MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Hrůza

Vliv okrajových podmínek na profil časově periodického proudění v trubce

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Miroslav Bulíček, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Děkuji vedoucímu této práce RNDr. Miroslavu Bulíčkovi Ph.D. za vstřícný přístup a dobré rady vždy, když jsem je potřeboval.

Název práce: Vliv okrajových podmínek na profil časově periodického proudění v trubce

Autor: Jan Hrůza

Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Miroslav Bulíček, Ph.D.

Abstrakt: Cílem této práce bylo vyřešit problém proudění nestlačitelné kapaliny v trubce, které vzniká působením periodické změny tlaku. K tomuto problému byly uvažovány okrajové podmínky obsahující časovou derivaci rychlosti modelující dynamickou odezvu na hranici, které lze uplatnit například pro modelování roztavených polymerů. V práci se nejprve věnujeme hledání konkrétního tvaru řešení pomocí Fourierovy metody, řešení vyjadřujeme vůči systému založeném na nulté Besselově funkci. Speciálně se dále věnujeme blíže tomuto systému. Následně vyšetřujeme konvergenci řešení v prostoru spojitých a následně lebesgueovsky integrovatelných funkcí. Využíváme zde vlastnosti Besselových funkcí, zejména rozložení nulových bodů. Práce dále obsahuje tvar aproximativního řešení vykreslený pomocí numerického softwaru.

Klíčová slova: okrajové podmínky, periodické proudění, nestlačitelné tekutiny

Title: On the role of boundary conditions in the time periodic flow of incompressible fluid in tube

Author: Jan Hrůza

Institute: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: RNDr. Miroslav Bulíček, Ph.D.

Abstract: The goal of this work is to find a solution to the problem of incompressible fluid flow in the pipe induced by a time periodic pressure gradient. Boundary conditions including a time derivative of velocity field are considered. This type of boundary conditions models a dynamic response of the fluid at the boundary and such behaviour can be used for example in molten polymers fluid modeling. First we look for a specific form of the solution using the Fourier method. The solution is decomposed into a linear combination of functions based on the Bessel function of zero order. We then study these functions in more details. Then we investigate the convergence of sequence of approximative solutions in the space of continuous functions and in the Lebesgue space. In proofs we use the properties of the Bessel function and in particular we investigate the distribution of the roots of Bessel function. We also use a numerical software to compute an approximative solution based on the Fourier method.

Keywords: boundary conditions, time periodic flow, incompressible fluids

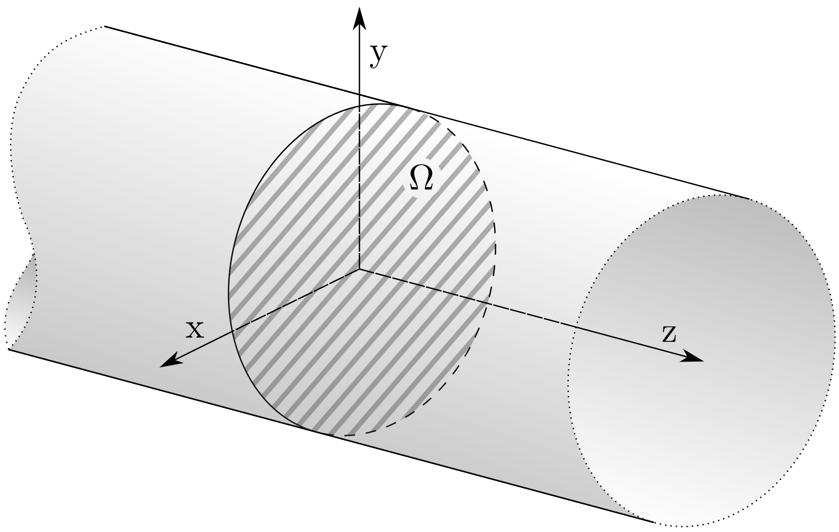
Obsah

Přehled použitého značení

β, p	konstanty a skalární funkce značíme nezvýrazněnými písmeny,
$\boldsymbol{v}$	vektory a vektorové funkce značíme tučnými malými písmeny, složky vektorů a vektorových funkcí značíme dolním indexem $\boldsymbol{v} = (v_1,v_2,v_3)^T$,
$\boldsymbol{S}$	matice značíme tučnými velkými písmeny
$\mathrm{B}(a,r)$	otevřená koule se středem a a poloměrem r,
$\langle u,v \rangle$	skalární součin u a v (konkrétní tvar skalárního součinu je upřesněn v rámci kapitol),
$\boldsymbol{n}$	jednotkový normálový vektor k ploše, plocha bude upřesněná v kontextu,
$(\boldsymbol{v})_\tau$	složka vektoru $\boldsymbol{v}$ v tečném směru dané plochy (v kontextu okrajových podmínek je touto plochou hranice prostorové oblasti, na které jsou podmínky předepsány),
∂_x	parciální derivace vzhledem k proměnné x,
∂_{yx}	druhá parciální derivace vzhledem k proměnné x a y,
$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$	tenzorový součin 3-složkových vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je matice $(u_i v_j)_{i,j=1}^3$,
$\int_\Omega f dxdy$	integrál přes dvoudimenzionální množinu Ω, $dxdy$ v tomto případě odpovídá Lebesgueově dvoudimenzionální míře,
$\int_{\partial\Omega} f dl$	křivkový integrál prvního druhu přes hranici množiny Ω, dl v tomto případě odpovídá Hausdorffově jednodimenzionální míře,
∇u	gradient skalární funkce $u(x,y,z,t)$ je vektor $(\partial_x u,\partial_y u, \partial_z u)^T$ parciálních derivací podle *prostorových* souřadnic,
$\nabla \boldsymbol{v}$	gradient vektorové funkce $\boldsymbol{v}(x_1,x_2,x_3,t)$ je matice $(\partial_{x_i} v_j)_{i,j=1}^3$ (matice obsahuje parciální derivace pouze podle *prostorových* souřadnic),
Δu	Laplaceův operátor skalární funkce $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ je výraz $\partial_{xx} u + \partial_{yy} u + \partial_{zz} u$,
$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v})$	divergence vektoru $\boldsymbol{v}(x,y,z,t) = (v_1,v_2,v_3)$ je součet parciálních derivací složek podle příslušných *prostorových* souřadnic $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}) = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3$,
$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{V})$	divergence matice $V(x,y,z,t) = (\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)$ je součet parciálních derivací sloupcových vektorů podle příslušných prostorových souřadnic $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{V}) = \partial_x \boldsymbol{v}_1 + \partial_y \boldsymbol{v}_2 + \partial_z \boldsymbol{v}_3$,
$C(a,b]$	spojité funkce na polouzavřeném intervalu $(a,b]$,
$f_n \rightrightarrows f$	posloupnost funkcí f_n, $n \in \mathbb{N}$ stejnoměrně konverguje k funkci f (detaily jsou upřesněny v rámci kapitol),
$L^p(a,b)$	prostor funkcí (Lebesgueovsky) integrovatelných s p-tou mocninou na intervalu (a,b),

Úvod

V této práci se budeme zabývat modelováním proudění kapaliny v trubce indukovaného periodicky se měnícím tlakem. Máme tedy předepsaný tlak a nekonečně dlouhý válec reprezentující trubku. Tento válec uvažujeme protáhlý ve směru souřadnicové osy z, můžeme ho proto zapsat jako $\Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, kde $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená koule (resp. kruh) v $\mathbb{R}^2$ s poloměrem 1 (viz obrázek 1).



Obrázek 1: Část válce $\Omega \times \mathbb{R}$

Výsledné proudění popíšeme jako rychlost $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ udávající vektor rychlosti pohybu kapaliny pro každý bod válce v daném čase. Explicitní popis rychlosti $\boldsymbol{v}$ získáme jako řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{v } \Omega \times \mathbb{R} \times (0,T), \tag{1}$$

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) - \operatorname{div} \boldsymbol{S} = -\nabla p \qquad \text{v } \Omega \times \mathbb{R} \times (0,T). \tag{2}$$

Rovnice (1) je rovnice kontinuity pro nestlačitelnou tekutinu (kapalinu s konstantní hustotou), vyjadřující zákon zachování hmotnosti. Společně s ní dále uvažujeme Navierovu-Stokesovu pohybovou rovnici (2) pro nestlačitelnou kapalinu v tzv. konvektivním tvaru, kde $\boldsymbol{S}$ je deviatorická část Cauchyova tenzoru napětí ve tvaru

$$\boldsymbol{S} = (\nabla \boldsymbol{v})^T + \nabla \boldsymbol{v}.$$

Nestandardním prvkem našeho problému je volba okrajové podmínky, která obsahuje časovou derivaci rychlosti a modeluje tak dynamickou odezvu na hranici:

$$\alpha \boldsymbol{v} + \beta \partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{S}\boldsymbol{n})_\tau = 0 \quad \text{na } [0,T] \times \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad \alpha,\beta \in [0,\infty). \tag{3}$$

Tato volba okrajové podmínky je dle experimentů vhodná pro modelování proudění některých roztavených polymerů [1]. Vycházíme z disertační práce [8], která se zabývá Navierovými-Stokesovými problémy proudění homogenních nestlačitelných tekutin. V části uvedené práce se autorka zabývá právě okrajovou podmínkou (3) ve dvou příkladech proudění mezi rovnoběžnými deskami.

1. Hledání možného řešení problému

V této kapitole se budeme věnovat řešení problému formulovaného v úvodu, konkrétně se pokusíme najít kandidáta na řešení za použití jistých zjednodušujících předpokladů. Časově periodický tlak zmíněný v úvodu budeme konkrétně uvažovat ve tvaru $p(t,x,y,z) = z\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$. Máme tedy zadané množiny Ω a $Q = (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}$ a systém rovnic

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) - \operatorname{div}\boldsymbol{S} = -\nabla\left(z\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) \qquad \text{v } Q, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{v } Q. \tag{1.2}$$

K těmto rovnicím máme dále zadanou okrajovou podmínky a T-periodicitu

$$\alpha\boldsymbol{v} + \beta\partial_t\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{S}\boldsymbol{n})_\tau = 0 \qquad \text{na } (0,T) \times \partial\Omega \times \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{v}(0,x,y,z) = \boldsymbol{v}(T,x,y,z) \qquad \text{pro } (x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Pro snadnější nalezení řešení předpokládejme speciální tvar. Budeme hledat funkce rychlosti, která je invariantní vůči posunutí ve směru osy z, tedy $\boldsymbol{v}(t,x,y)$. Speciálně předpokládáme

$$\boldsymbol{v}(t,x,y,z) = (0,0,u(t,x,y))\,. \tag{1.5}$$

Uvažujeme tak pouze řešení, které mají nenulovou složku pouze ve směru pravé strany, tedy gradientu tlaku. Tento fakt nám pomůže ke zjednodušení zadaných rovnic. Díky tomu, že pouze třetí souřadnice funkce $\boldsymbol{v}$ je nenulová, bude $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}$ nulová matice, kromě prvku $v_3v_3 = u^2(t,x,y)$. Po aplikaci divergence derivujeme tento prvek podle souřadnice z, člen $\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v})$ je pak nulový. Podobně se nám zjednoduší matice $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 2\partial_x v_1 & \partial_x v_2 + \partial_y v_1 & \partial_x v_3 + \partial_z v_1 \\ \partial_y v_1 + \partial_x v_2 & 2\partial_y v_2 & \partial_y v_3 + \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 + \partial_x v_3 & \partial_z v_2 + \partial_y v_3 & 2\partial_z v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_x u \\ 0 & 0 & \partial_y u \\ \partial_x u & \partial_y u & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplikací divergence pak dostaneme:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S} = (\partial_{zx}u, \partial_{zy}u, \partial_{xx}u + \partial_{yy}u)^T\,. \tag{1.6}$$

Vektorovou rovnici (1.1) můžeme chápat jako systém tří skalárních rovnic, napíšeme tyto rovnice po složkách a použijeme předpoklad (1.5) společně s tvarem (1.6):

$$\partial_{zx}u = 0 \qquad \text{v } Q, \tag{1.7}$$

$$\partial_{zy}u = 0 \qquad \text{v } Q, \tag{1.8}$$

$$\partial_t u - \Delta u = -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \qquad \text{v } Q. \tag{1.9}$$

Rovnice (1.7) a (1.8) jsou triviálně splněny nezávislostí $u(t,x,y)$ na proměnné z, rovnost (1.2) je také splněna díky tvaru řešení (1.5). Dále řešíme pouze jednu rovnici o jedné neznámé skalární funkci.

Přepsáním okrajových podmínek s použitím předpokladu (1.5) dostaneme okrajovou podmínku pro u:

$$\alpha u + \beta\partial_t u + x\partial_x u + y\partial_y u = \alpha u + \beta\partial_t u + \nabla u \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \text{na } [0,T] \times \partial\Omega \times \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

1.1 Nalezení řešení

Řešení budeme hledat Fourierovou metodou, cílem této práce je najít řešení ve tvaru $u(t,x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i(t) u_i(x,y)$. Chceme tedy separovat prostorové proměnné od času a funkce c_i a u_i explicitně vyjádřit v závislosti na počátečních podmínkách. Nejprve přejdeme k integrální formulaci problému. Dále budeme předpokládat radiální symetrii funkcí u_i, která nám pomůže k dalšímu zjednodušení rovnic. Následně budeme předpokládat, že u_i splňují vhodné podmínky, díky kterým získáme explicitní tvar funkcí c_i. V další kapitole se budeme věnovat právě těmto podmínkám, které povedou na hledání vlastních čísel jistého diferenciálního operátoru.

Vynásobením rovnice (1.9) libovolnou funkcí $\varphi \in \widetilde{V}$, kde $\widetilde{V} = C^1(\overline{\Omega})$ dostaneme integrální formulaci problému:

$$\int_\Omega \partial_t u \varphi \, dxdy - \int_\Omega \Delta u \varphi \, dxdy = -\int_\Omega \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \varphi \, dxdy. \tag{1.11}$$

Použili jsme přepis $\partial_{xx} u + \partial_{yy} u = \Delta u$. Je-li funkce u řešení rovnice (1.9), pak musí splňovat také rovnost (1.11) pro každou funkci[1] $\varphi \in \widetilde{V}$. Hledáme tedy řešení $u \in \widetilde{V}$ rovnice (1.9), která pro každé $\varphi \in \widetilde{V}$ splňuje předchozí integrální rovnost (1.11), na závěr ukážeme, že řeší i původní rovnici (1.9). Dále můžeme použít vztah

$$\operatorname{div}(\nabla u \varphi) = \Delta u \varphi + \nabla u \cdot \nabla \varphi \tag{1.12}$$

a Gaussovu větu o divergenci (věta 8) pro převedení integrálu přes Ω na plošný integrál přes $\partial\Omega$:

$$\int_\Omega \partial_t u \varphi \, dxdy - \int_\Omega (\Delta u \varphi + \nabla u \cdot \nabla \varphi - \nabla u \cdot \nabla \varphi) \, dxdy = -\int_\Omega \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \varphi \, dxdy,$$
$$\int_\Omega \partial_t u \varphi \, dxdy - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \varphi) \cdot \boldsymbol{n} \, dl + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dxdy = -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \int_\Omega \varphi \, dxdy.$$

Vnější normálu k $\partial\Omega$ můžeme konkrétně vyjádřit, protože $\partial\Omega$ je jednotková kružnice:

$$\boldsymbol{n}(x,y,z) = (x,y,0) \quad \text{pro } (x,y,z) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega.$$

Tvar funkce u na hranici můžeme také vyjádřit konkrétně pomocí okrajových podmínek (1.10):

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \boldsymbol{n}) \, \varphi \, dl = \int_{\partial\Omega} (x \partial_x u + y \partial_y u) \, \varphi \, dl \overset{(1.10)}{=} \int_{\partial\Omega} (-\alpha u - \beta \partial_t u) \, \varphi \, dl.$$

Shrnutím předchozího máme rovnost

$$\begin{aligned} \int_\Omega \partial_t u \varphi \, dxdy + \beta \int_{\partial\Omega} \partial_t u \varphi \, dl + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dxdy + \alpha \int_{\partial\Omega} \varphi u \, dl = \\ = -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \int_\Omega \varphi dxdy. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Oblast Ω je symetrická podle osy z, budeme proto hledat pouze symetrická řešení problému (invariantní vůči otočení kolem osy z). Předpokládáme tedy, že

[1] Rovnost v integrálním tvaru připomíná slabou formulaci problému (1.9), ale prostor funkcí $\widetilde{V}$ je v našem případě jiný.

funkci u můžeme vyjádřit jako $u(t,x,y) = u(t,r(x,y))$, kde r je vzdálenost od osy z daná výrazem $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Stejným způsobem budeme funkce φ uvažovat ve tvaru $\varphi(t,x,y) = \varphi(t,r(x,y))$. Stále požadujeme, aby byly funkce u a φ spojitě diferencovatelné na Ω, proto musí nutně být jednostranná derivace pro $r = 0$ nulová.

Poznámka. Pokud by jednostranná derivace $f(r(x,y))$ podle r pro $r = 0$ byla nenulová ($f'(0) = d \neq 0$), pak by parciální derivace podle x nebyla spojitá:

$$\lim_{x \to 0+} \partial_x f(r(x,0)) = \lim_{r \to 0+} f'(r)\frac{x}{|x|} = d,$$
$$\lim_{x \to 0-} \partial_x f(r(x,0)) = \lim_{r \to 0-} f'(r)\frac{x}{|x|} = -d.$$

Místo prostoru $\widetilde{V}$ funkcí dvou proměnných budeme uvažovat prostor

$$V = \left\{ f \in C^1[0,1], f'(0) = 0 \right\}$$

funkcí pouze jedné reálné proměnné a budeme požadovat $u(t,\cdot),\varphi \in V$. Nakonec v polárních souřadnicích můžeme oblast Ω vyjádřit jako

$$\Omega = \{(r,\theta) : r \in [0,1)\,,\, \theta \in [0,2\pi)\}\,.$$

Abychom mohli plně přejít do polárních souřadnic, upravíme výraz $\nabla u \cdot \nabla \varphi$ tak, aby neobsahoval parciální derivace podle x a y.

$$\nabla u \cdot \nabla \varphi = \partial_x u \partial_x \varphi + \partial_y u \partial_y \varphi = \partial_r u \partial_r \varphi \left((\partial_x r)^2 + (\partial_y r)^2 \right) = \partial_r u \partial_r \varphi. \tag{1.14}$$

S předpokladem symetrie použijeme v předchozí rovnosti (1.13) substituci do polárních souřadnic a Fubiniovu větu[6, věta 13.32] (integrujeme omezenou funkci přes omezenou množinu).

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r \partial_t u \varphi \, dr d\theta + 2\pi\beta(\partial_t u \varphi)(t,1) + \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \partial_r u \partial_r \varphi \, dr d\theta + 2\pi\alpha(\varphi u)(t,1) =$$
$$= -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\varphi \, dr d\theta.$$

Vzhledem k radiální symetrii žádná funkce nezávisí na proměnné θ, proto všechny integrace podle této proměnné odpovídají násobení konstantou 2π. Použití vlastnosti (1.14) pak vede na:

$$\begin{aligned} \int_0^1 r \partial_t u \varphi \, dr + \beta(\partial_t u \varphi)(t,1) + \int_0^1 r \partial_r u \partial_r \varphi \, dr + \alpha(\varphi u)(t,1) &= \\ = -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \int_0^1 r\varphi \, dr. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Řešení u vyjádříme vůči systému funkcí $\{u_i(r)\}_{i=1}^{\infty}$ v prostoru V jako součet $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) u_i(r)$. Takto vyjádřené řešení dosadíme do (1.15), za funkci φ zvolme funkci u_j pro fixní $j \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že můžeme prohodit řadu a integrál:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} c_i' \left(\int_0^1 r u_j u_i \, dr + \beta(u_j u_i)(1) \right) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \left(\int_0^1 r u_i' u_j' \, dr + \alpha(u_i u_j)(1) \right) &= \\ = -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \int_0^1 r u_j dr. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Pro zjednodušení rovnosti (1.16) chceme zvolit systém funkcí z prostoru V tak, abychom dostali diferenciální rovnici pouze pro koeficienty c_i. Definujeme na prostoru V skalární součin:

$$\langle u,v\rangle_V = \int_0^1 ruv\,dr + \beta(uv)(1). \tag{1.17}$$

Budeme-li požadovat ortonormalitu systému $\{u_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ vůči skalárnímu součinu definovaném v (1.17), zřejmě z první sumy v rovnosti (1.16) zbyde pouze c_j'. Dále budeme požadovat takové podmínky, že $\int_0^1 ru_i'u_j'\,dr + \alpha(u_iu_j)(1) = \tilde{\lambda}_i\delta_{ij}$ pro nějaká $\tilde{\lambda}_i$.

Funkce u_i budeme hledat tak, aby splňovaly

$$-u_i'' - \frac{1}{r}u_i' = \lambda_i^2 u_i, \tag{1.18}$$

$$\alpha u_i(1) + u_i'(1) = \lambda_i^2\beta u_i(1). \tag{1.19}$$

Proč jsme zvolili právě tyto podmínky, můžeme vidět v následujícím výpočtu, kde dále použijeme $u_i \in V$ (tedy $u_i'(0) = 0$):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r\lambda_i^2 u_iu_j\,dr &\overset{(1.18)}{=} -\int_0^1 ru_i''u_j\,dr - \int_0^1 u_i'u_j\,dr \\
&\overset{\substack{\text{Per partes}\\ u'(0)=0}}{=} \int_0^1 u_i'(u_j + ru_j')\,dr - (u_i'u_j)(1) - \int_0^1 u_i'u_j\,dr \\
&= \int_0^1 ru_i'u_j'\,dr - (u_i'u_j)(1) \\
&\overset{(1.19)}{=} \int_0^1 ru_i'u_j'\,dr - \lambda_i^2\beta(u_iu_j)(1) + \alpha(u_iu_j)(1),
\end{aligned}$$

Výslednou rovnost můžeme upravit na tvar

$$\lambda_i^2\left(\int_0^1 ru_iu_j + \beta(u_iu_j)(1)\right) = \int_0^1 ru_i'u_j' + \alpha(u_iu_j)(1), \tag{1.20}$$

který potom můžeme využít v rovnosti (1.16). Pomocí (1.17) a ortogonality systému $\{u_i(r)\}_{i=1}^{\infty}$ dostáváme z (1.16) následující identitu:

$$c_j'(t) + \lambda_j^2 c_j(t) = -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\int_0^1 ru_j. \tag{1.21}$$

Jde o lineární diferenciální rovnici prvního řádu, označme $b_j = \int_0^1 ru_j$, pak b_j je konstanta a můžeme najít explicitní řešení rovnice

$$c_j'(t) + \lambda_j^2 c_j(t) = -b_j\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \tag{1.22}$$

Obecný tvar řešení této rovnice je:

$$c_j(t) = K_je^{-\lambda_j^2 t} - \frac{b_jT}{\lambda_j^4T^2 + 4\pi^2}\left(2\pi\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \lambda_j^2T\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right), \tag{1.23}$$

kde K_j je reálná konstanta. Z podmínky periodicity (1.4), již nutně $K_j = 0$ (dále ukážeme, že $\lambda_j \neq 0$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$).

Nyní dopočítáme konstanty b_j za použití (1.18) a per partes:

$$b_j = \int_0^1 r u_j \overset{(1.18)}{=} -\int_0^1 \frac{r}{\lambda_j^2} u_j'' - \int_0^1 \frac{1}{\lambda_j^2} u_j' \overset{\text{per partes}}{=} -\left[\frac{r}{\lambda_j^2} u'(r)\right]_0^1 + 0$$
$$= -\frac{1}{\lambda_j^2} u_j'(1) \overset{(1.19)}{=} -\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_j^2}\right) u_j(1).$$

Shrnutím dosavadních výpočtů dostaneme následující závěr. Hledáme řešení soustavy rovnic (1.1) a (1.2) ve tvaru $\boldsymbol{v}(x,y,z,t) = (0,0,u(r(x,y),t))$, kde

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) u_i(r),$$

množina $\{u_i(r)\}_{i=1}^{\infty}$ je vhodný systém funkcí a $c_i(t)$ jsou funkce ve tvaru:

$$c_i(t) = \frac{\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right) u_i(1) T}{\lambda_i^4 T^2 + 4\pi^2} \left(2\pi \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \lambda_i^2 T \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right). \tag{1.24}$$

Celá tato sekce byla pouze návod, jak najít řešení. Zbývá nám ale ukázat následující.

1. Existuje systém funkcí $\{u_i\}_{i=1}^{\infty} \subset V$, který je ortonormální vůči skalárnímu součinu (1.17) a splňuje rovnice (1.18) a (1.19).
2. Funkce u, definovaná jako

   $$u(t,r) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) u_i(t),$$

   kde c_i mají tvar (1.24), je definovaná smysluplně a řeší původní rovnici (1.9).

2. Existence a vlastnosti u_i

V předchozí části jsme předpokládali jisté vlastnosti systému $\{u_i(r)\}_{i=1}^{\infty}$, v této kapitole dokážeme, že takový systém existuje, a ukážeme jeho klíčové vlastnosti.

2.1 Vlastnosti funkcí u_i

Vlastnosti, které požadujeme, jsou:

$$-u_i'' - \frac{1}{r}u_i' = \lambda_i^2 u_i, \tag{2.1a}$$

$$u_i'(1) = (\lambda_i^2\beta - \alpha)u_i(1), \tag{2.1b}$$

$$u_i'(0) = 0, \tag{2.1c}$$

$$\langle u_i, u_j\rangle_V = \int_0^1 r u_i u_j \, dr + \beta(u_i u_j)(1) = \delta_{ij}. \tag{2.1d}$$

Nejprve se podíváme na funkce u_i, které řeší (2.1a) s podmínkou (2.1c). Ukážeme, že existuje jediná společná funkce B splňující $u_i(r) = a_i B(\lambda_i r)$ pro $a_i \in \mathbb{R}$. Na závěr této části ukážeme platnost (2.1d) pro dvojici rozdílných funkcí u_i a u_j za předpokladu platnosti zbylých tří vlastností. Vlastnosti (2.1b) se budeme hlouběji věnovat v část 2.2, kde také ukážeme volbu a_i pro úplnou platnost (2.1d).

Místo hledání funkcí u_i splňujících (2.1a), hledejme nyní funkci $B(r)$ splňující

$$-B'' - \frac{1}{r}B' = B. \tag{2.2}$$

Označme $B_{\lambda_i}(r) = B(\lambda_i r)$. Budeme-li mít takovou funkci B, pak $u_i = B_{\lambda_i}$ bude splňovat (2.1a). Tento fakt můžeme snadno ověřit z vlastnosti derivace složené funkce $B_{\lambda_i}'(r) = \lambda_i B'(\lambda_i r)$:

$$-B_{\lambda_i}''(r) - \frac{1}{r}B_{\lambda_i}'(r) = -\lambda_i^2 B''(\lambda_i r) - \frac{\lambda_i}{\lambda_i}\frac{\lambda_i}{r}B'(\lambda_i r) \overset{(2.2)}{=} \lambda_i^2 B(\lambda_i r) = \lambda_i^2 B_{\lambda_i}(r).$$

Předpokládejme, že je hledaná funkce $B(r)$ vyjádřena jako mocninná řada

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Nyní dosaďme toto vyjádření do rovnice (2.2):

$$-\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right)'' - \frac{1}{r}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right), \tag{2.3}$$

tato řada konverguje absolutně na svém poloměru konvergence ρ daným přepisem

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

s konvencí $\frac{1}{0} = \infty$ a $\frac{1}{\infty} = 0$ [3, Věta 219]. Nyní derivujme tuto řadu člen po členu, podle věty o derivaci mocninné řady [3, Věta 223] vznikne řada s poloměrem konvergence ρ, jejíž součet je na příslušném kruhu konvergence roven derivaci původní řady. Rovnost (2.3) tímto způsobem můžeme upravit na následující tvar:

$$-\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n r^{n-2} - \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \tag{2.4}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n r^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-2} = -\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} r^{n-2}. \tag{2.5}$$

Vlastnosti pro a_n pak dostaneme porovnáním koeficientů u členů se stejnými mocninami r v rovnici (2.5) :

$$n(n-1)a_n + n a_n = -a_{n-2},$$
$$a_n n(n-1+1) = -a_{n-2}$$

Dostaneme tak rekurentní vztah pro a_n. Položme první derivaci v bodě 0 podle podmínky (2.1c) rovnou 0, dostaneme $a_1 = 0$. První podmínku pro koeficienty můžeme přepsat do tvaru

$$a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}.$$

Všechny liché členy jsou proto nutně nulové, pro sudé členy pak platí

$$a_{2n} = \begin{cases} a_0, & n = 0, \\ \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} a_0, & n > 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Vidíme, že pro řešení rovnice (2.1a) na volbě a_0 nezáleží, zvolíme tedy $a_0 = 1$. Hledaná funkce B je ve tvaru tzv. nulté Besselovy funkce[1]:

$$B(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}. \tag{2.7}$$

Označme ρ poloměr konvergence této řady, dokážeme, že $\rho = \infty$, proto je B definovaná na $\mathbb{R}$ a podle věty o derivaci mocninné řady [3, Věta 223] existují derivace všech řádů na $\mathbb{R}$. Pro důkaz $\rho = 0$ ukážeme $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ s použitím odhadu $n! \leq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{2n}\left((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}\right)^2}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

Funkce B i její derivace jsou definované na $\mathbb{R}$ a spojité, B navíc splňuje (2.2) na $\mathbb{R}$, $B(0) = 1$ a $B'(0) = 0$.

Nyní mějme dvojici nenulových funkcí u_i, v_i řešící (2.1a), (2.1b) a (2.1c) pro stejné λ_i dále splňující $v_i(0) \neq 0$ a $u_i(0) \neq 0$. Označme nyní:

$$\bar{u}_i(r) = v_i(0)u_i(r), \quad \bar{v}_i(r) = u_i(0)v_i(r). \tag{2.8}$$

Funkce u_i a v_i jsou řešením systému lineárních diferenciálních rovnic, proto je i jejich libovolná lineární kombinace řešením. Speciálně $\bar{u}_i$ a $\bar{v}_i$ jsou řešení a dále $w = \bar{u}_i - \bar{v}_i$ je řešení. Pro další postup zformulujeme následující lemma.

[1]Funkce B je nultá Besselova funkce prvního druhu, v literatuře též označovaná jako J_0 [viz např. 10]

Lemma 1. *Nechť $w \in C^2[0,1]$ je řešení (2.1a) splňující $w(0) = w'(0) = 0$. Pak $w = 0$ na $[0,1]$.*

Důkaz. Vynásobíme rovnost (2.1a) funkcí w' a získáme:

$$-\frac{1}{r}(w')^2 = \lambda_i^2 ww' + w''w' = \frac{1}{2}\left(\lambda_i^2 w^2 + (w')^2\right)'.$$

Z nekladnosti levé strany je $\lambda_i^2 w^2 + (w')^2$ nerostoucí na intervalu $(0,1]$. Protože podle předpokladu $w \in C^2[0,1]$ a $w(0) = w'(0) = 0$, máme $\lambda_i^2 w^2 + (w')^2 \leq 0$ na $[0,1]$. Funkce $\lambda_i^2 w^2$ a $(w')^2$ jsou ale nezáporné, proto $\lambda_i^2 w^2 + (w')^2 = 0$ na $[0,1]$.

□

Z definice w dostaneme $w(0) = v_i(0)u_i(0) - u_i(0)v_i(0) = 0$, z rovnice (2.1c) dostaneme také $w'(0) = 0$. Podle Lemmatu 1 je nutně $w = 0$ na $[0,1]$. Pro původní funkce proto nutně platí:

$$v_i(r) = \frac{v_i(0)}{u_i(0)} u_i(r) \quad \forall r \in [0,1].$$

Máme-li tedy dvě funkce řešící soustavu rovnic (2.1a), (2.1b) a (2.1c) pro stejné λ_i, pak se tyto funkce liší pouze o násobek konstantou.

Mějme nyní u_i a u_j řešení rovnic (2.1a), (2.1b) a (2.1c) pro $\lambda_i \neq \lambda_j$. Odvodíme platnost ortogonality (2.1d) podle skalárního součinu $\langle \cdot,\cdot \rangle_V$. Funkce u_i a u_j splňují příslušné rovnice (2.1a):

$$\begin{aligned} -u_i'' - \frac{1}{r}u_i' &= \lambda_i^2 u_i, \\ -u_j'' - \frac{1}{r}u_j' &= \lambda_j^2 u_j. \end{aligned}$$

Vynásobíme první rovnici výrazem ru_j a druhou rovnici ru_i, upravíme do vhodného tvaru a následně odečteme druhou rovnici od první:

$$\begin{aligned} (ru_i')'u_j &= -r\lambda_i^2 u_i u_j, \\ (ru_j')'u_i' &= -r\lambda_j^2 u_j u_i, \\ (ru_i')'u_j - (ru_j')'u_i &= ru_j u_i(\lambda_j^2 - \lambda_i^2). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dále obě strany rovnice (2.9) integrujeme přes celý interval $(0,1)$ podle r a na levou stranu použijeme per partes:

$$\Big[ru_i'u_j - ru_j'u_i\Big]_0^1 - \int_0^1 ru_i'u_j' - ru_j'u_i'\,dr = \int_0^1 ru_j u_i(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)\,dr. \tag{2.10}$$

Ve výsledné rovnici (2.10) můžeme vidět, že na levé straně je integrál z nulové funkce, hodnota části přírůstku pro $r = 0$ je díky výskytu r v obou členech také nulová. Levá strana se proto výrazně zjednoduší, navíc můžeme použít (2.1b):

$$\begin{aligned} (\lambda_i^2\beta - \alpha)(u_i u_j)(1) - (\lambda_j^2\beta - \alpha)(u_j u_i)(1) &= (\lambda_j^2 - \lambda_i^2)\int_0^1 ru_j u_i\,dr, \\ (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)\beta(u_i u_j)(1) &= (\lambda_j^2 - \lambda_i^2)\int_0^1 ru_j u_i\,dr, \\ (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)\left(\int_0^1 ru_j u_i\,dr + \beta(u_i u_j)(1)\right) &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Máme tedy platnost ortogonality funkcí u_i a u_j (příslušné různým λ_i, λ_j) vzhledem ke zvolenému skalárnímu součinu $\langle \cdot,\cdot \rangle_V$.

2.2 Rozložení koeficientů λ_j a ortonormalita

V této části ukážeme, že λ_j tvoří rostoucí posloupnost. Uvažujme v_i řešení rovnice (2.1a) splňující $v_i'(0) = 0, v_i(0) = 1$. Hodnotu $v_i(0)$ můžeme volit libovolně, protože řešení můžeme vynásobit libovolnou konstantou (dle předchozích výsledků). Víme, že rovnici s touto počáteční podmínkou splňuje funkce $B(\lambda_i r)$. Jako v předchozí kapitole použijeme lemma 1 na funkci $w(r) = B(\lambda_i r) - v_i(r)$. Předpoklady lemmatu 1 jsou splněny:

$$w(0) = B(0) - v_i(0) = 1 - 1 = 0,$$
$$w'(0) = B'(0) - v_i'(0) = 0 - 0 = 0.$$

Při výpočtu jsme použili vlastnosti funkce B odvozené v předchozí kapitole. Závěr lemmatu pak platí a dostáváme $0 = w(r) = B(\lambda_i r) - v_i(r)$ na [0,1], neboli

$$v_i(r) = B(\lambda_i r) \quad \text{na } [0{,}1].$$

Po řešení dále požadujeme platnost rovnosti (2.1b). Jelikož známe tvar řešení $v_i(r) = B(\lambda_i r)$, dostaneme tak podmínky pro koeficienty λ_i:

$$B'(\lambda_i) = \left(\lambda_i \beta - \frac{\alpha}{\lambda_i}\right) B(\lambda_i). \tag{2.12}$$

Funkce v_i tedy mohou splňovat podmínky (2.1) pouze pro λ_i splňující (2.12). Takto zvolený systém je ortogonální vůči skalárnímu součinu $\langle \cdot,\cdot \rangle_V$ (podle výsledku (2.11) z předchozí kapitoly), ortonormalitu dostaneme normalizací funkcí $v_i(r) = B(\lambda_i r)$ v normě $\| \cdot \|_V$ generované skalárním součinem $\langle \cdot,\cdot \rangle_V$.

Označme:

$$a_i^2 = \|v_i\|_V^2 = \int_0^1 r v_i^2 \, dr + \beta (v_i^2)(1).$$

Pak funkce $\frac{1}{a_i} v_i$ tvoří ortonormální systém, položme proto $u_i(r) = \frac{v_i(r)}{a_i} = \frac{B(\lambda_i r)}{a_i}$.

Než se však budeme hlouběji věnovat rozložení koeficientů λ_i, všimneme si, že $\lambda_i = 0$ rovnici (2.12) neřeší. Dále díky vlastnosti, že všechny členy s lichou mocninou v (2.7) jsou nulové, je funkce B sudá. Její derivace na levé straně rovnice (2.12) (pokud výrazy v rovnici chápeme jako funkce argumentu λ_i) je proto lichá funkce, na pravé straně je součin liché a sudé funkce, tedy lichá. Splňuje-li $\lambda_i \in \mathbb{R}$ rovnici (2.12), splňuje ji také $-\lambda_i$. Ze sudosti funkce B však λ_i a $-\lambda_i$ definují stejnou funkci u_i, omezíme se proto dále pouze na kladné koeficienty λ_i.

Nyní se podívejme na rozložení koeficientů λ_i splňujících rovnost (2.12). Tyto koeficienty nespočítáme explicitně, ale můžeme dokázat, že v pravidelně rozmístěných intervalech je vždy právě jeden koeficient. Tento fakt zformulujeme jako větu:

Věta 2. *Existuje $r_0 \in (0,\infty)$ takové, že:*

(i) Na $(0,r_0]$ existuje pouze konečně mnoho λ_i řešících rovnici (2.12).

(ii) Na $[r_0,\infty)$ je mezi každými dvěma nulovými body funkce B právě jedno číslo λ_i, které řeší rovnici (2.12).

Speciálně $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost reálných čísel splňující:

(A) $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = \infty$,

(B) $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\lambda_i}{i\pi} = 1$.

Pro důkaz této věty budeme potřebovat následující lemmata:

Lemma 3. *Nechť $a > 0$ je nulový bod funkce B, pak $B'(a) \neq 0$. Speciálně $B(r) \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí bodu a.*

Důkaz. Sporem nechť $B(a) = B'(a) = 0$. Pak podobně jako v důkazu lemmatu 1 vynásobme rovnici (2.2) funkcí B':

$$-\frac{1}{r}(B')^2 = BB' + B''B' = \frac{1}{2}\left(B^2 + (B')^2\right)'.$$

Tedy $B^2 + (B')^2$ je nerostoucí kladná funkce na $(0,\infty)$, speciálně $B = 0$ na $[a,\infty)$. Tento fakt je ve sporu s větou 9 o kořenech mocninné řady, podle které nabývá mocninná řada nulové hodnoty na intervalu $[0,a + 1]$ pouze v konečně mnoha bodech.

Druhou část již dostaneme snadno, nechť sporem pro každé prstencové okolí bodu a existuje bod, na kterém je funkce nulová. Pak ale z okolí o velikostech $1/n$ vybrat posloupnost bodů x_n, na kterých je B nulová a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Pomocí definice limity a Heineho věty [5, věta 3.2a] dostaneme:

$$\lim_{x\to a} \frac{B(x) - B(a)}{x - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{B(x_n) - B(a)}{x_n - a} = 0,$$

což je spor s předpokladem.

□

Lemma 4. *Nechť $a,b > 0$ jsou sousední nulové body funkce B a $B > 0$ na (a,b), pak existuje právě jeden bod $c \in (a,b)$, že B nabývá svého ostrého lokálního maxima na B. Funkce B je navíc ostře monotónní na (a,c) a (c,b).*

Důkaz. Důkaz je založen na platnosti rovnice (2.2) pro funkci B. Nejprve předpokládejme, že pro $d \in (a,b)$ platí $B'(d) = 0$, pak z platnosti (2.2) dostaneme

$$B''(d) = -\frac{1}{d}B'(d) - B(d) = -B(d) < 0.$$

Funkce B je proto konkávní v bodě d a proto d je ostré lokální maximum.

Nechť nyní existují body c_1 a c_2 body lokálního maxima v intervalu (a,b). Pak ale funkce B musí na $[c_1,c_2]$ nabývat svého minima, speciálně, jelikož jsou body c_1 a c_2 lokální maxima, nenabývá se minima na okrajích. Existuje tedy lokální minimum $d \in (c_1,c_2)$ funkce B, platí proto $B'(d) = 0$, což je ale spor s tím, že d je ostré lokální maximum.

Monotonii na (a,c) a (c,b) dostaneme snadno z nenulovosti B' na těchto intervalech, ze spojitosti musí být funkce B' na celém intervalu kladná, nebo na celém intervalu záporná.

□

Poznámka. Můžeme vidět, že předchozí důkaz funguje i pro funkci $-B$ na intervalech, kde je B záporná.

Důkaz. (Věta 2)

Zvolme libovolně $r_0 > \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, platí tedy $\forall r \in \mathbb{R}$, $r > r_0 : r^2\beta - \alpha > 0$. Ukážeme, že na $[0,r_0]$ existuje pouze konečně mnoho nulových bodů. Použijeme větu 9, podle které existuje pro mocninnou řadu s poloměrem konvergence $\rho = \infty$ konečně mnoho nulových bodů na intervalu $[0,r_0]$. Označme

$$
\begin{aligned}
g(r) &= \frac{1}{r}(r^2\beta - \alpha)B(r) \\
f(r) &= g(r) - B'(r).
\end{aligned}
$$

Všimneme si, že funkce

$$
h(r) = \begin{cases} rf(r) & \text{pro } r \neq 0, \\ \alpha & \text{pro } r = 0. \end{cases}
$$

je spojitá a má stejný počet nulových bodů, jako f. Nyní stačí ukázat, že h lze vyjádřit jako mocninnou řadu. V předpisu funkce h vyjádříme funkce B a B' mocninnou řadou

$$
h(r) = -r\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}r^n + (r^2\beta - \alpha)\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n,
$$

kde a_n jsou koeficienty ve tvaru (2.7), speciálně liché členy jsou nulové. Pravou stranu nyní vyjádříme jako jednu sumu (pouze první člen napíšeme zvlášť):

$$
h(r) = (\beta a_{-2} - \alpha a_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(na_n + \beta a_{n-2} - \alpha a_n)\, r^n,
$$

kde dodefinujeme $a_{-2} = a_{-1} = 0$. Funkci h tedy lze zapsat jako mocninnou řadu. Poloměr konvergence je nutně $\rho = \infty$, protože levá strana je pro každé $r \geq 0$ definovaná, suma vpravo proto musí konvergovat. Koeficient konstantního členu je nenulový, předpoklady věty 9 jsou splněny.

Nakonec použijeme lemma 4, označme $a,b > r_0$ dvojici sousedních nulových bodů B a $c \in (a,b)$ lokální maximum funkce B. Bez újmy na obecnosti zde předpokládáme $B > 0$ na (a,b), v opačném případě lze přejít k $-B$. Spočteme derivaci funkce g:

$$
g'(r) = \left(\beta + \frac{\alpha}{r^2}\right)B(r) + \frac{1}{r}(r^2\beta - \alpha)B'(r). \tag{2.13}
$$

Předpokládáme $a > r_0$, pak je $r^2\beta - \alpha > 0$ na (a,b). Rovnost $B'(r) = g(r)$ nyní může nastat pouze na (a,c), kde jsou obě funkce kladné. Zároveň na pravé straně (2.13) jsou pouze kladná čísla, g je proto rostoucí. Nyní stačí ukázat, že B' je nerostoucí na (a,c). Použijeme rovnici (2.2):

$$
B''(r) = -\frac{1}{r}B'(r) - B(r).
$$

Pro $r \in (a,c)$ je pravá strana jistě záporná, B' je tedy klesající. Celkem se B' a g protnou v jednom bodě.

Pro důkaz limitních vlastností $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ použijeme znalost rozložení nulových bodů Besselovy funkce. Z [9][2] víme, že všechny nulové body funkce B leží v intervalech typu

$$\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, (m+1)\pi\right), m \in \mathbb{N}, \tag{2.14}$$

speciálně na každém takovém intervalu je právě jeden nulový bod. Označme i-tý kladný nulový bod B jako a_i a dále zvolme k tak, že λ_{k+i} leží mezi a_i a a_{i+1} pro $r > r_0$. Pak:

$$\lim_{i\to\infty} \lambda_{k+i} \geq \lim_{i\to\infty} a_m \geq \lim_{i\to\infty} \left(i + \frac{1}{2}\right)\pi = \infty,$$

čímž jsme dokázali první vlastnost posloupnosti $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, druhou vlastnost dostaneme analogickým výpočtem s použitím věty o třech limitách [2, věta 61]:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\lambda_{k+i}}{i\pi} \geq \lim_{i\to\infty} \frac{\left(i + \frac{1}{2}\right)\pi}{i\pi} = 1,$$
$$\lim_{i\to\infty} \frac{\lambda_{k+i}}{i\pi} \leq \lim_{i\to\infty} \frac{a_{m+1}}{i\pi} \leq \lim_{i\to\infty} \frac{(i+2)\pi}{i\pi} = 1.$$

□

[2] Článek [9] obsahuje pouze důkaz, že na intervalech (2.14) je vždy právě jeden kořen. Neexistence kořenů mimo tyto intervaly byla dokázána dříve, důkaz je např. zde [10, kapitola 15.2].

3. Konvergence řešení

V předchozích kapitolách jsme nalezli funkci ve tvaru $u(t,r) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t)u_i(t)$, budeme chtít ukázat, že takto definovaná řada konverguje stejnoměrně a splňuje původní rovnici. Než ovšem začneme s konvergencí, budeme potřebovat podrobnější pochopení chování funkcí u_i (resp. B).

3.1 Odhady a limitní chování Besselovy funkce

V této části se budeme zabývat chováním funkce B, zejména omezeností a limitami pro argument λ_i, kde i jde do nekonečna. Výsledky zformulujeme jako lemmata.

Následující lemma dává náhled na posloupnost $\{u_i(1)\}_{i=1}^{\infty}$.

Lemma 5. *Pro funkce u_i řešící rovnice* (2.1) *platí:*

$$|u_i(1)| = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} + \beta + \frac{1}{2}\left(\beta\lambda_i - \frac{\alpha}{\lambda_i}\right)^2}}.$$

$$|u_i'(1)| = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right)^2}{\frac{1}{2} + \beta + \frac{1}{2}\left(\beta\lambda_i - \frac{\alpha}{\lambda_i}\right)^2}}.$$

Speciálně

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|u_i(1)|}{\frac{\sqrt{2}}{\beta\lambda_i}} = 1$$

Důkaz. Víme, že funkce u_i speciálně splňují ortonormalitu vůči skalárnímu součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ (2.1d). S použitím integrace per partes a rovnosti (2.1a) pak můžeme upravovat:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^1 r u_i^2(r)\,dr + \beta(u_i^2)(1) \\
&= \int_0^1 (r^2)' \frac{u_i^2(r)}{2}\,dr + \beta(u_i^2)(1) \\
&\overset{\text{per partes}}{=} \frac{u_i^2(1)}{2} + \beta u_i^2(1) - \int_0^1 r^2 \left(\frac{u_i^2(r)}{2}\right)' dr \\
&= \left(\frac{1}{2} + \beta\right) u_i^2(1) - \int_0^1 r^2 u_i'(r) u_i(r)\,dr \\
&\overset{(2.1a)}{=} \left(\frac{1}{2} + \beta\right) u_i^2(1) + \frac{1}{\lambda_i^2}\int_0^1 r^2 u_i'(r)u_i''(r) + r(u_i'(r))^2\,dr \\
&= \left(\frac{1}{2} + \beta\right) u_i^2(1) + \frac{1}{\lambda_i^2}\int_0^1 \frac{r^2}{2}\left((u_i'(r))^2\right)' + r(u_i'(r))^2\,dr \\
&\overset{\text{per partes}}{=} \left(\frac{1}{2} + \beta\right) u_i^2(1) + \frac{1}{2\lambda_i^2}\left(u_i'(1)\right)^2 + \frac{1}{\lambda_i^2}\int_0^1 -r\left(u_i'(r)\right)^2 + r(u_i'(r))^2\,dr.
\end{aligned}$$

S použitím (2.1b) pak dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{1}{2}+\beta\right)u_i^2(1)+\frac{1}{2\lambda_i^2}\left(u_i'(1)\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}+\beta+\frac{(\lambda_i^2\beta-\alpha)^2}{2\lambda_i^2}\right)u_i^2(1). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Z toho již po odmocnění plyne první dokazovaná rovnost

$$|u_i(1)| = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\beta+\frac{1}{2}\left(\beta\lambda_i-\frac{\alpha}{\lambda_i}\right)^2}}.$$

Opětovnou aplikací rovnosti (2.1b) pak také

$$|u_i'(1)| = \lambda^2\sqrt{\frac{\left(\beta-\frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right)^2}{\frac{1}{2}+\beta+\frac{1}{2}\left(\beta\lambda_i-\frac{\alpha}{\lambda_i}\right)^2}}.$$

Nyní spočítáme limitu $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{|u_i(1)|}{\frac{\sqrt{2}}{\beta\lambda_i}}$, využijeme zde vlastnosti posloupnosti λ_i

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty}\frac{|u_i(1)|}{\frac{\sqrt{2}}{\beta\lambda_i}} &= \lim_{i\to\infty}\frac{\beta\lambda_i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+\beta+\frac{1}{2}\left(\beta\lambda_i-\frac{\alpha}{\lambda_i}\right)^2}} = \\ &= \lim_{i\to\infty}\frac{\beta\lambda_i}{\beta\lambda_i}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\beta^2\lambda_i^2}+\frac{2}{\beta\lambda_i^2}+\left(1-\frac{\alpha}{\beta\lambda_i^2}\right)^2}} = 1 \end{aligned}$$

□

Lemma 6. *Funkce B a B' jsou omezené na intervalu* $[0,\infty)$.

Důkaz. Použijeme stejný postup jako v důkazu lemmatu 3, vynásobíme rovnici (2.2) funkcí B':

$$-\frac{1}{r}(B')^2 = BB' + B''B' = \frac{1}{2}\left(B^2+(B')^2\right)'. \tag{3.2}$$

Vidíme tedy, že $B^2+(B')^2$ je nerostoucí funkce, speciálně $\forall t>0$ platí

$$B^2(t)+(B')^2(t) \le B^2(0)+(B')^2(0) = 1.$$

Z toho již plyne omezenost $|B(t)|\le 1$ a $|B'(t)|\le 1$ pro $t\ge 0$.

□

Lemma 7. *Mějme koeficienty $a_i^2 = \int_0^1 rB^2(\lambda_i r)\,dr + \beta(B^2)(\lambda_i)$, pak platí pro každé $i\in\mathbb{N}$:*

(i) $a_i^2 = B^2(\lambda_i)\left(\frac{1}{2} + \beta + \frac{1}{2}\left(\beta\lambda_i - \frac{\alpha}{\lambda_i}\right)^2\right)$

(ii) *Existuje konstanta* $C \in (0,1)$*, že pro každé* $i \in \mathbb{N}$ *platí* $a_i \geq \frac{C}{\lambda_i}$

(iii) *Existuje konstanta* $C \in (0,1)$*, že pro každé* $i \in \mathbb{N}$ *platí* $a_i \leq C$

(iv) *Pro každé* $r \in [0,1]$ *platí odhady*

$$|u_i(r)| \leq \frac{\sqrt{2}}{r}, \quad |u_i'(r)| \leq \frac{\sqrt{2}\lambda_i}{r}.$$

Speciálně pro $a > 0$ *a* $r \in [a,1]$ *můžeme na pravých stranách nahradit* r *za* a*.*

Důkaz. Část (i) je důsledkem identity pro $|u_i|$ z lemmatu 5. Po umocnění a dosazení $u_i^2(1) = \frac{B^2(\lambda_i)}{a_i^2}$ dostáváme požadovanou rovnost.

Nyní podobně jako v důkazu předchozího lemmatu použijeme rovnost (3.2) a odhad shora vycházející z nezápornosti výrazu B^2.

$$0 \overset{(3.2)}{=} \left(B^2 + (B')^2\right)' + \frac{2}{r}(B')^2 \leq \left(B^2 + (B')^2\right)' + \frac{2}{r}\left((B')^2 + B^2\right)$$
$$= \frac{1}{r^2}\left(r^2\left(B^2 + (B')^2\right)\right)'$$

Z nezápornosti derivace dostáváme, že funkce $r^2\left(B^2 + (B')^2\right)$ je neklesající. Speciálně pro $r \geq \frac{\lambda_1}{2} \overset{\text{věta 2}}{>} 0$ platí nerovnost:

$$r^2\left(B^2(r) + (B'(r))^2\right) \geq \lambda_1^2\left(B^2(\lambda_1) + (B'(\lambda_1))^2\right) = C^2.$$

Speciálně díky lemmatu 3 dostaneme $C \in (0,\infty)$. Tuto nerovnost můžeme zapsat následujícím způsobem:

$$B^2(r) + (B'(r))^2 \geq \frac{C^2}{r^2}. \tag{3.3}$$

Část (ii) pak dostaneme pomocí nerovnosti (3.3), kterou použijeme na výraz vzniklý z rovnosti (3.1) po dosazení $u_i(r) = \frac{B(\lambda_i r)}{a_i}$ a $u_i'(r) = \frac{\lambda_i B(\lambda_i r)}{a_i}$:

$$a_i^2 \overset{(3.1)}{=} \left(\frac{1}{2} + \beta\right) B^2(\lambda_i) + \frac{1}{2}\left(B'(\lambda_i)\right)^2$$
$$= \beta B^2(\lambda_i) + \frac{1}{2}\left(B^2(\lambda_i) + (B'(\lambda_i))^2\right) \overset{(3.3)}{\geq} 0 + \frac{C^2}{\lambda_i^2}.$$

Na obou stranách nerovnosti jsou nezáporná čísla, můžeme proto obě strany odmocnit.

Část (iii) dostaneme snadno z definice a_i odhadem $B \leq 1$:

$$a_i^2 = \int_0^1 rB^2(\lambda_i r)\,dr + \beta(B^2)(\lambda_i) \leq 1 + \beta$$

Nakonec z vlastnosti, že je výraz $r^2\left(B^2(r) + (B'(r))^2\right)$ nerostoucí, dostaneme speciálně pro $r \in [0,1]$ odhad

$$\lambda_i^2 r^2\left(B^2(\lambda_i r) + (B'(\lambda_i r))^2\right) \leq \lambda_i^2\left(B^2(\lambda_i) + (B'(\lambda_i))^2\right) \leq 2\lambda_i^2 a_i^2.$$

Ze vzniklé nerovnosti máme

$$|B(\lambda_i r)| \leq \frac{\sqrt{2}a_i}{r}, \quad |B'(\lambda_i r)| \leq \frac{\sqrt{2}a_i}{r}.$$

Nechť $a \in (0,1)$, pak na každém intervalu ve tvaru $[a,1]$ dostaneme odhad:

$$|u_i(r)| = \frac{|B(\lambda_i r)|}{a_i} \leq \frac{\sqrt{2}}{a}, \quad |u_i'(r)| = \frac{\lambda_i |B'(\lambda_i r)|}{a_i} \leq \frac{\sqrt{2}\lambda_i}{a}.$$

□

3.2 Konvergence v $C[0,1]$

Hledáme řešení ve tvaru $u(t,r) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) u_i(t)$, v předchozích kapitolách jsme ukázali tvar funkcí c_i a u_i. Nyní můžeme explicitně napsat tvar funkce u. V této kapitole se budeme zabývat stejnoměrnou konvergencí (konvergencí ve smyslu $C[0,1]$) sumy definující u a jejích derivací. Na konci této části ovšem ukážeme, že suma druhých derivací nekonverguje ve smyslu spojitých funkcí.

Použijeme (1.24) a výsledky předchozí kapitoly, dostaneme tvar

$$u(t,r) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(r,t), \tag{3.4}$$

kde funkce f_i jsou ve tvaru

$$f_i(r,t) = \frac{\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right) u_i(1) T}{\lambda_i^4 T^2 + 4\pi^2} \left(2\pi \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \lambda_i^2 T \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) u_i(r).$$

Nyní ukážeme, že je tato řada stejnoměrně konvergentní na $\{(r,t) \in [0,1] \times [0,T]\}$. Budeme vyšetřovat řadu $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i$, kde $\sigma_i = \sup\limits_{(r,t)\in(0,1)\times(0,T)} |f_i(r,t)|$. Jestliže tato řada suprem konverguje, pak (3.4) konverguje stejnoměrně podle Weierstrassova kritéria (věta 13). Na tuto řadu budeme chtít použít srovnávací kritérium. Prvních konečně mnoho členů můžeme zanedbat, předpokládejme tedy $\lambda_i > r_0$, kde r_0 je z věty 2. Odhadneme nejprve $|f_i|$ pomocí trojúhelníkové nerovnosti a omezenosti goniometrických funkcí:

$$|f_i(r,t)| \leq \frac{\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right) |u_i(1)| T}{\lambda_i^4 T^2 + 4\pi^2} \left(2\pi + \lambda_i^2 T\right) \frac{|B(\lambda_i r)|}{a_i}.$$

Dále použijeme omezenost funkce B podle lemmatu 6 a odhad (ii) z lemmatu 7:

$$|f_i(r,t)| \leq \frac{\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right) |u_i(1)| T}{\lambda_i^4 T^2 + 4\pi^2} \left(2\pi + \lambda_i^2 T\right) \frac{\lambda_i}{C}. \tag{3.5}$$

Pravá strana nerovnosti již nezávisí na t ani na r, proto tento odhad platí i pro suprema:

$$\sigma_i \leq \frac{\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right) |u_i(1)| T}{\lambda_i^4 T^2 + 4\pi^2} \left(2\pi + \lambda_i^2 T\right) \frac{\lambda_i}{C}.$$

Pomocí limitního srovnávacího kritéria můžeme nahradit výraz $|u_i(1)|$ podle lemmatu 5. Zjednodušili jsme problém na vyšetřování konvergence řady

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right)\sqrt{2}T}{\beta\lambda_i\left(\lambda_i^4 T^2 + 4\pi^2\right)}\left(2\pi + \lambda_i^2 T\right)\frac{\lambda_i}{C}.$$

Nyní použijeme limitní srovnávací kritérium s řadou

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}. \tag{3.6}$$

Pro platnost limitního srovnávacího kritéria ověříme, že následující limita je kladná vlastní.

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\frac{\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right)\sqrt{2}T}{\beta\lambda_i\left(\lambda_i^4T^2+4\pi^2\right)}\left(2\pi + \lambda_i^2 T\right)\frac{\lambda_i}{C}}{\frac{1}{\lambda_i^2}} = \lim_{i\to\infty} \frac{\lambda_i^5}{\lambda_i^5}\frac{\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right)\sqrt{2}T}{\beta\left(T^2 + \frac{4\pi^2}{\lambda_i^4}\right)}\left(\frac{2\pi}{\lambda_i^2} + T\right)\frac{1}{C} = \frac{\sqrt{2}}{C}.$$

Při výpočtu jsme využili vlastnost (A) z věty 2, podle vlastnosti (B) z téže věty pak máme konvergenci řady (3.6). Díky použitým srovnávacím a limitním srovnávacím kritériím máme konvergenci řady $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i$ a tedy stejnoměrnou konvergenci řady (3.4).

Nyní chceme ukázat, že můžeme prohodit sumu a derivaci na intervalu (0,1) podle věty 10. Začneme s derivací $\partial_t u$, body (i) a (ii) věty 10 jsou splněny, stačí pouze ukázat stejnoměrnou konvergenci derivací. Derivujme funkce f_i podle t:

$$\partial_t f_i(r,t) = \frac{2\pi}{T}\frac{\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right)u_i(1)T}{\lambda_i^4 T^2 + 4\pi^2}\left(2\pi\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \lambda_i^2 T\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)\frac{B(\lambda_i r)}{a_i}.$$

Použijeme Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence, kde supremum derivace $\partial_t f_i$ můžeme odhadnout stejným způsobem jako v (3.5) a dostaneme

$$\sup_{(r,t)\in(0,1)\times(0,T)} |\partial_t f_n(r,t)| \leq \frac{2\pi}{T}\sigma_i.$$

Již víme, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i$ konverguje, řada $\sum_{i=1}^{\infty} \partial_t f_n$ je stejnoměrně konvergentní a podle věty 10 můžeme prohodit řadu a parciální derivaci.

Dále ukážeme, že můžeme prohodit řadu a derivaci podle r, stejně jako v případe derivace podle t jsou splněny body (i) a (ii) věty 10. Stačí nám opět ukázat stejnoměrnou konvergenci řada parciálních derivací $\sum_{i=1}^{\infty} \partial_r f$. Zderivujeme tedy funkci f_i podle proměnné r:

$$\partial_r f_i(t,r) = \frac{\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right)u_i(1)T}{\lambda_i^4 T^2 + 4\pi^2}\left(2\pi\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \lambda_i^2 T\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)u_i'(r). \tag{3.7}$$

Tentokrát ovšem nebudeme větu 10 používat na celý interval (0,1), ale na interval $(a,1)$, kde $a \in (0,1)$. Pokud můžeme prohodit derivaci a řadu pro libovolné takové a, je to možné i na celém intervalu (0,1). Opět použijeme Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence, odhadneme supremum funkce $|\partial_r f_i|$. Opět předpokládáme $\lambda_i > r_0$ a využijeme podobné odhady jako v (3.5), ovšem na odhad $|u_i'|$ nyní použijeme (iv) z lemmatu 7:

$$\sup_{(r,t)\in(a,1)\times[0,T])} |\partial_r f_n(r,t)| \leq \frac{\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right)|u_i(1)|T}{\lambda_i^4 T^2 + 4\pi^2}\left(2\pi + \lambda_i^2 T\right)\frac{\sqrt{2}\lambda_i}{a}. \tag{3.8}$$

Vidíme, že jsme dostali odhad stejný, jako (3.5), až na násobek konstantou, podle předchozích poznatků tato řada stejnoměrně konverguje na intervalu $(a,1)$. Speciálně můžeme ukázat konvergenci $r\partial_r u$ na celém intervalu $[0,1]$ za použití odhadu (iv) z lemmatu 7. V takovém případě dostaneme místo nerovnosti (3.8) následující nerovnost

$$\sup_{(r,t)\in(0,1)\times[0,T]} |r\partial_r f_n(r,t)| \leq \frac{\left(\beta - \frac{\alpha}{\lambda_i^2}\right)|u_i(1)|T}{\lambda_i^4 T^2 + 4\pi^2}\left(2\pi + \lambda_i^2 T\right)\sqrt{2}\lambda_i, \tag{3.9}$$

která nám dává stejnoměrnou konvergenci na celém intervalu.

Nakonec ukážeme, že pokud je u řešení, pak druhá derivace podle r nekonverguje ve smyslu spojitých funkcí (a nemůžeme tedy ani druhou derivaci zaměnit za sumu). Předpokládejme pro spor stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{i=1}^{\infty} \partial_{rr} f_i$. Převedením původní rovnice do polárních souřadnic máme rovnici pro funkci u:

$$\partial_t u - \partial_{rr} u - \frac{1}{r}\partial_r u = -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \tag{3.10}$$

Doplněním $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ pak dostaneme

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i' u_i - c_i u_i'' - \frac{1}{r} c_i u' = -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \tag{3.11}$$

Nyní použijeme rovnost (2.1a):

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i' u_i + \lambda_i^2 c_i u_i = -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \tag{3.12}$$

a fakt, že c_i z definice splňují rovnici (1.22):

$$\sum_{i=1}^{\infty} -b_j \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) u_i = -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \tag{3.13}$$

kde $b_j = \int_0^1 r u_j$ a levá strana je spojitá, protože levá strana (3.11) je stejnoměrně konvergentní. Řešení u ale musí splňovat také okrajové podmínky pro $r = 1$

$$\beta\partial_t u(t,1) + \alpha u(t,1) + u'(t,1) = 0.$$

Dosazením tvaru řešení dostaneme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta c_i' u_i(1) + \alpha c_i u_i(1) + c_i u_i'(1) = 0.$$

Dále použijeme postupně rovnost (2.1b) a vlastnosti c_i (1.22)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\beta(c_i'+\lambda_i^2 c_i)+\alpha c_i-\alpha c_i\Big)\,u_i(1)=0,$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}-b_i\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)u_i(1)=0.$$

Složením předchozích dvou závěrů dostaneme podmínku

$$\sum_{i=1}^{\infty}b_j u_i=\begin{cases}1 & \text{na } (0{,}1),\\ 0 & \text{pro } r=1.\end{cases}\tag{3.14}$$

Tato podmínka však nemůže být pro spojitou funkci splněna a tedy nemůžeme prohodit řadu a druhou derivaci.

3.3 Konvergence v $L^2(0{,}1)$

Jelikož nelze ukázat konvergenci druhé derivace nalezené funkce u ve smyslu spojitých funkcí derivací člen po členu, dokážeme korektnost u jiným způsobem. V této části ukážeme, že u splňuje integrální formulaci původního problému a zároveň má dostatečnou hladkost, díky čemuž bude řešit i diferenciální formulaci původního problému. Pro přehlednost budeme v této kapitole používat značení $u'(t,r)=\partial_r u(t,r)$. Označme dále částečné součty nalezené funkce

$$u^n(t,r)=\sum_{i=1}^{n}c_i(t)u_i(r).$$

Nejprve ukážeme, že pro každé $j=1,2,\ldots,n$ funkce u^n splňuje rovnost (1.15), tedy platí

$$\begin{aligned}\int_0^1 r\partial_t u^n u_j\,dr+\beta(\partial_t u^n u_j)(t,1)+\int_0^1 r(u^n)'u_j'\,dr+\alpha(u^n u_j)(t,1)=\\ =-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\int_0^1 ru_j\,dr.\end{aligned}\tag{3.15}$$

S použitím definice u^n, linearity integrálu a (1.20) dostaneme tvar

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}c_i'\left(\int_0^1 ru_iu_j\,dr+\beta(u_iu_j)(1)\right)+c_i\lambda_i^2\left(\int_0^1 ru_iu_j\,dr+\beta(u_iu_j)(1)\right)=\\ =-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\int_0^1 ru_jdr.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Z ortonormality funkcí u_i (2.1d) pak

$$c_j'+c_j\lambda_j^2=-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\int_0^1 ru_jdr,$$

což je platná rovnost z volby funkci $c(t)$. Z ekvivalence použitých úprav jsme dokázali platnost (3.15). Nyní zafixujeme j a použijeme na (3.15) limitní přechod $\lim\limits_{n\to\infty}$.

V předchozí kapitole jsme ukázali, že $r\partial_t u^n$ a $r(u^n)'$ konverguje stejnoměrně a u_j je omezená proto můžeme prohodit limitu a integrál podle věty 12:

$$\begin{aligned}\int_0^1 r\partial_t u u_j \, dr + \beta(\partial_t u u_j)(t,1) + \int_0^1 r u' u_j' \, dr + \alpha(u_j u)(t,1) = \\ = -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\int_0^1 r u_j \, dr.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Jelikož $j \in \mathbb{N}$ mohlo být voleno libovolně, dostali jsme platnost integrální formulace původního problému pro každé u_j.

Nyní ukážeme, že u je řešení původního problému. Pro $n \in \mathbb{N}$ fixní vynásobíme rovnost (3.15) postupně funkcemi c_j pro $j = 1,...n$ a vzniklé rovnosti sečteme. Z linearity integrálů a definice u^n dostaneme pro libovolné $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 r\left((u^n)'\right)^2 \, dr = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\int_0^1 r u^n \, dr - \left(\beta\partial_t u^n(t,1) + \alpha u^n(t,1)\right) u^n(t,1) \\ - \int_0^1 r\partial_t u^n u^n \, dr.\end{aligned}$$

Pravá strana je omezená pro každé $t \in [0,T]$ ze stejnoměrné konvergence funkcí u^n a $\partial_t u^n$. Existuje tedy $C > 0$ takové, že pro každé $t \in [0,T]$ a $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 r\left((u^n)'\right)^2 \, dr \leq C$$

Z Fatouova lemmatu [7, věta 8.15] díky platnosti $\lim_{n\to\infty}(u^n)' = u'$ pro $r \in (0,1)$ pak získáme

$$\int_0^1 r\left(u'\right)^2 \, dr \leq \liminf_{n\to\infty}\int_0^1 r\left((u^n)'\right)^2 \, dr \leq C. \tag{3.18}$$

Podle tvrzení 16 v příloze A.1 pro každé $\varphi \in C^1[0,1]$ existuje posloupnost reálných čísel $\{a_i\}_{i=1}^n$ taková, že pro funkce $\varphi^n = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ platí

$$\int_0^1 r\left(\varphi' - (\varphi^n)'\right)^2 \, dr + \left(\varphi(1) - \varphi^n(1)\right) + \int_0^1 r\left(\varphi^n - \varphi\right)^2 \, dr \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.19}$$

Chceme ukázat platnost rovnosti (1.15) pro funkci u a libovolné $\varphi \in C^1[0,1]$, zvolme proto takové φ pevné. Pak dle předchozího můžeme tuto funkci vyjádřit jako součet $\varphi = (\varphi - \varphi^n) + \sum_{i=1}^n a_i u_i$. Dosazením do (1.15) získáme

$$\begin{aligned}\int_0^1 r\partial_t u\varphi + r u'\varphi' + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) r\varphi \, dr + \left(\beta\partial_t u(t,1) + \alpha u(t,1)\right)\varphi(1) \\ = \int_0^1 r\partial_t u(\varphi - \varphi^n) + r u'(\varphi' - (\varphi^n)') + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) r(\varphi - \varphi^n) \, dr \\ + \left(\beta\partial_t u(t,1) + \alpha u(t,1)\right)(\varphi - \varphi^n)(1) \\ + \sum_{i=1}^n a_i\left(\int_0^1 r\partial_t u u_i' + r u' u_i + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) r u_i \, dr + \left(\beta\partial_t u(t,1) + \alpha u(t,1)\right) u_i(t,1)\right).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Z rovnosti (3.17) vidíme, že suma na pravé straně je nulová. Integrál na pravé straně konverguje k nule díky Hölderově nerovnosti [7, věta 10.3] a vlastnosti φ^n:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 r u'(\varphi' - (\varphi^n)')\right| &\leq \int_0^1 \sqrt{r}|u'|\sqrt{r}|\varphi' - (\varphi^n)'| \\ &\leq \left(\int_0^1 r(u')^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 r(\varphi' - (\varphi^n)')^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

První integrál na pravé straně je omezený podle (3.18) a druhý konverguje k nule podle (3.19). Analogicky pak z omezenosti $\partial_t u$ díky spojitosti na [0,1] a (3.19) dostaneme i ostatní členy z Hölderovy nerovnosti

$$\left|\int_0^1 r\partial_t u(\varphi - \varphi^n)\, dr\right| \leq \left(\int_0^1 r(\partial_t u)^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 r(\varphi - \varphi^n)^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\left|\int_0^1 r(\varphi - (\varphi^n))\, dr\right| \leq \left(\int_0^1 r\, dr\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 r(\varphi - (\varphi^n))^2\, dr\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dokázali jsme, že pro každé $t \in [0,T]$ platí následující rovnost

$$\int_0^1 r\partial_t u\varphi + ru'\varphi'\, dr + (\beta\partial_t u(t,1) + \alpha u(t,1))\,\varphi(t,1) = -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\int_0^1 r\varphi\, dr. \tag{3.21}$$

Zvolme nyní neklesající funkci $\varphi \in C^1(0,1)$, $\varepsilon > 0$ a $s > 0$ tak, že $s + \varepsilon < 1$ a funkce φ splňuje

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & \text{pro } r \in [0,s], \\ 1 & \text{pro } r \in [s+\varepsilon,1]. \end{cases}$$

Po dosazení takto zvolené funkce do rovnosti (3.21) dostaneme

$$\int_s^{s+\varepsilon} ru'\varphi'\, dr = -\int_s^1 r\partial_t u\varphi + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) r\varphi\, dr - (\beta\partial_t u(t,1) + \alpha u(t,1)) \tag{3.22}$$

Levou stranu můžeme rozložit na dva integrály následujícím způsobem

$$\int_s^{s+\varepsilon} ru'(r)\varphi'(r)\, dr = \int_s^{s+\varepsilon} (ru'(r) - su'(s))\varphi'(r)\, dr + \int_s^{s+\varepsilon} su'(s)\varphi'(r)\, dr.$$

Druhý integrál můžeme dále upravit:

$$su'(s)\int_s^{s+\varepsilon} \varphi'(r)\, dr = su'(s)\, [\varphi]_s^{s+\varepsilon} = su'(s)$$

Argument prvního integrálu pak můžeme odhadnout supremem a využít spojitosti $ru'(r)$:

$$\int_s^{s+\varepsilon} (ru'(r) - su'(s))\varphi'(r)\, dr \leq \sup_{r\in(s,s+\varepsilon)} |ru'(r) - su'(s)|\, [\varphi]_s^{s+\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Nechť $\varepsilon \to 0$, využijeme spojitost (a tedy omezenost) na intervalu [0,1] integrandů na pravé straně rovnice (3.22). Dostaneme

$$su'(t,s) = -\int_s^1 r\partial_t u + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) r\, dr - (\beta\partial_t u(t,1) + \alpha u(t,1)), \tag{3.23}$$

Vidíme, že pravá strana je spojitě diferencovatelná podle s, levá strana rovnice proto také musí být spojitě diferencovatelná. Derivací rovnice (3.23) podle s dostaneme platnost původní rovnice na (0,1):

$$\partial_t u - u'' - \frac{1}{r}u' = -\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \tag{3.24}$$

Konečně pro $s \to 1$ v rovnici (3.23) dostaneme ze spojitosti rovnost

$$u'(t,1) = -\beta\partial_t u(t,1) - \alpha u(t,1).$$

Máme tedy nabývání okrajové podmínky.

Dále analogickým způsobem zvolíme nerostoucí funkci $\varphi \in C^1(0,1)$, $\varepsilon > 0$ a $s > 0$ tak, že $s + \varepsilon < 1$ a funkce φ splňuje

$$\varphi(r) = \begin{cases} 1 & \text{pro } r \in [0,s], \\ 0 & \text{pro } r \in [s+\varepsilon,1]. \end{cases}$$

Stejným způsobem jako výše pak dostaneme

$$\begin{aligned} u'(t,s) &= -\frac{1}{s}\int_0^s r\left(\partial_t u + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) dr \\ |u'(t,s)| &\leq \frac{s^2}{s}\left(C+1\right). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Při úpravě jsme využili odhad $|\cos(r)| \leq 1$ a spojitost $\partial_t u$ na $[0,1]$, která implikuje omezenost nějakou konstantou C na tomto intervalu. Pro $s \to 0_+$ díky spojitosti pravé strany dostaneme $u'(t,0) = 0$. Nyní můžeme vyjádřit u'' pomocí rovnosti (3.25)

$$\begin{aligned} u''(t,0) &= \lim_{s\to 0} \frac{u'(t,s)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} -\frac{1}{s^2}\int_0^s r\left(\partial_t u - \partial_t u(t,0)\right) dt - \frac{\partial_t u(t,0) + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{s^2}\int_0^s r\,dr \\ &= \partial_t u(t,0) + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili podobný postup jako výše a následující vlastnost

$$\lim_{s\to 0}\left|\frac{1}{s^2}\int_0^s r\left(\partial_t u - \partial_t u(t,0)\right) dt\right| \leq \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2}s^2\left|\partial_t u(t,\xi) - \partial_t u(t,0)\right| dt,$$

kde $\xi \in [0,s]$ je číslo, kde $|\partial_t u(t,\xi) - \partial_t u(t,0)|$ nabývá maxima. Ze spojitosti $\partial_t u$ a věty o třech limitách pak dostaneme nulovost odhadované limity. Funkce u'' tedy existuje na $[0,1]$ a je zde spojitá.

4. Numerické vykreslení řešení

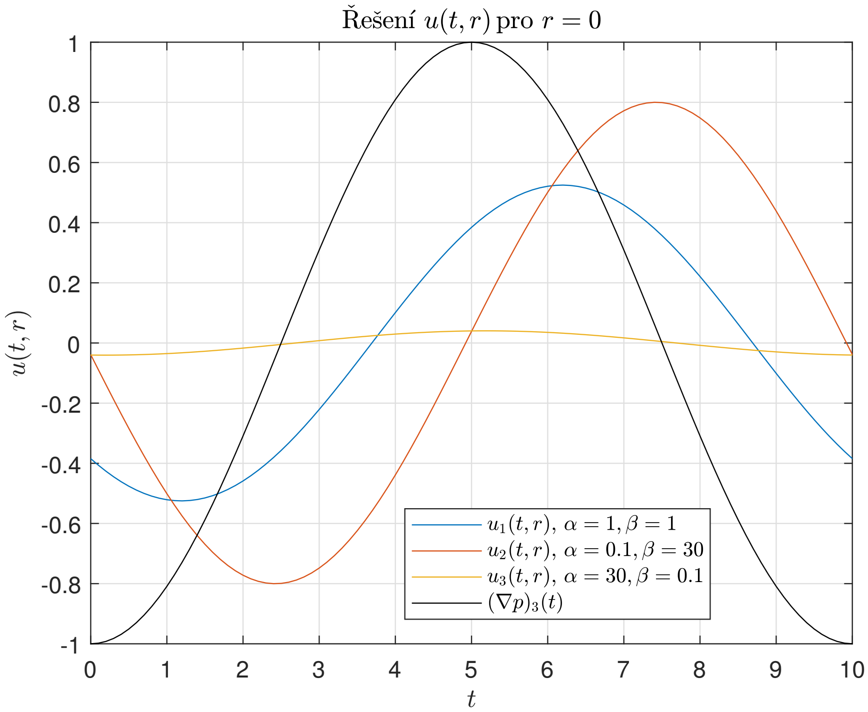
Již víme, že funkce u definovaná řadou (3.4) je řešením původní úlohy. V této kapitole ukážeme graf tohoto řešení vykreslený s použitím programovacího prostředí MATLAB[1]. Zejména chceme ukázat srovnání tvarů řešení pro různé hodnoty parametrů α a β.

Výpočet probíhá ve dvou krocích. Nejprve aproximujeme koeficienty λ_i jako řešení rovnice (2.12), v druhé části pak aproximujeme tvar řešení (3.4) pomocí součtu funkčních hodnot prvních konečně mnoha[2] členů sumy v pravidelně rozmístěných bodech.

Zvolme nyní $T = 10$, porovnáme trojici řešení pro různé parametry. Konkrétně

řešení	α	β	T
$u_1(t,)$	1	1	10
$u_2(t,r)$	0,1	30	10
$u_3(t,r)$	30	0,1	10

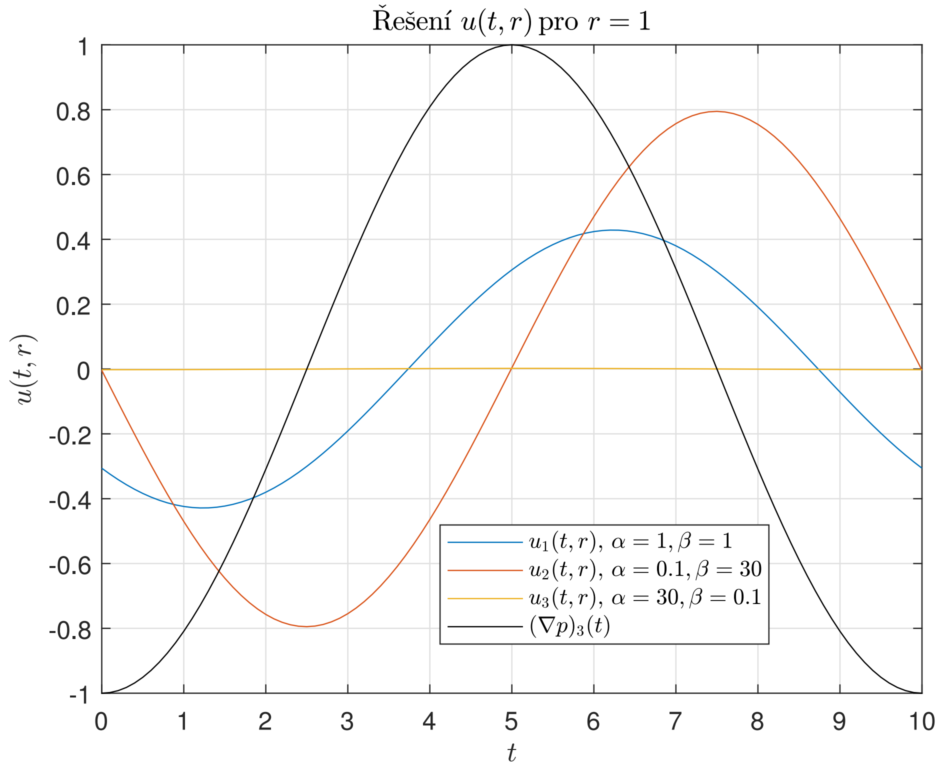
Na grafu 4.1 ukazujeme časový průběh řešení pro $r = 0$ (tedy uprostřed trubky), v grafu 4.2 pak pro $r = 1$ (na okraji trubky), oba grafy jsou pak doplněny o třetí složku gradientu tlaku (pravá strana rovnice (1.9)).



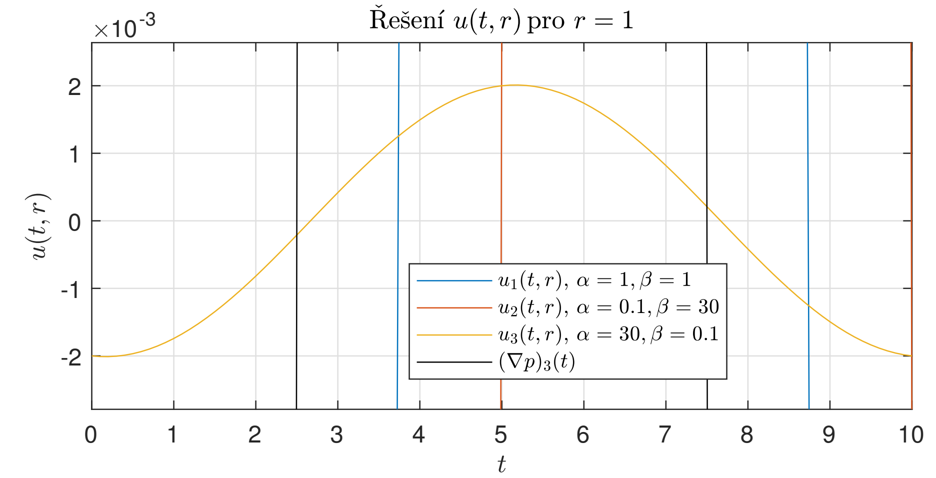
Obrázek 4.1: Srovnání rychlosti proudění uprostřed trubky pro různé volby parametrů.

Vidíme, že velikost rychlosti u_3 je obzvláště u hranice nižší než ve zbylých dvou případech, proto uvedeme situaci na grafu 4.2 znovu, ale zaměříme se tentokrát na funkci u_3. Na grafu 4.3 tedy můžeme vidět detailněji chování funkce u_3.

[1] Funkci pro vykreslování řešení lze najít jako přílohu této práce (soubor `SpoctiReseni.m`).
[2] Ve výpočtech této kapitoly bylo použito prvních 200 členů.



Obrázek 4.2: Srovnání rychlosti proudění na okraji trubky pro různé volby parametrů.



Obrázek 4.3: Srovnání rychlosti proudění na okraji trubky pro různé volby parametrů.

5. Použité věty

Věta 8. *(Gaussova o divergenci ve dvou dimenzích) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená otevřená neprázdná podmnožina a $\int_{\partial\Omega} 1\, dl < \infty$, $\partial\Omega$ je hladká křivka*[1]*. $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je třídy C^1 na otevřené množině obsahující $\bar{\Omega}$. Pak*

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, dl = \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, dxdy$$

Důkaz. Jde o důsledek obecné věty o divergenci [6, věta 15.5 a důsledek 15.1] □

Věta 9. *(Věta o kořenech mocninné řady [3, věta 224]) Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $\rho > 0$, nechť $R \in (0,\rho)$. Pak v kruhu $|r| < R$ leží nejvýše konečný počet kořenů*[2] *mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$.*

Věta 10. *(O záměně řady a parciální derivace) Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval $\sum_{i=i}^{\infty} f_i(x_1,x_2)$ je řada funkcí z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$ splňující*

(i) f_n má vlastní derivace podle x_1 na omezeném intervalu (a,b) pro každé $x_2 \in I$

(ii) pro každé fixní $x_2 \in I$ existuje $x_0 \in (a,b)$, že je číselná řada $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0,x_2)$ konvergentní

(iii) pro každé fixní $x_2 \in I$ řada $\sum_{i=1}^{\infty} f'_n(\cdot,x_2)$ stejnoměrně konverguje na (a,b)

Pak je pro každé fixní $x_2 \in I$ stejnoměrně konvergentní na (a,b) a platí

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} f\right)(x_1,x_2) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} f\right)(x_1,x_2)$$

Důkaz. Nechť je $x_2 \in I$ fixní, pak můžeme použít jednorozměrnou podobu této věty pro funkci $g_n(x) = f(x,x_2)$ [6, věta 12.10] □

Lemma 11. *Nechť $f \in C^k([0,1])$, $f(0) = 0$ $f^{(i)} = 0$ pro $i = 1,2,...,k-1$. Pak:*

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)}{h^k} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$$

Důkaz. Použijeme notaci malé o: Řekneme, že $g = o(h)$, pokud $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$.

Dále funkci f můžeme napsat jako:

$$f = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) + ... + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(h^k) = \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(h^k). \quad (5.1)$$

[1] Křivka je hladká, pokud je, jako zobrazení z $I \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$, třídy $C^1(I)$.

[2] Kořenem (v algebraickém smyslu) funkce f je myšleno číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že $f(a) = 0$.

Většina členů je nulová podle předpokladu nulových hodnot v bodě 0.

Nyní počítejme samotnou limitu

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(h)}{h^k} \overset{(5.1)}{=} \lim_{h \to 0+} \frac{\frac{h^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(h^k)}{h^k} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + 0.$$

□

Věta 12. *Nechť f_n jsou spojité na $[0,1]$ a $f_n \rightrightarrows$ na $[0,1]$. Pak je f integrovatelná a platí*

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

Důkaz. Ze stejnoměrné konvergence platí Bolzano-Cauchyova podmínka, speciálně existuje n_0 splňující:

$$\forall n \geq n_0 \forall x \in [0,1] : |f_{n_0}(x) - f_n(x)| < 1.$$

Zvolme pro $h(x) = \max\{|f_1(x)|, |f_2(x)|, \ldots, |f_{n-1}(x)|, |f_{n_0}(x)| + 1\}$ pro $x \in [0,1]$. Pak h je omezená na $[0,1]$, tedy integrovatelná majoranta. Podle Lebesgueovy věty [6, věta 13.27] platí závěr.

□

Věta 13. *(Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence) Nechť f_n je posloupnost funkcí na M. Označme dále $\sigma_n = \sup_{x \in M} f_n(x)$ a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ konverguje. Pak f_n konverguje stejnoměrně na M.*

Důkaz. Věta je speciálním případem věty [6, věta 12.4].

□

Závěr

Podařilo se nám najít explicitní vyjádření pole rychlosti $\boldsymbol{v}$. Nalezené řešení závisí pouze na čase a vzdálenosti od osy válce a konverguje jako řada funkcí v $C(0,1)$. Vyřešili jsme tedy problém nestlačitelného proudění, kterým se, díky nestandardním okrajovým podmínkám a složitější geometrii, pravděpodobně dosud nikdo nezabýval. Pokud čtenáře zajímá, jak vypadá řešení problému pro jednodušší geometrii (proudění mezi dvěma rovinami), je k nalezení v disertační práci [8].

Seznam použité literatury

[1] Savvas G. Hatzikiriakos. Wall slip of molten polymers. *Progress in Polymer Science*, 37(4):624 – 643, 2012. Topical Issue on Polymer Physics.

[2] Vojtěch Jarník. *Diferenciální počet I.* Matfyzpress, Praha, 1974.

[3] Vojtěch Jarník. *Diferenciální počet II.* Matfyzpress, Praha, 1984.

[4] Jiří Kopáček. *Matematická analýza pro fyziky (IV).* Matfyzpress, Praha, 2003.

[5] Jiří Kopáček. *Matematická analýza nejen pro fyziky (I).* Matfyzpress, Praha, 2004.

[6] Jiří Kopáček. *Matematická analýza nejen pro fyziky (III).* Matfyzpress, Praha, 2007.

[7] Jaroslav Lukeš; Jan Malý. *Measure and Integral.* Matfyzpress, 1995.

[8] Erika Maringová. *Mathematical analysis of models arising in continuum mechanics with implicitly given rheology and boundary conditions.* phdthesis, MFF UK, September 2019.

[9] Charles N. Moore. Note on the roots of bessel functions. *Annals of Mathematics*, 9(4):156–162, 1908.

[10] George Neville Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge university press, (2nd.ed.) edition, 1966.

A. Přílohy

A.1 Úplnost systému u_i

V této části dokážeme, ž $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je úplný ortogonální systém funkcí v prostoru $C^2(0,1]$ se skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (viz dále). Budeme používat následující značení

$$\langle u,v\rangle = \int_0^1 ruv\,dr + \beta(uv)(1), \tag{A.1}$$

$$(u,v) = \int_0^1 ru'v'\,dr + \alpha(u,v)(1), \tag{A.2}$$

dále budeme používat označení c pro obecnou konstantu (ne nutně vždy stejnou). Dále symbolem $C_0^k(a,b]$ budeme značit prostor funkcí $v \in C^k(a,b]$ takových, že nosič v je kompaktní podmnožina $(a,b]$ (analogicky pro ostatní typy intervalů). Nechť $M \subset \mathbb{R}$, pak symbolem $C^\infty(M)$ značíme funkce v takové, že $v \in C^k(M)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, funkce z prostoru $C^\infty(M)$ budeme nazývat hladké.

Nejprve dokážeme následující pomocné tvrzení.

Tvrzení 14. *Nechť $u \in C^2(0,1]$ je řešení*

$$-u'' - \frac{u'}{r} = \lambda^2 u, \tag{A.3}$$

takové, že

$$\int_0^1 r(u')^2\,dr < \infty, \tag{A.4}$$

a pro každé $\varphi \in C_0^1[0,1)$ platí

$$\int_0^1 ru'\varphi'\,dr = \int_0^1 ru\varphi\lambda^2\,dr. \tag{A.5}$$

Potom $u \in C^1[0,1]$ a $u'(0) = 0$, speciálně

$$u(r) = B(\lambda r)\frac{u(0)}{B(0)}.$$

Důkaz. Z rovnice víme, že $u \in C^k(0,1]$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ (lze dokázat indukčně postupným derivováním rovnice), problém může nastat pouze u 0.

Dále ukážeme platnost $|u(r)| \le c(1 + |\ln(r)|)$. Díky tomu, že $u \in C^1(0,1]$ můžeme napsat rovnost $u(r) = -\int_r^1 u'(s)\,ds + u(1)$. Nyní odhadneme pomocí vhodné konstanty $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |u(r)| &\le c(1 + \int_r^1 |u'(s)|\,ds) = c\left(1 + \int_r^1 \left((u'(s))^2 s\right)^{1/2} \frac{1}{s^{1/2}}\,ds\right) \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} c\left(1 + \left(\int_0^1 (u'(s))^2 s\,ds\right)^{1/2} \left(\int_r^1 \frac{1}{s}\,ds\right)^{1/2}\right) \\ &\le \tilde{c}\left(1 + |\ln(r)|^{1/2}\right) \\ &\le \bar{c}\,(1 + |\ln(r)|)^{1/2} \le \bar{c}\,(1 + |\ln(r)|)\,, \end{aligned} \tag{A.6}$$

kde jsme poslední nerovnosti získali z odhadu $1 + \sqrt{x} \leq 2\sqrt{1+x}$, pro $x \geq 0$, a $\sqrt{x} \leq x$, pro $x \geq 1$.

Dále vyjdeme z předpokladu (A.5):

$$\int_0^1 ru'\varphi'\,dr = \int_0^1 ru\varphi\lambda^2\,dr \quad \forall\varphi \in C_0^1(-1,1).$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je pevné, pak

$$\int_0^1 ru\varphi\lambda^2 = \int_0^1 ru'\varphi'\,dr = \int_0^\varepsilon ru'\varphi'\,dr + \int_\varepsilon^1 ru'\varphi'\,dr.$$

Nyní s použitím per partes, předpokladu (A.3) a vlastnosti $\varphi(1) = 0$:

$$\begin{aligned} &= \int_0^\varepsilon ru'\varphi'\,dr + [ru'\varphi]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 (ru')'\varphi\,dr \\ &= \int_0^\varepsilon ru'\varphi'\,dr - \varepsilon u'(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^1 r\lambda^2 u\varphi\,dr. \end{aligned}$$

Přepsáním celé rovnosti dostaneme:

$$\begin{aligned} \varepsilon u'(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) &= \int_0^\varepsilon ru'\varphi'\,dr + \int_\varepsilon^1 r\lambda^2 u\varphi\,dr - \int_0^1 ru\varphi\lambda^2\,dr \\ &= \int_0^\varepsilon ru'\varphi'\,dr - \int_0^\varepsilon r\lambda^2 u\varphi\,dr. \end{aligned}$$

S použitím trojúhelníkové a Hölderovy nerovnosti můžeme pravou stranu odhadnout:

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^\varepsilon ru'\varphi'\,dr - \int_0^\varepsilon ru\varphi\lambda\,dr\right| \leq \\ &\qquad \leq \left(\int_0^\varepsilon r(u')^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\varepsilon r(\varphi')^2\right)^{\frac{1}{2}} + \lambda^2 \left(\int_0^\varepsilon ru^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\varepsilon \varphi^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad \leq c\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

kde poslední nerovnost získáváme díky předpokladu (A.4) a faktu, že $\varphi \in C^1[0,1)$. Dokázali jsme tedy:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon u'(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) = 0.$$

Speciálně můžeme volit $\varphi = 1$ na intervalu $[0,\delta]$ pro $0 < \delta < 1$, čímž dostaneme:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon u'(\varepsilon) = 0. \tag{A.7}$$

Opět použijeme rovnici (A.3) ve tvaru $(-ru')' = \lambda^2 ru$ a integrujeme od ε ro r

$$ru'(r) - \varepsilon u'(\varepsilon) = -\int_\varepsilon^r \lambda^2 su(s)\,ds.$$

Nyní díky (A.7) pro $\varepsilon \to 0+$ a po vydělení rovnice r dostaneme:

$$u'(r) = -\frac{1}{r}\int_0^1 \lambda^2 su(s)\,ds.$$

Nyní vidíme, že $\ln(x)$ je záporné pro $x \in (0,1)$, $1 - \ln(x)$ je tedy kladná funkce a platí odhad:

$$1 - \ln(x) \leq e^{1-\ln(x)} = e\frac{1}{x}.$$

Použijeme dále odhad (A.6) a předchozí nerovnost, díky kterým dostaneme

$$|u'(r)| \leq \frac{c\lambda^2}{r} \int_0^1 s(1 + |\ln(s)|^{1/2})\, ds \leq \frac{c\lambda^2}{r} \int_0^1 s^{1/2}\, ds \leq c\lambda^2 r^{1/2}.$$

Díky předchozímu odhadu nyní dostaneme

$$\lim_{r\to 0+} u'(r) = 0.$$

A tedy $u \in C^1[0,1]$, $u'(0) = 0$ řeší $-u'' - \frac{u'}{r} = \lambda^2 u$. Z výsledků kapitoly 2.1 víme, že toto řešení je právě jedno, a to $\dfrac{B(\lambda r)}{B(0)} u(0)$.

□

Nyní formulujeme a dokážeme následující klíčové lemma, ze kterého pak již snadno dokážeme požadované.

Lemma 15. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a u je takové, že $\langle u,u\rangle = 1$ a $(u,u) < \infty$, splňující pro každé $i = 1,2,\dots,n$ rovnost $\langle u, u_i\rangle = 0$, kde funkce u_i jsou definované v kapitole 2.2. Pak $(u,u) \geq \lambda_{n+1}^2$.*

Důkaz. Ukážeme, že pokud pro $u \in C^1(0,1]$ platí $\langle u,u\rangle = 1$ a $(u,u) < \infty$, pak $(u,u) \geq \lambda_1^2$, zbytek důkazu pak doděláme indukcí.

Definujeme $\lambda^2 = \inf\limits_{\substack{u\in C^1(0,1]\\ \langle u,u\rangle=1}} (u,u)$. Cílem je ukázat, že $\lambda^2 = \lambda_1^2$.

Z vlastnosti infima vezměme minimalizující posloupnost $u^n \in C^1(0,1], n \in \mathbb{N}$ takovou, že $\langle u^n, u^n\rangle = 1$ a $\lambda^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (u^n, u^n)$. Tato posloupnost je minimalizující, proto existuje $c > 0$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\int_0^1 r\left((u^n)'\right)^2 dr + \alpha(u^n)^2(1) \leq c \quad a \quad \int_0^1 r(u^n)^2\, dr + \beta(u^n)^2(1) = 1. \tag{A.8}$$

Ukážeme dále, že $u^n \rightrightarrows u$ na $[\varepsilon,1]$ pro každé $\varepsilon \in (0,1)$ a že platí

$$\begin{aligned} \langle u,u\rangle &= 1,\\ (u,u) &\leq \lambda^2,\\ -u'' + \frac{u'}{r} &= \lambda^2 u \quad \text{na } (0,1). \end{aligned}$$

Stejnoměrnou konvergenci dokážeme pomocí Arzelovy–Ascoliho věty [3, věta 163]. Stejně jako v důkaz tvrzení 14 můžeme dokázat stejnou omezenost pomocí rozepsání $u^n = -\int_r^1 (u^n)'(s)ds + u^n(1)$. Dostaneme pak

$$|u^n(r)| \leq c + \int_r^1 |(u^n)'(s)|ds \leq c\left(1 + \ln(r)\right).$$

Stejnou spojitost pak dostaneme podobně:

$$|u^n(r) - u^n(s)| \leq \left|\int_r^s (u^n(t))'dt\right| \leq \int_r^s \left(t\left((u^n(t))'\right)^2\right)^{1/2} \frac{1}{t^{1/2}} dt \leq c\left|\ln\left(\frac{r}{s}\right)\right|.$$

Předpoklady Arzelovy–Ascoliho věty jsou splněny, proto pro u^m vybranou z u^n platí $u^m \rightrightarrows u$ na $[\varepsilon,1]$, používejme nyní značení u^n pro tuto vybranou posloupnost.

Stejnoměrnou konvergenci nyní použijeme v následujícím výpočtu. Dokážeme $\langle u,u\rangle = 1$, můžeme psát:

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty} \langle u^n,u^n\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 r(u^n)^2\,dr + \beta(u^n)^2(1) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^\varepsilon r(u^n)^2\,dr + \lim_{n\to\infty} \int_\varepsilon^1 r(u^n)^2\,dr + \lim_{n\to\infty} \beta(u^n)^2(1) \\
&\overset{\substack{\text{stejnoměrná}\\ \text{konvergence}\\ \text{na } (\varepsilon,1]}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^\varepsilon r(u^n)^2\,dr + \int_\varepsilon^1 r(u)^2\,dr + \beta(u)^2(1).
\end{aligned}$$

Nyní můžeme limitně přejít $\varepsilon \to 0$ a předchozí rovnost přepsat na

$$\beta u^2(1) + \int_0^1 ru^2\,dr = \beta u^2(1) + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 ru^2\,dr = 1 - \lim_{\varepsilon\to 0+} \lim_{n\to\infty} \int_0^\varepsilon r(u^n)^2\,dr.$$

Díky konvergenci integrálu přes interval $(0,1)$, podle (A.8), dostaneme horní odhad integrálu

$$\int_0^\varepsilon r(u^n)^2\,dr \le c\varepsilon.$$

Dokázali jsme tedy $\langle u,u\rangle = 1$.

Dále z definice λ víme, že pro každé $v \in C^1(0,1]$, $\langle v,v\rangle = 1$, $(v,v) < \infty$ platí $\lambda^2 \le (v,v)$. Z definice λ a volby u^n víme, že $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \ge n_0$:

$$\lambda^2 \le (u^n,u^n) \le \lambda^2 + \varepsilon \le (v,v) + \varepsilon.$$

Buď nyní $\varphi \in C_0^1(0,1)$ libovolná, volme $v = \dfrac{u^n + t\varphi}{\sqrt{\langle u^n + t\varphi, u^n + t\varphi\rangle}}$, po dosazení do předchozí nerovnosti $\forall n \ge n_0 \forall t > 0$ platí

$$\frac{(u^n + t\varphi, u^n + t\varphi)}{\langle u^n + t\varphi, u^n + t\varphi\rangle} - (u^n,u^n) \ge -\varepsilon,$$

dále pak z linearity skalárního součinu

$$\begin{aligned}
-\varepsilon &\le \frac{(u^n,u^n) + 2t(u^n,\varphi) + t^2(\varphi,\varphi)}{\langle u^n,u^n\rangle + 2t\langle u^n,\varphi\rangle + t^2\langle\varphi,\varphi\rangle} - (u^n,u^n) = \\
&= \frac{(u^n,u^n) + 2t(u^n,\varphi) + t^2(\varphi,\varphi)}{1 + 2t\langle u^n,\varphi\rangle + t^2\langle\varphi,\varphi\rangle} - (u^n,u^n)\frac{1 + 2t\langle u^n,\varphi\rangle + t^2\langle\varphi,\varphi\rangle}{1 + 2t\langle u^n,\varphi\rangle + t^2\langle\varphi,\varphi\rangle} = \\
&= -(u^n,u^n)\frac{2t\langle u^n,\varphi\rangle + t^2\langle\varphi,\varphi\rangle}{1 + 2t\langle u^n,\varphi\rangle + t^2\langle\varphi,\varphi\rangle} + t\left(\frac{2(u^n,\varphi) + t(\varphi,\varphi)}{1 + 2t\langle u^n,\varphi\rangle + t^2\langle\varphi,\varphi\rangle}\right).
\end{aligned}$$

Výslednou nerovnost můžeme přepsat na

$$-\frac{\varepsilon}{t} \le -(u^n,u^n)\frac{2\langle u^n,\varphi\rangle + t\langle\varphi,\varphi\rangle}{1 + 2t\langle u^n,\varphi\rangle + t^2\langle\varphi,\varphi\rangle} + \frac{2(u^n,\varphi) + t(\varphi,\varphi)}{1 + 2t\langle u^n,\varphi\rangle + t^2\langle\varphi,\varphi\rangle}.$$

Nyní zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně, k tomu zvolme $t = \sqrt{\varepsilon}$, nyní použijeme limitní přechod $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}$ a budeme volit $n_0 \to \infty$ a $n = n_0$. Levá strana předchozí nerovnice má v limitě hodnotu 0, na pravé straně z aritmetiky limit zbydou ve jmenovateli pouze konstanty. Dostaneme výslednou nerovnost kterou dále upravíme s použitím vlastností u^n

$$
\begin{aligned}
&0 \leq -\lim_{n\to\infty}(u^n,u^n)\lim_{n\to\infty}2\langle u^n,\varphi\rangle + \lim_{n\to\infty}2(u^n,\varphi),\\
&0 \leq -2\lambda^2\langle u,\varphi\rangle + \lim_{n\to\infty}2(u^n,\varphi).
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

Zvolme nyní speciálně funkci $\varphi \in C_0^2(0,1]$, pak výslednou nerovnost (A.9) můžeme napsat jako

$$
\begin{aligned}
\lambda^2\langle u,\varphi\rangle &\leq \lim_{n\to\infty}(u^n,\varphi) =\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 r(u^n)'\varphi'\,dr + \alpha u^n(1)\varphi(1)\right)\\
&\overset{\substack{\text{per partes}\\ \varphi=0 \text{ na } (0,\delta)}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(u^n(1)\varphi'(1) - \int_0^1 u^n(r\varphi')'\,dr + \alpha u^n(1)\varphi(1)\right)\\
&= u(1)\left(\varphi'(1)+\alpha\varphi(1)\right) - \int_0^1 u(r\varphi')'\,dr.
\end{aligned}
$$

Díky tomu, že místo φ můžeme dosadit $-\varphi$, dostaneme i opačnou nerovnost, proto po každé $\varphi \in C_0^2(0,1]$ platí:

$$
\lambda^2\langle u,\varphi\rangle = u(1)\left(\varphi'(1)+\alpha\varphi(1)\right) - \int_0^1 u(r\varphi')'\,dr. \tag{A.10}
$$

Nyní ukážeme, že z (A.10) plyne $u \in C^2(\varepsilon,1)$ pro každé $\varepsilon \in (0,1)$ a

$$
\begin{aligned}
-(u'r)' &= \lambda^2 ur \quad \text{na } (\varepsilon,1),\\
u'(1) &= (\beta\lambda^2-\alpha)u(1).
\end{aligned}
$$

Tento fakt dokazujeme, abychom mohli použít tvrzení (14) na funkci u.

Buď $\psi \geq 0$ hladká[1] funkce taková, že $\psi = 0$ na $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ a $\int_{-1}^1 \psi\,dr = 1$. Volme nyní $\varphi(r) = \frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{r-t}{\varepsilon}\right)$, kde t je libovolné takové, že $2\varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon$. Pak díky této volbě máme $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0$. Dosazením této funkce do (A.10) máme

$$
\lambda^2\int_0^1 ru(r)\frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{r-t}{\varepsilon}\right)dr = -\int_0^1 u(r)\partial_r\left(r\frac{1}{\varepsilon^2}\psi'\left(\frac{r-t}{\varepsilon}\right)\right)dr. \tag{A.11}
$$

Nyní ukážeme užitečnou vlastnost funkce ψ. Integrál s tvarem funkce ψ jako v (A.11) můžeme upravit pomocí substituce

$$
\int_0^1 \gamma(r)\frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{r-t}{\varepsilon}\right)dr = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\gamma(r)\frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{r-t}{\varepsilon}\right)dr = \int_{-1}^1\gamma(t+\varepsilon z)\psi(z)\,dz.
$$

Z toho již pro γ spojitou funkci na $(0,1]$ platí

$$
\int_0^1 \frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{r-t}{\varepsilon}\right)\gamma(r)\,dr \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} \gamma(t) \quad \text{na } (0,1).
$$

[1]Hladkou funkcí je myšlena funkce třídy $C^\infty(\mathbb{R})$.

Přepsáním rovnosti (A.11) dále dostaneme

$$\lambda^2 \int_0^1 ru(r)\frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{r-t}{\varepsilon^2}\right) dr = -\int_0^1 u(r)\left(\frac{\psi'\left(\frac{r-t}{\varepsilon^2}\right)}{\varepsilon} + r\frac{\psi''\left(\frac{r-t}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^3}\right) dr =$$
$$= \frac{d}{dt}\int_0^1 u(r)\frac{\psi\left(\frac{r-t}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} dr - \frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(r)r\frac{\psi\left(\frac{r-t}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} dr.$$

Nyní zvolme $a < b$ takové, že $a \geq 2\varepsilon$ a $b \leq 1-\varepsilon$. Předchozí rovnost nyní integrujeme přes (a,b) podle t:

$$\begin{aligned}\lambda^2 \int_a^b \int_0^1 ru(r)\frac{\psi\left(\frac{r-t}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} dr\, dt = \\ &= \int_0^1 u(r)\frac{\psi\left(\frac{r-b}{\varepsilon}\right) - \psi\left(\frac{r-a}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} dr \\ &- \frac{d}{db}\int_0^1 u(r)r\frac{\psi\left(\frac{r-b}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} dr + \frac{d}{da}\int_0^1 u(r)\frac{\psi\left(\frac{r-a}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} dr.\end{aligned}$$

Nyní rovnost integrujeme přes $(\delta,2\delta)$ podle a a přes $(2\delta,s)$ podle b.

$$\begin{aligned}\lambda^2 \int_{2\delta}^s \int_\delta^{2\delta} \int_a^b \int_0^1 ru(r)\frac{\psi\left(\frac{r-t}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} dr\, dt\, da\, db = \\ &= \int_{2\delta}^s \int_\delta^{2\delta} \int_0^1 u(r)\frac{\psi\left(\frac{r-b}{\varepsilon}\right) - \psi\left(\frac{r-a}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} dr\, da\, db \\ &- \delta \int_0^1 u(r)r\frac{\psi\left(\frac{r-s}{\varepsilon}\right) - \psi\left(\frac{r-2\delta}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} dr \\ &+ (s-2\delta)\int_0^1 u(r)\frac{\psi\left(\frac{r-2\delta}{\varepsilon}\right) - \psi\left(\frac{r-\delta}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} dr.\end{aligned}$$

Nyní můžeme limitně přejít $\varepsilon \to 0+$

$$\begin{aligned}\lambda^2 \int_{2\delta}^s \int_\delta^{2\delta} \int_a^b tu(t)\, dt\, da\, db = \\ &= \int_{2\delta}^s \int_\delta^{2\delta} \left(u(b) - u(a)\right)\, da\, db \\ &- \delta\left(su(s) - 2\delta u(2\delta)\right) + (s-2\delta)\left(u(2\delta) - u(\delta)\right).\end{aligned}$$

Díky této rovnosti máme $\forall s > 2\delta$ rovnost

$$\begin{aligned}su(s) = \frac{1}{\delta}\Bigg(&\int_{2\delta}^s \int_\delta^{2\delta} \left(u(b)-u(a)\right)\, da\, db - \lambda^2 \int_{2\delta}^s \int_\delta^{2\delta} \int_a^b tu(t)\, dt\, da\, db \\ &+ 2\delta u(2\delta) + (s-2\delta)\left(u(2\delta) - u(\delta)\right)\Bigg).\end{aligned}$$

Vidíme, že pravá strana rovnosti má spojitou derivaci podle s, proto i $u'(s)$ existuje a je spojitá. Speciálně můžeme derivovat celou rovnici podle s:

$$
\begin{aligned}
su'(s) + u(s) = \frac{1}{\delta}\Bigg(&\int_\delta^{2\delta} (u(s) - u(a))\ da - \lambda^2 \int_\delta^{2\delta} \int_a^s tu(t)\, dt\, da \\
&+ (u(2\delta) - u(\delta))\Bigg). \\
= u(s) - &\frac{1}{\delta}\int_\delta^{2\delta} u(a)\, da + \frac{1}{\delta}(u(2\delta) - u(\delta)) \\
&- \frac{\lambda^2}{\delta}\int_\delta^{\delta}\int_a^s tu(t)\, dt\, da.
\end{aligned}
$$

Přepsáním tedy dostaneme pro nějakou konstantu $C \in \mathbb{R}$ výraz

$$su'(s) = -\frac{\lambda^2}{\delta}\int_\delta^{\delta}\int_a^s tu(t)\, dt\, da + C. \tag{A.12}$$

Pravá strana je opět diferencovatelná integrály můžeme prohodit podle Fubiniho věty [6, věta 13.32], protože jde o integrál z omezené funkce přes omezenou množinu. Dále můžeme rovnici opět derivovat a dostaneme

$$(su'(s))' = -\frac{\lambda^2}{\delta}\int_\delta^{\delta} su(s)\, da = -\lambda^2 su(s). \tag{A.13}$$

Vraťme se nyní k (A.10):

$$\lambda^2\langle u,\varphi\rangle = u(1)(\varphi'(1) + \alpha\varphi(1)) - \int_0^1 u(r)\,(r\varphi'(r))'\ dr$$

Už víme, že $u \in C^1(0,1]$, pro $\varphi \in C_0^2(0,1]$ integrujeme pomocí per partes:

$$
\begin{aligned}
\lambda^2\langle u,\varphi\rangle &\overset{\text{per partes}}{=} u(1)(\varphi'(1) + \alpha\varphi(1)) + \int_0^1 ru'\varphi'\, dr - u(1)\varphi'(1) = \\
&= \alpha u(1)\varphi(1) + \int_0^1 ru'\varphi'\, dr \overset{\text{per partes}}{=} \alpha u(1)\varphi(1) - \int_0^1 (ru')'\varphi\, dr + u'(1)\varphi(1)
\end{aligned}
$$

Tuto rovnost můžeme nyní díky (A.13) a rozepsání levé strany z definice skalárního součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ napsat jako

$$\beta\varphi(1)u(1) = \varphi(1)(\alpha u(1) + u'(1)). \tag{A.14}$$

Pokud zvolíme $\varphi(1) = 1$, dostaneme, že u splňuje okrajovou podmínku v bodě 1.

Ještě ukážeme, že pro u platí (A.5) a (A.4) předpoklady tvrzení 14. Pak z tvrzení 14 dostaneme $u \in C^1[0,1]$, $u'(0) = 0$ a $u = \frac{B(\lambda r)}{B(0)}u(0)$, speciálně λ je vlastní číslo (tedy splňuje (2.12)), z definice je pak λ nejmenší vlastní číslo a tedy $\lambda^2 = \lambda_1^2$.

Dokážeme nyní, že $\int_0^1 r(u')^2\, dr < \infty$ (předpoklad (A.3)). Zvolme teď $\varepsilon > 0$

a $0 < h < \varepsilon$ libovolně, pak můžeme využít stejnoměrnou konvergenci u^n:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} r\left(\frac{u(r+h)-u(r)}{h}\right)^2 dr &= \lim_{n\to\infty}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} r\left(\frac{u^n(r+h)-u^n(r)}{h}\right)^2 dr\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} r\left(\frac{1}{h}\int_r^{r+h}(u^n)'(s)\,ds\right)^2 dr\\
&\overset{\text{Jensen}}{\leq} \limsup_{n\to\infty}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} r\frac{1}{h}\int_r^{r+h}\left((u^n)'(s)\right)^2 ds\,dr\\
&\overset{r\leq s}{\leq} \limsup_{n\to\infty}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{h}\int_r^{r+h} s\left((u^n)'(s)\right)^2 ds\,dr\\
&\overset{\text{substituce}}{=} \limsup_{n\to\infty}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{h}\int_0^{h}(r+s)\left((u^n)'(r+s)\right)^2 ds\,dr\\
&\overset{\substack{\text{Fubini}\\ h<\varepsilon}}{\leq} \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h\int_\varepsilon^1 r\left((u^n)'(r)\right)^2 dr\,ds.\end{aligned}$$

Funkce u^n jsou voleny tak, že $u^n \in C^1(0,1]$ (tedy $(u^n)'$ je omezená na $[\varepsilon,1]$ a má smysl použít Fubiniovu větu) a splňují (A.8). Celkem tedy dostaneme:

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} r(u'(r))^2\,dr \leq \limsup_{n\to\infty}\int_0^1 r\left((u^n)'(r)\right)^2 dr \leq C$$

Podle Leviho věty [7, věta 8.11.] pak po limitním přechodu $\varepsilon \to 0$ dostaneme:

$$\int_0^1 r\left(u'(r)\right)^2 dr < \infty.$$

Nyní dokážeme, že platí pro každou $\varphi \in C^1(0,1]$ (je-li totiž $\varphi \in C_0^1(-1,1)$, pak $\varphi|_{[0,1]} \in C^1(0,1]$) takovou, že $(\varphi,\varphi) < \infty$, platí

$$\lambda^2\langle u,\varphi\rangle = (u,\varphi),$$

z čehož již plyne splnění předpokladu (A.5). K tomu stačí díky (A.9) ukázat

$$\lim_{n\to\infty}(u^n,\varphi) = (u,\varphi).$$

Neboli, díky stejnoměrné konvergenci u^n, stačí pouze ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 r(u^n)'\varphi'\,dr = \int_0^1 ru'\varphi'\,dr.$$

Přepišme nyní tvar v limitě následujícím způsobem:

$$\int_0^1 r(u^n)'\varphi'\,dr = \int_0^\varepsilon r(u^n)'\varphi'\,dr + \int_\varepsilon^1 r(u^n)'\varphi_k'\,dr + \int_\varepsilon^1 r(u^n)'(\varphi-\varphi_k)'\,dr,$$

kde φ_k je hladká funkce. Dále můžeme předchozí rovnici upravit pomocí per partes:

$$\overset{\text{per partes}}{=} \underbrace{\int_0^\varepsilon r(u^n)'\varphi'\,dr}_{(A)} + \underbrace{\int_\varepsilon^1 r(u^n)'(\varphi-\varphi_k)'\,dr}_{(B)} \underbrace{- \int_\varepsilon^1 u^n(\varphi_k' r)'\,dr + \left[ru^n\varphi_k'\right]_\varepsilon^1}_{(C)}$$

Nyní postupně odhadneme všechny členy v rovnosti.

(A) S použitím Hölderovy nerovnosti, omezenosti (u^n,u^n) (A.8) a (φ,φ):

$$\left|\int_0^\varepsilon r(u^n)'\varphi'\,dr\right| \le \left(\int_0^\varepsilon r((u^n)')^2\,dr\right)^{1/2}\left(\int_0^\varepsilon r(\varphi')^2\,dr\right)^{1/2}$$
$$\le c\left(\int_0^\varepsilon r(\varphi')^2\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

(B) Z omezenosti (A.8) na $[\varepsilon,1]$ dostaneme

$$\left|\int_\varepsilon^1 r(u^n)'(\varphi-\varphi^n)'\,dr\right| \le c\|\varphi'-\varphi_k'\|_{C^1[\varepsilon,1]}.$$

(C) Pro $n\to\infty$ ze stejnoměrné konvergence funkcí u^n na $[\varepsilon,1]$ dostaneme místo výrazu (C) výraz

$$-\int_\varepsilon^1 u(\varphi_k' r)'\,dr + [ru\varphi_k']_\varepsilon^1.$$

Nyní použijeme per partes a dostaneme původní výraz, ale už pro funkci u:

$$\int_\varepsilon^1 ru'\varphi_k'\,dr.$$

Integrál můžeme rozdělit podobně jako v předchozím kroku:

$$\int_\varepsilon^1 ru'(\varphi_k'-\varphi')\,dr + \int_0^1 ru'\varphi'\,dr - \int_0^\varepsilon ru'\varphi'\,dr.$$

Prostřední člen necháme, ostatní můžeme odhadnout stejně jako v předchozích případech:

$$\left|\int_\varepsilon^1 ru'(\varphi_k'-\varphi')\,dr\right| \le c\|\varphi_k'-\varphi'\|_{C^1[\varepsilon,1]}$$
$$\left|\int_0^\varepsilon ru'\varphi'\,dr\right| \le C\left(\int_0^\varepsilon r(u')^2\right)$$

Zvolme $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ tak, aby platilo $\|\varphi'-\varphi_k'\|_{C[\varepsilon,1]} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Poznámka. Podle věty 16.3 [4] pro 1-periodickou funkci $f\in C^1[0,1]$ konvergují funkce tvaru $f_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^n(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$ (kde a_k, b_k jsou koeficienty příslušné funkci f), k funkci f stejnoměrně. Dále nám věta dává stejnoměrnou konvergenci derivací f_n' k f'. Funkce f_n jsou ovšem hladké funkce. Zvolíme-li tedy např. $\varphi_k=f_n$ pro $f=\widetilde{\varphi}$ (kde $\widehat{\varphi}$ je $\varphi|_{[\varepsilon,1]}$ hladce periodicky dodefinovaná na $\mathbb{R}$), je předchozí volba validní.

Konečně po postupném limitním přechodu nejprve pro $n\to\infty$, následně $k\to\infty$ a nakonec $\varepsilon\to 0+$ dostaneme požadované.

Máme tedy, že pro každé φ takové, že $\langle\varphi,\varphi\rangle=1$ platí

$$(\varphi,\varphi)\ge\lambda_1^2=(u_1,u_1).$$

Řešme nyní problém

$$\lambda^2=\inf_{\substack{u\in C^1(0,1]\\ \langle u,u\rangle=1\\ \langle u,u_1\rangle=0}}(u,u).$$

Stejně jako v předchozím případě odvodíme, že $\lambda^2 = \lim_{n\to\infty}(u^n,u^n)$, kde $u^n \rightrightarrows u$, a dále pro každé $\varphi \in C^2(0,1]$ takové, že $\langle\varphi, u_1\rangle = 0$ platí

$$\lambda^2\langle u, \varphi\rangle = u(1)\left(\varphi'(1) + \alpha\varphi(1)\right) - \int_0^1 u(r\varphi'(r))'\,dr. \tag{A.15}$$

Nechť $\psi \in C^2(0,1]$ je libovolná, pak funkce $\varphi = \psi - \langle\psi, u_1\rangle u_1$ splňuje podmínku kolmosti $\langle\varphi,u_1\rangle = 0$. Z rovnice pro u_1 speciálně víme

$$(u,u_1) \overset{\text{per partes}}{=} u(1)\left(u_1'(1) + \alpha u_1(1)\right) - \int_0^1 u(ru_1'(r))'\,dr = \lambda^2\langle u,u_1\rangle = 0.$$

A tedy rovnice (A.15) platí pro každé $\psi \in C^2(0,1]$. Opět můžeme analogicky odvodit, že $\lambda^2 = \lambda_2^2$.

K platnosti tvrzení pro λ_{n+1} se dostaneme indukčně opakovanou aplikací stejného postupu.

□

Konečně buď $\varphi \in C^2(0,1]$ takové, že

$$(\varphi,\varphi) + \langle\varphi,\varphi\rangle < \infty \quad \text{a} \quad \langle\varphi,\varphi\rangle = 1.$$

Buď dále $\langle\varphi, u_i\rangle = 0$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak dle lemmatu 15 platí pro každé $i \in \mathbb{N}$

$$(\varphi,\varphi) \geq \lambda_i^2.$$

A tedy pro $i \to \infty$ dostaneme $(\varphi,\varphi) = \infty$, což je spor s předpokladem. Takové φ tedy nemůže existovat, systém $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ je tedy úplný ortogonální.

Nechť nyní je $\varphi \in C^1(0,1]$ tak, že $(\varphi,\varphi) \leq \infty$, $\langle\varphi,\varphi\rangle = 1$. Pak definujeme projekci P^n jako

$$P^n\varphi = \sum_{i=1}^n \langle\varphi,u_i\rangle u_i.$$

Nyní využijeme ortonormality funkcí $\frac{u_i}{\lambda_i}$, $i \in \mathbb{N}$ vůči skalárnímu součinu $(\cdot,\cdot)$, rovnost (1.20) a Besselovu nerovnost [4, věta 16.8].

$$(P^n\varphi,P^n\varphi) = \sum_{i=1}^n \langle\varphi,u_i\rangle^2(u_i,u_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-2}(\varphi,u_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\varphi,\frac{u_i}{\lambda_i}\right)^2 \overset{\substack{\text{Besselova}\\ \text{nerovnost}}}{\leq} (\varphi,\varphi).$$

Označme nyní $\varphi^n = P^n\varphi$, pak platí pro každé $i < n$:

$$\langle\varphi - \varphi^n,u_i\rangle = 0.$$

Nyní díky $(\varphi - \varphi^n,\varphi - \varphi^n) \leq c$, kde c nezávisí na n, a lemmatu 15 dostaneme

$$c \geq (\varphi - \varphi^n,\varphi - \varphi^n) \geq \lambda_{n+1}\langle\varphi - \varphi^n,\varphi - \varphi^n\rangle.$$

A tedy díky $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\langle\varphi - \varphi^n,\varphi - \varphi^n\rangle = 0.$$

Tento fakt nám speciálně dává zvlášť bodovou konvergenci $\lim_{n\to\infty}\varphi^n(1) = \varphi(1)$ a dále také $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 r(\varphi - \varphi^n)^2\,dr = 0$.

Nakonec se podíváme na výraz $(\varphi - \varphi^n,\varphi - \varphi^n)$:

$$(\varphi - \varphi^n,\varphi - \varphi^n) = (\varphi,\varphi) + (\varphi^n,\varphi^n) - 2(\varphi^n,\varphi) \leq 2(\varphi,\varphi) - 2(\varphi^n,\varphi) =$$
$$= 2(\varphi,\varphi) - 2\alpha\varphi^n(1)\varphi(1) - 2\int_0^1 \sqrt{r}(\varphi^n)'\varphi'\sqrt{r}\,dr.$$

Díky bodové konvergenci $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(1) = \varphi(1)$ dostaneme z předchozí nerovnosti

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi - \varphi^n,\varphi - \varphi^n) \leq 2\int_0^1 r\varphi'\varphi'\,dr - 2\alpha\varphi^2(1) - 2\lim_{n\to\infty}\int_0^1 r\varphi'(\varphi^n)'\,dr$$
$$\leq 2\lim_{n\to\infty}\int_0^1 r\varphi'(\varphi' - (\varphi^n)')\,dr.$$

Ukážeme nyní, že platí následující:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 r\varphi'(\varphi^n)'\,dr = \int_0^1 r\varphi\varphi\,dr.$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je pevné, pak existuje podle [4, věta 18.7, bod 5)] pro každé $k \in \mathbb{N}$ funkce $p^{\varepsilon,k} \in C^\infty(0,1]$ tak, že

$$\|\varphi' - p^{\varepsilon,k}\|_{L^2(\varepsilon,1)} \leq \frac{1}{k}.$$

Nyní upravíme výraz v limitě:

$$\int_0^1 r\varphi'(\varphi^n)'\,dr = \int_0^\varepsilon r\varphi'(\varphi^n)'\,dr + \int_\varepsilon^1 r\varphi'(\varphi^n)'\,dr.$$

Díky faktu, že $(\varphi^n,\varphi^n) \leq (\varphi,\varphi) < \infty$ a Hölderově nerovnosti dostaneme odhad prvního integrálu:

$$\left|\int_0^\varepsilon \sqrt{r}\varphi'\sqrt{r}(\varphi^n)'\,dr\right| \overset{\text{Hölder}}{\leq} C\|\varphi'\|_{L^2(0,\varepsilon,1)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 0.$$

Na odhad druhého integrálu použijeme funkci $p^{\varepsilon,k}$:

$$\int_\varepsilon^1 r\varphi'(\varphi^n)'\,dr = \int_\varepsilon^1 r(\varphi' - p^{\varepsilon,k})(\varphi^n)'\,dr + \int_\varepsilon^1 rp^{\varepsilon,k}(\varphi^n)'\,dr.$$

První člen na pravé straně předchozí rovnosti můžeme odhadnout stejně jako výše:

$$\left|\int_0^\varepsilon \sqrt{r}(\varphi' - p^{\varepsilon,k})\sqrt{r}(\varphi^n)'\,dr\right| \overset{\text{Hölder}}{\leq} C\|\varphi' - p^{\varepsilon,k}\|_{L^2(0,\varepsilon)} \leq \frac{C}{k}.$$

Nyní na druhý integrál použijeme per partes

$$\int_\varepsilon^1 rp^{\varepsilon,k}(\varphi^n)'\,dr = -\int_\varepsilon^1 (rp^{\varepsilon,k})'\varphi^n\,dr + [rp^{\varepsilon,k}\varphi]_\varepsilon^1.$$

Víme, že $\int_0^1 r(\varphi - \varphi^n)^2\,dr \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, existuje tedy nějaké n_0, že pro $n \geq n_0$:

$$\int_0^1 r(\varphi - \varphi^n)^2\,dr \leq \widetilde{c}_1.$$

A tedy $(\varphi - \varphi^n)^2 \leq c_1$ na $[\varepsilon,1]$, kde c_1 nezávisí na n. Dále z $(\varphi - \varphi^n,\varphi - \varphi^n) \leq \widetilde{c}_2$ máme $|(\varphi - \varphi^n)'| \leq c_2$ na $[\varepsilon,1]$, funkce $\varphi - \varphi^n$ je tedy c_2-lipschitzovská pro každé

$n \in \mathbb{N}$. Podle Arzelovy-Ascoliho věty tedy existuje vybraná posloupnost φ^m, že $\varphi - \varphi^m \rightrightarrows 0$. Zvolme tedy φ^n nově jako tuto vybranou posloupnost. Po aplikaci $\lim\limits_{n\to\infty}$ tedy můžeme prohodit limitu a integrál, dále integrujeme per partes:

$$\begin{aligned} -\int_\varepsilon^1 (rp^{\varepsilon,k})'\varphi\,dr + \left[rp^{\varepsilon,k}\varphi\right]_\varepsilon^1 &= \int_\varepsilon^1 rp^{\varepsilon,k}\varphi\,dr \\ = \int_\varepsilon^1 r(p^{\varepsilon,k} - \varphi')\varphi'\,dr &+ \int_0^1 r\varphi'\varphi'\,dr - \int_0^\varepsilon r\varphi'\varphi'\,dr. \end{aligned}$$

Integrály můžeme opět odhadnout jako v předchozí části použitím $(\varphi,\varphi) < \infty$ a Hölderovy nerovnosti :

$$\begin{aligned} \left|\int_0^\varepsilon \sqrt{r}(\varphi' - p^{\varepsilon,k})\sqrt{r}\varphi'\,dr\right| &\overset{\text{Hölder}}{\leq} C\|\varphi' - p^{\varepsilon,k}\|_{L^2(0,\varepsilon)} \leq \frac{C}{k} \\ \left|\int_0^\varepsilon \sqrt{r}\varphi'\sqrt{r}\varphi'\,dr\right| &\overset{\text{Hölder}}{\leq} C\|\varphi'\|_{L^2(0,\varepsilon)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 0. \end{aligned}$$

Tedy celkem po aplikaci $n \to \infty$, $k \to \infty$ a $\varepsilon \to 0+$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 r\varphi'(\varphi^n)'\,dr = \int_0^1 r\varphi\varphi\,dr.$$

Dokázané výsledky nyní zformulujeme jako tvrzení:

Tvrzení 16. *Funkce $\{u_i\}_i^\infty = 1$ tvoří úplný ortogonální systém vůči skalárnímu součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Navíc pro každé $\varphi \in C^1(0,1]$, splňující $(\varphi,\varphi) < \infty$, existuje posloupnost reálných čísel $\{a_i\}_{i=1}^n$ taková, že pro funkce $\varphi^n = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ platí*

$$(\varphi - \varphi^n,\varphi - \varphi^n) + \langle\varphi - \varphi^n,\varphi - \varphi^n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{A.16}$$