MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Tomáš Trégner

Trh více prodejců

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval svým rodičům za jejich podporu během celé doby mého studia a vedoucímu práce za jeho cenné rady.

Název práce: Trh více prodejců

Autor: Bc. Tomáš Trégner

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá problémem známým v literatuře jako problém prodavače novin. Po shrnutí základního modelu se věnujeme dvěma rozšířením tohoto problému a jejich spojením do jediného modelu. Prvním rozšířením je možnost prodavače volit prodejní cenu. Druhým rozšířením je vytvoření trhu více prodejců. Obě tyto situace popisujeme v první kapitole této práce. Ve druhé kapitole se pak zabýváme spojením obou uvedených rozšíření, tedy trhem více prodejců, kteří navíc mohou volit svou prodejní cenu. Zabývali jsme se více modely, které popisují takový trh, a zjistili jsme, že se jedná o velice komplexní problém. Pro speciální případ takového trhu se dvěma prodejci jsme však nalezli optimální reakci jednoho prodejce na druhého. To nám umožnilo vytvořit program zkoumající takový trh, zejména závislost optimálního rozhodnutí jednoho prodejce na strategii druhého prodejce a přítomnost Nashových ekvilibrií.

Klíčová slova: stochastická optimalizace problém prodavače novin

Title: Market with several vendors

Author: Bc. Tomáš Trégner

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The thesis studies the problem well-known in literature as the newsvendor problem. After summarizing the basic model we pay attention to two extensions of this problem and their combination in single model. The first extension concerns the possibility of the vendor to choose his selling price. The second extension is creation of market with several vendors. We describe both situations in the first chapter of the thesis. In the second chapter we study the combination of both extensions, which means the market with several vendors who can choose their selling prices. We touched several models of such market and we found that the problem is very complex. However we found the optimal reaction of one vendor on the strategy of the other vendor in case of special market with two vendors. That enabled us to create a programme that examines such market, mainly the dependence of the optimal decision of one vendor on the strategy of the second vendor and presence of the Nash equilibriums.

Keywords: stochastic optimization newsvendor problem

Obsah

Úvod **2**

1 Shrnutí známých výsledků **3**
1.1 Základní model . . . 3
1.2 Model s volbou prodejní ceny . . . 4
1.2.1 Aditivní poptávková funkce . . . 4
1.2.2 Multiplikativní poptávková funkce . . . 9
1.3 Trh více prodejců bez volby cen . . . 10
1.3.1 Elementy teorie her . . . 11
1.3.2 Řešení problému . . . 12

2 Trh více prodejců řízený cenami - teoretická část **16**
2.1 Trh dvou prodejců s aditivní poptávkou a konečně mnoha cenami 17
2.2 Spojitý výběr ceny . . . 22
2.3 Přechodová funkce závislá na ceně . . . 24
2.4 Multiplikativní poptávka . . . 25

3 Trh více prodejců řízený cenami - praktická část **28**
3.1 Numerický algoritmus a jeho implementace . . . 28
3.2 Získané výsledky . . . 32

Závěr **39**

Seznam použité literatury **40**

Seznam obrázků **41**

A Přílohy **42**
A.1 Základní věty z matematické analýzy a teorie pravděpodobnosti . 42

Úvod

V literatuře týkající se optimalizace je dnes již klasickým tématem takzvaný problém prodavače novin.[1] Ten řeší otázku, jak by měl prodavač maximalizovat utržený zisk. Prodej je realizován tak, že prodavač se ráno rozhodne, kolik nakoupí novin, které následně v průběhu dne za vyšší cenu prodává. Noviny, které neprodá, večer vyhodí či prodá za nějakou nízkou zůstatkovou hodnotu. Zbožím, se kterým prodavač obchoduje, nemusí být pouze noviny, ale může se též jednat například o rychle se kazící potraviny, či jiné zboží, které rychle ztrácí hodnotu.

Dle (Chen a kol., 2016) se tento problém prvně objevil v práci (Edgeworth, 1888), kde jej autor využil k řešení problému se zásobami bankovek v případě náhodné poptávky vkladatelů. Název „newsboy“ se prvně objevil v knize (Morse a Kimball, 1951). Od poloviny dvacátého století se objevilo mnoho modifikací a rozšíření klasického problému. Tato rozšíření se stala i tématy několika závěrečných prací na naší fakultě. Z nich jmenujme alespoň práci (Šedina, 2018), ve které se autor věnoval mimo jiné situaci, kdy prodejce určuje nejen množství produktu, které zakoupí, ale též jeho prodejní cenu, a práci (Krch, 2018), ve které se autor věnuje situaci, kdy se na trhu objeví více prodejců. Naším cílem je navázat na výsledky dosažené v obou zmíněných pracích a rozšířit je o případ, kdy se na jednom trhu objeví více prodejců, kteří si mohou určovat svou prodejní cenu.

V první kapitole této práce shrneme doposud známé výsledky týkající se základní varianty problému prodavače novin a jeho dvou rozšíření, která se týkají možnosti volby ceny produktu a trhu více prodejců bez volby cen. V následující kapitole pak budeme prezentovat výsledky, které jsme získali o trhu více prodejců s volbou ceny. Z důvodu vysoké komplexity problému se zaměříme pouze na trh dvou prodejců. V poslední kapitole pak představíme numerický algoritmus, který jsme pro trh dvou prodejců vytvořili a jeho implementaci v jazyce C#.

[1] V angličtině se používají termíny newsboy problem či newsvendor problem.

1. Shrnutí známých výsledků

1.1 Základní model

Mějme prodejce, který ráno zakoupí libovolné množství jednoho produktu, který následně celý den prodává a večer přebytečné množství prodá za zbytkovou cenu. Zaveďme následující značení:

q	...	nakoupené množství produktu
p	...	prodejní cena produktu
c	...	nákupní cena produktu
s	...	zbytková cena
ω	...	náhodná poptávka s nezápornými hodnotami tj. $\omega \geq 0$
f, F	...	hustota a distribuční funkce náhodné poptávky
Π	...	zisk

Aby úloha měla smysl, musí platit $s < c < p$, přičemž $p > 0$ a $c > 0$, ale s může být i nulová či záporná (v takovém případě se jedná o cenu za likvidaci přebytků). Předpokládáme, že prodejce nezná dopředu realizaci náhodné veličiny ω, ale zná její rozdělení. Úkolem prodejce je maximalizovat střední hodnotu zisku. Přitom všechny tři ceny jsou fixní, jediný parametr, který prodejce může volit, je zakoupené množství. Zisková funkce má v tomto případě následující tvar:

$$\Pi(q, \omega) = \begin{cases} p\omega - cq + s(q - \omega), & \omega \leq q, \\ pq - cq, & \omega > q \end{cases}$$

Úlohu pak můžeme formulovat v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} &\max_q \mathsf{E}_\omega[\Pi(q, \omega)] = \mathsf{E}_\omega[p \min\{\omega, q\} - cq + s \max\{q - \omega, 0\}] \\ &\text{s.t.} q \geq 0 \end{aligned}$$

Řešení této úlohy v obecnější verzi, kdy do úlohy vstupuje ještě penalizace za neuspokojení poptávky, můžeme najít v práci (Šedina, 2018). Pro případ, kdy náhodná veličina ω je absolutně spojitá a její distribuční funkce je spojitá a rostoucí, je v této práci dokázáno, že množina optimálních řešení je jednobodová a platí

$$q^* = F^{-1}\left(\frac{p - c}{p - s}\right),$$

kde F^{-1} značí kvantilovou funkci náhodné veličiny ω.

V práci (Šedina, 2018) můžeme najít řešení i pro případ, kdy náhodná veličina ω má diskrétní rozdělení. Případům s diskrétní poptávkou se však v této práci věnovat nebudeme.

1.2 Model s volbou prodejní ceny

První rozšíření, kterému se budeme věnovat, je případ, kdy si prodejce může určit svou prodejní cenu. Toto rozšíření je zkoumáno v práci (Šedina, 2018) a dříve též v článku (Petruzzi a Dada, 1999), ze kterého zde budeme vycházet.

V případě možnosti volby prodejní ceny zpravidla předpokládáme, že její výše ovlivňuje velikost poptávky. Poptávku pak modelujeme pomocí funkce $D(p, \varepsilon)$ s deterministickou částí $y(p)$, která realizuje závislost na ceně produktu, a stochastické části, která se realizuje pomocí náhodné veličiny ε. V literatuře se nejčastěji vyskytují dva tvary poptávkové funkce, a sice aditivní tvar a multiplikativní tvar.

Aditivní tvar poptávkové funkce je dán následující formulí:

$$D(p, \varepsilon) = y(p) + \varepsilon = a - bp + \varepsilon,\ a > 0, b > 0,$$

kde ε je náhodná veličina s nulovou střední hodnotou a hodnotami v intervalu $[A, B], A < 0 < B$. Předpokládáme, že tato veličina má spojitou hustotu a rostoucí distribuční funkci.

Multiplikativní tvar poptávkové funkce je dán vzorcem:

$$D(p, \varepsilon) = y(p) \cdot \varepsilon = a \cdot p^{-b} \cdot \varepsilon,\ a > 0, b > 1,$$

kde ε je náhodná veličina se střední hodnotou rovnou jedné a hodnotami v intervalu $[A, B], 0 < A < 1 < B$. I pro tuto náhodnou veličinu předpokládáme spojitou hustotu a rostoucí distribuční funkci.

V následujících sekcích se budeme postupně zabývat oběma možnými tvary poptávkové funkce. Multiplikativnímu tvaru se věnujeme proto, že lépe odpovídá poznatkům z ekonomické teorie. Aditivnímu tvaru se věnujeme, jelikož je jednodušší a lze ho použít jako lokální aproximaci.

1.2.1 Aditivní poptávková funkce

Zopakujme a rozšiřme nejprve značení zavedené v sekci 1.1:

q	...	nakoupené množství produktu
p	...	prodejní cena produktu
c	...	nákupní cena produktu
s	...	zbytková cena produktu
ε	...	náhodná veličina s hodnotami v intervalu $[A, B]$ vyjadřující kolísání poptávky
f, F	...	hustota a distribuční funkce náhodné veličiny ε
$D(p, \varepsilon)$	...	poptávková funkce
Π	...	zisk

Poptávkovou funkci předpokládáme v aditivním tvaru, tj:

$$D(p, \varepsilon) = y(p) + \varepsilon = a - bp + \varepsilon,\ a > 0, b > 0.$$

Cílem prodejce je opět maximalizovat střední hodnotu zisku, přičemž předpokládáme, že prodejce zná tvar funkce $y(p)$ a rozdělení náhodné veličiny ε. Za daných podmínek má pak zisková funkce následující tvar:

$$\Pi(q,p) = \begin{cases} pD(p,\varepsilon) - cq + s[q - D(p,\varepsilon)], & D(p,\varepsilon) \leq q \\ pq - cq, & D(p,\varepsilon) > q \end{cases}$$

Stejně jako v (Petruzzi a Dada, 1999) zavedeme substituci $z = q - y(p)$. Potom má zisková funkce tvar:

$$\Pi(z,p) = \begin{cases} p[y(p) + \varepsilon] - c[y(p) + z] + s[z - \varepsilon], & \varepsilon \leq z \\ p[y(p) + z] - c[y(p) + z], & \varepsilon > z \end{cases}$$

Očekávaný zisk můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[\Pi(z,p)\right] = &\int_A^z (p[y(p)+\varepsilon] + s[z-\varepsilon])f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon + \\
&+ \int_z^B p[y(p)+z]f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon - c[y(p)+z] = \\
&= \int_A^z (p[y(p)+\varepsilon] + s[z-\varepsilon])f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon + \\
&+ \int_z^B (p[y(p)+\varepsilon] - p[\varepsilon - z])f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon - c[y(p)+z] = \\
= &\int_A^B p[y(p)+\varepsilon]f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon + s\int_A^z (z-\varepsilon)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon - p\int_z^B (\varepsilon - z)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon - \\
&-c(y(p)+z) - c\int_A^B (\varepsilon - z)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon + c\int_A^B (\varepsilon - z)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \\
&= (p-c)[y(p) + \int_A^B \varepsilon f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon] - (c-s)\int_A^z (z-\varepsilon)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon - \\
&-(p-c)\int_z^B (\varepsilon - z)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \\
= &(p-c)y(p) - (c-s)\int_A^z (z-\varepsilon)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon - (p-c)\int_z^B (\varepsilon - z)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon
\end{aligned}$$

Označme nyní:

$$\begin{aligned}
\Lambda(z) &= \int_A^z (z-\varepsilon)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \\
\Theta(z) &= \int_z^B (\varepsilon - z)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \\
\Psi(p) &= (p-c)y(p) \\
L(z,p) &= (c-s)\Lambda(z) + (p-c)\Theta(z)
\end{aligned}$$

S novým označením můžeme očekávaný zisk zapsat jako:

$$\mathsf{E}\left[\Pi(z,p)\right] = \Psi(p) - L(z,p)$$

Toto označení má svůj význam. Funkce $\Psi(p)$ označuje bezrizikový zisk pro případ, že poptávka bude pro danou cenu předem známa. Funkce $L(z,p)$ pak vyjadřuje ztrátu způsobenou přebytky (1. člen) a ztrátu způsobenou neuspokojením poptávky (2. člen).

Připomeňme, že firma maximalizuje střední hodnotu zisku, tedy řeší optimalizační úlohu:

$$\max_{z,p} \mathsf{E}\left[\Pi(z,p)\right]$$

Pro účely následujících výpočtů poznamenejme, že z Leibnitzova integrálního pravidla (věta A.2) plynou následující dva vztahy:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Lambda(z) = F(z)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Theta(z) = -[1 - F(z)]$$

Nyní spočtěme první dvě parciální derivace očekávaného zisku podle proměnných z a p.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,\mathsf{E}\left[\Pi(z,p)\right]}{\partial z} &= -\frac{\partial L(z,p)}{\partial z} = -(c-s)F(z) + (p-c)[1-F(z)] = \\
&= -c + s - s + sF(z) + p[1-F(z)] = \\
&= -(c-s) + (p-s)[1-F(z)] \\
\frac{\partial^2\,\mathsf{E}\left[\Pi(z,p)\right]}{\partial z^2} &= -(p-s)f(z) \\
\frac{\partial\,\mathsf{E}\left[\Pi(z,p)\right]}{\partial p} &= \frac{\partial\Psi(p)}{\partial p} - \Theta(z) = a + cb - 2bp - \Theta(z) = 2b(p^0 - p) - \Theta(z) \\
\frac{\partial^2\,\mathsf{E}\left[\Pi(z,p)\right]}{\partial p^2} &= -2b
\end{aligned}$$

Symbol p^0 přitom definujeme jako $p^0 = \frac{a+bc}{2b}$.

Můžeme si všimnout, že očekávaný zisk je konkávní v obou proměnných p i z. Využijeme konkavity v proměnné p a vyjádříme ji pomocí proměnné z z derivace očekávaného zisku podle proměnné p:

$$2b(p^0 - p) - \Theta(z) = 0$$
$$p(z) = p^0 - \frac{\Theta(z)}{2b}$$

Řešíme tedy upravenou optimalizační úlohu:

$$\max_z \mathsf{E}\left[\Pi(z,p(z))\right]$$

Střední hodnotu zisku vyjádřeného jako funkci jedné proměnné budeme označovat symbolem $\tilde{\Pi}$, tedy $\tilde{\Pi}(z) = \mathsf{E}\left[\Pi(z,p(z))\right]$.

Řešení právě formulované úlohy shrneme do následující věty. Věta je inspirována větou 1 z práce (Petruzzi a Dada, 1999), je však její slabší verzí. Domníváme se totiž, že autoři článku nedokázali plné znění věty a uvádíme tedy pouze takovou formu, jakou jsme schopni dokázat. U dalších vět v této kapitole budeme zpravidla uvádět pouze odkazy na důkazy, jelikož tuto kapitolu nepovažujeme za stěžejní část práce.

Věta 1. *Optimální strategie pro problém prodejce novin s aditivní poptávkovou funkcí je nakoupit $q^* = y(p^*) + z^*$ kusů zboží a prodávat ho za cenu $p^* = p^0 - \frac{\Theta(z^*)}{2b}$, kde z^* je dána dle následujících pravidel:*

1. *pro libovolnou distribuční funkci F lze najít hodnotu z^* vyčerpávajícím prohledáváním intervalu $[A,B]$.*

2. *Pokud F navíc splňuje podmínku $2r(z)^2+r'(z) > 0, \forall A \leq z \leq B$, kde $r(\cdot) = f(\cdot)/[1-F(\cdot)]$ je tzv. riziková funkce, pak z^* je buď největší z na intervalu $[A,B]$ splňující $\tilde{\Pi}'(z) = 0$ nebo $z^* = A$.*

3. *Je-li splněna podmínka z předchozího bodu a navíc platí $a - bc + A > 0$, pak z^* je jediné z z intervalu $[A,B]$ splňující $\tilde{\Pi}'(z) = 0$.*

Důkaz. Za pomocí výše uvedených výsledků a řetízkového pravidla (věta A.1) spočteme derivaci funkce $\tilde{\Pi}$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Pi}'(z) &= \left(-(c-s) + \left(p^0 - \frac{\Theta(z)}{2b} - s\right)[1-F(z)]\right) \cdot 1 + \\
&+ \left(2b\left(p^0 - (p^0 - \frac{\Theta(z)}{2b}\right) - \Theta(z)\right) \cdot \frac{1-F(z)}{2b} = \\
&= -(c-s) + \left(p^0 - s - \frac{\Theta(z)}{2b}\right)[1-F(z)] =: R(z)
\end{aligned}
$$

Nyní si můžeme všimnout, že funkce $\tilde{\Pi}$ má derivaci ve všech bodech intervalu $[A,B]$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Jelikož se jedná o uzavřený a omezený interval, tedy kompaktní množinu, funkce $\tilde{\Pi}$ zde tedy musí dle věty o nabývání extrémů na kompaktu (věta A.3) nabývat svého maxima (i minima). Z toho plyne tvrzení bodu 1.

K identifikaci bodů splňujících podmínku optimality prvního stupně budeme hledat nulové body funkce $R(z)$. Vlastnosti této funkce prozkoumáme pomocí výpočtu prvních dvou derivací.

$$
\begin{aligned}
R'(z) &= -\frac{-[1-F(z)]}{2b}[1-F(z)] + [p^0 - s - \frac{\Theta(z)}{2b}] \cdot (-f(z)) = \\
&= \frac{-f(z)}{2b}\left[(p^0 - s) - \Theta(z) - \frac{[1-F(z)]^2}{f(z)}\right] = \\
&= \frac{-f(z)}{2b}\left[(p^0 - s) - \Theta(z) - \frac{1-F(z)}{r(z)}\right],
\end{aligned}
$$

kde rizikovou funkci $r(z)$ definujeme předpisem $r(\cdot) = f(\cdot)/[1-F(\cdot)]$.

$$
\begin{aligned}
R''(z) &= \left[\frac{R'(z)}{f(z)} \cdot f'(z)\right] - \\
&- \frac{f(z)}{2b} \cdot \left[[1-F(z)] - \frac{-f(z)r(z) - [1-F(z)]r'(z)}{r(z)^2}\right] = \\
&= \left[\frac{R'(z)}{f(z)} \cdot f'(z)\right] - \frac{f(z)[1-F(z)]}{2br(z)^2} \cdot \left(2r(z)^2 + r'(z)\right)
\end{aligned}
$$

V bodech, kde je první derivace nulová, se pak druhá derivace zjednoduší na tvar:

$$
R''(z)|_{R'(z)=0} = -\frac{f(z)[1-F(z)]}{2br(z)^2} \cdot \left(2r(z)^2 + r'(z)\right)
$$

První člen výše uvedeného součinu je zřejmě záporný, a tedy pokud bude druhý člen kladný, tj. $2r(z)^2 + r'(z) > 0$, potom všechny body funkce $R(z)$, kde je první derivace nulová budou maxima. Jelikož spojitá funkce musí mít mezi dvěma body maxima bod minima, je zřejmé, že funkce $R(z)$ je buď monotonní nebo unimodální, a tedy má nejvýše dva kořeny. Jelikož definičním oborem funkce $R(z)$ je pouze interval $[A,B]$, musí všechny její kořeny ležet uvnitř tohoto intervalu.

Navíc $R(B) = -(c - s) < 0$. Z toho plyne, že pokud má funkce $R(z)$ pouze jeden kořen (tedy je monotonní), pak v tomto kořenu se mění znaménko z kladného na záporné, a tedy se jedná o lokální maximum funkce $\tilde{\Pi}$. Pokud má funkce $R(z)$ dva kořeny, pak menší z nich je lokálním minimem funkce $\tilde{\Pi}$ a větší z nich je lokálním maximem této funkce. V obou případech má funkce $\tilde{\Pi}$ pouze jedno lokální maximum, které je buď jediným bodem, nebo větším ze dvou bodů v intervalu $[A,B]$, které splňují podmínku $R(z) = \tilde{\Pi}'(z) = 0$. Musíme však vzít v úvahu i případ, kdy by funkce $R(z)$ byla záporná na celém intervalu $[A;B]$ (ať už by v tomto případě byla monotonní či unimodální). V takovém případě by maximum funkce $\tilde{\Pi}$ leželo v bodě A. Z toho plyne tvrzení bodu 2.

Funkce $\tilde{\Pi}$ je unimodální, pokud $R(z)$ má pouze jeden kořen, a tedy postačující podmínkou pro unimodalitu funkce $\tilde{\Pi}$ je $R(A) > 0$, nebo ekvivalentně $2bR(A) > 0$, kde:

$$\begin{aligned} 2bR(A) &= -2b(c-s) + \Big[2b(p^0 - s) - \Theta(A)\Big] \cdot [1 - F(A)] \\ &= -2b(c-s) + [(a+bc) - 2bs + A] \cdot [1-0] \\ &= a - bc + A \end{aligned}$$

Navíc jelikož $R(A) > 0$, maximum funkce $\tilde{\Pi}$ nemůže ležet v bodě A. Z toho již plyne tvrzení bodu 3.

□

K uvedené a dokázané větě přidáme ještě několik poznámek. Rozdíl oproti formulaci v článku (Petruzzi a Dada, 1999) je v bodě 2, kde připouštíme, že by maximum funkce $\tilde{\Pi}$ mohlo ležet v bodě A, jelikož nejsme schopni dokázat, že tomu tak nemůže být. Tato varianta však z ekonomického hlediska nedává dobrý smysl. Znamenalo by to, že prodejce maximalizuje svůj zisk tím, že nakoupí přesně tolik zboží, kolik ví, že jistě prodá (tedy například tolik výtisků novin, kolik má předplatitelů). Domníváme se ovšem, že za stávajících předpokladů, tedy zejména pokud je hustota náhodné veličiny ε spojitá a kladná na intervalu (A, B) a $p > c$, platí $\exists \delta > 0, \forall z \in (A, A + \delta) : \tilde{\Pi}(z) > \tilde{\Pi}(A)$. Jinými slovy předpokládáme, že se prodejci vyplatí zakoupit alespoň nějaké malé množství produktu navíc. To, že by takové tvrzení mělo platit, nám bohužel říká pouze naše intuice, důkaz se nám sestavit nepodařilo (ani za pomocí přidání dodatečných podmínek). Pokud by se tento náš předpoklad podařilo dokázat, pak by mimo jiné $R(A) > 0$ a tedy tvrzení bodu 3 by platilo též pouze za podmínek bodu 2 a bod 3 by se tak stal zbytečným.

Ještě dodáme, že podmínku bodu 2 předchozí věty splňují například všechna rozdělení, která mají neklesající rizikovou funkci, což je poměrně široká třída rozdělení zahrnující například rozdělení z třídy PF_2 nebo lognormální rozdělení.

1.2.2 Multiplikativní poptávková funkce

Nyní se podíváme na případ, kdy je poptávková funkce v multiplikativním tvaru, tedy:

$$D(p,\varepsilon) = y(p)\cdot\varepsilon = a\cdot p^{-b}\cdot\varepsilon,\ a>0, b>1.$$

Obdobně jako v případě aditivní poptávkové funkce zavedeme substituci, tentokrát ve tvaru $z = q/y(p)$. Ačkoliv způsob definice z je odlišný od aditivního případu, význam je stejný: pokud $z > \varepsilon$, prodejci nějaké zboží zbude, pokud $z < \varepsilon$, prodejce neuspokojí celou poptávku. Ziskovou funkci pak můžeme vyjádřit jako:

$$\Pi(z,p) = \begin{cases} py(p)\varepsilon - cy(p)z + sy(p)[z-\varepsilon], & \varepsilon \le z, \\ py(p)z - cy(p)z, & \varepsilon > z. \end{cases}$$

Očekávaný zisk má tedy tvar:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[\Pi(z,p)\right] = \int_A^z [(py(p)\varepsilon + sy(p)(z-\varepsilon)]f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon + \int_z^B py(p)zf(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon - cy(p)z = \\ = \int_A^z [py(p)\varepsilon] + sy(p)(z-\varepsilon)]f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon + \\ + \int_z^B [py(p)\varepsilon] - py(p)(\varepsilon - z)]f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon - cy(p)z = \\ = \int_A^B py(p)\varepsilon f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon + sy(p)\int_A^z (z-\varepsilon)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon - py(p)\int_z^B (\varepsilon - z)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon - \\ -cy(p)z - cy(p)\int_A^B (\varepsilon - z)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon + cy(p)\int_A^B (\varepsilon - z)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \\ = (p-c)y(p)\int_A^B \varepsilon f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon - (c-s)y(p)\int_A^z (z-\varepsilon)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon - \\ -(p-c)y(p)\int_z^B (\varepsilon - z)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = \\ = (p-c)y(p) - y(p)\left[(c-s)\int_A^z (z-\varepsilon)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon - (p-c)\int_z^B (\varepsilon - z)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\right] \end{aligned}$$

Obdobně jako v případě aditivní poptávky můžeme označit:

$$\begin{aligned} \Lambda(z) &= \int_A^z (z-\varepsilon)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \\ \Theta(z) &= \int_z^B (\varepsilon - z)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \\ \Psi(p) &= (p-c)y(p) \\ L(z,p) &= y(p)[(c-s)\Lambda(z) + (p-c)\Theta(z)] \end{aligned}$$

Značení se oproti aditivnímu případu liší pouze v definici $L(z,p)$, ve které přibyl člen $y(p)$. S tímto označením můžeme očekávaný zisk opět zapsat jako:

$$\mathsf{E}\left[\Pi(z,p)\right] = \Psi(p) - L(z,p)$$

Proces hledání optimálního řešení je podobný tomu v případě aditivní poptávky a je uveden v (Petruzzi a Dada, 1999). Zde tedy shrneme pouze výsledky.

Lemma 2. *Pro pevné z je optimální cena dána následujícím vzorcem:*

$$p(z) = p^0 + \frac{b}{b-1}\left[\frac{(c-s)\Lambda(z)}{1-\Theta(z)}\right],$$

kde $p^0 = bc/(b-1)$.

Důkaz. Viz (Petruzzi a Dada, 1999).

□

Věta 3. *Optimální strategie pro problém prodejce novin s multiplikativní poptávkovou funkcí je nakoupit* $q^* = y(p(z^*))z^*$ *kusů zboží a prodávat ho za cenu* $p^* = p(z^*)$ *definovanou pomocí lemmatu 2, kde* z^* *je dána dle následujících pravidel:*

1. *pro libovolnou distribuční funkci* F *lze najít hodnotu* z^* *vyčerpávajícím prohledáváním intervalu* $[A,B]$.
2. *Pokud* F *navíc splňuje podmínku* $2r(z)^2 + r'(z) > 0, \forall A \leq z \leq B$, *kde* $r(\cdot) = f(\cdot)/[1 - F(\cdot)]$ *je riziková funkce, a navíc* $b \geq 2$, *pak* z^* *je jediné* z *z intervalu* $[A,B]$ *splňující:*

$$\frac{\mathrm{d}\, E[\Pi(z,p(z))]}{\mathrm{d}z} = 0.$$

Důkaz. Viz (Petruzzi a Dada, 1999).

□

1.3 Trh více prodejců bez volby cen

v této sekci budeme vycházet zejména z práce (Krch, 2018). Budeme se zabývat přechodem od jednoho prodejce k obecně n prodejcům. Tím se dostáváme do oblasti teorie her. Zavedení základních pojmů teorie her bude hlavním cílem této sekce.

Nejprve popíšeme problém a zavedeme nové značení. Předpokládejme, že máme trh, na kterém figuruje n prodejců. Zboží těchto prodejců je podobné, nikoliv však stejné. Substituce mezi jednotlivými produkty je tedy možná pouze částečně. Předpokládáme tedy, že zákazník má svého preferovaného prodejce (tedy svůj preferovaný produkt). Pokud prodejci již zboží došlo, zákazník se rozmyslí, zda přejde k jinému prodejci a zakoupí obdobný produkt, nebo trh opustí. Pokud zákazník přejde k jinému prodejci a ani u toho nepořídí, pak již nezkouší zakoupit zboží u dalšího prodejce, ale vždy trh opouští.

Pro popsaný problém zavádíme následující značení:

q_i	...	množství produktu zakoupené prodejcem i
p_i	...	prodejní cena pro prodejce i
c_i	...	nákupní cena pro prodejce i
s_i	...	zbytková hodnota neprodaného zboží prodejce i
ω_i	...	náhodná poptávka po zboží prodejce i s nezápornými hodnotami, tj. $\omega_i \geq 0, \forall i$
f_i, F_i	...	hustoty a distribuční funkce náhodných veličin ω_i
Π_i	...	zisk prodejce i

Aby úloha měla smysl a vyhnuli jsme se triviálním řešením, předpokládáme, že pro výše definované veličiny platí $s_i < c_i < p_i$. Dále předpokládáme, že náhodné veličiny ω_i mají spojité hustoty a rostoucí distribuční funkce. Pro zjednodušení úlohy pak předpokládáme, že náhodné veličiny ω_i jsou nezávislé.

Jak jsme již zmiňovali, v případě, že poptávka po zboží některého prodejce je vyšší, než množství zboží, které tento prodejce zakoupil, neuspokojení zákazníci mohou přejít k ostatním prodejcům. Pravděpodobnost, že neuspokojený zákazník přejde od prodejce i k prodejci j označíme jako $\gamma_{i,j}$. Na pravděpodobnosti přechodu klademe následující předpoklady:

1. $0 \leq \gamma_{i,j} < 1$ pro $i,j = 1, \ldots, n$
2. $\gamma i,i = 0$
3. $0 \leq \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} < 1$

Třetí předpoklad tedy říká, že neuspokojený zákazník může trh rovnou opustit, aniž by hledal za své zboří náhradu.

1.3.1 Elementy teorie her

Situaci, kdy na jednom trhu máme n prodejců (v obecném smyslu n *hráčů*), kteří si navzájem konkurují, nazýváme *hrou*. Každému prodejci přiřadíme množinu možných *strategií*, kterou pro prodejce i označíme X_i. Jednotlivé strategie budeme značit x_i. V našem případě jsou strategiemi zakoupená množství, tedy $x_i = q_i$ a $X_i = [0, U_i]$, kde U_i označuje maximální množství zboží, které může zakoupit prodejce i. Abychom však definice zavedené v této sekci mohli využívat i v další kapitole, budeme pro strategie a jejich množiny užívat abstraktní označení. Kartézský součin množin strategií všech prodejců označíme $\boldsymbol{X} = \times_{i=1}^{n} X_i$. Dále označíme vektor strategií všech prodejců kromě i-tého jako $\boldsymbol{x}_{i-} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ a prostor strategií všech prodejců kromě i-tého jako $\boldsymbol{X}_{i-} = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$. Z pohledu prodejce i je množina $\boldsymbol{X}$ rozdělena na množinu strategií X_i, ze kterých může volit, a množinu strategií $\boldsymbol{X}_{i-}$, nad kterou nemá žádnou kontrolu.

Cílem každého z prodejců je vybrat vhodnou strategii tak, aby v jistém smyslu dosáhl optima. K tomuto účelu každý z nich používá množinu rozhodovacích pravidel. Ta budeme definovat shodně s prací (Krch, 2018):

Definice 1. *Rozhodovacím pravidlem pro i-tého hráče rozumíme množinové zobrazení $C^i : \boldsymbol{X}_{i-} \rightrightarrows X_i$, které přiřazuje množinu možných strategií $C^i(\boldsymbol{x}_{i-})$ pro hráče i na základě strategie ostatních hráčů $\boldsymbol{x}_{i-}$.*

Tato pravidla tedy stanoví podmnožinu možných strategií i-tého prodavače na základě strategií všech ostatních prodavačů. Abychom pro daný případ mohli množinu rozhodovacích pravidel konkretizovat, musíme zavést výplatní funkci. Pro tu máme v obecném případě požadavek, aby oceňovala rozhodnutí hráče v závislosti na zvolených strategiích ostatních hráčů. Každý hráč má svou vlastní výplatní funkci $\Phi_i : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$, jako $\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}^n$ pak označujeme výplatní funkci všech hráčů. V našem případě slouží jako výplatní funkce střední hodnota zisku, tedy $\Phi_i(\boldsymbol{x}) = \mathsf{E}\ \Pi_i(\boldsymbol{x}) = \mathsf{E}\ \Pi_i(\boldsymbol{q})$. Nyní můžeme zavést takzvanou hru v normálním tvaru:

Definice 2. *Jako hru v normálním tvaru označujeme trojici $\langle N, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\Phi} \rangle$, kde $N = \{1, \ldots, n\}$ je množina hráčů, $\boldsymbol{X}$ je množina strategií a $\boldsymbol{\Phi}$ je výplatní funkce.*

Hru v normálním tvaru definujeme na rozdíl od (Krch, 2018) pomocí výplatní funkce, nikoliv pomocí ztrátové funkce, jelikož v celé této práci používáme konzistentně maximalizační přístup k optimalizaci. Tato verze definice hry v normálním tvaru není v literatuře ojedinělá, stejně je uvedena například v knize (Leyton-Brown, 2008).

V další definici zavedeme nejlepší odpověď:

Definice 3. *Nejlepší odpovědí i-tého hráče na smíšenou strategii ostatních hráčů $x_{i-} \in \boldsymbol{X}_{i-}$ je taková strategie $x_i^* \in X_i$, pro kterou platí:*

$$\forall x_i \in X_i : \Phi_i(x_i^*, x_{i-}) \geq \Phi_i(x_i, x_{i-})$$

Nyní můžeme předefinovat množiny rozhodovacích pravidel jako:

$$\overline{C}^i(x_{i-}) = \left\{ x_i \in X_i : \Phi_i(x_i, x_{i-}) = \sup_{x \in X_i} \Phi_i(x, x_{i-}) \right\}$$

Z této definice je zřejmé, že množiny rozhodovacích pravidel jsou totožné s množinami nejlepších odpovědí. Zbývá zavést poslední definici a tou je Nashovo ekvilibrium:

Definice 4. *Pro hru v normálním tvaru řekneme, že $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ je Nashovo ekvilibrium, pokud platí:*

$$\forall i \in N, \forall w \in X_i : \Phi_i(x_i, x_{i-}) \geq \Phi_i(w, x_{i-})$$

Strategie x je tedy Nashovým ekvilibriem, pokud pro každého hráče platí, že x_i je nejlepší odpovědí na x_{i-}.

1.3.2 Řešení problému

Vraťme se nyní k problému konkrétně uvedenému na počátku této sekce. Jeho řešení je popsáno podrobně včetně důkazů v práci (Krch, 2018). Uvedeno je tam ve dvou částech, nejprve pro trh dvou prodejců a následně obecně pro n prodejců. Jelikož trh bez volby cen pro nás stále není stěžejním problémem, v této části shrneme pouze hlavní výsledky o trhu n prodejců. Namísto abstraktního označení písmenem x pro veličiny týkající se strategií budeme nyní již používat písmeno q, zdůrazňující vztah k zakoupeným množstvím.

Abychom mohli k danému problému přistupovat jako ke hře v normálním tvaru, potřebujeme najít tvar výplatních funkcí všech prodejců. Těmi, jak jsme zmínili, jsou střední hodnoty zisku. Jejich tvar bychom nyní rádi formulovali podobně jako v sekci 1.1, avšak kromě vlastní poptávky každého prodejce do ní musíme zahrnout ještě zákazníky přešlé od ostatních prodejců. Zavedeme proto takzvanou efektivní poptávku:

$$\omega_i^e = \omega_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \gamma_{j,i}(\omega_j - q_j)^+$$

S její pomocí pak můžeme formulovat střední hodnotu zisku jako:

$$\mathsf{E}_{\boldsymbol{\omega}} \Pi_i(\boldsymbol{q}) = \mathsf{E}_{\boldsymbol{\omega}} p_i \min\{\omega_i^e, q_i\} + s_i(q_i - \omega_i^e)^+ - c_i q_i$$

Se znalostí tvaru střední hodnoty zisku již můžeme vyslovit první větu o tvaru množiny nejlepších odpovědí.

Věta 4. *Nechť máme hru prodejců novin v normálním tvaru s množinami strategií X_i a výplatními funkcemi Π_i pro $i = 1, \ldots, n$. Nechť navíc platí $\mathsf{P}(\omega_i^e \leq U_i) = 1$. Pak množiny nejlepších odpovědí $\overline{C}^i(q_{i-})$ jsou pro každé i jednoprvkové množiny. Navíc prvek $q_i^* \in \overline{C}^i(q_{i-})$ splňuje rovnost*

$$\mathsf{P}(\omega_i^e \leq q_i^*) = \frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}.$$

Důkaz. Upravíme důkaz věty 3.1 z práce (Krch, 2018), aby vyhovoval naší maximalizační formulaci problému, a rozšíříme část diskutující existenci optima.

Spočteme derivace výplatní funkce $\Pi_i(q_i, q_{i-})$ dle zakoupeného množství x_i. Nejdříve však upravíme vzorec pro ziskovou funkci:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\boldsymbol{\omega}} \Pi_i(q_i, q_{i-}) &= \mathsf{E}_{\boldsymbol{\omega}} p_i \min\{\omega_i^e, q_i\} + s_i(q_i - \omega_i^e)^+ - c_i q_i = \\
&= \mathsf{E}_{\boldsymbol{\omega}} p_i \left(q_i - (q_i - \omega_i^e)^+\right) + s_i(q_i - \omega_i^e)^+ - c_i q_i = \\
&= (p_i - c_i)q_i - (p_i - s_i)\, \mathsf{E}_{\boldsymbol{\omega}}(q_i - \omega_i^e)^+
\end{aligned}$$

První dvě derivace ziskové funkce jsou rovny:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, \mathsf{E}_{\boldsymbol{\omega}} \Pi_i(q_i, q_{i-})}{\partial q_i} &= (p_i - c_i) - (p_i - s_i)\, \mathsf{P}(\omega_i^e \leq q_i) \\
\frac{\partial^2\, \mathsf{E}_{\boldsymbol{\omega}} \Pi_i(q_i, q_{i-})}{\partial q_i^2} &= -(p_i - s_i) f_i^e(q_i)
\end{aligned}$$

Z vypočtené druhé derivace je zřejmé, že výplatní funkce jsou ryze konkávní v q_i. Navíc hodnota první derivace v bodě 0 je rovna $(p_i - c_i)$, tedy je kladná, a v bodě U_i je rovna $-(c_i - s_i)$, tedy záporná. Optimální odpověď tedy vždy existuje, je jednoznačná a lze ji nalézt jako nulový bod první derivace, z čehož již plyne tvrzení věty.

□

Můžeme si všimnout, že jelikož pracujeme s efektivní poptávkou, získáváme podobný výsledek jako v kapitole 1.1. Vztah uvedený v předchozí větě dává též nutnou podmínku pro splnění Nashova ekvilibria. Levou stranu této podmínky nyní upravíme:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\omega_i^e \leq q_i^*) &= \mathsf{P}(\omega_i^e \leq q_i^* | \omega_i \leq x_i^*)\,\mathsf{P}(\omega_i \leq x_i^*) = \\ &= (1 - \mathsf{P}(\omega_i^e > q_i^* | \omega_i \leq q_i^*))\,\mathsf{P}(\omega_i \leq q_i^*) = \\ &= \mathsf{P}(\omega_i \leq q_i^*) - \mathsf{P}(\omega_i \leq q_i^* < \omega_i^e).\end{aligned}$$

Po této úpravě můžeme nyní vyjádřit nutnou podmínku pro splnění Nashova ekvilibria jako

$$\mathsf{P}(\omega_i \leq q_i^*) - \mathsf{P}(\omega_i \leq q_i^* < \omega_i^e) = \frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}.$$

V této formulaci je lépe vidět vývoj nakoupeného zboží prodejcem i při rozšíření problému na n prodavačů. První část $\mathsf{P}(\omega_i \leq q_i^*)$ totiž odpovídá problému jednoho prodejce a druhá část $\mathsf{P}(\omega_i \leq q_i^* < \omega_i^e)$ upravuje první hodnotu o dodatečný převis poptávky nad nabídkou u ostatních prodejců.

Nyní nás bude zajímat, jak se mění nejlepší odpověď i-tého prodejce při změně nakoupeného množství ostatními prdejci. Jelikož je efektivní poptávka lineární funkcí výrazů $(\omega_j - x_j)^+$, omezíme se na zkoumání změny nejlepší odpovědi i-tého prodejce pří změnách nakoupeného množství prodejcem j. Pro tento účel rozdělíme efektivní poptávku na dvě nezávislé náhodné veličiny:

$$\omega_i^e = \underbrace{\omega_i + \sum_{k=1, k\neq i, k\neq j} \gamma_{k,i}(\omega_k - q_k)}_{\omega_i^{-j}} + \underbrace{\gamma_{j,i}(\omega_j - q_j)}_{\omega_j^+} = \omega_i^{-j} + \omega_j^+$$

Rovnost pro nejlepší odpověď danou větou 4 můžeme napsat také jako

$$F_{\omega_i^e}(q_i^*) = F_{\omega_i^{-j} + \omega_j^+}(q_i^*) = \frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}, \tag{1.1}$$

kde $F_\bullet(x)$ označuje distribuční funkci příslušné náhodné veličiny v bodě x.

Z nezávislosti nově uvažovaných náhodných veličin ω_i^{-j} a ω_j^+ můžeme pro výpočet distribuční funkce jejich součtu použít větu o konvoluci A.4. Distribuční funkci efektivní poptávky pak upravíme následovně:

$$\begin{aligned}F_{\omega_i^{-j} + \omega_j^+}(q_i^*) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{\omega_j^+}(q_i^* - q) f_{\omega_i^{-j}}(q) \mathrm{d}q = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_j\left(\frac{q_i^* - q}{\gamma_{j,i}} + q_j\right) I_{[q \leq q_i^*]} f_{\omega_i^{-j}}(q) \mathrm{d}q = \\ &= \int_0^{q_i^*} F_j\left(\frac{q_i^* - q}{\gamma_{j,i}} + q_j\right) f_{\omega_i^{-j}}(q) \mathrm{d}q.\end{aligned}$$

Abychom získali závislost nejlepší odpovědi i-tého prodavače na množství zboží zakoupeného prodavačem j, je potřeba derivovat obě strany rovnice (1.1) s dosazením právě odvozeného tvaru distribuční funkce. V práci (Krch, 2018) je proces derivace rozepsán, my uvedeme pouze výsledek:

$$\frac{\partial F_{\omega_i^e}(q_i^*)}{\partial q_j} =$$
$$= \frac{\partial q_i^*}{\partial q_j}\left[F_j(q_j) f_{\omega_i^{-j}}(q_i^*) + \frac{1}{\gamma_{j,i}} \mathsf{P}(\omega_j > q_j) f_{\omega_i^e|\omega_j>q_j}(q_i^*)\right] + \mathsf{P}(\omega_j > q_j) f_{\omega_i^e|\omega_j>q_j}(q_i^*)$$

Položením odvozeného vztahu rovno nule a osamostatněním výrazu $\frac{\partial x_i^*}{\partial x_j}$ získáme hledaný vztah pro nejlepší odpověď i-tého hráče:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial x_j} = -\gamma j, i \frac{\mathsf{P}(\omega_j > q_j) f_{\omega_i^e|\omega_j>q_j}(q_i^*)}{\gamma_{j,i} F_j(q_j) f_{\omega_i^{-j}}(q_i^*) + \mathsf{P}(\omega_j > q_j) f_{\omega_i^e|\omega_j>q_j}(q_i^*)} \tag{1.2}$$

Nová zjištění shrneme v následující větě:

Věta 5. *Nechť máme hru n prodejců v normálním tvaru. Optimální hodnota q_i^* množství nakoupeného zboží prodejcem i při hodnotách množství zakoupeného zboží ostatními prodejci $\boldsymbol{q}_{i-} = (q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n)$ je nerostoucí funkcí q_j pro $j \neq i$.*

Důkaz. Důkaz plyne z toho, že pravá strana rovnice (1.2) je nekladná.

□

V práci (Krch, 2018) je dokázáno, že v důsledku předchozí věty existuje dolní hranice pro optimální množství zboží zakoupeného prodejcem i, která je rovna optimální hodnotě zakoupeného zboží prodejcem i bez uvažování ostatních prodejců na trhu, tedy

$$x_L = F_i^{-1}\left(\frac{p_i - c_i}{p_i - s_i}\right).$$

Na závěr této sekce uvedeme dvě stěžejní věty práce (Krch, 2018) o existenci a jednoznačnosti Nashova ekvilibria na trhu více prodejců.

Věta 6. *Ve hře n prodejců v normálním tvaru existuje Nashovo ekvilibrium.*

Důkaz. Viz (Krch, 2018) věta 3.4.

□

Věta 7. *V uvažované hře n prodejců v normálním tvaru existuje jednoznačné Nashovo ekvilibrium, pokud platí $\sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} < 1$ pro každé i.*

Důkaz. Viz (Krch, 2018) věta 3.7.

□

2. Trh více prodejců řízený cenami - teoretická část

V této sekci se budeme snažit spojit dvě rozšíření klasického problému prodavače novin z předchozí kapitoly, a sice řízení poptávky cenou a rozšíření počtu prodejců. Nepodařilo se nám nalézt žádnou literaturu, která by se tomuto tématu věnovala, veškeré další výsledky jsou tedy produktem našich výpočtů. Výpočetní postupy jsou však často inspirovány těmi z předchozích modelů, jmenovitě tedy pracemi (Krch, 2018), (Šedina, 2018) a (Petruzzi a Dada, 1999). Modely, které v této kapitole formulujeme, jsme vytvořili jako pokud možno přímočaré rozšíření modelů z předchozích kapitol, nemusí se však shodovat s ekonomickou teorií.

Představme si nyní trh s prodejci, kteří prodávají každý jeden produkt. Prodejce označíme čísly $i = 1, \dots, n$. Předpokládejme, že produkty jednotlivých prodejců jsou si navzájem podobné, avšak nejsou totožné. Substituce mezi produkty je tedy možná jen částečně. Poptávka po těchto produktech je náhodná a závisí na jejich ceně. Úkolem všech prodejců je maximalizovat střední hodnotu zisku vhodnou volbou vyrobeného množství produktu a jeho ceny. Zaveďme následující označení:

q_i	...	množství produktu zakoupené prodejcem i
p_i	...	prodejní cena pro prodejce i
u_i	...	maximální možná prodejní cena pro prodejce i
c_i	...	výrobní cena pro prodejce i
s_i	...	zbytková hodnota neprodaného zboží prodejce i
ε_i	...	náhodná veličina s hodnotami v intervalu $[A_i, B_i]$ vyjadřující kolísání poptávky prodejce i
f_i, F_i	...	hustoty a distribuční funkce náhodných veličin ε_i
$D_i(p_i, \varepsilon_i)$	...	poptávková funkce prodejce i
Π_i	...	zisk prodejce i

Aby úloha měla smysl a vyhnuli jsme se triviálním řešením, předpokládáme, že pro výše definované veličiny platí $c_i < p_i < u_i$ a $s_i < c_i$. Dále předpokládáme, že náhodné veličiny ε_i mají spojité hustoty a rostoucí distribuční funkce. Pro zjednodušení úlohy pak předpokládáme, že náhodné veličiny ε_i jsou nezávislé.

Dále zavedeme vektorové označení $\boldsymbol{q} = (q_1, \dots, q_n)$, ..., $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ a $\boldsymbol{q}_i^- = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$, ..., $\boldsymbol{\varepsilon}_i^- = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n)$.

Poptávkové funkce můžeme předpokládat v aditivním tvaru, tj.

$$D_i(\boldsymbol{p}, \varepsilon_i) = y_i(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_i = a_i - b_i p_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} d_{i,j} p_j + \varepsilon_i,$$

$$b_i > 0, d_{i,j} > 0, B_i > 0 > A_i > b_i u_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} d_{i,j} c_j - a_i, \mathsf{E}\ \varepsilon_i = 0,$$

nebo v multiplikativním tvaru, tj.

$$D_i(\boldsymbol{p}, \varepsilon_i) = y_i(\boldsymbol{p}) \cdot \varepsilon_i = a_i \cdot p_i^{-b_i} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_j^{d_{i,j}} \cdot \varepsilon_i,$$

$$a_i > 0, b_i > 0, d_{i,j} > 0, B_i > 1 > A_i \geq 0, \mathsf{E}\ \varepsilon_i = 1$$

Nemůže-li být poptávka uspokojena, předpokládáme, že zákazník, na kterého nezbyl produkt prodejce i, bude poptávat produkt prodejce j s pravděpodobností přechodu $\gamma_{i,j}(\boldsymbol{p}_i^-)$ (tedy pravděpodobnost přechodu závisí na cenách všech konkurenčních výrobků, ale nikoliv na ceně výrobku, který si zákazník původně přál zakoupit). Z technických důvodů zavádíme předpoklad $\gamma_{i,j}(\boldsymbol{p}_i^-) > 0, \forall i,j,\boldsymbol{p}$. Zákazník neuspokojený na druhý pokus z trhu odchází.

Za takto definovaných předpokladů o chování zákazníků můžeme pro každého prodejce definovat jeho efektivní poptávku. Ta reprezentuje skutečný počet zákazníků, kteří poptávají produkt každého prodejce, včetně zákazníků již přišlých od konkurenčních prodejců. Platí pro ni následující vztah:

$$D_i^e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{q}_i^-) = D_i(\boldsymbol{p}, \varepsilon_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \gamma_{j,i}(\boldsymbol{p}_j^-) \cdot (D_j(\boldsymbol{p}, \varepsilon_j) - q_j)^+$$

Střední hodnota zisku, kterou se prodejci snaží maximalizovat, má pak tvar:

$$\mathsf{E}_{\varepsilon}[\Pi_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})] = \mathsf{E}_{\varepsilon}[p_i \min\{D_i^e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{q}_i^-); q_i\} + s_i \max\{q_i - D_i^e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{q}_i^-); 0\} - c_i q_i]$$

2.1 Trh dvou prodejců s aditivní poptávkou a konečně mnoha cenami

Problém uvedený na počátku této kapitoly je příliš komplexní na to, abychom ho dokázali řešit. Zavedeme proto několik zjednodušení, které nám pomohou řešení nalézt. Tato zjednodušení bohužel budou na úkor obecnosti problému.

(P1) na trhu se nachází pouze dva prodejci, tedy $n = 2$.

(P2) Prodejci si mohou vybrat pouze z konečného množství cen, tedy $p_i \in p_{i,1}, \ldots, p_{i,k_i}, k_i \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

(P3) Pravděpodobnost přechodu od prodejce i k prodejci j je konstantní, tedy $\gamma_{i,j} = konst.$

Na tento případ se nyní zaměříme a budeme ho studovat z pohledu prodavače číslo 1. Z pohledu prodavače číslo 2 by situace vypadala symetricky. Prodavač číslo 1 má za výše uvedených předpokladů osobní poptávku po svém produktu $D_1(\boldsymbol{p}, \varepsilon_1) = a_1 - b_1 p_1 + d_1 p_2 + \varepsilon_1$ (jelikož jsou prodejci pouze dva, zjednodušujeme značení $d_{i,j}$ na d_i). v případě neúspěchu u druhého prodavače přejde zákazník k prvnímu prodavači s pravděpodobností $0 < \gamma_{2,1} \leq 1$. Tato pravděpodobnost přechodu nemusí být rovna jedné, jelikož zákazník se může po neúspěchu u druhého prodavače rovnou rozhodnout trh opustit. Požadavek, aby pravděpodobnost přechodu byla kladná je spíše technického charakteru.

Efektivní poptávku prvního prodejce můžeme vyjádřit jako:

$$D_i^e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\varepsilon}, q_2) = D_1(\boldsymbol{p}, \varepsilon_1) + \gamma_{2,1} \cdot (D_2(\boldsymbol{p}, \varepsilon_2) - q_2)^+$$

Prodavač 1 tedy řeší úlohu:

$$\begin{aligned}&\max \mathsf{E}_{\varepsilon}[\Pi_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})] = \\ &\qquad = \max \mathsf{E}_{\varepsilon}[p_1 \min\{D_1^e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\varepsilon}, q_2); q_1\} + s_1 \max\{q_1 - D_1^e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\varepsilon}, q_2); 0\} - c_1 q_1]\end{aligned}$$

Pro dané $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ můžeme situaci rozdělit na čtyři případy:

1) $D_1 \leq q_1 \wedge D_2 > q_2$ (prvnímu prodejci zbývá, druhému chybí)
2) $D_1 \leq q_1 \wedge D_2 \leq q_2$ (oběma prodejcům zbývá)
3) $D_1 > q_1 \wedge D_2 > q_2$ (oběma prodejcům chybí)
4) $D_1 > q_1 \wedge D_2 \leq q_2$ (prvnímu prodejci chybí, druhému zbývá)

Přitom například $D_1 = D_1(\boldsymbol{p}, \varepsilon_1) = a_1 - b_1 p_1 + d_1 p_2 + \varepsilon_1 \leq q_1 \Leftrightarrow \varepsilon \leq q_1 - d_1 p_2 + b_1 p_1 - a_1$.

Pro uvedené čtyři případy máme následující vyjádření ziskové funkce (funkce uvádíme pro zjednodušení bez parametrů):

1) $\Pi_1^1 = p_1 D_1 + p_1 \min\{\gamma_{2,1} \cdot (D_2 - q_2), q_1 - D_1\} +$
   $+ s_1(q_1 - D1 - \gamma_{2,1} \cdot (D_2 - q_2))^+ - c_1 q_1$
2) $\Pi_1^2 = p_1 D_1 + s_1(q_1 - D_1) - c_1 q_1$
3) $\Pi_1^3 = p_1 q_1 - c_1 q_1$
4) $\Pi_1^4 = p_1 q_1 - c_1 q_1$

Střední hodnotu zisku tedy můžeme zapsat pomocí následujícího vztahu:

$$\begin{gathered}\mathsf{E}_{\varepsilon} \Pi_1(p_1, q_1) = \mathsf{E}\,[\Pi_1^1 \cdot I_{[D_1 \leq q_1 \wedge D_2 > q_2]} + \cdots + \Pi_1^4 \cdot I_{[D_1 > q_1 \wedge D_2 \leq q_2]}] = \\ = \int_{A_1}^{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})} \int_{q_2 - y_2(\boldsymbol{p})}^{B_2} p_1(y_1(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_1) + \\ + p_1 \min\{\gamma_{2,1} \cdot (\varepsilon_2 + y_2(\boldsymbol{p}) - q_2), q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1\} + \\ + s_1(q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1 - \gamma_{2,1} \cdot (y_2(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_2 - q_2))^+ - c_1 q_1 \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2)\, \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\ + \int_{A_1}^{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})} \int_{A_2}^{q_2 - y_2(\boldsymbol{p})} p_1(y_1(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_1) + s_1(q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1) - \\ - c_1 q_1\, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \int_{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} p_1 q_1 - c_1 q_1\, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1)\end{gathered}$$

Nyní označíme:

$$\delta_2(q_1, p_1, \varepsilon_1) := \frac{q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1}{\gamma_{2,1}} + q_2 - y_2(\boldsymbol{p})$$

Dále rozepíšeme minima a maxima z předchozího vztahu:

$$\begin{gathered}(q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1 - \gamma_{2,1} \cdot (y_2(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_2 - q_2))^+ = \\ = \begin{cases} q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1 - \gamma_{2,1} \cdot (y_2(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_2 - q_2), & \varepsilon_2 \leq \delta_2(q_1, p_1, \varepsilon_1) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}\end{gathered}$$

$$\min\{\gamma_{2,1}) \cdot (y_2(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_2 - q_2), q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1\} =$$
$$= \begin{cases} \gamma_{2,1}(\boldsymbol{p}) \cdot (y_2(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_2 - q_2), & \varepsilon_2 \leq \delta_2(q_1, p_1, \varepsilon_1) \\ q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1, & \text{jinak} \end{cases}$$

Střední hodnotu zisku tedy můžeme zapsat jako:

$$\begin{gathered}
\mathsf{E}_{\varepsilon} \Pi_1(p_1, q_1) = \int_{A_1}^{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})} \int_{A_2}^{B_2} p_1(y_1(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_1) - c_1 q_1 \, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+ \int_{A_1}^{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})} \int_{A_2}^{q_2 - y_2(\boldsymbol{p})} s_1(q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1) \, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+ \int_{A_1}^{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})} \int_{q_2 - y_2(\boldsymbol{p})}^{\delta_2(q_1, p_1, \varepsilon_1)} s_1(q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1) \, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+ \int_{A_1}^{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})} \int_{\delta_2(q_1, p_1, \varepsilon_1)}^{B_2} p_1(q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1) \, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+ (p_1 - s_1) \int_{A_1}^{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})} \int_{q_2 - y_2(\boldsymbol{p})}^{\delta_2(q_1, p_1, \varepsilon_1)} \gamma_{2,1}(y_2(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_2 - x_2) \, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+ (p_1 - c_1) \int_{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} q_1 \, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1)
\end{gathered}$$

Přičtením a odečtením členu $\int_{A_1}^{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})} \int_{\delta_2(q_1, p_1, \varepsilon_1)}^{B_2} s_1(q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1)$ a dalšími drobnými úpravami můžeme předchozí vztah zjednodušit:

$$\begin{gathered}
\mathsf{E}_{\varepsilon} \Pi_1(p_1, q_1) = \int_{A_1}^{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})} p_1(y_1(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_1) - c_1 q_1 \, \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+ s_1 \int_{A_1}^{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})} q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1 \, \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+ (p_1 - s_1) \int_{A_1}^{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})} \int_{\delta_2(q_1, p_1, \varepsilon_1)}^{B_2} q_1 - y_1(\boldsymbol{p}) - \varepsilon_1 \, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+ (p_1 - s_1) \int_{A_1}^{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})} \int_{q_2 - y_2(\boldsymbol{p})}^{\delta_2(q_1, p_1, \varepsilon_1)} \gamma_{2,1}(y_2(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_2 - q_2) \, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+ (p_1 - c_1) \int_{q_1 - y_1(\boldsymbol{p})}^{B_2} q_1 \, \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1)
\end{gathered}$$

Pro zjednodušení zápisu ještě provedeme následující substituci:

$$z_1 := q_1 - y_1(\boldsymbol{p}), z_2 := q_2 - y_2(\boldsymbol{p})$$

V kontextu problému kamelota s poptávkou závislou na ceně se jedná o standardní substituci. Střední hodnota zisku bude mít nyní následující podobu:

$$\begin{gathered}
\mathsf{E}_{\varepsilon} \Pi_1(p_1, z_1) = p_1 \int_{A_1}^{z_1} y_1(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_1 \, \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + p_1(z_1 + y_1(\boldsymbol{p})) \int_{z_1}^{B_1} \mathrm{d}F_(\varepsilon_1) + \\
+ (p_1 - s_1) \int_{A_1}^{z_1} \int_{z_2}^{\delta_2(z_1, \varepsilon_1)} \gamma_{2,1}(\varepsilon_2 - z_2) \, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+ (p_1 - s_1) \int_{A_1}^{z_1} \int_{\delta_2(z_1, \varepsilon_1)}^{B_2} z_1 - \varepsilon_1 \, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + s_1 \int_{A_1}^{z_1} z_1 - \varepsilon_1 \, \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) - \\
- c_1(z_1 + y_1(\boldsymbol{p})),
\end{gathered}$$

kde místo funkce $\delta_2(q_1, p_1, \varepsilon_1)$ nyní používáme zjednodušenou podobu se dvěma argumenty:

$$\delta_2(z_1, \varepsilon_1) = \frac{z_1 - \varepsilon_1}{\gamma_{2,1}} + z_2$$

Nyní se na problém podíváme opět z pohledu teorie her. Jedná se o hru dvou hráčů v normálním tvaru se strategiemi $x_i = (p_i, z_i)$. Pro z_i nemá smysl uvažovat hodnoty nižší než A_i avšak vlivem možných přechodů zákazníků od konkurenčního prodejce má smysl uvažovat hodnoty vyšší než B_i. Konkrétně má smysl uvažovat hodnoty nejvýše do $B_i + \gamma_{j,i}(B_j - z_j)$. Tento součet má nejvyšší možnou hodnotu, pokud $z_j = A_j$, označíme tedy $\overline{B}_i = B_i + \gamma_{j,i}(B_j - A_j)$. Množinami strategií jsou tedy množiny $X_i = \{p_{1,1}, \ldots, p_{1,k_1}\} \times [A_i, \overline{B}_i]$. Naším úkolem nyní bude nalézt množinu nejlepších odpovědí jednotlivých prodejců (pro jednoduchost opět budeme postupovat z pohledu prvního prodejce). Tu nalezneme jako množinu řešení následující optimalizační úlohy:

$$\begin{aligned} &\max_{p_1}\{\max_{z_1} \mathsf{E}_{\varepsilon}\, \Pi_1(p_1, z_1)\} \\ &\qquad \text{s.t.} p_1 \in \{p_{1,1}, \ldots, p_{1,k_1}\} \\ &\qquad\quad z_1 \in [A_1, \overline{B}_1] \end{aligned}$$

Maximalizace přes parametr p_1 je pouze výběrem z konečně mnoha prvků a lze ji tedy realizovat porovnáním všech hodnot. Budeme se tedy soustředit na maximalizaci vnitřní funkce při pevném p_1, tedy:

$$\begin{aligned} &\max_{z_1} \mathsf{E}_{\varepsilon}\, \Pi_1(p_1, z_1) \\ &\text{s.t.} z_1 \in [A_1, \overline{B}_i] \end{aligned}$$

K řešení této úlohy vypočteme první dvě derivace podle proměnné z_1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\, \mathsf{E}_{\varepsilon}\, \Pi_1(p_1, z_1)}{\partial z_1} &= p_1(y_1(\boldsymbol{p}) + z_1) f_1(z_1) + p_1 \int_{z_1}^{B_1} f_1(\varepsilon_1) \mathrm{d}\varepsilon_1 - \\ &\quad - p_1(y_1(\boldsymbol{p}) + z_1) f_1(z_1) + \\ &\quad + (p_1 - s_1) \frac{1}{\gamma_{2,1}} \int_{A_1}^{z_1} (z_1 - \varepsilon_1) f_2(\delta_2(z_1, \varepsilon_1)) f_1(\varepsilon_1)\, \mathrm{d}\varepsilon_1 + \\ &\quad + (p_1 - s_1) \int_{A_1}^{z_1} \Bigg[-(z_1 - \varepsilon_1) f_2(\delta_2(z_1, \varepsilon_1)) f_1(\varepsilon_1) \frac{1}{\gamma_{2,1}} + \\ &\quad + \int_{\delta_2(z_1, \varepsilon_1)}^{B_2} f_2(\varepsilon_2) f_1(\varepsilon_1) \mathrm{d}\varepsilon_2 \Bigg] \mathrm{d}\varepsilon_1 + s_1 \int_{A_1}^{z_1} f_1(\varepsilon_1) \mathrm{d}\varepsilon_1 + c_1 = \\ &= p_1 \int_{z_1}^{B_1} f_1(\varepsilon_1) \mathrm{d}\varepsilon_1 + (p_1 - s_1) \int_{A_1}^{z_1} \int_{\delta_2(z_1, \varepsilon_1)}^{B_2} f_2(\varepsilon_2) f_1(\varepsilon_1) \mathrm{d}\varepsilon_2 \mathrm{d}\varepsilon_1 + \\ &\quad + s_1 \int_{A_1}^{z_1} f_1(\varepsilon_1) \mathrm{d}\varepsilon_1 - c_1 = \\ &= p_1(1 - F_1(z_1)) + (p_1 - s_1) \int_{A_1}^{z_1} f_1(\varepsilon_1)(1 - F_2(\delta_2(z_1, \varepsilon_1)) \mathrm{d}\varepsilon_1 + s_1 F_1(z_1) - c_1 = \\ &= p_1 - c_1 - (p_1 - s_1) \int_{A_1}^{z_1} F_2(\delta_2(z_1, \varepsilon_1)) f_1(\varepsilon_1) \mathrm{d}\varepsilon_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathsf{E}_\varepsilon \Pi_1(p_1, z_1)}{\partial z_1^2} &= -p_1 f_1(z_1) + s_1 f_1(z_1) + \\
+(p_1 - s_1)\left[\int_{z_2}^{B_2} f_2(\varepsilon_2) f_1(\varepsilon_1) \mathrm{d}\varepsilon_2 + \int_{A_1}^{z_1} -f_2(\delta_2(z_1, \varepsilon_1)) f_1(\varepsilon_1) \frac{1}{\gamma_{2,1}} \mathrm{d}\varepsilon_1\right] &= \\
= -(p_1 - s_1) f_1(z_1) + (p_1 - s_1)\Bigg[f_1(z_1)(1 - F_2(z_2)) \\
- \frac{1}{\gamma_{2,1}} \int_{A_1}^{z_1} f_2(\delta_2(z_1, \varepsilon_1)) f_1(\varepsilon_1) \mathrm{d}\varepsilon_1 \Bigg] &= \\
= -(p_1 - s_1)\left[F_2(z_2) f_1(z_1) + \frac{1}{\gamma_{2,1}} \int_{A_1}^{z_1} f_2(\delta_2(z_1, \varepsilon_1)) f_1(\varepsilon_1) \mathrm{d}\varepsilon_1 \right] &\leq 0
\end{aligned}
$$

Druhá derivace dle proměnné z_1 je zřejmě nezáporná, tedy střední hodnota zisku je konkávní v proměnné z_1. Z toho plyne, že pro dané p_1 existuje jednoznačně určená optimální odpověď prvního prodavače na strategii druhého prodavače. Tento výsledek shrneme do následující věty.

Věta 8. *Mějme trh s aditivní poptávkovou funkcí splňující předpoklady (P1), (P2) a (P3). Označme prodejce čísly $[i, j] \in \{[1,2], [2,1]\}$. Nechť hustoty f_i a f_j jsou kladné na svých nosičích s výjimkou nejvýše krajních bodů. Předpokládejme, že prodejce j zvolil strategii $x_2 = (p_2, z_2)$. Pak nejlepší odpovědí prodejce i je strategie $x_i^* = (z_i^*, p_i^*)$, kde p_i^* a z_i^* vypočteme následujícím způsobem:*

1. *Pro každé $l \in 1, \dots, k_i$ získáme $z_{i,l}$ jako řešení rovnice:*

$$p_{i,l} - c_i - (p_{i,l} - s_i) \int_{A_i}^{z_{i,l}} F_j(\delta_j(z_{i,l}, p_{i,l}, \varepsilon_i)) f_i(\varepsilon_i) \mathrm{d}\varepsilon_i = 0$$

   Řešení této rovnice vždy existuje a je jednoznačné.

2. *Vybereme $l^* \in \{1, \dots, k_i\}$ takové, pro které má výraz*

$$\mathsf{E}_\varepsilon \Pi_1(p_{i,l}, z_{i,l})$$

   maximální hodnotu. Toto l^* nemusí být jednoznačné, a tedy množina nejlepších odpovědí nemusí být jednobodová, vždy je však konečná.

3. *Definujeme $z_i^* = z_{i,l^*}$ a $p_i^* = p_{i,l^*}$.*

Známe-li zvolenou strategii prodejce j a nejlepší odpověď prodejce i, můžeme dopočíst optimální zakoupené množství i-tého prodejce jako $q_i^* = y_i(p_i^*, p_j) + z_i^*$.

Důkaz. Situace mezi oběma prodejci je symetrická, tedy BÚNO zvolme $i = 1$, $j = 2$.

Zaměřme se nejprve na výpočet z_i při pevném p_i. Požadované $z_{i,l}$ počítáme jako nulový bod první derivace, tedy pokud bude takový bod existovat, bude zřejmě optimální volbou pro dané $p_{i,l}$. O druhé derivaci víme, že je nekladná. Pro $z_1 = A_1$ nebo $z_1 = B_1$ se může stát, že je druhá derivace skutečně nulová. Pokud však $z_1 \in (A_1, B_1)$, pak v důsledku předpokladu kladeného na hustoty f_1 a f_2 je hodnota závorky kladná (vždy je kladný alespoň jeden z vnitřních členů), a tedy druhá derivace je záporná. Tedy střední hodnota zisku je ryze konkávní v proměnné z_1 na intervalu (A_1, B_1). Navíc první derivace střední hodnoty zisku je pro $z_1 = A_1$ rovná $p_1 - c_1$, a tedy kladná. Naopak pro $z_1 = \overline{B}_1$ je derivace střední hodnoty zisku rovna $-(c_1 - s_1)$, tedy záporná. Z toho plyne, že derivace střední hodnoty zisku má na intervalu $[A_1, \overline{B}_1]$ právě jeden nulový bod, ve kterém prodejce dosahuje maxima.

Pro každé $p_{i,l}$ máme tedy jednoznačně určené $z_{i,l}$, a tedy i jednoznačně určenou střední hodnotu zisku. Jelikož l vybíráme z konečné množiny, musí být i množina nejlepších odpovědí konečná a neprázdná. Nelze však tvrdit, že je jednobodová, jelikož hodnoty zisku mohou být pro dvojici různých strategií shodné.

□

Nyní bychom rádi věděli, zda na trhu existuje nějaké ekvilibrium, případně zda je toto ekvilibrium jednoznačné. V případě trhu bez volby cen je dalším krokem k důkazu existence ekvilibria důkaz, že zakoupené množství prvního prodavače je klesající v zakoupeném množství druhého prodavače. Nicméně v našem případě jsou strategiemi dvojrozměrné vektory a optimální strategie nemusí být ani jednoznačně určena. Navíc s měnící se strategií druhého prodejce se nyní mění jak z_1 tak i p_1, o jejíchž změnách nemáme na základě doposud získaných výsledků vlastně žádnou informaci. Z těchto důvodů nejsme pro tuto situaci existenci Nashova ekvilibria dokázat.

V následujících sekcích rozebereme několik obměn a rozšíření, které by bylo možno v modelu učinit. Konkrétně rozebereme možnost relaxace podmínek (P2) a (P3) a podíváme se, jak by model vypadal v případě multiplikativní poptávky.

2.2 Spojitý výběr ceny

V této sekci se podíváme, co by se změnilo, pokud bychom místo výběru z konečně mnoha cen uvažovali cenu jako spojitý parametr, tedy prodejce i by mohl nastavit libovolnou cenu $p_i > c_i$.

Úlohu se budeme snažit řešit podobně jako v sekci 1.2.1. Zisková funkce zůstává stejná jako v sekci 2.1, tedy:

$$
\begin{gathered}
\mathsf{E}_{\varepsilon}\,\Pi_1(p_1, z_1) = p_1 \int_{A_1}^{z_1} y_1(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_1 \,\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + p_1(z_1 + y_1(\boldsymbol{p})) \int_{z_1}^{B_1} \mathrm{d}F_(\varepsilon_1) + \\
+(p_1 - s_1) \int_{A_1}^{z_1} \int_{z_2}^{\delta_2(z_1,\varepsilon_1)} \gamma_{2,1}(\varepsilon_2 - z_2)\,\mathrm{d}F_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+(p_1 - s_1) \int_{A_1}^{z_1} \int_{\delta_2(z_1,\varepsilon_1)}^{B_2} z_1 - \varepsilon_1 \,\mathrm{d}F_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + s_1 \int_{A_1}^{z_1} z_1 - \varepsilon_1 \,\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) - \\
-c_1(z_1 + y_1(\boldsymbol{p})),
\end{gathered}
$$

Stejné zůstávají i derivace dle proměnné z_1:

$$
\frac{\partial\,\mathsf{E}_{\varepsilon}\,\Pi_1(p_1, z_1)}{\partial z_1} = p_1 - c_1 - (p_1 - s_1) \int_{A_1}^{z_1} F_2(\delta_2(z_1, \varepsilon_1)) f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1 \tag{2.1}
$$

$$\frac{\partial^2 \mathsf{E}_\varepsilon \Pi_1(p_1,z_1)}{\partial z_1^2} = -(p_1-s_1)\left[F_2(z_2)f_1(z_1) + \frac{1}{\gamma_{2,1}}\int_{A_1}^{z_1} f_2(\delta_2(z_1,\varepsilon_1))f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1\right]$$

Nyní musíme dopočíst i derivace dle proměnné p_1:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathsf{E}_\varepsilon \Pi_1(p_1,z_1)}{\partial p_1} &= \int_{A_1}^{z_1}(a_1 - b_1p_1 + d_1p_2 + \varepsilon_1)f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1 - p_1\int_{A_1}^{z_1} b_1 f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1 + \\
&+(z_1 + a_1 - b_1p_1 + d_1p_2)\int_{z_1}^{B_1} f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1 - p_1b_1\int_{z_1}^{B_1} f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1 + \\
&+\int_{A_1}^{z_1}\int_{z_2}^{\delta_2(z_1,\varepsilon_1)} \gamma_{2,1}(\varepsilon_2 - z_2)f_2(\varepsilon_2)f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_2\mathrm{d}\varepsilon_1 + \\
&+\int_{A_1}^{z_1}\int_{\delta_2(z_1,\varepsilon_1)}^{B_2}(z_1-\varepsilon_1)f_2(\varepsilon_2)f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_2\mathrm{d}\varepsilon_1 + c_1b_1 = \\
&= (a_1 - 2b_1p_1 + d_1p_2 + \int_{A_1}^{z_1}\varepsilon_1 f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1 + \int_{z_1}^{B_1} z_1 f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1 + c_1b_1 + \\
&+\int_{A_1}^{z_1}\left[\int_{z_2}^{\delta_2(z_1,\varepsilon_1)}\gamma_{2,1}(\varepsilon_2 - z_2)f_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}\varepsilon_2 + \int_{\delta_2(z_1,\varepsilon_1)}^{B_2}(z_1-\varepsilon_1)f_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}\varepsilon_2\right]f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathsf{E}_\varepsilon \Pi_1(p_1,z_1)}{\partial p_1^2} = -2b_1$$

Vidíme, že zisková funkce je konkávní v obou rozhodujících proměnných, můžeme si tedy vybrat, zda z rovnice (2.2) vyjádříme $p_1(z_1)$ nebo z rovnice (2.1) vyjádříme $z_1(p_1)$. V případě, že se pokusíme vyjádřit $z_1(p_1)$, zjistíme, že je to možné pouze v implicitní formě. Dále se proto budeme zabývat případem, kdy vyjádříme $p_1(z_1)$. Vyjádření má pak následující tvar:

$$\begin{aligned}
p_1(z_1) &= \frac{1}{2b_1}\Bigg\{(a_1 + d_1p_2 + \int_{A_1}^{z_1}\varepsilon_1 f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1 + \int_{z_1}^{B_1} z_1 f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1 + c_1b_1 + \\
&+\int_{A_1}^{z_1}\left[\int_{z_2}^{\delta_2(z_1,\varepsilon_1)}\gamma_{2,1}(\varepsilon_2 - z_2)f_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}\varepsilon_2 + \int_{\delta_2(z_1,\varepsilon_1)}^{B_2}(z_1-\varepsilon_1)f_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}\varepsilon_2\right]f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1\Bigg\}
\end{aligned}$$

Funkci $p_1(z_1)$ budeme dále nazývat oceňovací funkcí. Shrneme nyní stručně několik poznatků o této funkci, k jejichž dosažení jsme museli spočíst i první dvě derivace oceňovací funkce:

- Oceňovací funkce je vždy kladná, což je v souladu s tím, že se jedná o cenu.
- Její první derivace je kladná, tedy cena je rostoucí v proměnné z_1. To je trochu neintuitivní výsledek, nicméně z_1 není přímo zakoupené množství, takže vztah mezi p_1 a z_1 není zcela zřejmý.
- Její druhá derivace je určitě pro některé hodnoty kladná, avšak není zřejmé, zda je vždy kladná nebo střídá znaménka.

Nyní se již zaměříme na maximalizaci funkce $\mathsf{E}_\varepsilon \Pi_1(p_1(z_1), z_1)$. Její extrémy budeme hledat jako nulové body její derivace, která má následující tvar (postup výpočtu s použitím řetízkového pravidla je obdobný tomu v sekci 1.2.1):

$$\frac{\partial \mathsf{E}_\varepsilon \Pi_1(p_1(z_1), z_1)}{\partial z_1} = p_1(z_1) - c_1 - (p_1(z_1) - s_1) \int_{A_1}^{z_1} F_2(\delta_2(z_1, \varepsilon_1)) f_1(\varepsilon_1) \mathrm{d}\varepsilon_1$$

V dalším zaveďme označení:

$$R_1(z_1) := \frac{\partial \mathsf{E}_\varepsilon \Pi_1(p_1(z_1), z_1)}{\partial z_1}$$

Nyní bychom chtěli obdobně jako v důkazu věty 1 ukázat, že funkce $R_1(z_1)$ je (za nějakých podmínek) unimodální. Bohužel tvar druhé derivace funkce R_1 je poměrně komplikovaný a nenašli jsme žádný způsob, jak by jej bylo možné zjednodušit tím, že bychom ji zkoumali pouze v bodech, kde je první derivace nulová. Mimo jiné druhá derivace funkce R_1 obsahuje druhou derivaci oceňovací funkce, která již sama o sobě má nejasné znaménko.

Situace není lepší ani pokud bychom v bodě, kde jsme se rozhodovali, zda využít vyjádření $p_1(z_1)$ či $z_1(p_1)$ zvolili opačně. Celkem tedy musíme konstatovat, že v případě spojitého výběru ceny jsme sice schopni převést ziskovou funkci do tvaru funkce jedné proměnné, avšak bohužel nejsme schopni nalézt extrémy této funkce.

2.3 Přechodová funkce závislá na ceně

V této sekci se zaměříme na přechodovou funkci $\gamma_{i,j}$, která vyjadřuje pravděpodobnost, že zákazník, jehož poptávka nebyla uspokojena u prodejce i přejde k prodejci j. V sekci 2.1 uvažujeme tuto funkci jako konstantní. Nyní budeme předpokládat, že se jedná o funkci ceny j-tého prodejce (tedy prodejce, ke kterému by zákazník potenciálně mohl přejít). Budeme ji označovat $\gamma_{i,j}(p_j)$. Na tuto funkci klademe dva požadavky:

- funkce $\gamma_{i,j}(p_j)$ je nerostoucí, tedy se zvyšující se cenou se snižuje počet zákazníků, kteří potenciálně mohou přejít od konkurenčního prodejce
- $\gamma_{i,j}(p_j) \in (0, 1), \forall p_j$, tedy pravděpodobnost přechodu neuspokojeného zákazníka ke konkurenčnímu prodejci není nikdy 0 ani 1

Tvar ziskové funkce je v tomto případě stejný jako u základního modelu uvedeného v sekci 2.1 a můžeme též zavést stejnou substituci:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_\varepsilon \Pi_1(p_1, z_1) = p_1 \int_{A_1}^{z_1} y_1(\boldsymbol{p}) + \varepsilon_1 \, \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + p_1(z_1 + y_1(\boldsymbol{p})) \int_{z_1}^{B_1} \mathrm{d}F_(\varepsilon_1) + \\
+ (p_1 - s_1) \int_{A_1}^{z_1} \int_{z_2}^{\delta_2(z_1, p_1, \varepsilon_1)} \gamma_{2,1}(p_1)(\varepsilon_2 - z_2) \, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+ (p_1 - s_1) \int_{A_1}^{z_1} \int_{\delta_2(z_1, p_1, \varepsilon_1)}^{B_2} z_1 - \varepsilon_1 \, \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2) \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + s_1 \int_{A_1}^{z_1} z_1 - \varepsilon_1 \, \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) - \\
- c_1(z_1 + y_1(\boldsymbol{p})),
\end{aligned}$$

kde $\delta_2(z_1, p_1, \varepsilon_1)$ nyní prostřednictvím $\gamma_{2,1}(p_1)$ závisí na parametru p_1. Komplikovanějším se nyní stává též definice horní meze zakoupeného množství $\overline{B}_i = B_i + \gamma_{j,i}(p_i)(B_j - A_j)$, které nyní též závisí na proměnné p_i. Nám však nevadí, pokud bude veličina $\overline{B}_i$ trochu větší, než je nutné a můžeme tedy pro ni použít jakýsi horní odhad a definovat $\overline{B}_i = B_i + B_j - A_j$.

Nyní můžeme použít naprosto identický postup jako v sekci 2.1, obdržíme stejný optimalizační problém, první i druhá derivace dle proměnné z_1 zůstane shodná (pochopitelně s tím, že $\gamma_{2,1}(p_1)$ nyní bude funkce) a věta 8 zůstane nezměněná.

Jiná situace nastane v případě spojitého výběru ceny. Derivace dle proměnné p_1 se výrazně zkomplikují a již ani závislost ceny na parametru z_1 nebude možné vyjádřit explicitně.

2.4 Multiplikativní poptávka

V této části budeme uvažovat trh daný podmínkami (P1) až (P3), avšak namísto aditivního tvaru poptávky budeme uvažovat tvar multiplikativní, tedy

$$D_i((p), \varepsilon_i) = a_i p_i^{-b_i} p_j^{d_i} \varepsilon_i.$$

Tento případ bude zpočátku velmi podobný případu s aditivní poptávkou, budeme ho tedy popisovat spíše stručněji. Prvním krokem bude opět vytvoření efektivní poptávky a následně sestavení střední hodnoty zisku. Ta bude mít následující tvar:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\Pi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \int_{A_1}^{\frac{q_1}{y_1(\boldsymbol{p})}} \int_{\frac{q_2}{y_2(\boldsymbol{p})}}^{B_2} \Big[p_1 y_1(\boldsymbol{p})\varepsilon_1 + p_1 \min\{\gamma_{2,1}(y_2(\boldsymbol{p})\varepsilon_2 - q_2), q_1 - y_1(\boldsymbol{p})\varepsilon_1\} + \\
+ s_1 \left(q_1 - y_1(\boldsymbol{p})\varepsilon_1 - \gamma_{2,1}(y_2(\boldsymbol{p})\varepsilon_2 - q_2)\right)^+ - c_1 q_1\Big] \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+ \int_{A_1}^{\frac{q_1}{y_1(\boldsymbol{p})}} \int_{A_2}^{\frac{q_2}{y_2(\boldsymbol{p})}} \left[p_1 y_1(\boldsymbol{p})\varepsilon_1 + s_1(q_1 - y_1(\boldsymbol{p})\varepsilon_1) - c_1 q_1\right] \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + \\
+ \int_{A_1}^{\frac{q_1}{y_1(\boldsymbol{p})}} \int_{A_2}^{B_2} (p_1 - c_1) q_1 \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1)
\end{aligned}$$

Nyní zaveďme substituci

$$z_1 = \frac{q_1}{y_1(\boldsymbol{p})}, \quad z_2 = \frac{q_2}{y_2(\boldsymbol{p})},$$

rozepišme minimum a kladnou část a zaveďme označení

$$\delta_2(z_1, \varepsilon_1) = z_2 + \frac{z_1 - \varepsilon_1}{\gamma_{2,1}}.$$

Tím dostaneme pro střední hodnotu zisku následující tvar:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\varepsilon}(\Pi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \int_{A_1}^{z_1}\int_{z_2}^{B_2} p_1 y_1(\boldsymbol{p})\varepsilon_1 - c_1 y_1(\boldsymbol{p}) z_1 \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1)+\\
+\int_{A_1}^{z_1}\int_{z_2}^{\delta_2(z_1,\varepsilon_1)} p_1\gamma_{2,1} y_2(\boldsymbol{p})(\varepsilon_2 - z_2)+\\
+s_1[y_1(\boldsymbol{p})(z_1-\varepsilon_1) - \gamma_{2,1} y_2(\boldsymbol{p})(\varepsilon_2 - z_2)]\mathrm{d}F_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1)+\\
+\int_{A_1}^{z_1}\int_{\delta_2(z_1,\varepsilon_1)}^{B_2} p_1 y_1(\boldsymbol{p})(z_1-\varepsilon_1)\mathrm{d}F_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1)+\\
+\int_{A_1}^{z_1}\int_{A_2}^{z_2}\left[p_1 y_1(\boldsymbol{p})\varepsilon_1 + s_1 y_1(\boldsymbol{p})(z_1-\varepsilon_1) - c_1 y_1(\boldsymbol{p}) z_1\right]\mathrm{d}F_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1)+\\
+\int_{A_1}^{z_1}\int_{A_2}^{B_2} p_1 y_1(\boldsymbol{p}) z_1 - c_1 y_1(\boldsymbol{p}) z_1 \mathrm{d}F_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) =\\
= p_1 y_1(\boldsymbol{p})\int_{A_1}^{z_1}\varepsilon_1 \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) + p_1 y_1(\boldsymbol{p})\int_{z_1}^{B_1} z_1 \mathrm{d}F_1(\varepsilon_1)+\\
+(p_1-s_1)\int_{a_1}^{z_1}\left[\int_{z_2}^{\delta_2(z_1,\varepsilon_1)}\gamma_{2,1} y_2(\boldsymbol{p})(\varepsilon_2 - z_2)\mathrm{d}F_2(\varepsilon_2)+\right.\\
\left.+\int_{\delta_2(z_1,\varepsilon_1)}^{B_2} y_1(\boldsymbol{p})(z_1-\varepsilon))\mathrm{d}F_2(\varepsilon_2)\right]\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1)+\\
+s_1\int_{A_1}^{z_1} y_1(\boldsymbol{p})(z_1-\varepsilon_1)\mathrm{d}F_1(\varepsilon_1) - c_1 y_1(\boldsymbol{p}) z_1
\end{aligned}$$

Nyní spočteme první a druhou derivaci střední hodnoty zisku dle proměnné z_1. Postup je opět podobný tomu v případě aditivní poptávky, proto jej rozepíšeme pouze ve dvou krocích.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,\mathsf{E}_{\varepsilon}(\Pi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}{\partial z_1} = p_1 y_1(\boldsymbol{p}) z_1 f_1(z_1) + p_1 y_1(\boldsymbol{p})\int_{z_1}^{B_1} f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1 - p_1 y_1(\boldsymbol{p}) z_1 f_1(z_1)+\\
+(p_1-s_1)\int_{A_1}^{z_1}\frac{1}{\gamma_{2,1}} y_2(\boldsymbol{p})(z_1-\varepsilon_1) f_2(\delta_2(\varepsilon_1,z_1)) f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1+\\
+(p_1-s_1)\int_{A_1}^{z_1}\left[-y_1(\boldsymbol{p})(z_1-\varepsilon_1) f_2(\delta_2(\varepsilon_1,z_1))\frac{1}{\gamma_{2,1}}+\right.\\
\left.+\int_{\delta_2(\varepsilon_1,z_1)}^{B_2} y_1(\boldsymbol{p}) f_2(\varepsilon_2)\mathrm{d}\varepsilon_2\right] f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1 + s_1\int_{A_1}^{z_1} y_1(\boldsymbol{p}) f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1 - c_1 y_1(\boldsymbol{p}) =\\
= (p_1-c_1) y_1(\boldsymbol{p}) + (p_1-s_1)\left[\frac{y_2(\boldsymbol{p}) - y_1(\boldsymbol{p})}{\gamma_{2,1}}\int_{A_1}^{z_1}(z_1-\varepsilon_1) f_2(\delta_2(\varepsilon_1,z_1)) f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1-\right.\\
\left.-y_1(\boldsymbol{p})\int_{A_1}^{z_1} F_2(\delta_2(\varepsilon_1,z_1)) f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1\right.
\end{aligned}$$

Vidíme, že ačkoliv tvar střední hodnoty zisku je velmi podobný jako v případě aditivní poptávky, derivace je poněkud odlišná, jelikož dva členy, které se v případě aditivní poptávky odečtou v případě multiplikativní poptávky zbudou a vytvoří v předpisu derivace další integrál.

$$\frac{\partial^2 \mathsf{E}_\varepsilon(\Pi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}{\partial z_1^2} = (p_1 - s_1)\cdot$$
$$\cdot\Bigg[\frac{y_2(\boldsymbol{p}) - y_1(\boldsymbol{p})}{\gamma_{2,1}} \int_{A_1}^{z_1} \Bigg(f_2(\delta_2(\varepsilon_1, z_1)) + \frac{(z_1 - \varepsilon_1)}{\gamma_{2,1}} f_2'(\delta_2(\varepsilon_1, z_1)) \Bigg) f_1(\varepsilon_1)\mathrm{d}\varepsilon_1 -$$
$$- y_1(\boldsymbol{p}) \Bigg(F_2(z_2) f_1(z_1) + \frac{1}{\gamma_{2,1}} \int_{A_1}^{z_1} f_2(\delta_2(\varepsilon_1, z_1)) f_1(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon_1 \Bigg)\Bigg]$$

V předpisu druhé derivace vidíme opět záporný člen známý ze sekce zabývající se aditivní poptávkou, avšak kromě něj je zde nyní navíc další člen, jehož znaménko patrně závisí na hodnotách deterministických částí poptávky obou prodejců a navíc obsahuje derivaci hustoty, o jejímž znaménku je také těžké rozhodnout. Nedokážeme tedy rozhodnout, zda je funkce konkávní, z předpisu první derivace nedokážeme vyjádřit žádné konkrétní stacionární body, a tudíž o extrémech této funkce nedokážeme bohužel nic říci.

3. Trh více prodejců řízený cenami - praktická část

V této kapitole představíme numerický algoritmus, který jsme vytvořili pro trh více prodejců řízený cenami. Věnujeme se problému definovanému v sekci 2.1, tedy trhu dvou prodejců s aditivní poptávkou a konečně mnoha cenami definovanému pomocí podmínek (P1) - (P3).

3.1 Numerický algoritmus a jeho implementace

V této sekci zdokumentujeme vytvořenou implementaci našeho numerického algoritmu. Řešení je implementováno v programovacím jazyce C# pro platformu .NET Framework 4.8. Pro vývoj byla použita aplikace Microsoft Visual Studio 2019 verze 16.1.1. Výsledný program sestává ze dvou hlavních částí - výpočetní knihovny a grafického uživatelského rozhraní. V přílohách k této diplomové práci může čtenář nalézt:

- textové soubory obsahující veškerý kód výpočetní knihovny
- textový soubor s odkazem na adresu, ze které lze stáhnout celý program včetně uživatelského rozhraní (program bohužel nemůže být přímo v přílohách, jelikož exe soubor nepatří k povoleným přílohám)

V části týkající se implementace se budeme vždy zabývat pouze výpočetní knihovnou, uživatelské rozhraní nepovažujeme z hlediska práce za důležité.

Nyní se budeme věnovat třídám, jež jsme v řešení vytvořili. Třídy se snažíme striktně rozdělovat do dvou typů - data a nástroje. Datové třídy by neměly obsahovat žádné metody (s výjimkou metod zděděných od třídy `object`, jako například metoda `ToString`). Nástroje naopak mají pouze metody a neobsahují žádná data s výjimkou odkazů na jiné nástroje, které získávají v konstruktoru a ukládají si je ve formě `private field`. Metody poskytované těmito nástroji by neměly měnit vstupní data, ale měly by vždy vytvořit data nová (princip data-in-data-out). Cílem tohoto dělení je zabránit nekontrolovaným vedlejším efektům a zvýšit čitelnost kódu.

Použité třídy

Nyní postupně rozebereme nejprve použité datové třídy a následně nástroje.
Použité datové třídy:

- `RealFunction` je třída reprezentující reálnou funkci jedné či více proměnných. Třída obsahuje zejména vlastnost výčtového typu `FunctionType`, který určuje o jakou funkci se jedná, a slovník proměnných, kde klíčem je string a hodnotou je objekt ze třídy `Variable`.
- `Variable` je třída implementující proměnnou, která může být dosazena do reálné funkce výše. Tato třída obsahuje zejména vlastnost výčtového

typu `VariableType`, která může nabývat tří hodnot - `Unknown`, `Fixed` a `Function`.

  - Hodnota `Unknown` znamená, že proměnná ještě nemá známou hodnotu. V tom případě je důležitá vlastnost `Source`, která určuje, odkud lze při dosazování hodnotu získat.
  - Pokud je typ proměnné nastaven na `Fixed`, najdeme její hodnotu ve vlastnosti `FixedValue`.
  - Je-li typ proměnné nastaven na `Function`, pak ve vlastnosti `Function` najdeme reálnou funkci, do níž musíme dosadit, abychom hodnotu proměnné získali. Pomocí proměnných typu funkce jsou implementovány složené funkce.

- `FixedVariablesFunction` je technická třída používaná v průběhu výpočtů. Narozdíl od třídy `RealFunction` má již všechny proměnné dosazené, a tedy slovník s hodnotami typu `Variable` je nahrazen slovníkem s hodnotami typu `double`.

- `Strategy` je třída obsahující vlastnosti `p`, tedy cenu, a `z` tedy nakoupené množství očištěné od fixní části poptávky.

- `StrategyWithProfit` obsahuje vlastnost `Strategy` definovanou výše a navíc vlastnost `Profit`, kam se ukládá profit prodejce, který tuto strategii využil.

- `Vendor` je třída shrnující údaje o prodejci, tedy například vlastnosti `a`, `b` a `d` sloužící jako parametry poptávkové funkce, nákupní cenu `c`, sběrovou hodnotu `s` a další.

U vlastností tříd `Strategy` a `Vendor` jsme se rozhodli porušit pojmenovávací konvence obecně užívané v jazyce C#.[1] Obecně se považuje za dobrou praxi nepojmenovávat nic pouhým jedním písmenem. U vlastností se navíc dohodou užívají názvy začínající velkými písmeny. My jsme se však rozhodli použít názvy zavedené v předchozí kapitole.

Nyní se podívejme na použité nástroje:

- `FunctionEvaluator` Tato třída implementuje celkem čtyři důležité metody. Dvě z nich nesou název `Evaluate`, zbylé dvě mají název `Integrate`.

  - Metody s názvem `Evaluate` slouží k vyhodnocení funkčních hodnot v bodech. Obě přetížení berou na vstupu reálnou funkci a bod a vrací hodnotu typu `double`. Liší se v reprezentaci bodu. Bod může být zadán jako slovník s klíči typu `string` a hodnotami typu `double`. V tom případě se při vyhodnocování funkce za proměnné s neznámou hodnotou dosazuje hodnota dle klíče určeného vlastností proměnné `source`. Druhou možností reprezentace bodu je pouze jediná hodnota typu `double`. V tom případě se všem proměnným s neznámou hodnotou přiřadí tato nová hodnota.

[1] Pojmenovávací konvence jsou hezky shrnuté například na této webové stránce: `https://github.com/ktaranov/naming-convention/blob/master/C%23%20Coding%20Standards%20and%20Naming%20Conventions.md`

   - Metody s názvem `Integreate` slouží vyhodnocení integrálů. První přetížení řeší jednoduché integrály, druhé přetížení řeší dvojné integrály. O výpočtu integrálů se budeme podrobněji zmiňovat dále.

- `FunctionFactory` pomáhá vytvářet složitější reálné funkce. Jejími stěžejními metodami jsou `CreateProfit` a `CreateProfitDerivative`, které vytváří ziskovou funkci a její derivaci při pevně zadaných parametrech.

- `RootFinder` implementuje jedinou metodu `FindRoot`. Tuto metodu užíváme k hledání kořenů derivace ziskové funkce. Při hledání využíváme toho, že zisk je konkávní funkcí, a tedy jeho derivace je klesající funkce. Navíc z věty 8 víme, že řešení na daném intervalu vždy existuje. K nalezení řešení nám tedy stačí pouhé binární prohledávání intervalu (zvolíme zkušební bod uprostřed intervalu a dle toho, zda je hodnota derivace zisku v tomto bodě kladná či záporná, hledáme dále v levém či pravém podintervalu, dokud není hodnota derivace zisku dostatečně blízko nule).

- `MarketSolver` je stěžejní třída. Implementuje tři metody:

   - `FindOptimalReaction` je metoda, která na vstupu požaduje prvního prodejce, druhého prodejce a jeho strategii a vrátí optimální strategii prvního prodejce včetně jeho profitu.
   - `FindOptimalPrice` je metoda, která na rozdíl od té předchozí požaduje na vstupu ještě pevně dané `z` a vrací optimální strategii při tomto pevném `z` - optimalizuje tedy pouze cenu `p`. Poznamenejme, že je též možné optimalizovat pouze `z`, pokud použijeme výše popsanou funkci `FindOptimalReaction` a prvnímu prodejci nastavíme jedinou možnou cenu, ze které může vybírat.
   - `FindEquilibrium` je patrně nejzajímavější funkce, která na vstupu požaduje dva prodejce a počáteční strategii druhého z nich. Následně se pokusí najít ekvilibrium na trhu tak, že střídavě počítá optimální reakci prvního prodejce na druhého a druhého na prvního. Pokud se dvě po sobě jdoucí strategie liší o méně než je hodnota konstanty `OPTIMALITY_TOLERANCE`, vrátí metoda dvojici nalezených strategií. Pokud proběhne více iterací, než je dáno konstantou `MAX_ITERATIONS`, metoda vrátí `null`.

Výpočet určitých integrálů

Pro výpočet určitých integrálů jsme použili složené lichoběžníkové pravidlo. Myšlenka tohoto pravidla spočívá v tom, že interval (a,b), přes který integrujeme funkci f, rozdělíme na n intervalů stejné šířky a hodnotu integrálu na těchto intervalech aproximujeme obsahem lichoběžníku daného body $[x_i,0]$, $[x_{i+1},0]$, $[x_i,f(x_i)]$, $[x_{i+1},f(x_{i+1})]$, kde $i=0,\ldots,n-1$. Formálně je pak lichoběžníkové pravidlo dané vzorcem

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+\frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Tímto způsobem počítáme jednorozměrné integrály. V naší práci potřebujeme řešit i dvojrozměrné integrály. V takovém případě chápeme vnitřní integrál prostě jako funkci proměnné, dle které se integruje ve vnějším integrálu. Složené lichoběžníkové pravidlo pak užijeme k řešení vnitřního i vnějšího integrálu.

Je zřejmé, že čím jemnější dělení intervalu zvolíme, tím přesnějšího dosáhneme výsledku, na druhou stranu nám však roste výpočetní náročnost. U dvojného integrálu je tento efekt silnější, jelikož zvolíme-li u každého integrálu dvakrát více podintervalů, stoupne výpočetní náročnost čtyřikrát. Výpočet dvojných integrálů je tak časově mnohem náročnější než jakákoliv jiná operace v průběhu výpočtu.

K nalezení optimální reakce potřebujeme vyhodnocovat derivaci zisku a méně často i zisk samotný. V derivaci zisku se dvojný integrál vyskytuje pouze implicitně ve formě integrálu z distribuční funkce. Zvolíme-li tedy rozdělení, jehož distribuční funkci dokážeme vyhodnocovat bez použití integrálu (například rovnoměrné či trojúhelníkové), stačí vyhodnocovat jednoduchý integrál. Při vyhodnocování zisku se již bez vyhodnocování dvojného integrálu nelze obejít, avšak tuto operaci děláme pouze jednou pro každou cenu.

Přesto výpočet dvojných integrálů zabírá většinu výpočetního času. Proto jsme se tuto část jako jedinou rozhodli paralelizovat. Paralelizaci jsme implementovali prostřednictvím příkazu `Parallel.For`, pomocí kterého vyhodnocujeme funkční hodnoty v jednotlivých bodech vnějšího integrálu, což vždy zahrnuje výpočet vnitřního integrálu. Paralelizace je maximálně efektivní, jelikož výpočet jednotlivých vnitřních integrálů nevyžaduje žádnou část, která by nemohla probíhat paralelně. Nicméně používaný počítač disponuje pouze procesorem se dvěma jádry, tedy čtyřmi logickými vlákny, takže reálné zrychlení výpočtu dvojného integrálu je zhruba trojnásobné.

Při hledání výsledků prezentovaných v následující sekci jsme pro výpočet jednoduchých integrálů využívali sloupečky o šířce 0.001 a pro výpočet dvojných integrálů jsme využívali sloupečky o šířce 0.01. Přesnost takových výpočtů můžeme zhodnotit pomocí údajů z tabulky 3.1. Tam nalezneme srovnání výsledků integrace pomocí našeho přístupu a pomocí Wolfram Alpha.[2] Pro výpočty jednoduchých i dvojných integrálů jsme ve srovnání užívali šířky sloupečků 0.01. Relativní chyba se u tří vybraných integrálů pohybuje v řádů tisícin až desetitisícin procent, což je pro naše účely přijatelná přesnost.

Tabulka 3.1: Test přesnosti výpočtu určitých integrálů

formule	výsledek Wolfram	náš výsledek	relativní chyba
$\int_0^{30} \frac{x+1}{\sqrt{50\pi}} \exp(-\frac{(x-10)^2}{50})\,\mathrm{d}x$	11.018700	11.018686	0.0001 %
$\int_0^5 x \int_0^x x - y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	78.125000	78.125313	0.0004 %
$\int_0^{10} (2x+1) \int_5^{5+\frac{10-x}{0.5}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(y-15)^2}{2})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	30.250000	30.252739	0.0091 %

[2]Jedná se o webový výpočetní software dostupný na adrese `https://www.wolframalpha.com/`

3.2 Získané výsledky

V této části uvedeme a okomentujeme výsledky, kterých se nám podařilo dosáhnout pomocí vytvořeného programu. Naším hlavním zájmem bylo zkoumat po dvojicích závislosti proměnných p_1, z_1, p_2 a z_2 při zachování všech parametrů prodejců stejných. Doufáme, že prozkoumání vztahů mezi těmito proměnnými by mohlo vést k dalšímu pokroku v řešení problému trhu více prodejců. Dále jsme se zabývali hledáním ekvilibria u několika konkrétních trhů.

Podkladová data pro grafy jsme z programu exportovali do souborů formátu .csv. Grafy na základě těchto dat jsme pak vykreslovali v programu Microsoft Office Excel 2007.

Fixní nastavení druhého prodejce

Nejprve se budeme zabývat vztahem mezi p_1 a z_1 při fixním nastavení strategie druhého prodejce. Pro tento případ jsme volili symetrické prodejce s následujícími parametry:

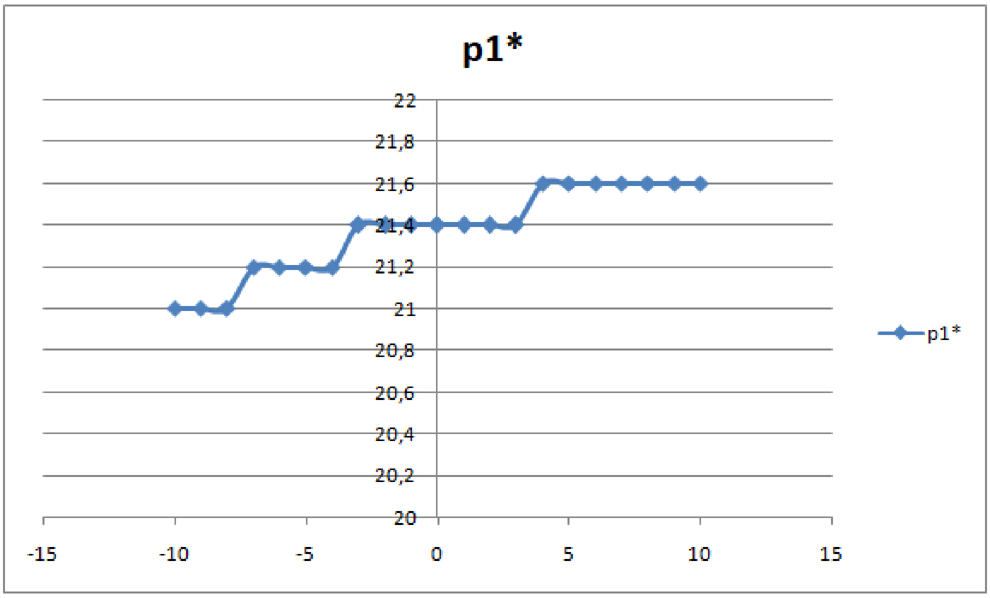
- $c_i = 10$, $s_i = 2$
- $D_i((p), \varepsilon_i) = 250 - 10p_i + 5p_j + \varepsilon_i$
- $\varepsilon_i \sim \Delta(-10, 10, 0)$, kde symbolem $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ označujeme trojúhelníkové rozdělení na intervalu $[\alpha, \beta]$ s vrcholem v bodě γ
- $A_i = -10, B_i = 10$, což plyne z předchozího řádku
- $\gamma_{i,j} = 0.5$

Strategie druhého prodejce je $z_2 = 0$ a $p_2 = 16$.

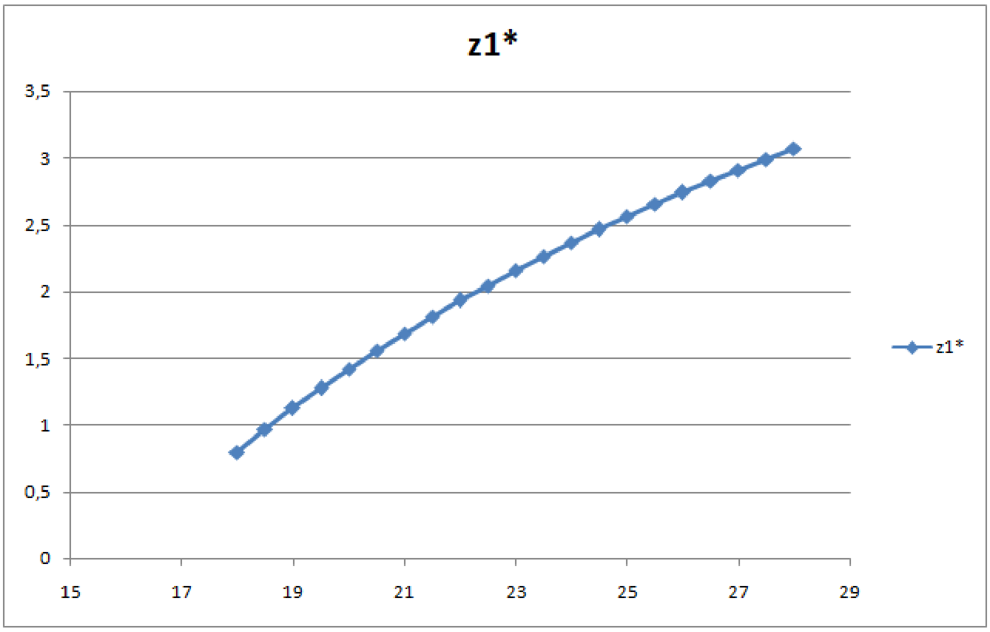
Na obrázku 3.1 vidíme graf závislosti p_1^* na z_1. Hodnoty z_1 jsme volili z množiny $\{-10, -9, -8, \ldots, 10\}$, množinu možných cen jsme pak volili jako $\{20, 20.2, 20.4, \ldots, 22\}$. Vidíme, že s rostoucími hodnotami parametru z_1 rostou i hodnoty parametru p_1^*. Ačkoliv jsou výsledky trochu znepřehledněny volbou z konečné množiny, zdá se, že p_1^* je v z_1 konkávní.

Na obrázku 3.2 pak vidíme graf opačné závislosti. Hodnoty p_1 jsme zde volili z množiny $\{18, 18.5, 19, \ldots, 28\}$. Parametr z_1^* pak může nabývat libovolné hodnoty z intervalu $[-10, 10]$. Z grafu je opět patrný rostoucí konkávní průběh.

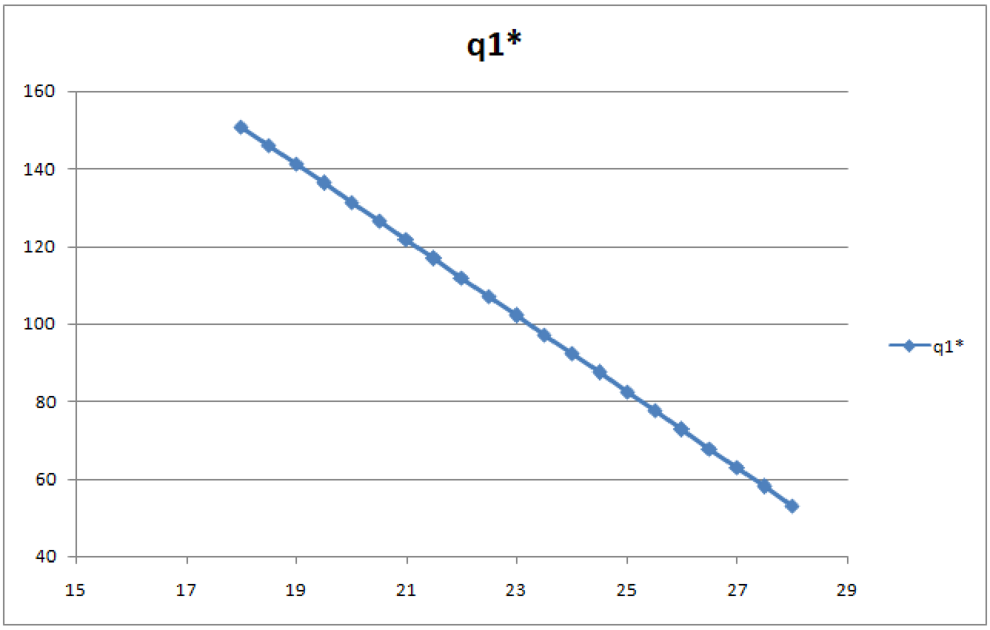
Grafy potvrzují jev, na který jsme narazili v sekci 2.2. Konkrétně se potvrzuje, že parametr p_1^* je rostoucí v z_1, což bychom intuitivně asi nečekali. Nicméně jak jsme psali, z_1 není přímo zakoupené množství, proto vztah mezi z_1 a p_1 není zřejmý. Jak ale vidíme na obrázku 3.3, vztah opravdového zakoupeného množství a ceny je takový, jaký bychom čekali, tedy s rostoucí cenou klesá zakoupené množství. Dále jsme v sekci 2.2 diskutovali, zda je p_1^* konkávní v z_1, což z tvaru druhé derivace nebylo zřejmé. Nyní se zdá, že ano, avšak nemůžeme samozřejmě vyloučit, že by při se při jiném nastavení parametrů prodejců ukázalo, že tomu tak být nemusí.



Obrázek 3.1: Graf závislosti p_1^* na z_1



Obrázek 3.2: Graf závislosti z_1^* na p_1

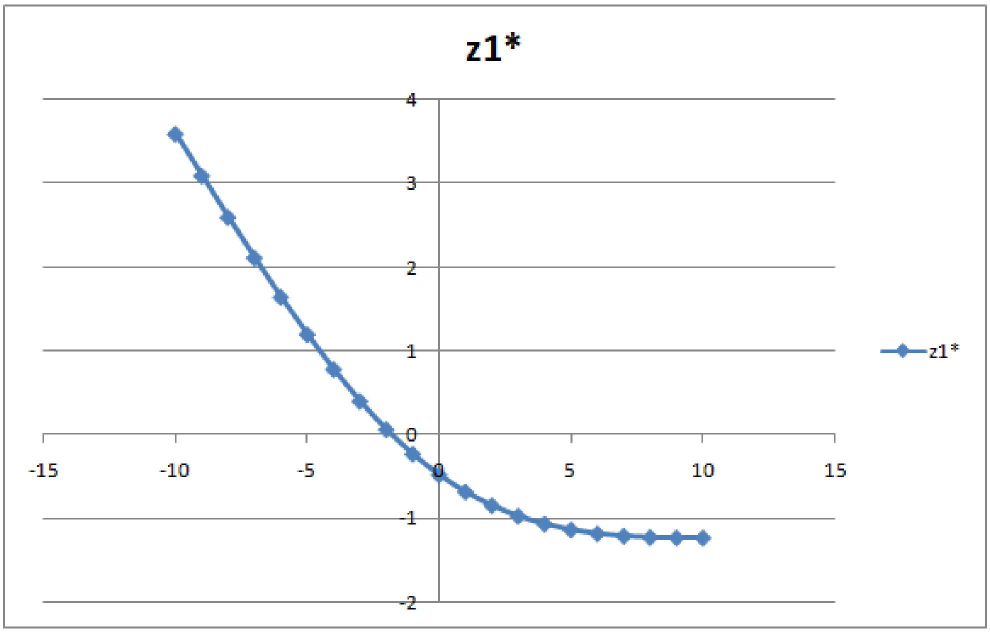


Obrázek 3.3: Graf závislosti q_1^* na p_1

Reakce na změny druhého prodejce

Nyní se podíváme na reakci optimálních hodnot p_1 a z_1 na změny ve strategii druhého prodejce. Parametry prodejců (tedy tvar poptávkové funkce, nákupní cena, ...) budou opět stejné jako v předchozí části.

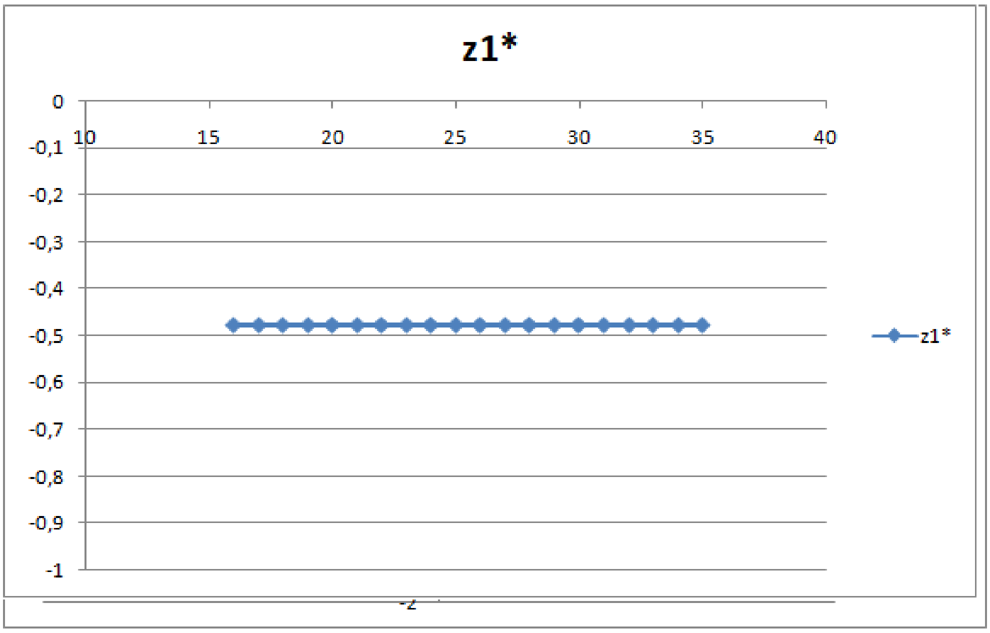
Nejprve se podíváme odděleně na reakci z_1^* na změny parametrů z_2 a p_2. Hodnotu p_1 jsme pro tento případ zvolili jako 15. Jak vidíme na obrázku 3.4, z_1^* konvexně klesá s rostoucími hodnotami parametru z_2. Tento průběh není nijak překvapivý. Nakupuje-li druhý prodejce více zboží, zbývá stále méně zákazníků, kteří by potenciálně mohli přejít k prvnímu prodejci. Velice zajímavý je však graf závislosti z_1^* na p_2 vyobrazený na obrázku 3.5. Ten ukazuje, že cena zvolená druhým prodejcem vůbec neovlivňuje optimální volbu parametru z_1.



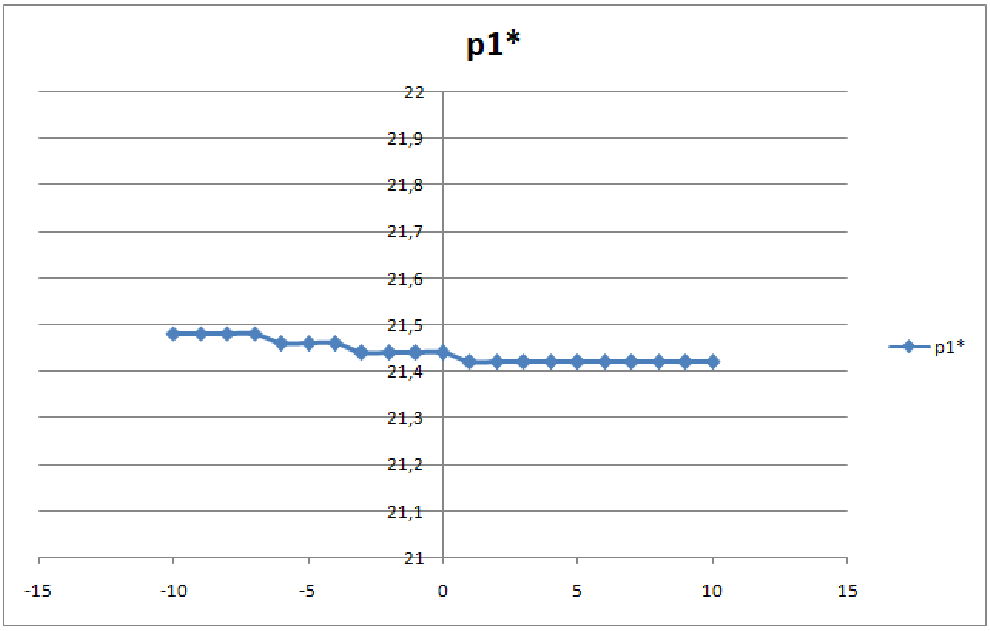
Obrázek 3.4: Graf závislosti z_1^* na z_2

Dále se zaměříme na reakci p_1^* na změny parametrů druhého prodejce při fixovaném $z_1 = 0$. Parametr p_1 volíme vždy z konečného množství možností, což trochu ztěžuje jeho vykreslování. Tento problém se projevil při zkoumání závislosti p_1^* na z_2. Dlouhou dobu se totiž zdálo, že p_1^* na z_2 vůbec nezávisí a až při volbě velmi jemného kroku v ceně o velikosti 0.02 se projevilo, že p_1^* je v z_2 ve skutečnosti pravděpodobně klesající, jak můžeme vidět na obrázku 3.6. Závislost cen obou prodejců je o něco přímočařejší. Můžeme ji vidět na obrázku 3.7. Cena p_1 jasně roste s rostoucí cenou p_2 až dokud nenarazí na svou horní hranici, která je dána právě konečným množstvím cen. Pokud by se odstranilo zkreslení způsobené diskretizací obou cen, zdá se, že by vztah mezi nimi mohl být dokonce lineární.

Konečně se podíváme, jaká je současná reakce obou dvou parametrů p_1^* a z_1^* na změny parametrů z_2 a p_2. Reakci na změny parametru z_2 vidíme na obrázku 3.8. Jak jsme již viděli na jednom z předešlých obrázků, p_1^* je na změny parametru z_2 poměrně necitlivá. Naproti tomu u parametru z_1^* vidíme opět krásný klesající průběh. Můžeme si ale všimnout méně plynulého skoku mezi hodnotami $z_2 = -2$ a $z_2 = -1$, která je reakcí na skok ceny p_1^*.

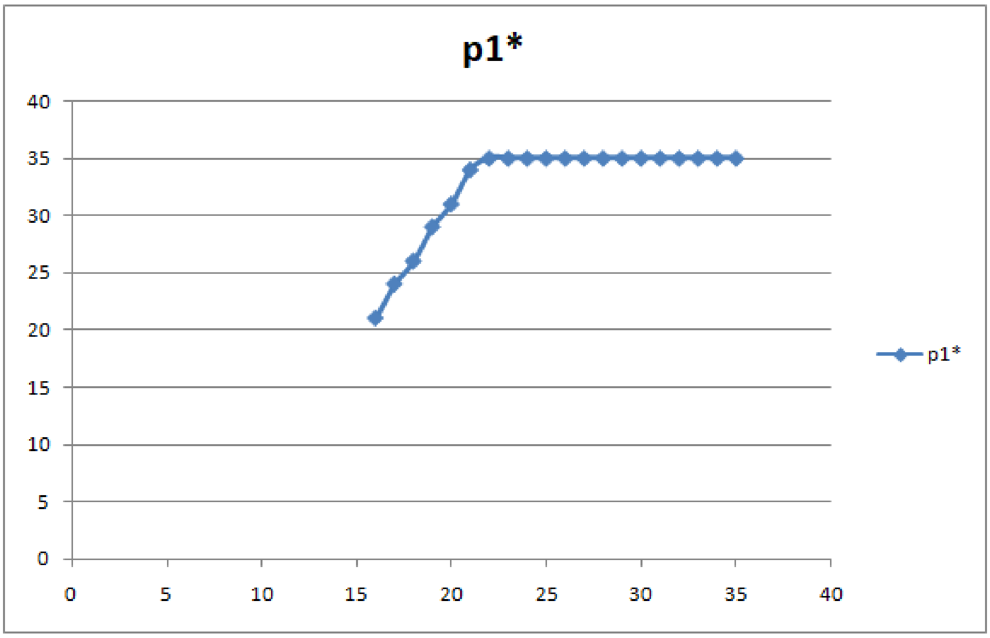


Obrázek 3.5: Graf závislosti z_1^* na p_2

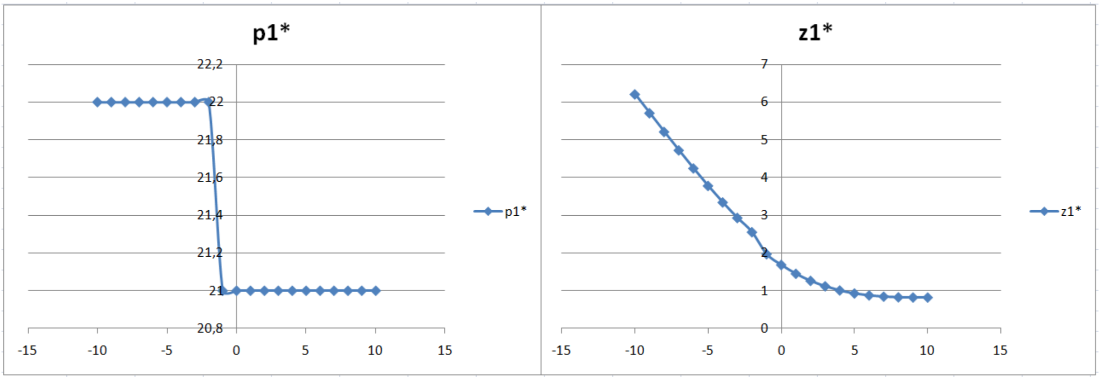


Obrázek 3.6: Graf závislosti p_1^* na z_2

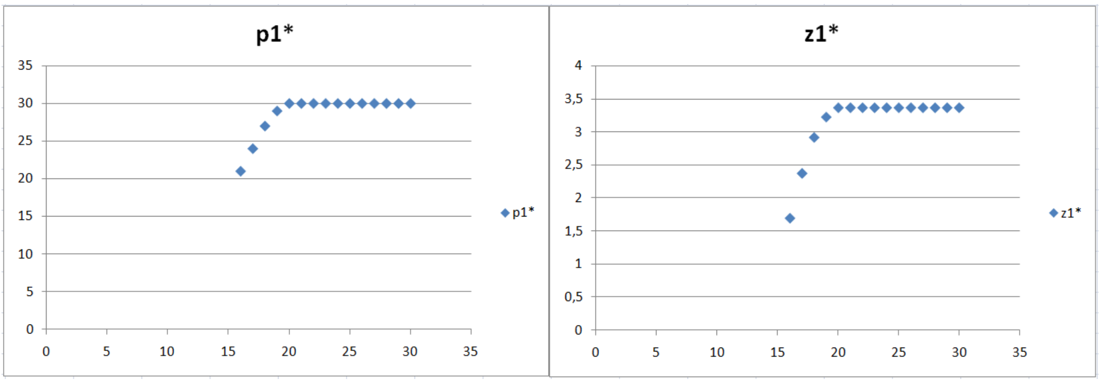
Na obrázku 3.9 pak vidíme reakci obou dvou parametrů prvního prodejce na změnu ceny druhého prodejce. U proměnné p_1^* vidíme opět stejný průběh, jako na obrázku 3.7. Naproti tomu u parametru z_1^* vidíme oproti izolovanému případu velkou změnu. Průběh se změnil z původně konstantního a nyní se velmi podobá průběhu p_1. Tento jev samozřejmě není neočekávaný, plyne ze závislosti z_1 a p_1 diskutované na počátku této sekce.



Obrázek 3.7: Graf závislosti p_1^* na p_2



Obrázek 3.8: Graf závislosti p_1^* a z_1^* na z_2



Obrázek 3.9: Graf závislosti p_1^* a z_1^* na p_2

Ekvilibrium

Při studiu trhu nás velmi často zajímá, zda se v průběhu času ustálí v nějakém rovnovážném bodě (ekvilibriu), ve kterém by již žádný z obchodníků neměl důvod měnit svou strategii, dokud ji nezmění někdo jiný. V této práci se nám bohužel nepodařilo najít takovéto ekvilibrium v teoretické části. Podíváme se, zda se nám na příkladech několika konkrétních trhů podaří najít ekvilibrium alespoň numericky.

Mějme nejprve dva symetrické prodejce dané parametry:

- $c_i = 10$, $s_i = 2$
- $D_i((p), \varepsilon_i) = 180 - 10p_i + 5p_j + \varepsilon_i$
- $\varepsilon_i \sim \Delta(-10, 10, 0)$ (tedy $A_i = -10, B_i = 10$)
- $\gamma_{i,j} = 0.5$
- $p_i \in \{15, 17\}$

Pro tyto dva prodejce jsme volili dvě různé počáteční strategie druhého prodejce, a sice $p_2 = 15$, $z_2 = 0$ a $p_2 = 17$, $z_2 = -8$. Pro obě dvě počáteční strategie algoritmus zkonvergoval do následujícího rovnovážného stavu: $p_1 = p_2 = 17$, $z_1 = z_2 \doteq 0.3516$. Není samozřejmě překvapivé, že strategie obou prodejců vyšly shodně. Podstatné ovšem je, že pro obě počáteční strategie byl nalezen rovnovážný bod a obě tak rozdílné počáteční strategie vedly k témuž rovnovážnému bodu.

U těchto dvou prodejců zůstaneme i v dalším příkladě, změníme pouze množinu možných cen, a to na množinu $\{12, 15, 18, 21\}$. I pro tento příklad jsme zvolili dvě různé počáteční strategie, a sice $p_2 = 12$, $z_2 = 0$ a $p_2 = 21$, $z_2 = 10$. A též pro tuto možnost volby cen algoritmus dokonvergoval pro obě počáteční strategie do totožného rovnovážného bodu: $p_1 = p_2 = 18$, $z_1 = z_2 \doteq 0.6494$.

Nyní opět změníme množinu možných cen na $\{12, 14, 16, 18, 20, 22\}$ a vneseme mezi oba prodejce asymetrii tím, že upravíme koeficient a_2 na hodnotu 230, tedy budeme předpokládat, že druhý prodejce má o 50 kusů vyšší fixní část poptávky. I pro tento trh jsme volili dvě různé počáteční strategie druhého prodejce. I v tomto případě byla vždy nalezena rovnovážná strategie, avšak pro obě počáteční strategie byly výsledky různé:

- Pro $p_2 = 12$, $z_2 = 0$ jsme dospěli k rovnovážnému bodu:
  - $p_1 = 18$, $z_1 = 0.5225$
  - $p_2 = 20$, $z_2 = 1.2939$
- Pro $p_2 = 22$, $z_2 = -5$ jsme dospěli k rovnovážnému bodu:
  - $p_1 = 20$, $z_1 = 1.0596$
  - $p_2 = 22$, $z_2 = 1.6833$

Z tohoto příkladu vidíme, že na trhu může být i více různých rovnovážných bodů. To obecně není s ničím v rozporu. Otázkou ovšem je, zda by se na tomto trhu objevovalo více rovnovážných bodů i v případě, že by parametr ceny byl spojitý, nebo zda více rovnovážných bodů vzniká pouze jako důsledek konečného množství možností volby.

Závěr

V této práci jsme se věnovali různým obměnám problému prodejce novin. V první kapitole jsme nejprve shrnuli poznatky o základní variantě tohoto problému a následně o variantě, kdy si prodejce může určovat prodejní cenu. V takovém případě předpokládáme, že zvolená cena ovlivňuje výši poptávky a pro závislost poptávky na ceně jsme zavedli dva možné tvary - aditivní a multiplikativní. Pro oba dva tvary poptávkové funkce jsme následně uvedli optimální řešení úlohy. Dále jsme se věnovali trhu více prodejců bez volby cen. Při studiu trhu jsme nejprve zavedli několik základních definic z teorie her, zejména termín Nashova ekvilibria. Následně jsme odvodili optimální reakci jednoho prodejce na ostatní prodejce a uvedli jsme, za jakých podmínek se na trhu více prodejců nachází Nashovo ekvilibrium.

Ve druhé kapitole jsme se zaměřili na trh více prodejců s možností volby cen. I v tomto případě jsme předpokládali, že volba cen ovlivňuje poptávku. Tentokrát však volba ceny každého prodejce ovlivňuje poptávku všech ostatních prodejců. Pro poptávkovou funkci jsme opět představili aditivní a multiplikativní tvar. Pro speciální případ, kdy se na trhu nachází pouze dva prodejci, jejich poptávka je v aditivním tvaru, vybírají si pouze z konečného množství cen a pravděpodobnost přechodu zákazníka od jednoho prodejce ke druhému je konstantní (tj. nezávisí na cenách) se nám podařilo nalézt optimální odpověď jednoho prodejce na strategii druhého prodejce. Bohužel ani v tomto případě se nám nepodařilo nalézt na trhu Nashovo ekvilibrium. Dále jsme se zabývali několika modifikacemi problému. Zjistili jsme, že podmínku týkající se konstantní pravděpodobnosti přechodu od jednoho prodejce ke druhému lze vypustit a pravděpodobnost přechodu lze uvažovat jako nerostoucí funkci prodejce, ke kterému zákazník potenciálně přechází. V případě multiplikativního tvaru poptávky a spojité volby ceny jsme však narazili na příliš vysokou komplexitu problému, takže jsme nebyli schopni formulovat ani optimální reakci jednoho prodejce na strategii druhého.

Ve třetí kapitole pak představujeme numerický algoritmus sloužící k řešení speciálního případu trhu dvou prodejců s aditivní poptávkou, konečně mnoha cenami a konstantní pravděpodobností přechodu mezi prodejci. Nejprve čtenáře seznamujeme s tím, jaké třídy a metody jsme použili při jeho implementaci. Následně prezentujeme numerické výsledky, kterých se za pomocí programu podařilo dosáhnout. Uvádíme nejprve vztahy mezi jednotlivými složkami strategií obou hráčů, které by mohli pomoci problému blíže porozumět. Dále pak studujeme, zda se nám podaří při různých nastaveních trhu nalézt Nashovo ekvilibrium alespoň experimentální cestou. Pro všechna uvažovaná nastavení trhu jsme Nashovo ekvilibrium skutečně nalezli, avšak zjistili jsme, že ekvilibrium nemusí být jednoznačné. Nejednoznačnost ovšem může vycházet pouze z konečného výběru cen a v případě spojitého výběru ceny se vyskytovat nemusí.

Seznam použité literatury

Chen, R. R., Cheng, T. C. E., Choi, T. M. a Wang, Y. (2016). Novel advances in applications of the newsvendor model. *Decision Sciences*, **47**.

Dupač, V. a Hušková, M. (2013). *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Nakladatelství Karolinum.

Edgeworth, F. Y. (1888). The mathematical theory of banking. *Journal of the Royal Statistical Society*, **51**.

Flanders, H. (1973). Differentiation under the integral sign. *American Mathematical Monthly*, **80**.

Jarník, V. (1956). *Diferenciální počet II.* Nakladatelství Československé akademie věd.

Jarník, V. (1974). *Diferenciální počet I.* Academia.

Krch, I. (2018). Model trhu s náhodnými vstupy. Master's thesis, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy.

Leyton-Brown, K. (2008). *Essentials of Game Theory.* Morgan and Claypool Publishers.

Morse, P. M. a Kimball, G. E. (1951). *Methods of operations resears.* Published jointly by the Technology Press of Massachusetts Institute of Technology, and Wiley, New York, Cambridge, Mass.

Petruzzi, N. C. a Dada, M. (1999). Pricing and the newsvendor problem: a review with extensions. *Operations Research*, **47**(2).

Šedina, J. (2018). Multicriteria and robust extension of news-boy problem. Master's thesis, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy.

Seznam obrázků

3.1 Graf závislosti p_1^* na z_1 33
3.2 Graf závislosti z_1^* na p_1 33
3.3 Graf závislosti q_1^* na p_1 34
3.4 Graf závislosti z_1^* na z_2 35
3.5 Graf závislosti z_1^* na p_2 36
3.6 Graf závislosti p_1^* na z_2 36
3.7 Graf závislosti p_1^* na p_2 37
3.8 Graf závislosti p_1^* a z_1^* na z_2 37
3.9 Graf závislosti p_1^* a z_1^* na p_2 37

A. Přílohy

A.1 Základní věty z matematické analýzy a teorie pravděpodobnosti

Věta A.1 (řetízkové pravidlo). *Nechť funkce $\phi(x)$, $\psi(x)$ mají derivaci v bodě x_0, nechť funkce $f(u,v)$ má totální diferenciál v bodě $[u_0, v_0]$, kde $u_0 = \phi(x_0)$, $v_0 = \psi(x_0)$. Potom funkce $f(\phi(x), \psi(x))$ má v bodě x_0 derivaci, jejíž hodnota je:*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

Důkaz. Viz (Jarník, 1974) věta 176.

□

Věta A.2 (Leibnitzovo integrální pravidlo). *Nechť $D = (x_0, x_1)$, $T = (t_0, t_1)$ jsou otevřené intervaly. Nechť $z : D \to \mathbb{R}$ a $h : D \to \mathbb{R}$ mají na D spojitou první derivaci. Nechť $f : D \times T \to \mathbb{R}$ je spojitá a má na $D \times T$ spojitou parciální derivaci dle x. Pak pro $x \in D$ takové, že $t_0 < z(x) < h(x) < t_1$, platí:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{z(x)}^{h(x)} f(x,t)\mathrm{d}t\right) = f(x,h(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(x) - f(x,z(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}z(x) + \int_{z(x)}^{h(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,t)\mathrm{d}t$$

Důkaz. Viz (Flanders, 1973).

□

Věta A.3 (o nabývání extrémů na kompaktu). *Nechť (P, ρ) je neprázdný kompaktní metrický prostor a $f : P \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazení. Potom f nabývá na P svého maxima i minima.*

Důkaz. Viz (Jarník, 1956) věta 170.

□

Věta A.4 (o konvoluci). *Nechť jsou X_1, X_2 nezávislé náhodné veličiny s distribučními funkcemi F_1 a F_2. Pak pro distribuční funkci G náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$ platí*

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y - x)\mathrm{d}F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y - x)\mathrm{d}F_1(x),\ y \in \mathbb{R}$$

Důkaz. Viz (Dupač a Hušková, 2013) věta 3.13.

□