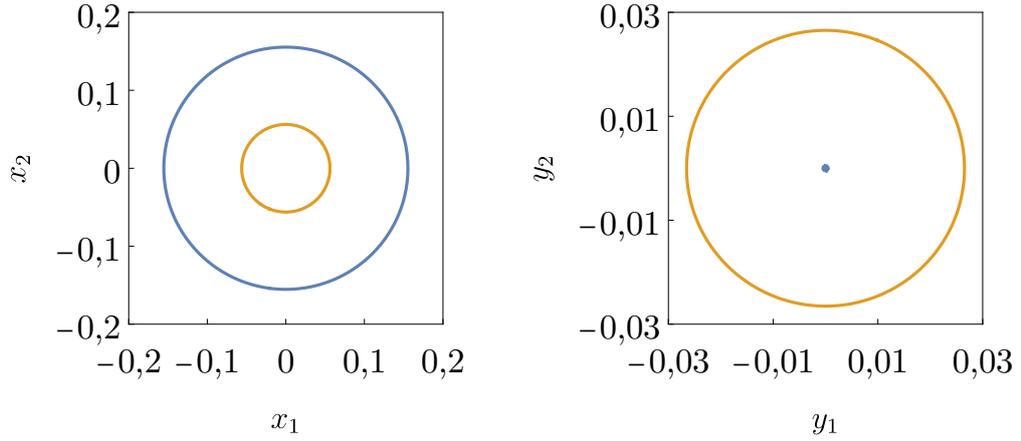
Obrázek 2.1: Hodnoty  $\theta_s^*$  v závislosti na koncentračním parametru  $c_{200}$  pro některé kupy galaxií dle dvou různých měření, šedě jsou vyznačeny  $1\sigma$  odchylky.

## 2.2.2 Gravitační čočkování NFW halem

Kritické křivky axiálně symetrických modelů se rozdělují na *radiální* a *tangenciální* podle směru protažení obrazu při přechodu zdroje přes příslušnou část kaustiky. U tangenciální části kritické křivky je protažení tečné podél příslušné kružnice, u radiální je k ní kolmé. Znázorněny jsou na Obrázku 2.2. Radiální část kritické křivky se kvůli axiální symetrii zobrazí opět na kružnici ve zdrojové rovině a tangenciální část kritické křivky odpovídá centrální bodové části kaustiky.

Kontury konstantního  $\kappa_s$  zavedeného rovnicí 2.11 jsou zobrazeny v grafu na Obr. 2.3 společně s daty OmegaWINGS a CLASH a vynesenu konturou  $\kappa_s$  odpovídající parametrům  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$ .

Implicitní předpis závislosti poloměrů částí kritické křivky lze získat z roze-psání definičního vztahu pro kritickou křivku  $0 = \det \mathcal{A}$ , což lze dle Timko (2017)



Obrázek 2.2: Kritická křivka NFW modelu (vlevo) a odpovídající kaustika (vpravo) pro  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$ . Modře je vyznačena tangenciální a oranžově radiální část kritické křivky.

upravit do tvaru

$$\det \mathcal{A} = 1 - 4\kappa_s \frac{1 - F(x)}{x^2 - 1} + 16\kappa_s^2 \left[ \frac{(1 - F(x)) \left( \ln \frac{x}{2} + F(x) \right)}{x^2(x^2 - 1)} - \frac{\left( \ln \frac{x}{2} + F(x) \right)^2}{x^4} \right]. \quad (2.20)$$

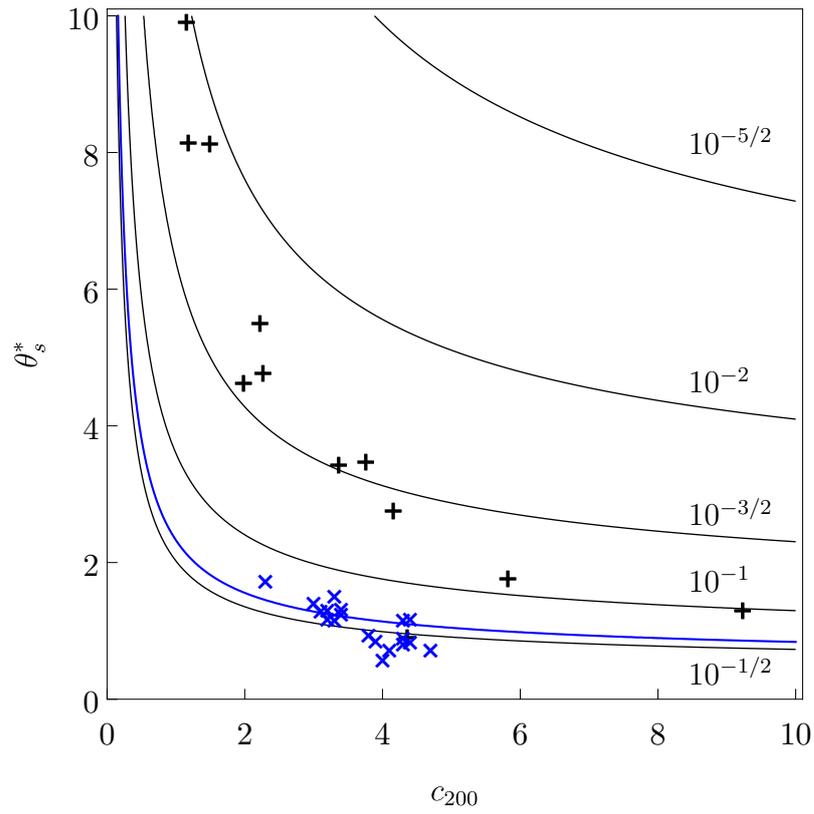
Ten je nulový, nastane-li jedna ze situací

$$0 = 1 + \frac{4\kappa_s}{x_{rad}^2} \left( \ln \frac{x_{rad}}{2} + F(x_{rad}) \right) - 4\kappa_s \frac{1 - F(x_{rad})}{x_{rad}^2 - 1} \quad (2.21)$$

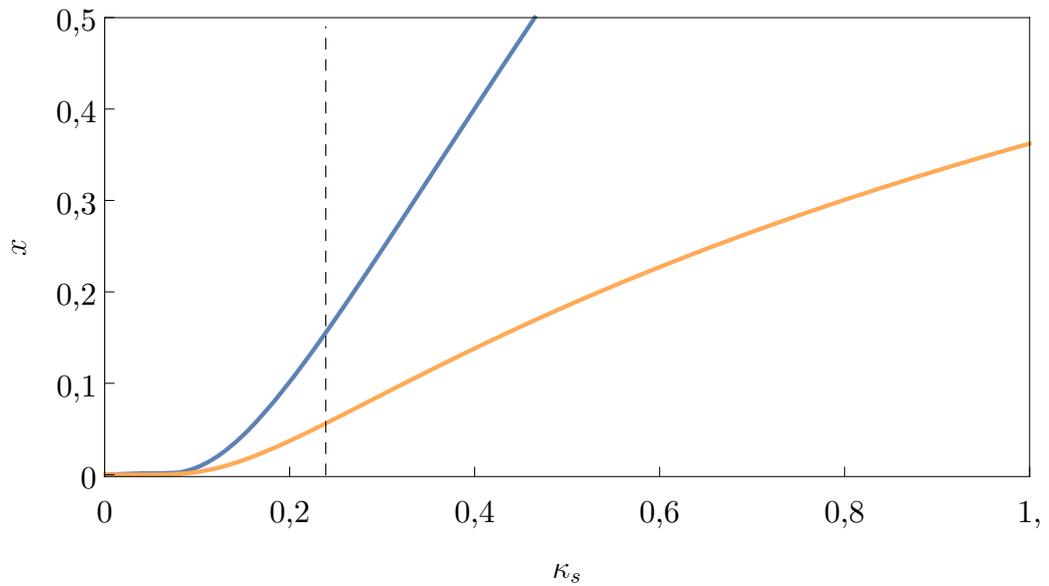
$$0 = 1 - \frac{4\kappa_s}{x_{tan}^2} \left( \ln \frac{x_{tan}}{2} + F(x_{tan}) \right), \quad (2.22)$$

které tak tvoří předpisy pro radiální a tangenciální část kritické křivky, což je značeno příslušnými indexy  $x$ .

Z grafu na Obrázku 2.4, na kterém jsou vyneseny poloměry radiální a tangenciální části kritické křivky na  $\kappa_s$  je patrné, že při jeho zvětšování oba poloměry rostou a pod hodnotou  $\kappa_s \lesssim 0,1$  jsou velmi malé a jejich chování je přibližně lineární a blíží se nule pro  $\kappa_s \rightarrow 0$ . V grafu je dále vyznačena hodnota  $\kappa_s$  odpovídající volbě parametrů  $c_{200}$ ,  $\theta_s^*$  v grafu na Obr. 2.3.



Obrázek 2.3: Kontury konstantního  $\kappa_s$ , hodnoty jsou vypsány u příslušných izo-čar. Data NFW z měření OmegaWINGS (černě) a CLASH (modře). Kontura  $\kappa_s$  odpovídající parametrům  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$  je vyznačena modrou čarou.



Obrázek 2.4: Závislost poloměru tangenciální (horní, modrá) a radiální (spodní, oranžová) části kritické křivky na  $\kappa_s$  v NFW modelu. Přerušovaně je vyznačena hodnota  $\kappa_s$  odpovídající parametrům  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$ .

# 3. Kombinovaný model s fixním NFW profilem hala

Tato kapitola rozšiřuje analýzu kombinovaného modelu NFW s hmotným bodem provedenou v bakalářské práci Timko (2017). V dané práci je prováděna analýza pro parametry  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$ , vybrané podle projektu CLASH (viz graf na Obr. 2.1). V kapitole stručně shrneme vlastnosti NFW hala analyzovanou v Timko (2017) a upřesněnou Michalem Karamazovem (Heyrovský a kol., 2020)

## Jednotky Einsteinova poloměru

Kombinovaný model má čtyři parametry. Koncentrační parametr  $c_{200}$  a škálový poloměr kupy  $\theta_s^*$ , které definují rozložené hmoty v halu a dále úhlovou vzdálenost hmotného bodu od středu kupy  $\theta_p^* = \frac{\theta_p}{\theta_E}$  a poměrnou hmotnost  $\sigma := \frac{M_p}{M}$  pro  $M_p$  hmotnost hmotného bodu a  $M$  hmotnost kupy, definovanou jako hmotnost NFW hala ve sféře o poloměru  $r_{200}$ .

Příspěvek perturbace k deflečnímu úhlu lze vyjádřit, jako

$$\alpha_p^*(\theta^*) = \sigma \frac{\theta^* - \theta_p^*}{|\theta^* - \theta_p^*|^2} \quad (3.1)$$

z čehož v kombinaci s rovnicí (2.17) plyne čočkovací rovnice kombinovaného modelu

$$\beta^*(\theta^*) = \theta^* - \sigma \frac{\theta^* - \theta_p^*}{|\theta^* - \theta_p^*|^2} - \frac{\ln\left(\frac{\theta^*}{2\theta_s^*}\right) + F\left(\frac{\theta^*}{\theta_s^*}\right)}{\ln(c_{200} + 1) - \frac{c_{200}}{c_{200} + 1}} \frac{\theta^*}{\theta^{*2}}. \quad (3.2)$$

## Jednotky úhlového škálového parametru

Význam těchto jednotek v modelu NFW spočívá v eliminaci jednoho stupně volnosti. Ten je promítnut do změny jednotek a umožňuje jednodušší klasifikaci kritických křivek a kaustik. Při zavedení přeškálování relativní hmotnosti hmotného bodu  $\sigma$  na  $\kappa_p$

$$\kappa_p := \frac{\sigma}{\theta_s^{*2}} = \frac{M_p}{M} 4\kappa_s \left[ \ln(c_{200} + 1) - \frac{c_{200}}{c_{200} + 1} \right] = \frac{4GM_p D_{LS} D_L}{r_s^2 c^2 D_S}, \quad (3.3)$$

kde ve druhé rovnosti byl využit vztah (2.11) a ve třetí hmotnost NFW modelu  $M$  dle rovnice (2.10). Pomocí parametru  $\kappa_p$  je čočkovací rovnice pro  $x_p = \theta_p/\theta_s$

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{x} - \kappa_p \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_p}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|^2} - 4\kappa_s \left[ \ln \frac{x}{2} + F(x) \right] \frac{\mathbf{x}}{x^2} \quad (3.4)$$

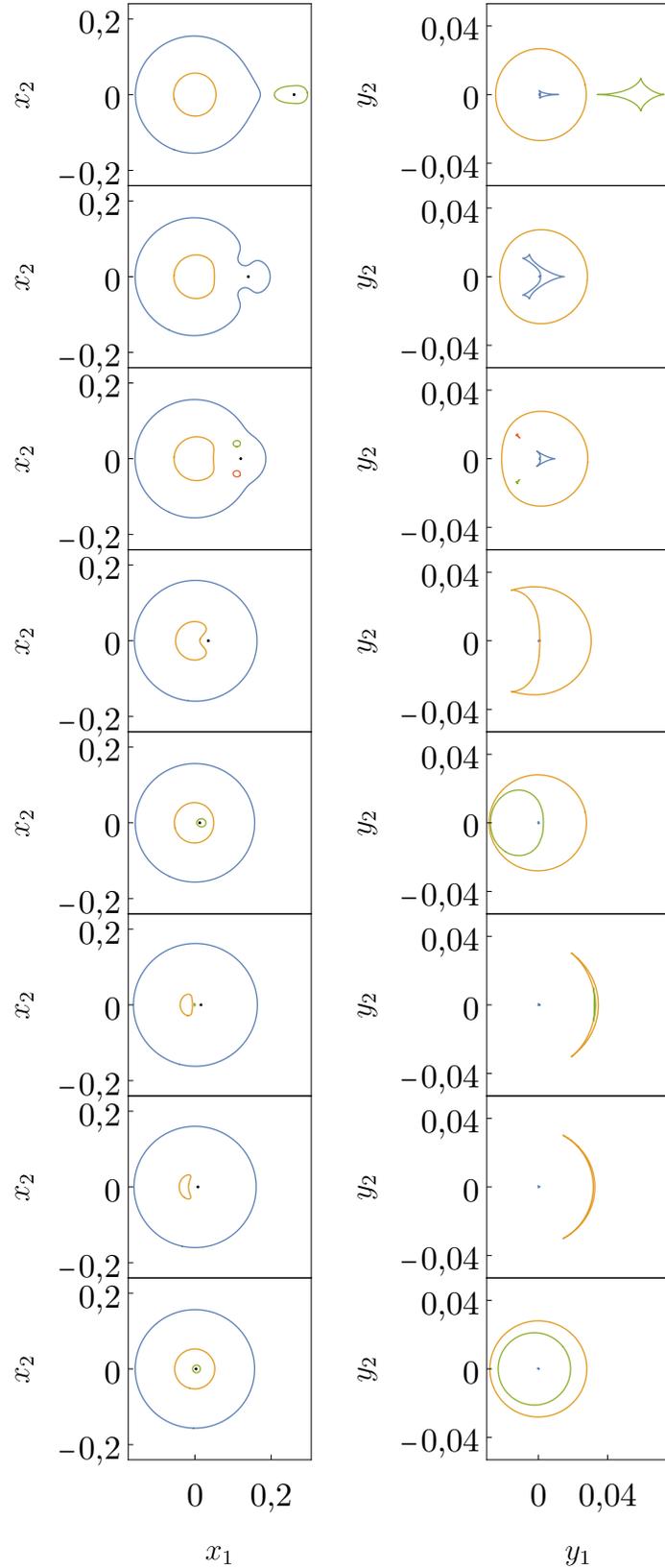
která obsahuje po volbě orientace soustavy pouze tři volné parametry  $\mathbf{x}_p = (x_p, 0)$ ,  $\kappa_s$  a  $\kappa_p$ .

### 3.1 Možné tvary kritických křivek a kaustik kombinovaného modelu

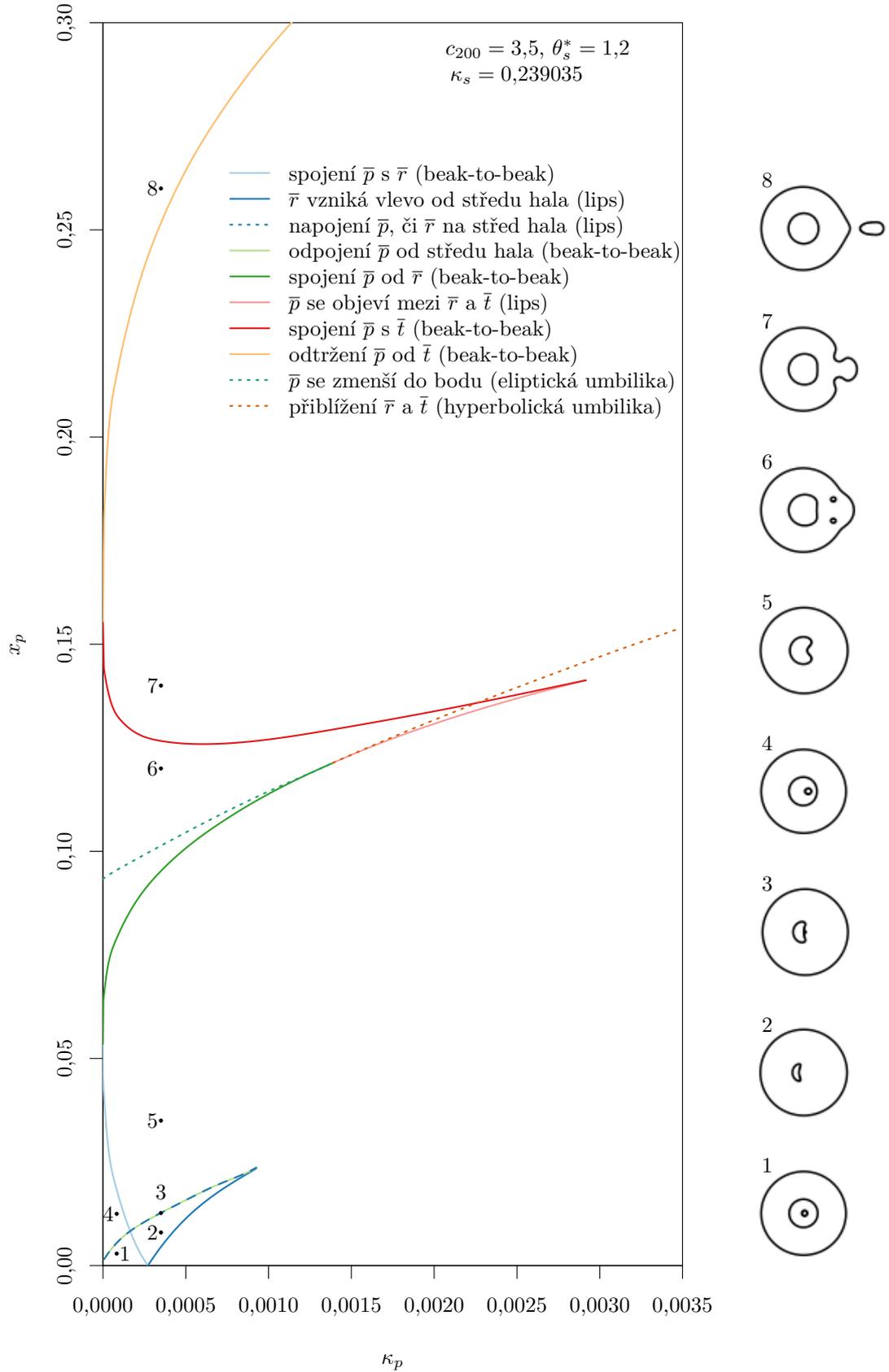
V grafech na Obr. 3.1 jsou znázorněny typy kritických křivek (rovina obrazu, vlevo) a kaustik (rovina zdroje, vpravo), které budeme nadále rozlišovat. Příslušné páry odpovídajících částí kaustiky a kritické křivky jsou rozlišeny barevně. Dále jsou v rovině čocky vyznačeny polohy středu NFW hala a perturbace černými body. Na sekvenci obrázků lze pozorovat přechody při změně parametrů  $x_p, \kappa_p$ . Pro zkrácení zápisu jsou značeny  $\bar{t}$  (na Obr. 3.1 modře), část kritické křivky vzniklé perturbací tangenciální a  $\bar{r}$  (oranžově), část vzniklou perturbací radiální části kritické křivky NFW modelu. Dále v kombinovaném modelu vzniká jedna, nebo dvě smyčky v důsledku silného čockovacího vlivu perturbace v jejím blízkém okolí, kterou budeme značit  $\bar{p}$  (zeleně a červeně). Přechod z prvního řádku na druhý znázorňuje spojení  $\bar{t}$  a  $\bar{p}$  a odpovídá přibližování perturbace k centru hala. Při dalším přibližování následuje utržení dvou malých smyček do prostoru mezi  $\bar{t}$  a  $\bar{t}$ , které je znázorněno na třetím řádku. Následuje napojení  $\bar{p}$  na  $\bar{t}$ . Při dalším přibližování perturbace ke středu NFW hala mohou nastat tři typy situací. První možností je zmenšování  $\bar{t}$  kolem středu NFW hala, což pro dané  $c_{200}$ ,  $\theta_s^*$  nastává pro  $\kappa_p \gtrsim 9,2 \cdot 10^{-3}$ . V tomto scénáři nedochází ke vzniku žádné další smyčky kritické křivky. Druhá situace je znázorněna na pátém řádku, kdy je naopak hmotnost perturbace tak malá, že  $\bar{p}$  prochází přes  $\bar{t}$ . Poslední situace je znázorněna na šestém řádku, a to zmenšování  $\bar{t}$ , kde pro úzký pás vhodných parametrů dochází navíc ke vzniku další separované kaustiky od části kritické křivky situované kolem středu NFW hala. Tato část kaustiky se při snižování  $\theta_s^*$  napojuje na  $\bar{t}$ -části kaustiky při odpojení  $\bar{t}$  od středu NFW, viz sedmý snímek. Poslední snímek zobrazuje situaci pro velmi malé hodnoty parametru  $\kappa_p$ , kdy při  $x_p^* \rightarrow 0$  zůstává  $\bar{p}$  kolem středu NFW hala.

Souřadnice  $(x_p, \kappa_p)$  vyobrazených konfigurací jsou vypsané v příslušných popisích a jejich volba vychází z grafu na Obr. 3.2. V něm jsou zobrazeny hranice v prostoru parametrů perturbace oddělující jednotlivé typy kritických křivek a kaustik. Jako parametry NFW hala jsou zde používány  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$ , kterým dle rovnice (2.11) odpovídá hodnota parametru  $\kappa_s = 0,239035$ . Příslušné popisky v grafu ve zkratce popisují jevy, ke kterým na křivkách dochází a které jsou podrobněji popsány v odstavci výše. Beak-to-beak, lips, eliptická a hyperbolická umbilika jsou názvy pro konkrétní situace v rovině zdroje. Tyto pojmy zde slouží jen pro lepší návaznost na práci Timko (2017), ve které lze nalézt jejich podrobnější rozbor.

Co se týče dvou malých smyček v prostoru mezi  $\bar{t}$  a  $\bar{t}$ , ty pro malé hodnoty  $\kappa_p$  vznikají odtržením od  $\bar{t}$ . Poté se jejich velikost při zvětšující se souřadnici  $x_2$  zmenšuje až na nulu, což lze v rovině zdroje pozorovat jako eliptickou umbiliku. Následně se opět zvětšují, až do bodu, kdy se spojí na  $\bar{t}$ . Od určité hodnoty  $\kappa_p$  nedochází k odtrhávání těchto dvou smyček od  $\bar{t}$ , nýbrž vznikají v prostoru mezi  $\bar{t}$  a  $\bar{t}$ . Červená a růžová křivka v grafu na Obr. 3.2 se stýkají v jednom bodě (v následujících kapitolách bude značena  $K2$ ), jelikož od určitého  $\kappa_p$  je hmotnost perturbace natolik velká, že dvě malé smyčky kritické křivky vzniknout nemohou. Dalším zajímavým bodem je spojení tmavě modré a světle zelené křivky (v následujících kapitolách značené  $K1$ ). Toto spojení je důsledkem toho, že nad určitou hranicí  $\kappa_p$  nevzniká třetí část kritické křivky uvnitř  $\bar{t}$ .



Obrázek 3.1: Přehled typů kritických křivek (levý sloupec) a jejich kaustik (pravý sloupec) v odpovídajících barvách pro parametry kupy  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$ . Černým bodem je vždy vyznačena souřadnice hmotného bodu, souřadnice hala je  $(0; 0)$ . Parametry hmotného bodu jsou shora  $(\kappa_p \cdot 10^4, x_p) \in \{(3,5; 0,26); (3,5; 0,14); (3,5; 0,12); (3,5; 0,035); (0,83; 0,0125); (5,2; 0,016); (3,5; 0,008); (0,83; 0,0029)\}$ , odpovídá číslování 1–8 na Obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Hranice jednotlivých typů kritických křivek kombinovaného modelu pro parametry kupy  $c_{200} = 3,5, \theta_s^* = 1,2$  podle (Heyrovský a kol., 2020).

# 4. Kombinovaný model s různými NFW profily hala

V rámci této kapitoly je analýza parametrů perturbace z kapitoly 3 rozšířena pro libovolné parametry hala. Na konci předchozí kapitoly byly zmíněny dva spojné body hranic mezi jednotlivými typy kritických křivek

$$K1 \equiv [\kappa_s(K1), \kappa_p(K1), x_p(K1)], \quad K2 \equiv [\kappa_s(K2), \kappa_p(K2), x_p(K2)].$$

Tyto body jsou definovány jako místa, kde se spojují červená a růžová resp. tmavě modrá a světle zelená křivka na Obrázku 3.2. V grafu na Obr. 4.1 jsou znázorněny hranice jednotlivých typů kritických křivek pro různé hodnoty  $\kappa_s$ , opět přibližně odpovídající hodnotám z měření CLASH. Jelikož velikosti kritických křivek jsou velmi odlišné, byly grafy normalizovány dle spojného bodu  $K2$ . Pak lze na osách místo  $\kappa_s$  a  $x_p$  psát  $\kappa_s/\kappa_s(K2)$  a  $x_p/x_p(K2)$ . Toto škálování ukazuje na zachování hrubé struktury hranic typů kritických křivek, které se pro různé parametry  $\kappa_s$  v tomto grafu vzájemně téměř překrývají. Dochází zde však k jemným odchylkám ve tvarech jednotlivých hranic. Ze znalosti souřadnic spojných bodů tak nelze hranice mezi typy kritických křivek vykreslit přesně, nicméně tento přístup poskytuje pro mnoho případů dostatečnou aproximaci.

## 4.1 Polohy spojných bodů

Souřadnice bodů  $K1$ ,  $K2$  jsou vyneseny v grafech na Obr. 4.2 a 4.3. Ty ukazují závislosti  $x_p$  na  $\kappa_s$  resp.  $\kappa_p$  na  $\kappa_s$  pro bod  $K1$  (červeně) a  $K2$  (černě). Dále jsou zde svislými čarami v odpovídajících barvách vyneseny hodnoty  $\kappa_s$  z grafu na Obr. 4.1. Z důvodu vizuální podoby se závislostí poloměru radiální a tangenciální části kritické křivky (viz Obr. 2.4) přistoupíme k lineární regresi. Fitováním vztahů pro  $x_{rad}(\kappa_s)$  a  $x_{tan}(\kappa_s)$  daných rovnicemi (2.21) resp. (2.22) vyplývá pro bod  $K1$

$$x_p(K1) = 0,41(3,9 \cdot 10^{-3}) \cdot x_{rad}(\kappa_s) \quad (4.1)$$

$$x_p(K1) = 0,14(2,6 \cdot 10^{-3}) \cdot x_{tan}(\kappa_s), \quad (4.2)$$

což činí relativní nejistoty fitovaných parametrů  $9,3 \cdot 10^{-3}$  a  $1,8 \cdot 10^{-2}$  respektive. Pro  $K2$

$$x_p(K2) = 2,8(4,2 \cdot 10^{-2}) \cdot x_{rad}(\kappa_s) \quad (4.3)$$

$$x_p(K2) = 0,95(5,6 \cdot 10^{-3}) \cdot x_{tan}(\kappa_s), \quad (4.4)$$

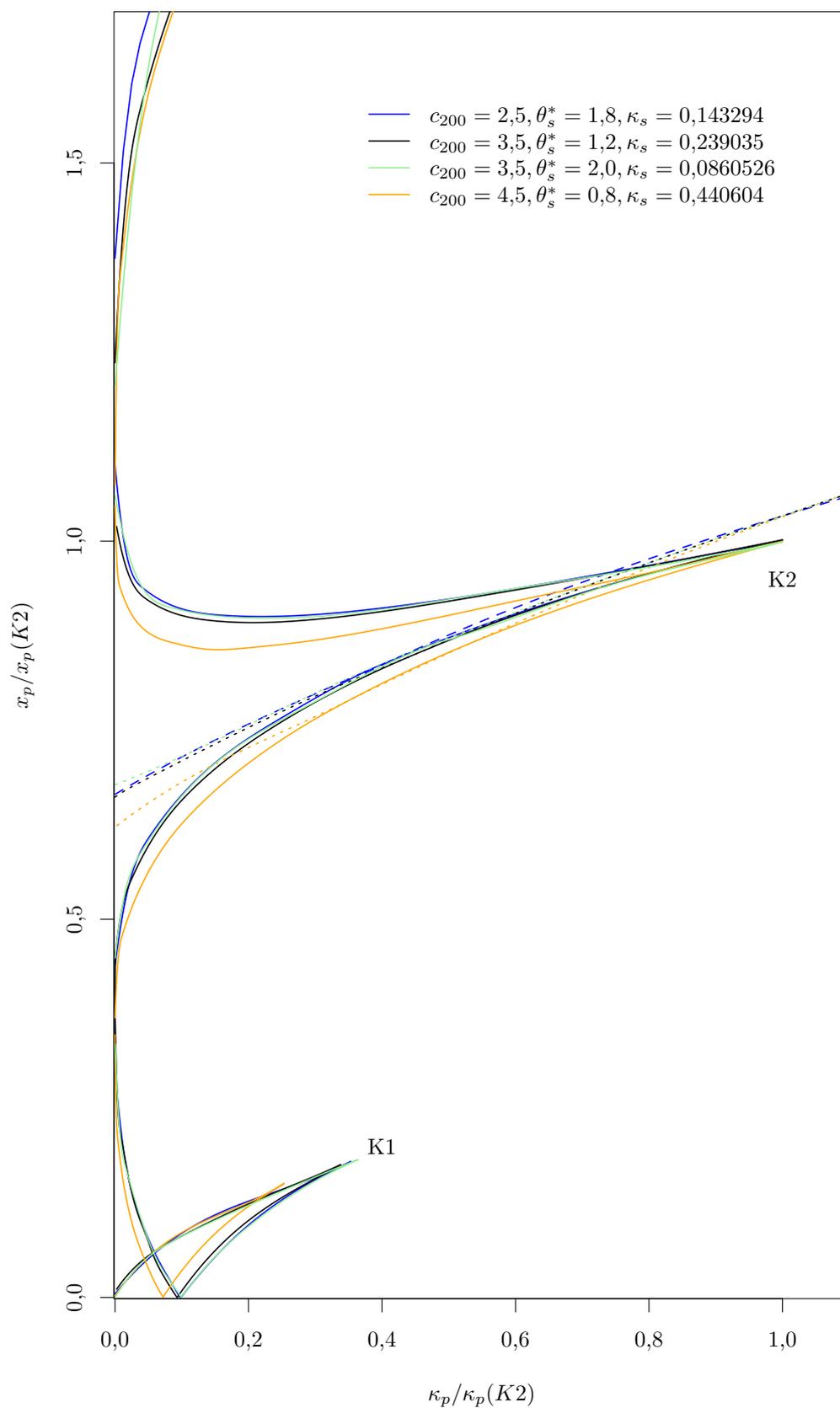
s relativními nejistotami  $1,5$  resp.  $5,9 \cdot 10^{-3}$ . V závorkách za fitovanými parametry jsou uvedeny jejich relativní nejistoty konfidenčního intervalu 68 % ( $1\sigma$ ). Z relativních nejistot je patrné, že použití závislosti radiální části kritické křivky pro  $K1$  a tangenciální pro  $K2$  dává vyšší přesnost fitu.

Dále je třeba vyjádřit závislost  $\kappa_p$  jako funkci  $\kappa_s$ . Zde se vhodnou závislostí ukázala být lineární kombinace sudých mocnin  $\kappa_s$ . Do druhého řádu rozvoje pak je

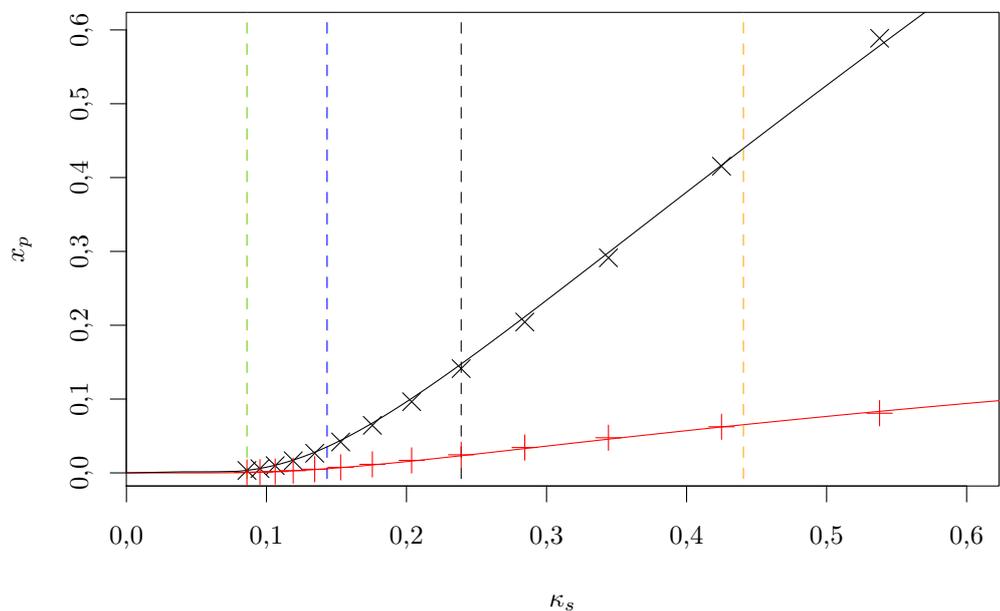
$$\kappa_p(K1) = +1,2 \cdot 10^{-2}(3,7 \cdot 10^{-3}) \cdot \kappa_s^2 + 2,4 \cdot 10^{-1}(1,5 \cdot 10^{-2}) \cdot \kappa_s^4 \quad (4.5)$$

$$\kappa_p(K2) = -1,0 \cdot 10^{-2}(6,9 \cdot 10^{-3}) \cdot \kappa_s^2 + 1,35(2,9 \cdot 10^{-2}) \cdot \kappa_s^4. \quad (4.6)$$

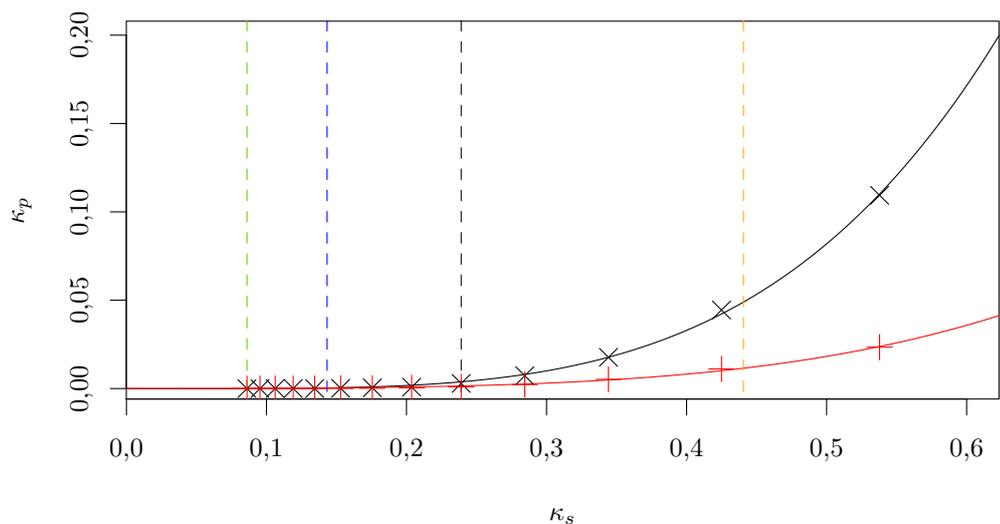
V závislosti  $x_p$  na  $\kappa_s$  dochází ke zhoršení korespondence fitu s pozorovanými hodnotami pro vyšší  $\kappa_s$ , jelikož se zvyšováním tohoto parametru dochází ke zvyšování poloměrů obou částí kritické křivky a jak je vidět ze závislosti  $\kappa_p = \kappa_p(\kappa_s)$ , je tak nutné zvyšovat i hmotnost perturbace, čímž dochází k výraznějšímu odchýlení od původního chování kritické křivky NFW hala. Pro malé hodnoty  $\kappa_s$  se poloměry zmenšují, až pro  $\kappa_s \rightarrow 0$ , právě když  $x_p \rightarrow 0$ . Zde jsou obě části kritické křivky spojeny, tedy  $\kappa_p \rightarrow 0$ . Na druhou stranu obě závislosti  $x_p$  i  $\kappa_s$  rostou se zvyšující se hodnotou  $\kappa_s$ . Vyloučit asymptotiku na základě výše položeného nelze, nicméně tyto hodnoty jsou v daném režimu nepodstatné, jelikož ten předpokládá pouze malou perturbaci od hmotného bodu, tedy malé hodnoty  $\kappa_s$ .



Obrázek 4.1: Hranice jednotlivých typů kritických křivek kombinovaného modelu pro čtyři různé parametry kupy  $\kappa_s$ . Osy jsou normalizované podle polohy bodu  $K2$ .



Obrázek 4.2: Pozice bodů  $K1$  (červeně) a  $K2$  (černě) kombinovaného modelu. Fitováno vztahy pro poloměr radiální resp. tangenciální části kritické křivky NFW hala. V příslušných barvách jsou přerušovaně vyznačeny hodnoty  $\kappa_s$  z grafu na Obr. 4.1.



Obrázek 4.3: Pozice bodů  $K1$  (červeně) a  $K2$  (černě) kombinovaného modelu. Fitováno lineární kombinací druhé a čtvrté mocniny  $\kappa_s$ . příslušných barvách jsou přerušovaně vyznačeny hodnoty  $\kappa_s$  z grafu na Obr. 4.1.

# 5. Kombinovaný model se sféricky omezeným NFW profilem

Tento dosud nepublikovaný model (David Heyrovský, pers. comm.) je založený na NFW rozložení hmoty, avšak integrace hustoty není prováděna v ose  $z$  od  $-\infty$  do  $\infty$ , nýbrž tak, aby integračním prostorem byla sféra, což se projeví v integračních mezích plošné hustoty a tedy i konvergence daných rovnicemi (1.4), (1.11). Model je dále značen NFWT.

## 5.1 Úhel odklonu pro sféricky omezený NFW profil

Integrace NFW profilu přes sférickou oblast poloměru  $r_{200}$ , dává úhel odklonu

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = 2 \frac{\mathbf{x}}{x^2} \int_0^{\min(x, c_{200})} \kappa(x') x' dx', \quad (5.1)$$

která je v jednotkách úhlového škálového parametru s parametry  $c_{200}$ ,  $\kappa_s$

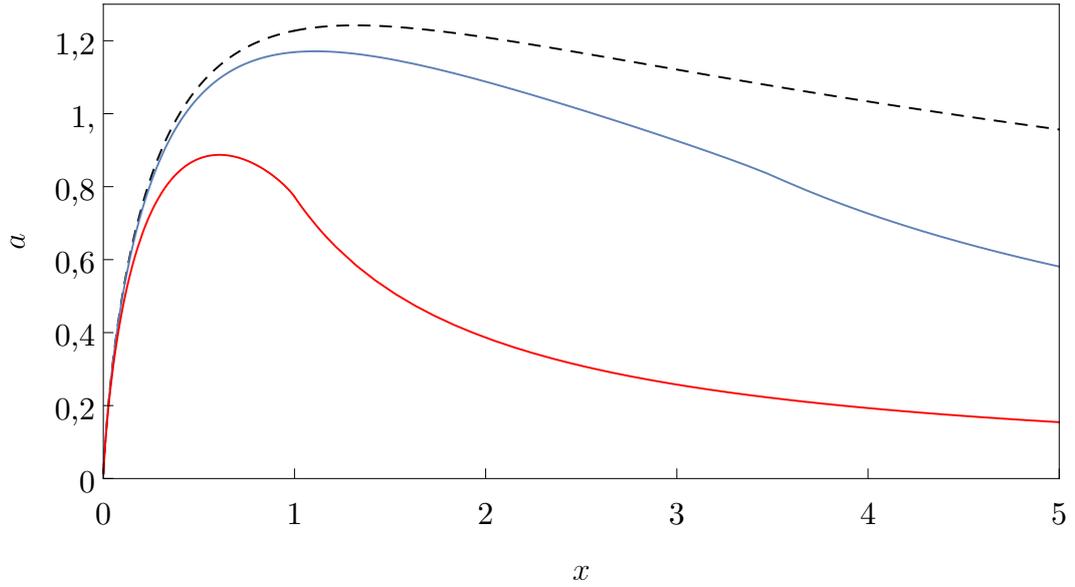
$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = 4\kappa_s \frac{\mathbf{x}}{x^2} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctanh} \left[ \frac{\sqrt{(1-x^2)(c_{200}^2-x^2)}}{c_{200}+x^2} \right] + L & ; x < 1 \wedge x < c_{200} \\ \frac{\sqrt{c_{200}^2-1}}{c_{200}+1} + L & ; x = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \operatorname{arctan} \left[ \frac{\sqrt{(x^2-1)(c_{200}^2-x^2)}}{c_{200}+x^2} \right] + L & ; 1 < x < c_{200} \\ \ln(c_{200}+1) - \frac{c_{200}}{c_{200}+1} & ; x \geq c_{200}, \end{cases} \quad (5.2)$$

kde pro jednodušší zápis definujeme funkci

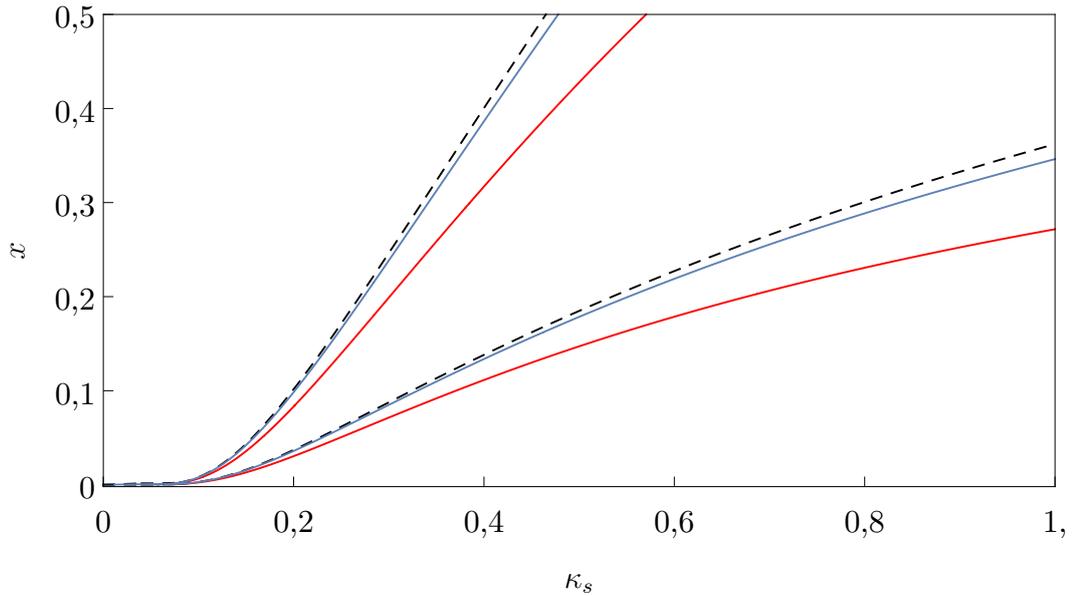
$$L(x) := \ln \left[ \frac{(c_{200}+1)x}{\sqrt{c_{200}^2-x^2} + c_{200}} \right] - \frac{c_{200} - \sqrt{c_{200}^2-x^2}}{c_{200}+1}.$$

V grafu na Obr. 5.1 je úhel  $a(x)$  NFWT modelu vynesena pro parametry  $c_{200} = 3,5$  a  $c_{200} = 1,0$  ve srovnání s NFW modelem definovaným rovnicí (2.18). V případě NFW i NFWT je úhel  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  lineárně závislý na parametru  $\kappa_s$ , proto byl zvolen jako  $\kappa_s = 1$ . Oba modely jsou spojitě i spojitě diferencovatelné do prvního řádu. V modelu NFWT lze pro  $x = c_{200}$  pozorovat nespojitost ve druhé derivaci podle  $x$ , což je v grafu viditelné změnou tendence chování křivek v daných bodech. Pro vyšší hodnoty parametru  $c_{200}$  se model NFWT blíží chování NFW modelu a pro  $c_{200} \rightarrow \infty$  jsou oba identické kvůli stejným mezím integrace.

V grafu na Obr. 5.2 jsou vykresleny poloměry radiální a tangenciální části kritické křivky analogické grafu na Obr. 2.4. Při snižování parametru  $c_{200}$  dochází k odchylování od NFW modelu, přičemž rozdíly jsou patrnější pro vyšší hodnoty  $\kappa_s$ .



Obrázek 5.1: Srovnání úhlu odklonu  $a(x)$  pro  $\kappa_s = 1$ , NFW (čárkovaně) a NFWT pro parametry  $c_{200} = 3,5$  (modře) a  $c_{200} = 1,0$  (červeně).



Obrázek 5.2: Srovnání poloměrů radiální (spodní část křivky v barvě) a tangenciální části křivky (horní část). Závislosti původního NFW modelu jsou vyznačeny přerušovaně a závislosti NFWT modelů  $c_{200} = 3,5$  (modře) a  $c_{200} = 1,0$  (červeně).

## 5.2 Srovnání čočkování kombinovaných modelů

Při volbě libovolných parametrů kombinovaného modelu nejsou rozdíly příliš patrné. Výraznější rozdíly lze pozorovat na hranicích jednotlivých typů kritických křivek, viz Obr. 5.3 pro  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$ . Zde každé křivce z grafu 3.2 přísluší jeden řádek tak, že přechod již nastal právě v jednom z modelů. Na prvním řádku je tak znázorněno spojení  $\bar{p}$  s  $\bar{r}$ , na druhém vznik  $\bar{r}$  pro vyšší hmotnosti hmotného

bodou a třetí řádek ukazuje napojení  $\bar{r}$  na střed NFW hala. Čtvrtý a pátý řádek ukazují odtržení  $\bar{p}$  od  $\bar{r}$  a její napojení na  $\bar{t}$  respektive a na šestém řádku je pak znázorněno odpojení  $\bar{p}$  od  $\bar{t}$ . Na sedmém a osmém řádku jsou pak znázorněny snížení  $\bar{p}$  a přiblížení  $\bar{t}$  s  $\bar{p}$ , které jsou lépe pozorovatelné v rozdílech kaustické struktury.

Charakter přechodů kritických křivek a kaustik vypadá velmi podobně, jako pro NFW model, což ukazuje graf na Obr. 5.4. Zde je šedě vyznačena situace pro původní NFW model z Obr. 3.2 a vyznačeny souřadnice parametrů grafů z Obr. 5.4. Rozdíly při změnách parametrů  $c_{200}$ ,  $\theta_s^*$  lze dále pozorovat na souřadnicích spojných bodů  $K1$  a  $K2$ , ze kterých je patrné zvětšování rozdílů pro vyšší hodnoty  $\kappa_s$  a  $x_p$ . Na Obrázku 5.5 je vynesena závislost  $x_p$  na  $\kappa_s = \kappa_s(c_{200} = 3,5, \theta_s^*)$  a  $\kappa_p$  pro NFW i NFWT model. Jelikož hmotnost NFWT modelu je menší než hmotnost NFW při stejných parametrech, mají radiální i tangenciální části kritické křivky menší poloměry, přičemž u tangenciální křivky jsou rozdíly výraznější.

Analogicky fitování v případě NFW modelu v kapitole 4 byly získány aproximativní vztahy (v závorkách jsou opět značeny nejistoty koeficientů konfidenčního intervalu  $1\sigma$ )

$$x_p(K1) = 4,0 \cdot 10^{-1} (3,5 \cdot 10^{-3}) \cdot x_{rad}(\kappa_s) \quad (5.3)$$

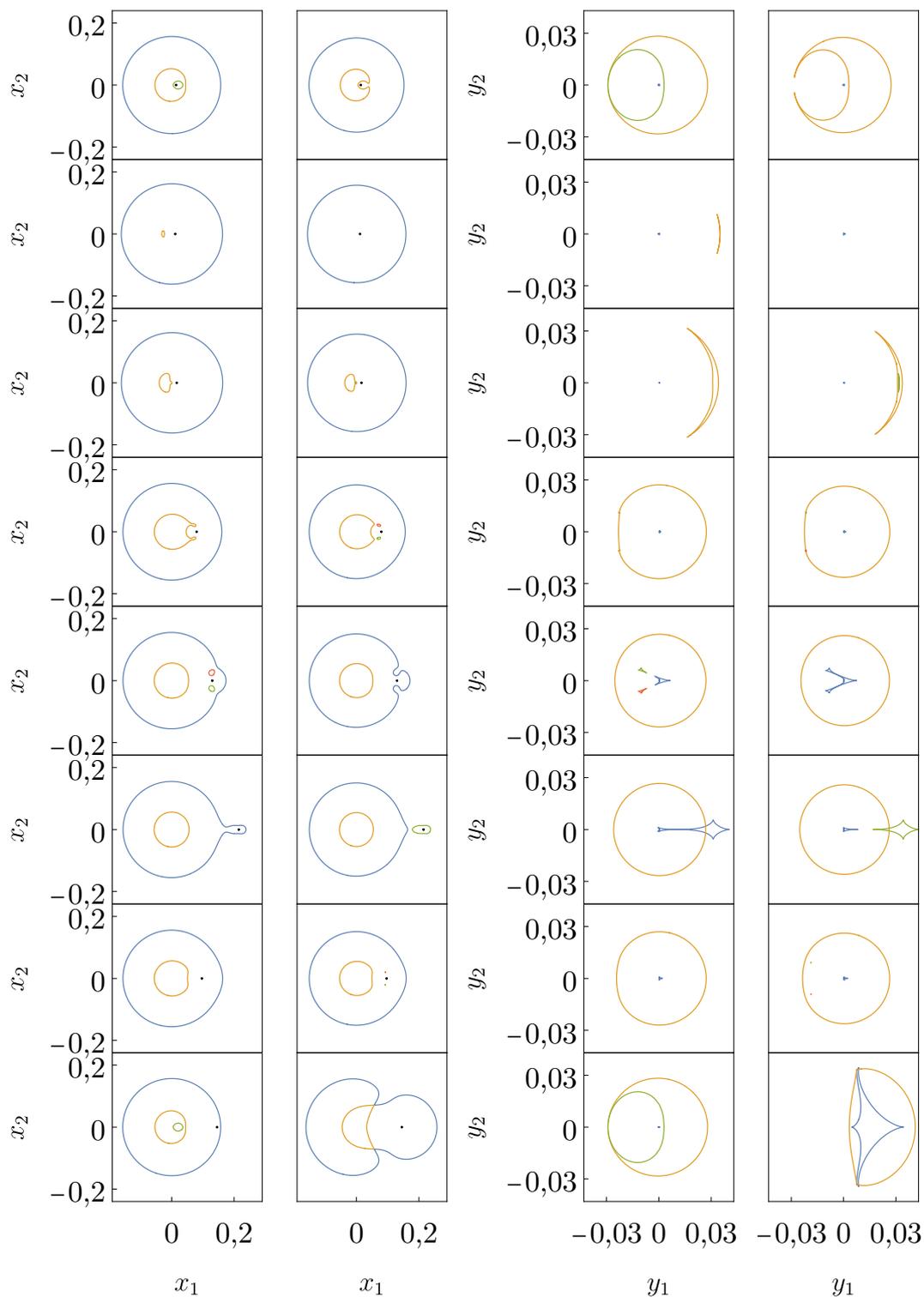
$$x_p(K2) = 9,1 \cdot 10^{-1} (4,4 \cdot 10^{-3}) \cdot x_{tan}(\kappa_s). \quad (5.4)$$

Místo vztahů pro radiální a tangenciální části kritické křivky NFW modelu bylo možné využít analogické závislosti pro NFWT model. Vzhledem k tomu, že se jedná o aproximaci a tyto závislosti slouží jen jako srovnání obou modelů, bylo by dané vyjádření méně informativní.

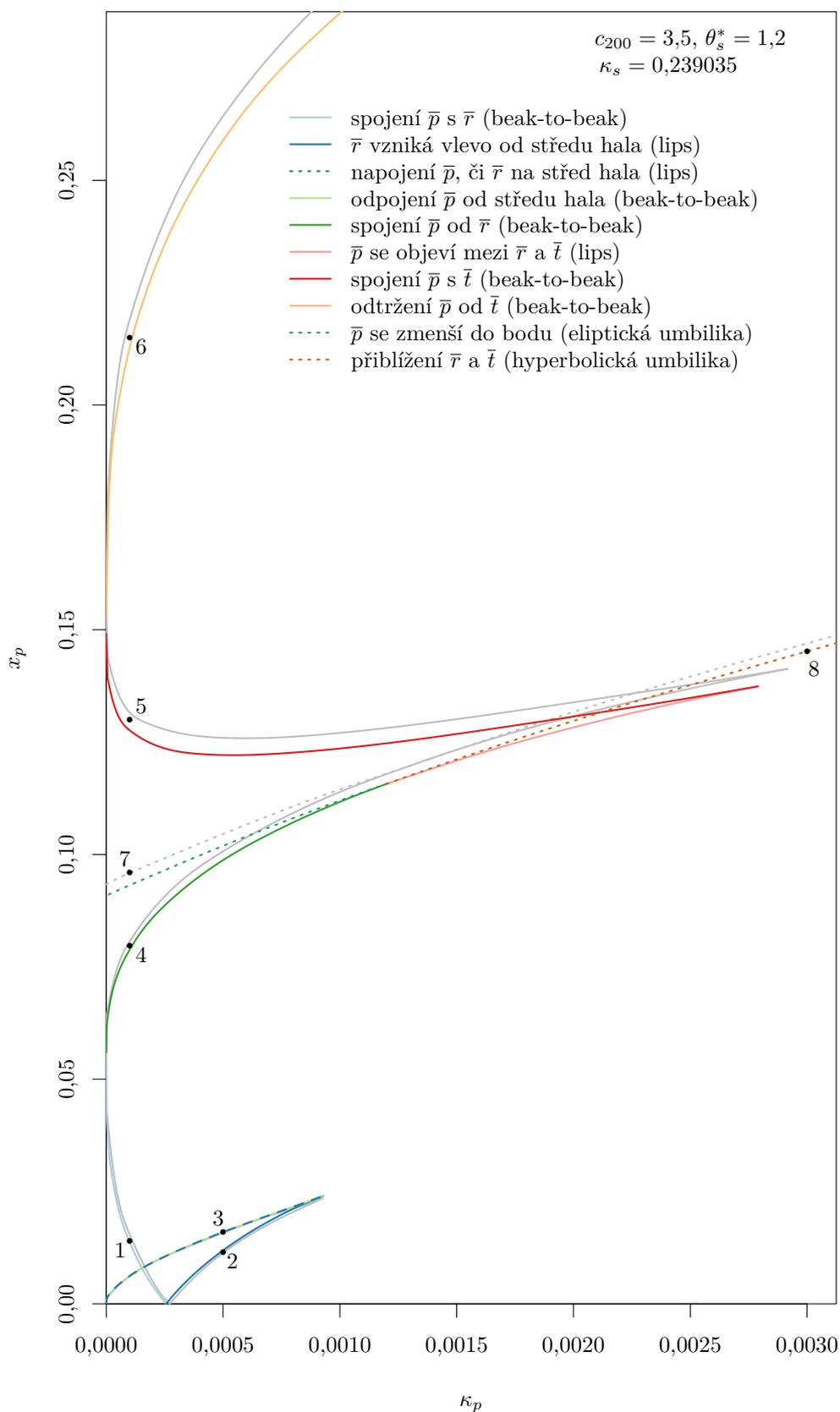
Závislost  $\kappa_p = \kappa_p(\kappa_s)$  pro oba spojné body je vynesena na Obrázku 5.6, kde pro druhou a čtvrtou mocninu  $\kappa_s$  byly získány aproximativní vztahy

$$\kappa_p(K1) = +1,1 \cdot 10^{-2} (3,4 \cdot 10^{-3}) \cdot \kappa_s^2 + 2,3 \cdot 10^{-1} (1,4 \cdot 10^{-2}) \cdot \kappa_s^4 \quad (5.5)$$

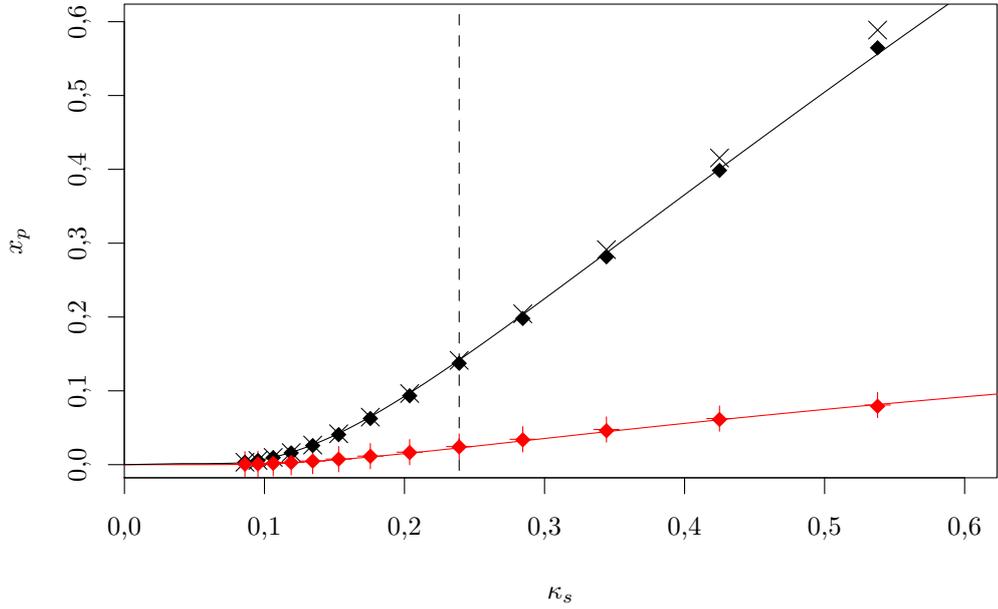
$$\kappa_p(L2) = -9,5 \cdot 10^{-3} (5,0 \cdot 10^{-3}) \cdot \kappa_s^2 + 1,3 (2,1 \cdot 10^{-2}) \cdot \kappa_s^4. \quad (5.6)$$



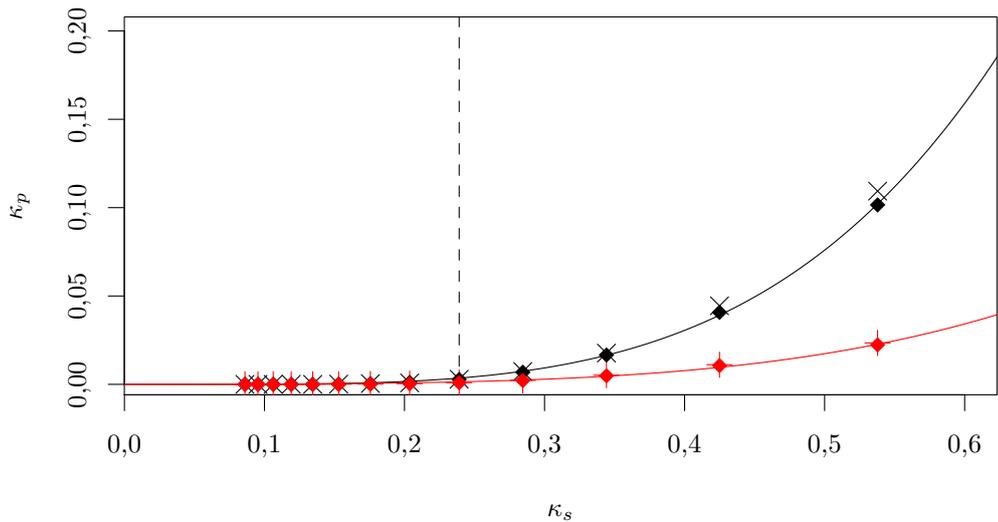
Obrázek 5.3: Přehled typů kritických křivek (levý sloupec) a jejich kaustik (pravý sloupec) v odpovídajících barvách pro parametry kupy  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$ . Černým bodem je v vždy vyznačena souřadnice hmotného bodu. Parametry hmotného bodu jsou shora  $(\kappa_p \cdot 10^4; x_p) \in \{(1; 0,014); (5; 0,0115); (5; 0,016); (1; 0,0797); (1; 0,13); (1; 0,215); (1; 0,0967); (30; 0,1452)\}$ , což odpovídá číslování 1–8 na Obr. 3.2.



Obrázek 5.4: Hranice jednotlivých typů kritických křivek kombinovaného modelu pro parametry kupy  $c_{200} = 3,5, \theta_s^* = 1,2$ . Šedě jsou vyznačeny původní přechody modelu NFW.



Obrázek 5.5: Pozice bodů  $K1$  (červeně) a  $K2$  (černě) kombinovaného modelu NFWT s hmotným bodem. Fitovány vztahy pro poloměr radiální resp. tangenciální kritické části křivky NFW modelu.  $\kappa_s$  odpovídající  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$  je vyznačena přerušovaně. Plnými body jsou značeny souřadnice NFWT modelu, křížky pak původní model NFW.



Obrázek 5.6: Pozice bodů  $K1$  (červeně) a  $K2$  (černě) kombinovaného modelu, fitovaných lineární kombinací druhé a čtvrté mocniny  $\kappa_s$ .  $\kappa_s$  odpovídající  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$  je vyznačena přerušovaně. Plnými body jsou značeny souřadnice NFWT modelu, křížky pak původní model NFW.

# 6. Kombinovaný model se dvěma hmotnými body

Přidáním druhého hmotného bodu ke kombinovanému modelu NFW s hmotným bodem se k původním parametrům  $\kappa_s$ ,  $\kappa_p$  a  $\mathbf{x}_p = (x_p, 0)$  přidají další tři parametry, a sice relativní hmotnost druhého bodu  $\kappa_q$  a jeho dvoudimenzionální poloha  $\mathbf{x}_q$ . Čočkovací rovnice je pak

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{x} - \kappa_p \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_p}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|^2} - \kappa_q \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_q|^2} - 4\kappa_s \left[ \ln \frac{x}{2} + F(x) \right] \frac{\mathbf{x}}{x^2}. \quad (6.1)$$

Pro zjednodušení zápisu dále bude využíváno polárních souřadnic  $\mathbf{x}_q = (x_{q1}, x_{q2}) \equiv (x_q, \varphi)$ .

## 6.1 Dva stejně hmotné body podél radiální osy

V grafech na Obr. 6.1 a 6.2 jsou vykresleny typy kritických křivek NFW modelu s fixními parametry  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$ , perturbovaného hmotným bodem s parametry  $x_p = 0,2$ ,  $\kappa_p = 10^{-3}$ , pro různé polohy druhého hmotného bodu o hmotnosti  $\kappa_q = 10^{-3}$  podél stejné radiální osy  $\mathbf{x}_q = (x_q, 0)$ . Pro popis kritické křivky bude opět využíváno označení  $\bar{r}$  pro část vzniklou perturbací radiální a  $\bar{t}$  pro část vzniklou perturbací tangenciální části kritické křivky NFW hala. Zbývající části kritické křivky jsou značeny  $\bar{p}$ .

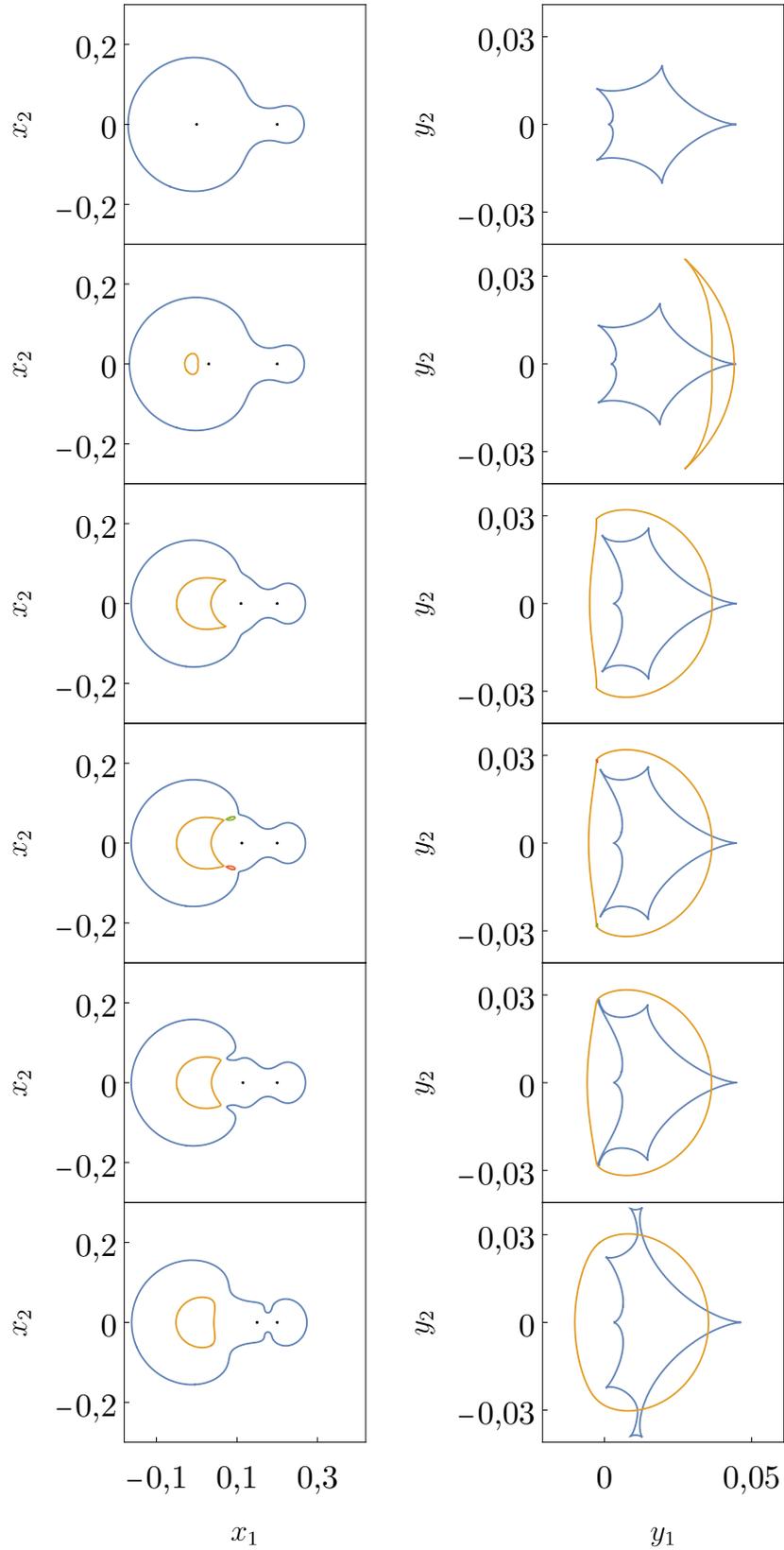
Situace na Obr. 6.1 znázorňuje situace v rovině čočky (vlevo) a rovině zdroje (vpravo), ke kterým dochází při oddalování druhé čočky od středu NFW hala. Hmotnost zvoleného hmotného bodu je dostatečně velká, aby pro  $x_q = 0$  nedocházelo ke vzniku radiální části kritické křivky, jak je znázorněno na prvním řádku. Na druhém řádku již  $\bar{r}$  vzniká, zvětšuje se (viz třetí řádek) a na čtvrtém řádku se do prostoru mezi  $\bar{r}$  a  $\bar{t}$  utrhávají 2 uzavřené smyčky  $\bar{p}$ . Ty se na pátém řádku napojují na  $\bar{t}$ . Na posledním řádku je pak znázorněna tvorba dvou výčnělků tangenciální části kritické křivky. Ty se hned na prvním řádku Obr. 6.2 utrhnou ve dvě samostatné smyčky  $\bar{p}$ . Tyto dvě smyčky se v bodě překryvu obou singulárních sfér zmenší do bodu, viz druhý řádek, což je v rovině zdroje doprovázeno vzdálením příslušných částí kaustiky od zbytku kaustické struktury, při jejím současném zmenšení do bodu. Při dalších oddalování druhého hmotného bodu od středu NFW hala dochází k opětovnému zvětšování velikosti  $\bar{p}$  a k jejímu napojení na vnější část kritické křivky  $\bar{t}$ . Na posledním řádku je pak pozorovatelné odtržení  $\bar{p}$  od  $\bar{t}$ .

## 6.2 Obecná poloha druhého hmotného bodu

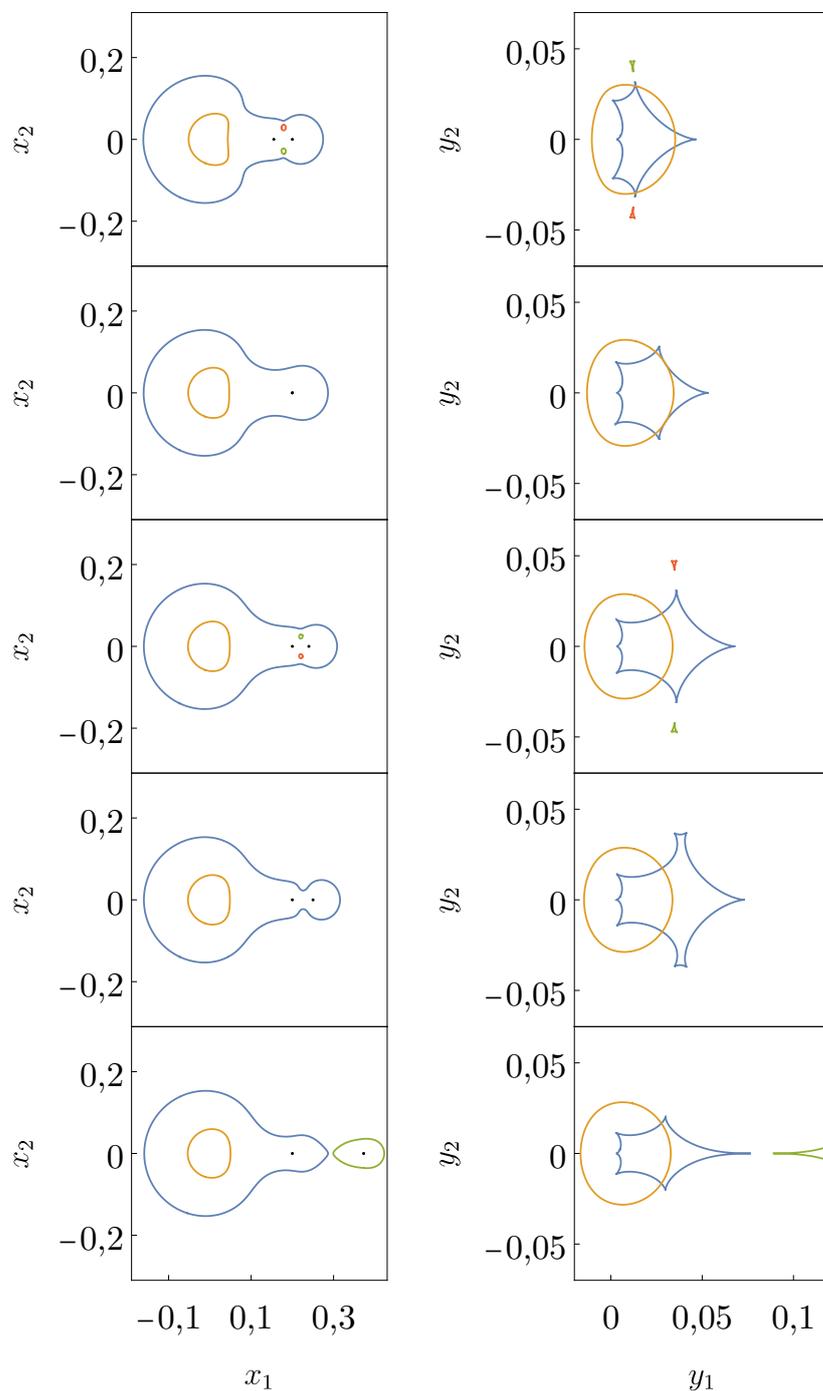
Dalším případem, ilustrujícím kombinaci efektů dvou hmotných bodů, je situace fixovaných parametrů NFW modelu i prvního bodu na hodnotách, jako v předchozím případě, tedy  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$ ,  $x_p = 0,2$ ,  $\kappa_p = 10^{-3}$ . Dva zbývající stupně volnosti pochází od polohy druhého hmotného bodu o hmotnosti  $\kappa_q = 10^{-4}$ . Zde byly zmapovány přechody v rovině čočky, viz Obr 6.3. Příslušné

hranice značí souřadnici druhého hmotného bodu  $\mathbf{x}_q$ , ve které dochází k danému přechodu. Tyto přechody jsou zde opět popisovány pomocí částí  $\bar{r}$ ,  $\bar{t}$ ,  $\bar{p}$ . V případě, že  $\bar{p}$  popisuje dvě vzájemně separované části kritické křivky, byly tyto části značeny „spodní“ resp. „horní“ podle toho, zda na ose  $x_{q1}$  vpravo od centra hala byly jejich souřadnice  $x_{q2}$  menší resp. větší. Kritické křivky a jejich kaustiky pro polohy vyznačené čísla jsou vykresleny na Obr. 6.4, 6.5.

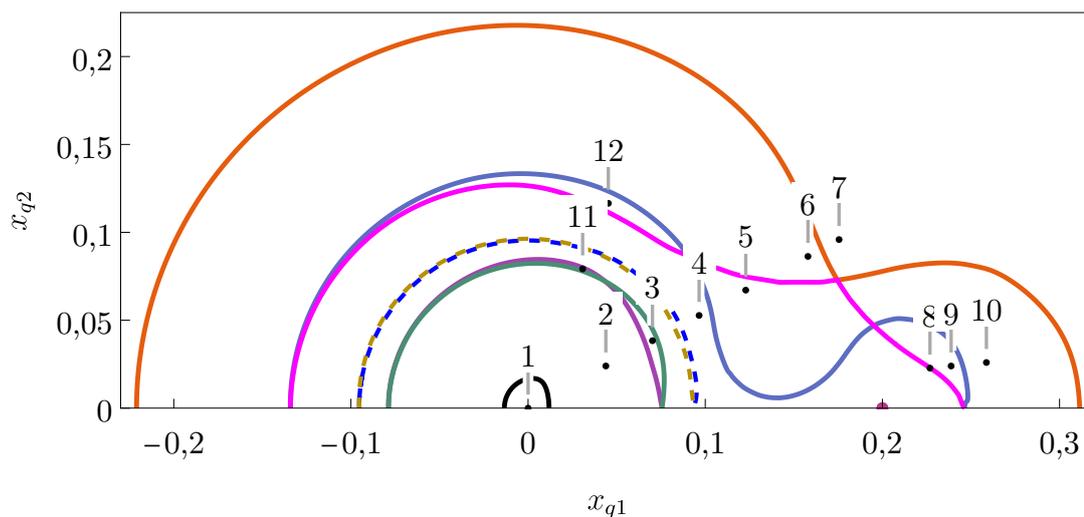
V prostoru mezi  $\bar{r}$  a  $\bar{t}$  je  $\bar{p}$  složeno ze dvou samostatných smyček. K jejich současnému odpojení od  $\bar{r}$  dochází pouze pro  $x_{q1} = x_1$ , tedy  $\varphi_0 = 0$  a pod úhlem  $\varphi_r \approx 1,03$ . Pro  $\varphi < \varphi_r$  dochází nejprve k oddělení spodní části  $\bar{p}$  a pro  $\varphi > \varphi_r$  je nejprve oddělena část horní. Body tohoto současného napojení jsou v místech průniku zelené a fialové křivky Obr. 6.3. Místa průniku růžové křivky s modrou zde pak značí současné spojení obou smyček  $\bar{p}$  s  $\bar{t}$ . K těm opět dochází na ose  $x_1$  a pod úhly  $\varphi_{t2} \approx 0,236$  s radiální polohou  $x_q \approx 0,201 > x_p$ , a  $\varphi_{t1} \approx 0,763$ . Nad touto hranicí se chování modelu podobá případu NFW a dvou vzájemně se neovlivňujících hmotných bodů.



Obrázek 6.1: Kritické křivky a kaustiky pro parametry hala  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$ , prvním bodem  $x_p = 0,2$ ,  $\kappa_p = \kappa_q = 10^{-3}$ . Střed hala je na souřadnici  $(0;0)$  a souřadnice hmotných bodů jsou značeny černými body. Souřadnice druhého hmotného bodu jsou na vodorovné ose  $x_q \in \{0; 0,03; 0,11; 0,112; 0,115; 0,15\}$ .

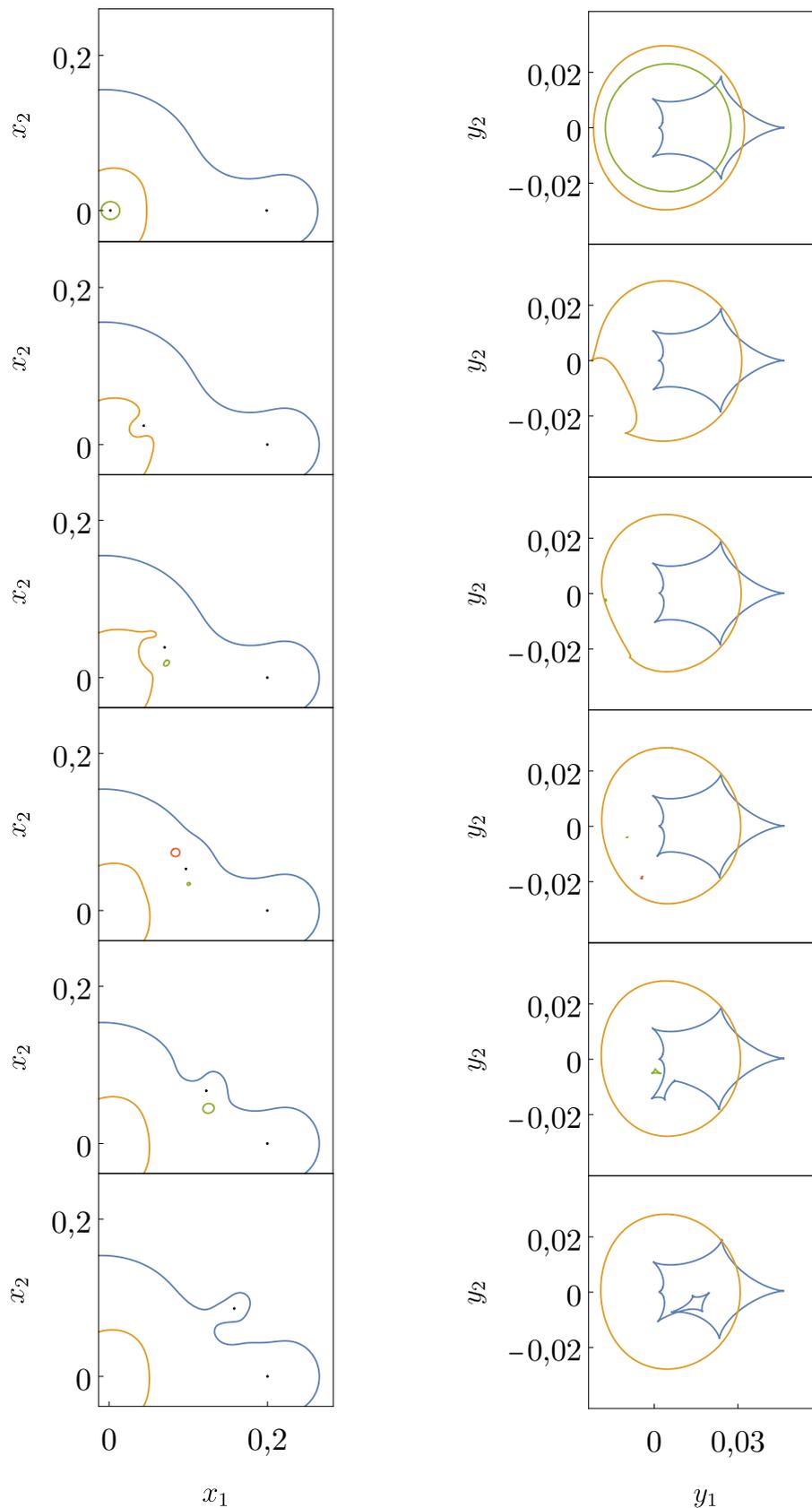


Obrázek 6.2: Pokračování obrázku 6.1. Shora jsou souřadnice druhého hmotného bodu na vodorovné ose  $x_q \in \{0,155; 0,2; 0,24; 0,25; 0,373\}$ .

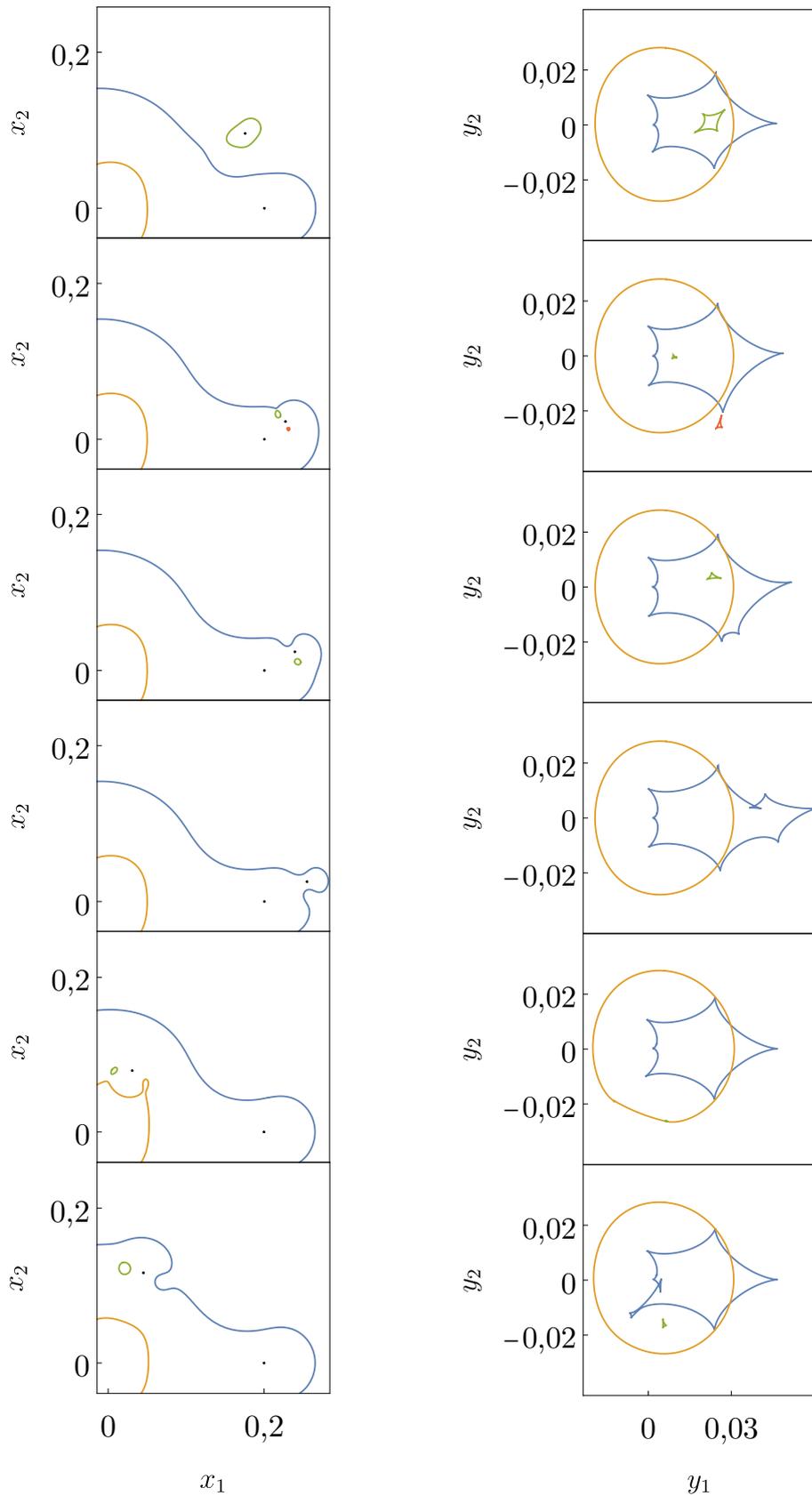


- |  |   |
|--|---|
| <span style="color: orange;">—</span> spojení $\bar{p}$ a $\bar{t}$              | <span style="color: black;">—</span> spojení $\bar{p}$ a $\bar{r}$                |
| <span style="color: blue;">—</span> spojení spodní části $\bar{p}$ a $\bar{t}$   | <span style="color: blue;">- - -</span> zmenšení spodní části $\bar{p}$ do bodu   |
| <span style="color: magenta;">—</span> spojení horní části $\bar{p}$ a $\bar{t}$ | <span style="color: magenta;">- - -</span> zmenšení horní části $\bar{p}$ do bodu |
| <span style="color: purple;">—</span> spojení spodní části $\bar{p}$ a $\bar{r}$ | <span style="color: purple;">•</span> zmenšení $\bar{p}$ do bodu                  |
| <span style="color: green;">—</span> spojení horní části $\bar{p}$ a $\bar{r}$   |   |

Obrázek 6.3: Přechody v rovině čočky pro parametry NFW hala  $c_{200} = 3,5$ ,  $\theta_s^* = 1,2$ , parametry hmotných bodů  $\kappa_p = 10^{-3}$ ,  $x_p = 0,2$ ,  $\kappa_q = 10^{-4}$  jako funkce polohy druhého hmotného bodu. Číslice 1–12 značí souřadnice (shora) na Obr . 6.4, 6.5



Obrázek 6.4: Kritické křivky a kaustiky k Obr. 6.3, souřadnice označeny číslicemi 1–6 v polárních polárních shora  $\mathbf{x}_q \in \{(0; 0.5); (0,05; 0.5); (0,08; 0.5); (0,11; 0.5); (0,14; 0.5); (0,18; 0.5)\}$ .



Obrázek 6.5: Pokračování Obr. 6.4, souřadnice označeny číslicemi 7–12 z Obr. 6.3, v polárních polárních shora  $\mathbf{x}_q \in \{(0,20; 0,5); (0,228; 0,1); (0,24; 0,1); (0,255; 0,1); (0,085; 1,2); (0,125; 1,2)\}$ .

## 7. Numerické problémy a aproximace

Pro výpočet kritické křivky a kaustiky byl použit software Mathematica, konkrétní model viz. Příloha A. Použitým modelem lze s vysokou přesností vykreslit kritickou křivku i kaustiku pro libovolné parametry hala i hmotných bodů. Problém ve výpočtu nastává pro malé hodnoty  $x$ , tedy v blízkosti centra hala. Důvodem je člen v rovnici 3.4 obsahující obsahující členy  $\ln(x/2)$  a  $F(x)$ , které v blízkosti centra hala nabývají velkých hodnot a v limitě  $x \rightarrow 0$  jsou pak oba nekočné. V čočkovací rovnici vystupuje jejich rozdíl, který je v dané limitě konečný. Pro  $x \ll 1$  můžeme aproximovat

$$F(x) = \frac{\operatorname{arctanh} \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (7.1)$$

$$\approx -\ln \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{2} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^4 \ln x)$$

a členy  $\ln x/2$  se pak vzájemněm odečtou. Podobný přístup lze nalézt v Dumet a kol. (2013, kap. 3.1), kde je navržena aproximace pro  $\kappa_s \lesssim 0.1$ , ve které je úhel odklonu NFW modelu

$$\alpha(x) \approx -x\kappa_s \left(1 + 2 \ln \frac{x}{2}\right). \quad (7.2)$$

Takto lze zvýšit interval, na kterém je možné analýzu kritické křivky a kaustiky provádět. Tento postup však nenabízí řešení pro  $x \rightarrow 0$ , jelikož čočkovací rovnice stále obsahuje členy typu  $x \ln(x/2)$ , případně  $x^2 \ln(x/2)$ , které způsobí podobný problém. Aproximace čočkovacích modelů navíc nezaručují zachování všech čočkovacích vlastností a z toho důvodu pro analýzu v rámci celé práce použity nebyly.

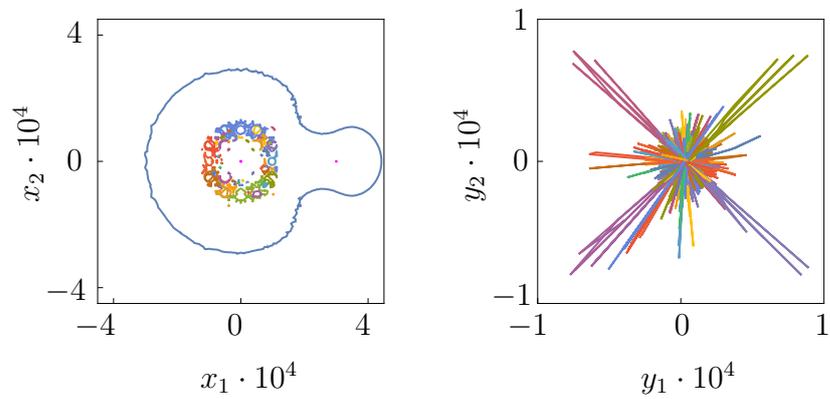
Numericky nestabilní chování v programu Mathematica znázorňuje Obr. 7.1, kde funkce *ContourPlot*<sup>1</sup>, řešící rovnici  $\det \mathcal{A} = 0$ , chybně identifikuje řešení kvůli malým hodnotám Jakobiánu  $\mathcal{A}$ , které software aproximuje na nulu i mimo kritickou křivku. Funkce *ContourPlot* těmito body pak prokládá kritickou křivku a takto nalezené souřadnice jsou následně čočkovací rovnicí zobrazeny do roviny zdroje, čímž dochází k umocnění veškerých numerických chyb. Parametry, jako *WorkingPrecision*<sup>2</sup>, či *PlotPoints*<sup>3</sup> mají nad určitou mezí jen nepatrný vliv a výrazně prodlužují čas výpočtu.

V použitém modelu v programu Mathematica byly numerické chyby bez výše zmíněných aproximací výrazné pro  $x \lesssim 10^{-4}$  a pro  $x \lesssim 5 \cdot 10^{-5}$  byla jejich analýza zcela znemožněna. Tato hranice odpovídá hodnotě  $\kappa_s \approx 0,05$ , tedy většině kup z měření OmegaWINGS, viz Obr. 2.3. Naproti tomu hodnoty parametrů  $\kappa_s$  pozorovaných objektů z měření CLASH jsou o přibližně jeden až dva řády vyšší a k žádným numerickým problémům zde nedochází.

<sup>1</sup><https://reference.wolfram.com/language/ref/ContourPlot.html> (2020)

<sup>2</sup><https://reference.wolfram.com/language/ref/WorkingPrecision.html> (2020)

<sup>3</sup><https://reference.wolfram.com/language/ref/PlotPoints.html?q=PlotPoints> (2020)



Obrázek 7.1: K numerickým chybám funkce ContourPlot programu Mathematica pro  $\kappa_s = 0,06$ ,  $x_p = 3 \cdot 10^{-4}$ ,  $\kappa_p = 10^{-9}$ . Kritická křivka vlevo, kaustika v odpovídajících barvách vpravo.

# Závěr

S nárůstem výkonu počítačů lze při analýze pozorování vesmírných objektů a událostí využívat velmi složité modely. Pro fundamentální pochopení čočkovacích vlastností je výhodné znát analytické řešení některých jednodušších situací, např. námi použitého NFW hala kombinovaného s hmotnými body. Jeho výhodou je, že čočkovací rovnice má jednoduchý tvar. Vzhledem k malému množství volných parametrů byla provedena kompletní analýza režimů kritických křivek a kaustické struktury.

Ze znalosti parametrů modelu lze snadno dopočítat kritické křivky i kaustickou strukturu. Opačná úloha je však často velmi problematická. V pozorování vesmírných objektů lze pak na základě v práci poskytnuté analýzy omezit parametry hala a perturbace na příslušné intervaly, ve kterých tyto situace mohou nastat. V rámci práce byla poskytnuta detailní analýza těchto situací pro konkrétní parametry hala a bylo ukázáno, jak se tato struktura při jejich změně chová. Konkrétně bylo prokázáno, že ve studovaném rozsahu parametrů dochází pouze k jejich škálování řídicímu se poloměry radiální a tangenciální části kritické křivky neperturovaného NFW hala.

Zajímavou alternativou k modelu Navarro, Frenka a Whitea je model NFWT, uvažující rozloženou hmotu jen ve sférické oblasti kolem centra hala. Vně této oblasti se halo jeví jako bodová čočka. Bylo ukázáno, že čočkovací vlastnosti tohoto modelu se velmi podobají původnímu modelu NFW. Hlavní výhoda NFWT spočívá převážně v urychlení některých numerických metod, např. metodě zpětného střelení paprsků, kde je úhel odklonu obecně počítán integrací přes rozložení hmoty.

V poslední části byl poskytnut rozbor dvou konkrétních situací NFW hala perturbovaného dvěma hmotnými body, na nichž lze vidět hrubé rysy chování tohoto modelu.

Použitý model v programu Mathematica se ukázal jako dostatečně efektivní analýza kritické křivky a kaustiky byla v důsledku numerických chyb znemožněna pouze v blízkosti centra hala. Možná vylepšení mohou spočívat ve vhodných aproximacích, či restrukturalizaci kódu, kterou lze teoreticky některým chybám předejít.

# Seznam použité literatury

- BIVIANO, A., MORETTI, A., PACCAGNELLA, A., POGGIANTI, B. M., BETTONI, D., GULLIEUSZIK, M., VULCANI, B., FASANO, G., DÓNOFRIO, M., FRITZ, J. a CAVA, A. (2017). The concentration-mass relation of clusters of galaxies from the omegawings survey. *Astronomy and Astrophysics*, **607**, 13.
- DUMET, M., HABIB, S., CAMINHA, G. a MAKLER, M. (2013). Analytic solutions for navarro-frenk-white lens models in the strong lensing regime for low characteristic convergences. *Astronomy and Astrophysics*, **560**.
- HEYROVSKÝ, D., TIMKO, L. a KARAMAZOV, M. (2020). The Imprint of Small-scale Structure on the Gravitational Lensing by Dark Matter Halos. In *American Astronomical Society Meeting*, pages 455.09 (Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 52, No. 1).
- MENEGHETTI, M. (2016). *Introduction to Gravitational Lensing - Lecture scripts*.
- MERTEN, J., MENEGHETTI, M., POSTMAN, M., UMETSU, K., ZITRIN, A., MEDEZINSKI, E., NONINO, M., KOEKEMOER, A., MELCHIOR, P., GRUEN, D., MOUSTAKA, L., BARTELMANN, M., HOST, O., DONAHUE, M., COE, D., MOLINO, A., JOUVEL, S., MONNA, A., SEITZ, S., CZAKON, N., LEMZE, D., SAYERS, J., BALESTRA, I., ROSATI, P., BENÍ, N. T., BIVIANO, A., BOUWENS, R., BRADLEY, L., BROADHURST, T., CARRASCO, M., FORD, H., GRILLO, C., INFANTE, L., KELSON, D., LAHAV, O., MASSEY, R., MOUSTAKAS, J., RASIA, E., RHODES, J., VEGA, J. a ZHENG, W. (2015). Clash: The concentration-mass relation of galaxy clusters. *The Astrophysical Journal*, **806**.
- NARAYAN, R. a BARTELMANN, M. (1996). Lectures on gravitational lensing.
- NAVARRO, J. F., FRENK, C. S. a WHITE, S. D. M. (1996). The Structure of Cold Dark Matter Halos. **462**, 563.
- SCHNAIDER, J. (2006). *Extragalactic Astronomy and Cosmology*. Springer, Bonn, Germany. ISBN 13 978-3-540-33174-2.
- TIMKO, L. (2017). Gravitační čočkování kombinací spojitě a diskrétní hmoty. Praha, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky.
- WAMBSGANSS, J. (1998). Gravitational lensing in astronomy. *LivingRev. Rel.* **1:12,1998**, **1**.

# Seznam obrázků

1.1	Schéma ohybu světelného paprsku (modře) gravitační čočkou . . . . .	4
1.2	Jakobián zjasnění s vyznačenou kritickou křivkou (vlevo), kaustická struktura (vpravo). Legenda je v rozsahu $(-0,4; 0,4)$ kvůli vzhladem k příliš vysokým hodnotám Jakobiánu v blízkosti centra hala a hmotného bodu. . . . .	8
2.1	Hodnoty $\theta_s^*$ v závislosti na koncentračním parametru $c_{200}$ pro některé kupy galaxií dle dvou různých měření, šedě jsou vyznačeny $1\sigma$ odchylky. . . . .	12
2.2	Kritická křivka NFW modelu (vlevo) a odpovídající kaustika (vpravo) pro $c_{200} = 3,5$ , $\theta_s^* = 1,2$ . Modře je vyznačena tangenciální a oranžově radiální část kritické křivky. . . . .	13
2.3	Kontury konstantního $\kappa_s$ , hodnoty jsou vypsány u příslušných izočar. Data NFW z měření OmegaWINGS (černě) a CLASH (modře). Kontura $\kappa_s$ odpovídající parametrům $c_{200} = 3,5$ , $\theta_s^* = 1,2$ je vyznačena modrou čarou. . . . .	14
2.4	Závislost poloměru tangenciální (horní, modrá) a radiální (spodní, oranžová) části kritické křivky na $\kappa_s$ v NFW modelu. Přerušovaně je vyznačena hodnota $\kappa_s$ odpovídající parametrům $c_{200} = 3,5$ , $\theta_s^* = 1,2$ . . . . .	14
3.1	Přehled typů kritických křivek (levý sloupec) a jejich kaustik (pravý sloupec) v odpovídajících barvách pro parametry kupy $c_{200} = 3,5$ , $\theta_s^* = 1,2$ . Černým bodem je vždy vyznačena souřadnice hmotného bodu, souřadnice hala je $(0; 0)$ . Parametry hmotného bodu jsou shora $(\kappa_p \cdot 10^4, x_p) \in \{(3,5; 0,26); (3,5; 0,14); (3,5; 0,12); (3,5; 0,035); (0,83; 0,0125); (5,2; 0,016); (3,5; 0,008); (0,83; 0,0029)\}$ , odpovídá číslování 1–8 na Obr. 3.2. . . . .	17
3.2	Hranice jednotlivých typů kritických křivek kombinovaného modelu pro parametry kupy $c_{200} = 3,5$ , $\theta_s^* = 1,2$ podle (Heyrovský a kol., 2020). . . . .	18
4.1	Hranice jednotlivých typů kritických křivek kombinovaného modelu pro čtyři různé parametry kupy $\kappa_s$ . Osy jsou normalizované podle polohy bodu $K2$ . . . . .	21
4.2	Pozice bodů $K1$ (červeně) a $K2$ (černě) kombinovaného modelu. Fitováno vztahy pro poloměr radiální resp. tangenciální části kritické křivky NFW hala. V příslušných barvách jsou přerušovaně vyznačeny hodnoty $\kappa_s$ z grafu na Obr. 4.1. . . . .	22
4.3	Pozice bodů $K1$ (červeně) a $K2$ (černě) kombinovaného modelu. Fitováno lineární kombinací druhé a čtvrté mocniny $\kappa_s$ . příslušných barvách jsou přerušovaně vyznačeny hodnoty $\kappa_s$ z grafu na Obr. 4.1. . . . .	22
5.1	Srovnání úhlu odklonu $a(x)$ pro $\kappa_s = 1$ , NFW (čárkovaně) a NFWT pro parametry $c_{200} = 3,5$ (modře) a $c_{200} = 1,0$ (červeně). . . . .	24

5.2	Srovnání poloměrů radiální (spodní část křivky v barvě) a tangenciální části křivky (horní část). Závislosti původního NFW modelu jsou vyznačeny přerušovaně a závislosti NFWT modelů $c_{200} = 3,5$ (modře) a $c_{200} = 1,0$ (červěně). . . . .	24
5.3	Přehled typů kritických křivek (levý sloupec) a jejich kaustik (pravý sloupec) v odpovídajících barvách pro parametry kupy $c_{200} = 3,5$ , $\theta_s^* = 1,2$ . Černým bodem je v vždy vyznačena souřadnice hmotného bodu. Parametry hmotného bodu jsou shora $(\kappa_p \cdot 10^4; x_p) \in \{(1; 0,014); (5; 0,0115); (5; 0,016); (1; 0,0797); (1; 0,13); (1; 0,215); (1; 0,0967); (30; 0,1452)\}$ , což odpovídá číslování 1–8 na Obr. 3.2. . . . .	26
5.4	Hranice jednotlivých typů kritických křivek kombinovaného modelu pro parametry kupy $c_{200} = 3,5$ , $\theta_s^* = 1,2$ . Šedě jsou vyznačeny původní přechody modelu NFW. . . . .	27
5.5	Pozice bodů $K1$ (červěně) a $K2$ (černě) kombinovaného modelu NFWT s hmotným bodem. Fitováno vztahy pro poloměr radiální resp. tangenciální kritické části křivky NFW modelu. $\kappa_s$ odpovídající $c_{200} = 3,5$ , $\theta_s^* = 1,2$ je vyznačena přerušovaně. Plnými body jsou značeny souřadnice NFWT modelu, křížky pak původní model NFW. . . . .	28
5.6	Pozice bodů $K1$ (červěně) a $K2$ (černě) kombinovaného modelu, fitovaných lineární kombinací druhé a čtvrté mocniny $\kappa_s$ . $\kappa_s$ odpovídající $c_{200} = 3,5$ , $\theta_s^* = 1,2$ je vyznačena přerušovaně. Plnými body jsou značeny souřadnice NFWT modelu, křížky pak původní model NFW. . . . .	28
6.1	Kritické křivky a kaustiky pro parametry hala $c_{200} = 3,5$ , $\theta_s^* = 1,2$ , prvním bodem $x_p = 0,2$ , $\kappa_p = \kappa_q = 10^{-3}$ . Střed hala je na souřadnici $(0; 0)$ a souřadnice hmotných bodů jsou značeny černými body. Souřadnice druhého hmotného bodu jsou na vodorovné ose $x_q \in \{0; 0,03; 0,11; 0,112; 0,115; 0,15\}$ . . . . .	31
6.2	Pokračování obrázku 6.1. Shora jsou souřadnice druhého hmotného bodu na vodorovné ose $x_q \in \{0,155; 0,2; 0,24; 0,25; 0,373\}$ . . . . .	32
6.3	Přechody v rovině čočky pro parametry NFW hala $c_{200} = 3,5$ , $\theta_s^* = 1,2$ , parametry hmotných bodů $\kappa_p = 10^{-3}$ , $x_p = 0,2$ , $\kappa_q = 10^{-4}$ jako funkce polohy druhého hmotného bodu. Číslice 1–12 značí souřadnice (shora) na Obr. 6.4, 6.5 . . . . .	33
6.4	Kritické křivky a kaustiky k Obr. 6.3, souřadnice označeny číslicemi 1–6 v polárních polárních shora $\mathbf{x}_q \in \{(0; 0,5); (0,05; 0,5); (0,08; 0,5); (0,11; 0,5); (0,14; 0,5); (0,18; 0,5)\}$ . . . . .	34
6.5	Pokračování Obr. 6.4, souřadnice označeny číslicemi 7–12 z Obr. 6.3, v polárních polárních shora $\mathbf{x}_q \in \{(0,20; 0,5); (0,228; 0,1); (0,24; 0,1); (0,255; 0,1); (0,085; 1,2); (0,125; 1,2)\}$ . . . . .	35
7.1	K numerickým chybám funkce ContourPlot programu Mathematica pro $\kappa_s = 0,06$ , $x_p = 3 \cdot 10^{-4}$ , $\kappa_p = 10^{-9}$ . Kritická křivka vlevo, kaustika v odpovídajících barvách vpravo. . . . .	37

# A. Přílohy

## A.1 Kód pro nalezení kritické křivky a kaustiky

Pro vykreslení kritických křivek je třeba znát explicitní tvar čočkovací rovnice, na základě čehož lze spočítat determinant Jakobiánu daného rovnicí 1.10. Body na kritické křivce pak splňují rovnici

$$\det \mathcal{A} = 0. \tag{A.1}$$

To lze v programu *Mathematica*, který byl používán v rámci celé práce, nalézt následovně. Je třeba zadat explicitní tvar čočkovací rovnice ve tvaru

```
y1[x1_,x2_]=...;  
y2[x1_,x2_]=...;
```

Čočkovací jakobián lze definovat

```
detA[x1_,x2_]=D[y1[x1,x2],x1] D[y2[x1,x2],x2]-  
D[y1[x1,x2],x2] D[y2[x1,x2],x1];
```

Numerické řešení lze pak na intervalu  $[-L,L]$  nalézt funkcí *ContourPlot*

```
criticalCurves = ContourPlot[detA[x1,x2]==0,{x1,-L,L},{x2,-L,L}]
```

která kritickou křivku zároveň vykreslí. Pro nalezení kaustiky je třeba znát souřadnice bodů kritické křivky. Ty lze získat z výstupu funkce *ContourPlot*

```
coordinates = Cases[Normal@criticalCurves, Line[x_] :> x, Infinity];
```

které již stačí zobrazit pomocí čočkovací rovnice do roviny zdroje

```
list1 = Apply[y1, coordinates, {2}];  
list2 = Apply[y2, coordinates, {2}];
```

Pro vykreslení kaustiky je ještě třeba tyto souřadnice správně uspořádat a vykreslit funkcí *ListLinePlot*

```
pairUp[xValues_, yValues_] := ({xValues[[#]], yValues[[#]]}) & /@  
Range[Min[Length[xValues], Length[yValues]]];  
caustic = FoldPairList[TakeDrop,  
pairUp[Flatten[list1], Flatten[list2]], Map[Length, list1];  
  
ListLinePlot[caustic]
```

Výhoda tohoto postupu je, že barvy jednotlivých částí kritické křivky odpovídají příslušným částem kaustiky. Přesnost výpočtu lze ovlivnit ve funkci *ContourPlot* parametry *PlotPoints*, určujícím počet buněk, ve kterých je rovnice řešena, a *WorkingPrecision*, určujícím počet iterací výpočtu.

V příložených souborech je zkompileovaná verze výše zmíněného postupu. Parametry lze interaktivně měnit funkcí Manipulate.

Kompilovaná verze v softwaru Mathematica se ukázala pro praktické využití dostatečně efektivní. Vyšší rychlosti výpočtu lze dosáhnout v programovacích jazycích nižší úrovně, jako Julia. Prototyp programu v Julii, který počítá hodnotu Jakobiánu kombinovaného NFW modelu lze nalézt v příložených souborech.