

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Vejvoda

Řešení Poiseuilleova a rovinného Couettova proudění s dynamickými okrajovými podmínkami

Matematický ústav, Univerzita Karlova

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Rád bych poděkoval svému vedoucímu prof. RNDr. Josefu Málkovi, CSc., DSc. za jeho ochotu, trpělivost, sehnání potřebných materiálů, velmi lidský přístup a skvělé vedení. Dále bych chtěl poděkovat všem, kteří mě podporovali a pomáhali, ať už se jedná o moji rodinu, přátele anebo pedagogy, které jsem během svých studií poznal.

Název práce: Řešení Poiseuilleova a rovinného Couettova proudění s dynamickými okrajovými podmínkami

Autor: Martin Vejvoda

ústav: Matematický ústav, Univerzita Karlova

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc., Matematický ústav, Univerzita Karlova

Abstrakt: V předložené práci studujeme vliv dynamických okrajových podmínek na Couettovo a Poiseuilleovo proudění, která představují dva typy proudění mezi dvěma nekonečnými nepropustnými deskami. Nejdříve uvažujeme Navier-Stokesovy rovnice, které popisují proudění nestlačitelné newtonovské tekutiny, a dynamické okrajové podmínky pro proudění v libovolných omezených třírozměrných oblastech. Poté se díváme, jakým způsobem se naše úloha a energetické odhady redukuje ve zvolené zjednodušené geometrické situaci. Druhá část práce je věnována vybraným řešeným příkladům, z nichž některé jsou doplněny o numerickou simulaci.

Klíčová slova: dynamické okrajové podmínky, nestacionární proudění, nestlačitelné tekutiny, Navier-Stokesovy rovnice

Title: Solution of Poiseuille and plane Couette flow associated with the dynamic boundary conditions

Author: Martin Vejvoda

institute: Mathematical Institute, Charles University

Supervisor: prof. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc., Mathematical Institute, Charles University

Abstract: In the presented work we study the effect of dynamic boundary conditions on Couette and Poiseuille flows that represent two types of flow between two parallel impervious plates. In the first part, the Navier-Stokes equations are considered describing flows of an incompressible Newtonian fluid, and dynamic boundary conditions in general three-dimensional setting. Then we look at how our problem reduces in the simplified geometrical setting. In the second part, we study several selected problems, some of them are supported by numerical simulations.

Keywords: boundary conditions, steady and unsteady flow, incompressible fluid, Navier-Stokes equations

Obsah

1 Navier-Stokesovy rovnice a okrajové podmínky	2
1.1 Úvod	2
1.2 Definice základních pojmů a značení	3
1.3 Rovnice proudění, okrajové podmínky a formulace počáteční a okrajové úlohy	4
1.4 Zjednodušená geometrie	7
1.5 Stacionární řešení	10
2 Proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami	13
2.1 Úvodní úvahy	13
2.2 Couettovo proudění se statickými okrajovými podmínkami	14
2.3 Couettovo proudění s dynamickými okrajovými podmínkami I	16
2.3.1 Simulace	19
2.4 Couettovo proudění s dynamickými okrajovými podmínkami II	20
2.4.1 Simulace	23
2.5 Poiseuilleovo proudění se statickými okrajovými podmínkami	24
2.6 Závěr	27
Seznam použité literatury	28
Seznam obrázků	29
Seznam tabulek	30

1. Navier-Stokesovy rovnice a okrajové podmínky

1.1 Úvod

Historie mechaniky tekutin se datuje již od starověku. Jako příklad můžeme uvést Archimédův zákon, o němž se učí děti na základní škole. Rozvoje se tato věda dočkala v druhé polovině druhého tisíciletí. Ze všech vědců, kteří se zajímali o tekutiny, uvedme třeba Isaaca Newtona, Daniela Bernoulliho, Jean le Ronda d’Alemberta anebo Leonharda Eulera.

V první polovině 19. století odvodili francouzský inženýr Claude Navier a irský fyzik a matematik George Stokes rovnice popisující proudění vazké newtonovské tekutiny. Tehdy určitě netušili, že za jejich vyřešení bude na počátku 21. století vysána odměna ve výši jednoho milionu dolarů, viz Fefferman (2006). V dnešní době je při praktických aplikacích nutné používat numerické výpočty. Analyticky umíme rovnice proudění řešit pouze ve velmi jednoduchých případech, a to i přes skutečnost, že využití Navier-Stokesových rovnic je obrovské. Ať už se jedná o navrhování lodí a letadel anebo třeba o modelování kouře v počítačových hrách.

Dalším vědcem, který se zapsal do historie mechaniky tekutin, byl francouzský fyzik Maurice Couette, po němž je pojmenováno Couettovo proudění. Jedná se o proudění s konstantním tlakem mezi dvěma koncentrickými válci anebo dvěma rovnoběžnými deskami, které je způsobeno rotováním jednoho z válců, respektive pohybem jedné z desek. Poiseuilleovo proudění, pojmenované po francouzském fyzikovi a fyziologovi Jeanu Poiseuilleovi, je proudění v trubici či mezi dvěma rovnoběžnými deskami, které jsou v klidu a proudění je generováno předepsaným tlakovým spádem. Proudění způsobené zároveň pohybem hranice a tlakovým spádem se nazývá Couette–Poiseuilleovo.

V této práci budeme zkoumat *vliv různých okrajových podmínek na rovinné Couettovo a částečně i Poiseuilleovo proudění* popsané Navier-Stokesovými rovnicemi. Okrajové podmínky zahrnují standardní podmínky typu úplného či částečného skluzu nebo podmínku popisující úplné ulpívání tekutiny. Důraz však bude kladen na nestandardní dynamické podmínky, které se v literatuře objevily až ve 20. století, viz Hatzikiriakos a Dealy (1991).

Schéma práce je následující. V první kapitole zformulujeme Navier-Stokesovy rovnice zachycující časově se měnící proudění v obecných omezených třírozměrných oblastech. Zformulujeme počáteční podmínku a obecný tvar okrajových podmínek na nepropustné hranici. Uvedeme také několik speciálních případů okrajových podmínek a odvodíme energetickou rovnost. Rovněž uvedeme, jak se tyto rovnice, okrajové podmínky a energetická rovnost redukují v případě námi studovaného proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami. Pro úplnost uvedeme odvození stacionárních řešení, tedy řešení, která nezávisí na čase. Uvedeme přesný tvar řešení pro různé okrajové podmínky pro desky pohybující se konstantní rychlostí. Zde čerpáme z práce Hron a kol. (2008).

Druhá kapitola je věnována studiu vlivu různých okrajových podmínek na proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami. Uvedeme tři příklady Couettova proudění a jeden příklad Poiseuilleova proudění, přičemž na závěr každého pří-

kladu ukážeme, k jakému stacionárnímu řešení námi nalezené řešení konverguje. První příklad Couettova proudění bude nejjednodušší, neboť bude obsahovat pouze stacionární okrajové podmínky. Ve zbylých příkladech Couettova proudění již budeme na horní desce uvažovat dynamické okrajové podmínky, přičemž příklady se budou lišit předepsanou statickou okrajovou podmínkou na spodní desce. K řešení úloh použijeme Faedo-Galerkinovu metodu. Tyto příklady budou doplněny numerickými simulacemi. Příklad na Poiseuilleovo proudění bude obsahovat pouze statické okrajové podmínky.

Hlavním zdrojem a motivací této práce je především disertace E. Maringové (Maringová, 2019, kapitola 2), na kterou tento text navazuje a rozšiřuje ho o některé další případy.

1.2 Definice základních pojmů a značení

Tuto část věnujeme definicím základních pojmů a značení, které bude v následujících kapitolách využívat.

Reálná čísla budou označena symbolem \mathbb{R} , přičemž $\mathbb{R}^d = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{d\text{-krát}}$.

Skaláry budeme značit italikou a malými písmeny, vektory tučně a malými písmeny a tenzory tučně a velkými písmeny.

O množině $A \subset \mathbb{R}^d$ řekneme, že je souvislá, pokud není sjednocením dvou neprázdných, otevřených a disjunktních množin. Otevřenou souvislou podmnožinu \mathbb{R}^d budeme značit Ω , její uzávěr $\bar{\Omega}$ a hranici $\partial\Omega$. Vnější normálový vektor k hranici bude značen \mathbf{n} . Průmět vektoru \mathbf{x} do tečné nadroviny hranice definujeme jako $\mathbf{x}_\tau = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$.

Časový interval, ve kterém budeme rovnice řešit, bude označen $(0, T)$, $T > 0$.

Nechť $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(t, \mathbf{x})$ je diferencovatelná funkce v $(0, T) \times \Omega$. Časovou proměnnou budeme značit t a prostorovou proměnnou $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Parciální derivace funkce f dle těchto proměnných, které se obvykle značí $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ a $\frac{\partial f}{\partial z}$, budeme značit $\partial_t f$, $\partial_x f$, $\partial_y f$ a $\partial_z f$. Prostorovým gradientem funkce f rozumíme vektor $\nabla f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$. Pokud je f dvakrát diferencovatelná, pak Laplaceův operátor aplikovaný na f je definován předpisem $\Delta f = \partial_{xx}^2 f + \partial_{yy}^2 f + \partial_{zz}^2 f$.

Je-li \mathbb{A} matice typu $n \times m$, pak \mathbb{A}^T značí matici transponovanou, která je typu $m \times n$.

Nechť $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ je diferencovatelné vektorové pole v $(0, T) \times \Omega$. Jacobiho maticí vektorového pole \mathbf{f} rozumíme matici $D_{\mathbf{x}}\mathbf{f} = (\nabla_{\mathbf{f}_x}, \nabla_{\mathbf{f}_y}, \nabla_{\mathbf{f}_z})^T$. Divergenci funkce \mathbf{f} definujeme jako $\text{div } \mathbf{f} = \partial_x \mathbf{f}_x + \partial_y \mathbf{f}_y + \partial_z \mathbf{f}_z$. Je-li \mathbf{f} navíc dvakrát diferencovatelné, pak $\Delta \mathbf{f} = (\Delta \mathbf{f}_x, \Delta \mathbf{f}_y, \Delta \mathbf{f}_z)^T$.

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jsou vektory. Tenzorový součin vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} definujeme jako $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$. Výrazem $\text{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$ budeme rozumět vektor definovaný předpisem

$$\text{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) := \mathbf{v}_x \partial_x \mathbf{v} + \mathbf{v}_y \partial_y \mathbf{v} + \mathbf{v}_z \partial_z \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{div } \mathbf{v}.$$

Nechť $\mathbf{F} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ je diferencovatelné tenzorové pole v $(0, T) \times \Omega$. Divergencí tenzorového pole \mathbf{F} rozumíme $\text{div } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$.

Prostor všech spojitých funkcí na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ budeme značit $C(I)$. Pro I uzavřený definujeme $C(I)$ obdobně, v krajních bodech I však požadujeme pouze spojitost zleva, respektive zprava. Prostor funkcí, které mají spojitě derivace k -tého řádu na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ budeme značit $C^k(I)$. Pro I uzavřený definujeme $C^k(I)$ analogicky. Prostorem $L^2(I)$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval, budeme rozumět všechny lebesgueovskými měřitelné funkce, které splňují

$$\|f\|_{2,I} = \left(\int_I f^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

1.3 Rovnice proudění, okrajové podmínky a formulace počáteční a okrajové úlohy

Nyní přejdeme k popisu proudění a okrajovým podmínkám. Uvažujme homogenní nestlačitelnou tekutinu proudící v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a měnící se s časem $t \in (0, T)$. Hustota homogenní tekutiny je konstantní a lze ji pro účely této práce normalizovat na hodnotu 1. Proudění takovéto tekutiny je možné popsat následujícím systémem nelineárních parciálních diferenciálních rovnic

$$\partial_t \mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{S} = -\nabla p, \quad (1.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.1b)$$

kde $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je vektorové pole udávající rychlost proudění, $p(t, \mathbf{x}) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ je skalární funkce reprezentující tlak, a $\mathbf{S}(t, \mathbf{x}) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ je Cauchyův tenzor napětí. Diferenciální operátory a symboly vyskytující se v rovnici (1.1) jsou zavedeny v předcházející sekci.

Na pravou stranu rovnice (1.1a) bychom mohli přidat dané vektorové pole \mathbf{f} reprezentující vnější objemové síly. V této práci se ale soustředíme na vliv okrajových podmínek a proto klademe $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$.

Newtonovské nestlačitelné tekutiny jsou charakterizovány vztahem

$$\mathbf{S} = \nu(D_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + (D_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^T), \quad (1.2)$$

kde $\nu > 0$ je viskozita tekutiny, která představuje vnitřní tření. Tekutina s vyšší viskozitou je méně tekutá než tekutina s viskozitou nižší. Ze vztahu (1.2) plyne, že tenzor \mathbf{S} je symetrický. Dosadíme-li vztah (1.2) do rovnic (1.1), pak dostáváme Navier-Stokesovy rovnice:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v}_x \partial_x \mathbf{v} + \mathbf{v}_y \partial_y \mathbf{v} + \mathbf{v}_z \partial_z \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p, \quad (1.3a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.3b)$$

K formulaci matematicky řešitelného problému spojeného s evolučními Navier-Stokesovými rovnicemi (1.3) musíme specifikovat počáteční a okrajové podmínky. Počáteční podmínku zadáváme pro rychlost \mathbf{v} ve tvaru

$$\mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.4)$$

kde $\mathbf{v}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ je daná funkce splňující $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$ v Ω a $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ v $\partial\Omega$, kde $\mathbf{n} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ značí vnější normálový vektor v daném bodě hranice.

Okrajové podmínky budou dvojího typu. Jako první budeme předpokládat, že hranice je nepropustná. Platí tedy

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{v } (0, T) \times \partial\Omega. \quad (1.5)$$

Druhý typ okrajových podmínek popisuje interakci hranice s proudící tekutinou. V této práci budeme uvažovat okrajovou podmínkou ve tvaru

$$\theta(\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \beta\partial_t(\mathbf{v} - \mathbf{w}))_\tau + (1 - \theta)(\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau = 0 \quad \text{v } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (1.6)$$

kde $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\theta \in [0, 1]$ a $\mathbf{w}(t) : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dané vektorové pole udávající rychlost, s jakou se hranice pohybuje. Všimněme si, že \mathbf{w} je v daném čase všude stejné. Požadujeme, aby $\mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{n} = 0$ na $\partial\Omega$ pro $\forall t \in [0, T]$ a $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$. Je-li $\theta = 1$, budeme navíc předpokládat, že

$$\mathbf{w}_\tau(0) = (\mathbf{v}_0)_\tau \quad \text{na } \partial\Omega. \quad (1.7)$$

Vektor $(\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau$ představuje „tření“ mezi hranicí a tekutinou a reprezentuje projekci normálové „třecí“ síly do tečné nadroviny. Pro libovolný vektor \mathbf{x} symbol \mathbf{x}_τ označuje průmět \mathbf{x} do tečné nadroviny, tj. $\mathbf{x}_\tau = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$.

Dynamická okrajová podmínka (1.6) je motivována chováním některých roztažených polymerů, kdy se viskoelastické vlastnosti těchto látek promítnou do interakce s hranicí, zatímco uvnitř oblasti se látka chová jako viskózní Navier-Stokesova tekutina. U těchto látek experimentální pozorování skluzu ukázala, že rychlost může záviset na minulých stavech napětí, což může vést ke zpoždění skluzu, viz například Hatzikiriakos a Dealy (1991), Pearson a Petrie (1965).

Vhodnou volbou parametrů α , β a θ budeme schopni docílit různých okrajových podmínek. Pro $\theta = 0$ se podmínka (1.6) redukuje na

$$(\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau = \mathbf{0} \quad \text{v } (0, T) \times \partial\Omega. \quad (1.8)$$

To nám dává dokonalý skluz, neboli situaci, kdy tekutina volně klouže po hranici a hranice tekutinu nijak nebrzdí. Naopak pro $\theta = 1$ a $\alpha, \beta > 0$ dostáváme

$$\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{w})_\tau + \beta\partial_t(\mathbf{v} - \mathbf{w})_\tau = 0 \quad \text{v } (0, T) \times \partial\Omega \quad (1.9)$$

Označme si $y(t) = 2|(\mathbf{v} - \mathbf{w})_\tau(t, \mathbf{x})|^2$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ pevné, libovolné. Pak násobením rovnice (1.9) skalárně vektorem $(\mathbf{v} - \mathbf{w})_\tau$ dostáváme

$$\alpha y + \beta\partial_t y = 0,$$

což je ekvivalentní

$$\partial_t(e^{\frac{\alpha}{\beta}t}y) = 0$$

a po integraci přes čas od 0 do t dostáváme

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta}t} = 0,$$

kde poslední rovnost plyne z (1.7). Za předpokladu (1.7) tedy (1.9) implikuje

$$\mathbf{v}_\tau = \mathbf{w}_\tau \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega,$$

respektive, využijeme-li informaci, že $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ na $(0, T) \times \partial\Omega$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega.$$

Jedná se tedy o případ, kdy tekutina ulpívá na hranici a nedochází ke skluzu.

Je-li $\beta = 0$ v (1.6), pak dostáváme tzv. Navierův skluz:

$$\theta\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{w})_\tau + (1 - \theta)(\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau = 0 \quad \text{v } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (1.10)$$

kde parametr $\theta \in (0, 1)$ popisuje různé stupně skluzu. Pro $\theta \rightarrow 0$ dostáváme aproximaci dokonalého skluzu a pro $\theta \rightarrow 1$ máme aproximaci žádného skluzu.

Definice 1.3.1 (Klasické řešení počáteční a okrajové úlohy). Necht $\nu > 0, \alpha > 0, \beta \geq 0$ a $\theta \in [0, 1]$ jsou dány (pevně, ale libovolně) a oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená. Necht $\mathbf{w} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ je daná vektorová funkce časové proměnné. Buď $\mathbf{v}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ daná hladká funkce. Řekneme, že $(\mathbf{v}, p) : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$ řeší počáteční a okrajovou úlohu (P) v klasickém smyslu, pokud

- (\mathbf{v}, p) jsou dostatečně hladké v $[0, T) \times \bar{\Omega}$,
- rovnice (1.3) jsou splněny bodově v $(0, T) \times \Omega$,
- počáteční podmínka (1.4) platí v Ω ,
- okrajové podmínky (1.5) a (1.6) jsou splněny v $(0, T) \times \partial\Omega$.

Tvrzení 1.3.1 (Energetická bilance). Necht $\mathbf{w} \equiv \mathbf{0}$ v $(0, T)$ a (\mathbf{v}, p) je klasické řešení úlohy (P) ve smyslu předcházející definice. Pak platí:

1. Je-li $\theta = 0$ nebo $\theta = 1$, pak pro každé $t \in (0, T]$:

$$E(t) := \|\mathbf{v}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \nu \int_0^t \|(D_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + (D_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^T)(s)\|_{2,\Omega}^2 ds = \|\mathbf{v}_0\|_{2,\Omega}^2 =: E_0. \quad (1.11)$$

2. Je-li $\theta \in (0, 1)$, pak pro každé $t \in (0, T]$:

$$E(t) + \frac{\theta}{1 - \theta} \left[2\alpha \int_0^t \|\mathbf{v}_\tau(s)\|_{2,\partial\Omega}^2 ds + \beta \|\mathbf{v}_\tau\|_{2,\partial\Omega}^2 \right] = E_0. \quad (1.12)$$

Důkaz. Nejdříve vynásobíme rovnici (1.1a) skalárně s \mathbf{v} . S využitím $\operatorname{div}(\mathbf{S}\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot D_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$ dostaneme

$$\frac{1}{2}(\partial_t |\mathbf{v}|^2 + \mathbf{v} \cdot \nabla |\mathbf{v}|^2) - \operatorname{div}(\mathbf{S}\mathbf{v}) + \mathbf{S} \cdot D_{\mathbf{x}}\mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \nabla p.$$

Využijeme-li rovnici (1.1b), tak dostaneme (po vynásobení 2)

$$\partial_t |\mathbf{v}|^2 + \operatorname{div}((|\mathbf{v}|^2 + 2p)\mathbf{v}) - 2\operatorname{div}(\mathbf{S}\mathbf{v}) + 2\mathbf{S} \cdot D_{\mathbf{x}}\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Nyní tyto rovnice zintegrujeme přes Ω a využijeme Gaussovu větu ($\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{g} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS$). S použitím věty o záměně derivace a integrálu závislém na parametru dostáváme

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega |\mathbf{v}(t, \cdot)|^2 dx + \int_{\partial\Omega} (|\mathbf{v}|^2 + 2p)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - 2 \int_{\partial\Omega} \mathbf{S}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + 2 \int_\Omega \mathbf{S} \cdot D_{\mathbf{x}}\mathbf{v} dx = 0. \quad (1.13)$$

Nyní využijeme symetrie \mathbf{S} a identity

$$\mathbf{S}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau + (\mathbf{S}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau + (\mathbf{S}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$$

(normálový vektor je kolmý na vektory v tečné nadrovině). Protože $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ dle (1.5), tak (1.13) vede ke vztahu

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{v}(t, \cdot)|^2 d\mathbf{x} - 2 \int_{\partial\Omega} (\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau dS + \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot (D_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + (D_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^T) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.14)$$

Nyní použijeme (1.2) a (1.6). Je-li $\theta = 0$, pak $\mathbf{S}\mathbf{n}_\tau = \mathbf{0}$, pokud $\theta = 1$ a $(\mathbf{v}_0)_\tau = \mathbf{0}$ na $\partial\Omega$ (viz podmínka (1.7)), pak (1.9) dává $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{0}$. V obou případech hraniční člen v poslední identitě vymizí a tak

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{v}(t, \cdot)|^2 d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} |D_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + (D_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^T|^2 d\mathbf{x} = 0,$$

což po integraci přes čas od 0 do t dává, s využitím (1.5), první část tvrzení (1.11). Je-li $\theta \in (0, 1)$, tak (1.6) (s $\mathbf{w} \equiv 0$) implikuje $-(\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau = \frac{\theta}{1-\theta}(\alpha\mathbf{v}_\tau + \beta\partial_t\mathbf{v}_\tau)$, což po dosazení do (1.14) a úvahách využitých výše dává

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{v}(t, \cdot)|^2 d\mathbf{x} + \frac{\beta\theta}{1-\theta} \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}_\tau(t, \cdot)|^2 dS \\ & + \frac{2\alpha\theta}{1-\theta} \int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}_\tau(t, \cdot)|^2 dS + \nu \int_{\Omega} |D_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + (D_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^T|^2 d\mathbf{x} = 0, \end{aligned}$$

což implikuje (1.12). Tvrzení je tedy dokázáno. \square

Ačkoliv v následujících sekcích budeme nadále pracovat s hladkými funkcemi, tak vidíme, že pro danou úlohu jsou přirozené prostory, kde

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} |\mathbf{v}(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty, \int_0^T \int_{\Omega} |(D_{\mathbf{x}}\mathbf{v})(t, \mathbf{x}) + (D_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^T(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} dt < \infty \\ & \text{a } \sup_{t \in [0, T]} \int_{\partial\Omega} |\mathbf{v}_\tau(t, \mathbf{x})|^2 dS < \infty. \end{aligned}$$

1.4 Zjednodušená geometrie

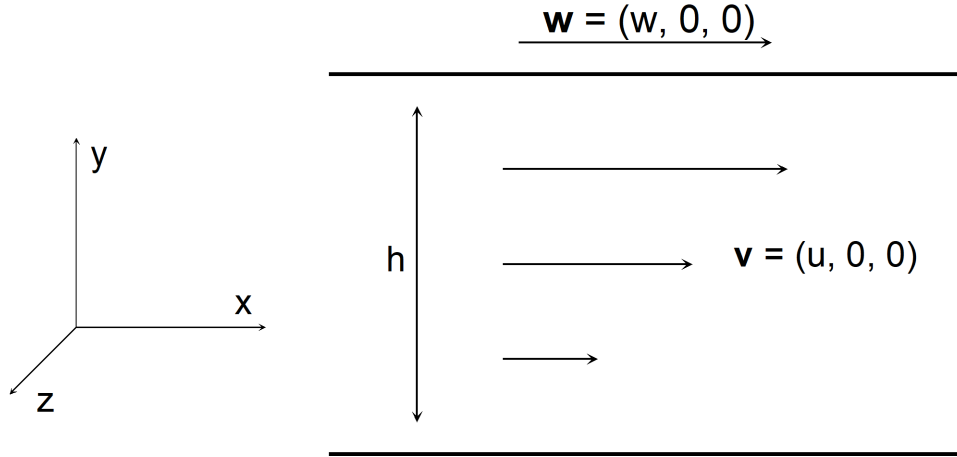
V této práci se zaměříme na studium výše uvedené úlohy ve speciální geometrii. Budeme vyšetřovat proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami, přičemž budeme rozlišovat dvě úlohy.

Prvním případem je rovinné Couettovo proudění, kdy je tlak p konstantní a spodní deska je v klidu a horní deska generující proudění se pohybuje rychlostí $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$. Druhý případ představuje Poiseuilleovo proudění, kdy obě desky jsou v klidu a proudění je dáno předepsaným tlakovým gradientem.

Jako naši geometrii zvolíme dvě rovnoběžné nepropustné nekonečné desky vzdálené o h popsané množinami $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = h\}$ a $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = 0\}$. Naše oblast Ω má tedy tvar $\mathbb{R} \times (0, h) \times \mathbb{R}$.

Budeme předpokládat, že vektor rychlosti \mathbf{v} bude mít pouze jednu složku nenulovou:

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = (u(t, y), 0, 0). \quad (1.15)$$



Obrázek 1.1: Ilustrace volby souřadnicových os u proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami. Dvě rovnoběžné desky jsou vzdálené o h , přičemž u Couettova proudění se horní pohybuje rychlostí $\mathbf{w} = (w, 0, 0)$, což způsobuje proudění tekutiny o rychlosti \mathbf{v} , které pak hledáme ve speciálním tvaru $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$; tlak je konstantní. U Poiseuilleova proudění je $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ a proudění je generováno tlakovým spádem.

Vektor rychlosti v tomto tvaru automaticky splňuje (1.1b) a (1.5). Dosadíme-li (1.15) do (1.3) a použijeme-li výše zmíněné předpoklady, pak dostáváme

$$\partial_t u(t, y) - \nu \partial_{yy} u(t, y) = -\partial_x p, \quad 0 = -\partial_y p, \quad 0 = -\partial_z p. \quad (1.16)$$

Odsud plyne, že funkce p nemůže záviset na y a z . Tedy levá strana první rovnice v (1.16) závisí pouze na t a y a pravá strana na t a x , z čehož vyplývá, že

$$p(t, x) = g(t)x + h(t). \quad (1.17)$$

Pro Couettovo proudění dle jeho definice platí $\nabla p = \mathbf{0}$ a systém (1.16) se redukuje na skalární rovnici

$$\partial_t u - \nu \partial_{yy} u = 0.$$

O vektoru rychlosti hranice \mathbf{w} budeme předpokládat, že je roven

$$\mathbf{w}(t) = (w(t), 0, 0).$$

Dále se podíváme, jak se změní okrajová podmínka (1.6) v naší geometrii. Úpravou $\mathbf{S}\mathbf{n}$ dostaneme okrajovou podmínku pro funkci u . S postupným použitím (1.2) a (1.15)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\mathbf{n} &= \nu \begin{pmatrix} 2\partial_x \mathbf{v}_x & \partial_x \mathbf{v}_y + \partial_y \mathbf{v}_x & \partial_z \mathbf{v}_y + \partial_x \mathbf{v}_z \\ \partial_y \mathbf{v}_x + \partial_x \mathbf{v}_y & 2\partial_y \mathbf{v}_y & \partial_z \mathbf{v}_y + \partial_y \mathbf{v}_z \\ \partial_z \mathbf{v}_x + \partial_x \mathbf{v}_z & \partial_z \mathbf{v}_y + \partial_y \mathbf{v}_z & 2\partial_z \mathbf{v}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \nu \begin{pmatrix} \partial_x \mathbf{v}_y + \partial_y \mathbf{v}_x \\ 2\partial_y \mathbf{v}_y \\ \partial_y \mathbf{v}_z + \partial_z \mathbf{v}_y \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \partial_y u(t, y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pro spodní desku musíme uvažovat normálový vektor $(0, -1, 0)$, což se projeví opačným znaménkem, přičemž pro spodní desku budeme uvažovat pouze statické okrajové podmínky, tj. $\beta = 0$. Výsledný vektor je zřejmě kolmý na normálový

vektor a jedná se tedy o tečný vektor. Okrajová podmínka na horní desce má tvar

$$\theta(\alpha(u - w) + \beta\partial_t(u - w)) + (1 - \theta)\nu\partial_y u = 0, \quad (1.18)$$

zatímco na spodní desce dostáváme

$$\theta\alpha(u - w) - (1 - \theta)\nu\partial_y u = 0. \quad (1.19)$$

Podívejme se na energetickou bilanci (analog Tvrzení 1.3.1) v naší geometrii. Poznamenejme, že sice formálně můžeme dosadit do energetických rovností (1.11) a (1.12), ale tento postup není úplně v pořádku, neboť v Tvrzení 1.3.1 byla uvažovaná oblast omezená. Zde studujeme proudění v neomezené oblasti. Předpoklady na geometrii a tvar řešení však nakonec převedou redukovanou úlohu na omezený interval. Další významný rozdíl oproti Tvrzení 1.3.1 spočívá v zahrnutí funkcí $g = g(t)$ a $w = w(t)$ do energetické bilance.

Nejdříve však zdefinujme funkci $w_e : (0, T) \times (0, h) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$w_e(t, y) = \frac{1}{h}w(t)y.$$

Pak zřejmě $w_e(t, 0) = 0$ a $w_e(t, h) = w(t)$ a w_e je tak definována na celé oblasti a splňuje předepsané pohyby obou desek.

Tvrzení 1.4.1. *Nechť pro dané hladké funkce $u_0 : (0, h) \rightarrow \mathbb{R}$, $w : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu > 0$ je $u : (0, T) \times (0, h) \rightarrow \mathbb{R}$ dostatečně hladká funkce bodově splňující rovnici*

$$\partial_t u - \nu\partial_{yy} u = -g(t) \quad (1.20)$$

s počáteční podmínkou

$$u(0, y) = u_0(y) \quad y \in \Omega \quad (1.21)$$

a okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \theta_h(\alpha_h(u - w) + \beta_h\partial_t(u - w)) + (1 - \theta_h)\nu\partial_y u &= 0, & y = h, t \in (0, T), \\ \theta_0\alpha_0 u - (1 - \theta_0)\nu\partial_y u &= 0, & y = 0, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Pak platí:

1. Je-li $\theta_0 = 0$ nebo $\theta_0 = 1$ a $\theta_h = 0$ nebo $\theta_h = 1$, pak pro každé $t \in (0, T]$:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 - \nu \int_0^t \int_0^h \partial_y w_e \partial_y (u - w_e) dy d\tau \\ &\quad - \int_0^t \int_0^h (\partial_t w_e + g(\tau))(u - w_e) dy d\tau, \end{aligned} \quad (1.23)$$

kde

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2} \int_0^h (u - w_e)^2 dy + \nu \int_0^t \int_0^h |\partial_y (u - w_e)|^2 dy d\tau, \\ E_0 &:= \frac{1}{2} \int_0^h u_0^2(y) dy. \end{aligned}$$

2. Necht $\theta_0, \theta_h \in (0, 1)$. Označme $k_h = \frac{\theta_h}{1-\theta_h}$ a $k_0 = \frac{\theta_0}{1-\theta_0}$. Pak pro každé $t \in (0, T]$:

$$\begin{aligned} E(t) + \int_0^t k_h \alpha_h (u(\tau, h) - w_e(\tau, h))^2 + k_0 \alpha_0 u^2(\tau, 0) d\tau \\ + \frac{1}{2} k_h \beta_h (u(t, h) - w_e(t, h))^2 = E_0 - \nu \int_0^t \int_0^h \partial_y w_e \partial_y (u - w_e) dy d\tau \quad (1.24) \\ - \int_0^t \int_0^h (\partial_t w_e + g(t))(u - w_e) dy d\tau, \end{aligned}$$

kde $E(t)$ a E_0 jsou stejné jako v (1.23).

Všimněme si, že člen $\int_0^t \int_0^h \partial_y w_e \partial_y (u - w_e) dy d\tau = 0$, pokud $u = w_e$ pro $y = 0$ a $y = h$. To plyne ze skutečnosti, že $\partial_y w_e = \frac{1}{h} w(t)$ nezávisí na y a můžeme použít Newtonův vzoreček a hraniční podmínky.

Důkaz. Násobme rovnici (1.20) funkcí $u - w_e$. Dostáváme

$$\partial_t u(u - w_e) + \partial_y (\nu \partial_y u (u - w_e)) + \nu \partial_y u \partial_y (u - w_e) = -g(t)(u - w_e).$$

Odsud

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t (u - w_e)^2 + \nu |\partial_y (u - w_e)|^2 + \partial_y (\nu \partial_y u (u - w_e)) \\ = -\nu (\partial_y w_e) \partial_y (u - w_e) - \partial_t w_e (u - w_e) - g(t)(u - w_e). \end{aligned}$$

Integrací přes y od 0 do h dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^h \frac{(u - w_e)^2}{2} dy + \nu \int_0^h |\partial_y (u - w_e)|^2 dy - [\nu \partial_y u (u - w_e)]_0^h \\ = -\nu \int_0^h \partial_y w_e \partial_y (u - w_e) dy - \int_0^h (\partial_t w_e + g)(u - w_e) dy. \end{aligned}$$

Je-li nyní $\theta_0 = \theta_h = 0$ nebo $\theta_0 = \theta_h = 1$, tak přírůstek $[\nu \partial_y u (u - w_e)]_0^h = 0$ a integrací přes čas dostaneme (1.23).

Jsou-li $\theta_0, \theta_h \in (0, 1)$, tak z (1.22) vyjádříme $-\nu \partial_y u$ pro $y = 0$ a $y = h$ a dosadíme do výše uvedené rovnice. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^h \frac{(u - w_e)^2}{2} dy + \nu \int_0^h |\partial_y (u - w_e)|^2 dy + k_h \alpha_h (u(t, h) - w_e(t, h))^2 \\ + k_h \beta_h \frac{d}{dt} (u(t, h) - w_e(t, h))^2 + k_0 \alpha_0 u^2(t, 0) \\ = -\nu \int_0^h \partial_y w_e \partial_y (u - w_e) dy - \int_0^h (\partial_t w_e + g)(u - w_e) dy^2. \end{aligned}$$

Integrací přes čas dostáváme (1.24). Důkaz je hotov. \square

1.5 Stacionární řešení

Stacionární řešení je řešení, které nezávisí na čase. V této části se podíváme na řešení stacionární úlohy pro Couettovo a Poisseuilleovo proudění. Rovnice (1.16) má tvar

$$-\nu \partial_{yy} u = -g, \quad (1.25)$$

Hodnota θ_0	Hodnota θ_h	Hodnota a	Hodnota b	Rychlostní profil
$\theta_0 = 0$	$\theta_h \in (0, 1)$	$a = 0$	$b = w$	$u = w$
$\theta_0 = 1$	$\theta_h \in (0, 1)$	$a = \frac{\theta_h \alpha_h w}{\theta_h \alpha_h h + (1 - \theta_h) \nu}$	$b = 0$	$u = \frac{\theta_h \alpha_h w}{\theta_h \alpha_h h + (1 - \theta_h) \nu} y$
$\theta_0 = 1$	$\theta_h = 1$	$a = \frac{w}{h}$	$b = 0$	$u = \frac{w}{h} y$

Tabulka 1.1: V této tabulce jsou ukázány řešení stacionární úlohy Couettova proudění pro některé speciální hodnoty parametrů θ_0 a θ_h .

kde g je konstanta a její obecné řešení dává parabolický rychlostní profil, tj.

$$u(y) = \frac{g}{2\nu} y^2 + ay + b, \quad (1.26)$$

kde a, b jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Okrajové podmínky budeme předpokládat ve tvaru

$$\theta_h \alpha_h (u - w) + (1 - \theta_h) \nu \partial_y u = 0 \quad \text{na horní desce,} \quad (1.27a)$$

$$\theta_0 \alpha_0 u - (1 - \theta_0) \nu \partial_y u = 0 \quad \text{na spodní desce.} \quad (1.27b)$$

Pro Couettovo proudění platí $g = 0$. Rychlostní profil je tedy lineární (viz (1.26)) a po dosazení do (1.27) dostáváme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých a 7 parametrech:

$$\theta_h \alpha_h (ah + b - w) + (1 - \theta_h) \nu a = 0$$

$$\theta_0 \alpha_0 b - (1 - \theta_0) \nu a = 0$$

Její řešení má tvar

$$a = \frac{\theta_h \alpha_h w}{\theta_h \alpha_h \left(h + \frac{(1 - \theta_0) \nu}{\theta_0 \alpha_0} \right) + (1 - \theta_h) \nu}, \quad (1.28)$$

$$b = \frac{(1 - \theta_0) \nu}{\theta_0 \alpha_0} \frac{\theta_h \alpha_h}{\theta_h \alpha_h \left(h + \frac{(1 - \theta_0) \nu}{\theta_0 \alpha_0} \right) + (1 - \theta_h) \nu}.$$

Pro Poisseuilleovo proudění platí, že $w = 0$ a soustava rovnic (1.27) má tedy podobu

$$\theta_h \alpha_h \left(\frac{g}{2\nu} h^2 + ah + b \right) + (1 - \theta_h) \nu \left(\frac{g}{2\nu} + a \right) = 0$$

$$\theta_0 \alpha_0 b - (1 - \theta_0) \nu a = 0.$$

Řešení této soustavy má podobu

$$a = \frac{\theta_0 \alpha_0 \left(-\theta_h \alpha_h \frac{g}{2} h^2 - gh(1 - \theta_0) \right)}{\nu \theta_h \alpha_h (h \theta_0 \alpha_0 + (1 - \theta_0) \nu) + (1 - \theta_h) \nu (1 - \theta_0)}, \quad (1.29)$$

$$b = \frac{(1 - \theta_0) \left(-\theta_h \alpha_h \frac{g}{2} h^2 - gh(1 - \theta_0) \right)}{\theta_h \alpha_h (h \theta_0 \alpha_0 + (1 - \theta_0) \nu) + (1 - \theta_h) \nu (1 - \theta_0)}.$$

Hodnota θ_0	Hodnota θ_h	Hodnota a	Hodnota b	Rychlostní profil
$\theta_0 = 1$	$\theta_h = 1$	$a = -\frac{gh}{2\nu}$	$b = 0$	$u = \frac{g}{2\nu} y(y - h)$

Tabulka 1.2: Tato tabulka obsahuje stacionární řešení Poisseuilleova proudění pro hodnoty parametrů θ_0 a θ_h , které dále použijeme.

Řešení pro hodnoty parametrů θ_0 a θ_n , které budeme v další kapitole potřebovat, jsou ukázána v tabulce 1.1 pro Couettovo proudění a v tabulce 1.2 pro Poiseuilleovo proudění.

2. Proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami

Tato kapitola obsahuje čtyři vyřešené příklady. Tři jsou věnovány Couettovu proudění a jeden Poisseuilleovu proudění. U všech příkladů předpokládáme počáteční podmínku (1.4) s $\mathbf{v}_0 \equiv \mathbf{0}$ v Ω , což vede na podmínku

$$u(0, y) = 0 \quad \text{pro } y \in (0, h). \quad (2.1)$$

2.1 Úvodní úvahy

Nejdříve si shrňme naši úlohu. Hledáme hladkou funkci $u(t, y) : (0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, splňující rovnici

$$\partial_t u - \nu \partial_{yy} u = -g \quad \text{v } (0, T) \times (0, h), \quad (2.2)$$

s počáteční podmínkou $u(0, y) = 0$ v $(0, h)$ a okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \theta(\alpha_h(u(t, h) - w(t)) + \beta_h \partial_t(u(t, h) - w(t))) + (1 - \theta)\nu \partial_y u(t, h) &= 0, \quad t \in (0, T), \\ \theta \alpha_0 u(t, 0) + (1 - \theta)\nu \partial_y u(t, 0) &= 0, \quad t \in (0, T), \end{aligned}$$

kde $g(t) : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $w(t) : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou dané funkce¹ a $h, T, \nu > 0, \alpha_h, \alpha_0 > 0, \beta_h \geq 0, \theta \in [0, 1]$ jsou dané konstanty.

Uvažujme nyní úlohu, kde $w(t) = 0$:

$$\partial_t u - \nu \partial_{yy} u = -g \quad \text{v } (0, T) \times (0, h), \quad (2.3a)$$

$$u(0, y) = 0, \quad \forall y \in (0, h), \quad (2.3b)$$

$$\theta_h(\alpha_h u(t, h) + \beta_h \partial_t u(t, h)) + (1 - \theta_h)\nu \partial_y u(t, h) = 0, \quad \forall t \in (0, T), \quad (2.3c)$$

$$\theta_0 \alpha_0 u(t, 0) - (1 - \theta_0)\nu \partial_y u(t, 0) = 0, \quad \forall t \in (0, T) \quad (2.3d)$$

a hledáme řešení ve tvaru $u(t, y) = c(t)v(y)$. Rovnice (2.3a) má pak tvar

$$c'(t)v(y) - \nu c(t)v''(y) = -g(t). \quad (2.4)$$

Okrajová podmínka (2.3c) implikuje

$$\theta_h(\alpha_h c(t)v(h) + \beta_h c'(t)v'(h)) = -(1 - \theta_h)\nu c(t)v'(h). \quad (2.5)$$

Pro jednoduchost uvažujme $\theta_h \in (0, 1)$, zatímco na spodní desce uvažujme $\theta_0 = 0$ nebo $\theta_0 = 1$, což odpovídá i později studovaným případům. Z (2.3d) tak dostáváme

$$\theta_0 = 0 \implies v'(0) = 0 \quad \text{nebo} \quad \theta_0 = 1 \implies v(0) = 0. \quad (2.6)$$

Nyní vynásobíme (2.4) funkcí v , integrujeme přes y od 0 do h , použijeme integraci per partes, využijeme (2.5) a (2.6) a dostaneme

$$\begin{aligned} c'(t) \left[\int_0^h v^2(y) dy + \frac{\beta_h \theta_h}{1 - \theta_h} v^2(h) \right] + c(t) \left[\nu \int_0^h (v'(y))^2 dy + \frac{\alpha_h \theta_h}{1 - \theta_h} v^2(h) \right] \\ = - \int_0^h g(t)v(y) dy =: z(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

¹Pro Couettovo proudění $g(t) = 0$, pro Poisseuilleovo proudění $w(t) = 0$.

Pokud by funkce v splňovala podmínku

$$\nu \int_0^h (v'(y))^2 dy + \frac{\alpha_h \theta_h}{1 - \theta_h} v^2(y) = \Lambda \left(\int_0^h v^2(y) dy + \frac{\beta_h \theta_h}{1 - \theta_h} v^2(h) \right), \quad (2.8)$$

kde $\Lambda > 0$, tak se (2.7) redukuje na obyčejnou diferenciální rovnici

$$c'(t) + \Lambda c(t) = z(t) \quad \text{s } c(0) = 0, \quad (2.9)$$

kde počáteční podmínka plyne z (2.3b). Úloha (2.8) nás vede na úlohu na vlastní čísla, přičemž se jako přirozená jeví integrální formulace: nalézt $\Lambda_i > 0$ a ω_i , $i = 1, 2, \dots$, tak, že

$$\nu \int_0^h \omega_i'(y) \varphi(y) dy + \frac{\alpha_h \theta_h}{1 - \theta_h} \omega_i(h) \varphi(h) = \lambda_i \left(\int_0^h \omega_i(y) \varphi(y) dy + \frac{\beta_h \theta_h}{1 - \theta_h} \omega_i(h) \varphi(h) \right)$$

pro všechna $\varphi : (0, h) \rightarrow \mathbb{R}$ hladká. Nalezení $\{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ se budeme věnovat v dalších částech podrobněji ve čtyřech konkrétních situacích. Budeme pak řešení psát ve tvaru nekonečné řady $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) \omega_i(t)$, aniž bychom blíže specifikovali konvergenci těchto řad. Řešení lze také hledat ve tvaru konečné sumy $\sum_{i=1}^N c_i(t) \omega_i(t)$, které je také využíváno v ilustrativních simulacích a které chápeme jako konečně-rozměrnou aproximaci hledaného řešení.

2.2 Couettovo proudění se statickými okrajovými podmínkami

Začneme jednoduchým případem Couettova proudění se statickými okrajovými podmínkami. Spodní deska zůstává v klidu a horní se pohybuje rychlostí $w_\delta(t) = \min\{\frac{t}{\delta}, 1\}$, $0 < \delta \ll 1$. Jako okrajové podmínky budeme předpokládat, že nedochází ke skluzu a tedy

$$u(t, 0) = 0 \quad \text{v } (0, T), \quad (2.10a)$$

$$u(t, h) = w_\delta \quad \text{v } (0, T). \quad (2.10b)$$

Vidíme, že pro $t \geq \delta$ se horní deska pohybuje s konstantní rychlostí $u(t, h) = 1$ a očekáváme, že nalezené řešení bude pro $t \rightarrow \infty$ konvergovat ke stacionárnímu řešení $u(y) = \frac{y}{h}$. V této části se pokusíme vyjasnit, jak pracovat s nehomogenní Dirichletovou podmínkou (2.10b).

Řešení budeme hledat ve tvaru

$$u = \tilde{u} + U$$

kde

$$U(t, y) = \frac{w_\delta(t)}{h} y.$$

Rovnice (2.2) má po dosazení podobu

$$\partial_t \tilde{u} - \nu \partial_{yy} \tilde{u} = -\frac{w_\delta'}{h} y \quad (2.11)$$

Jak již bylo řečeno v části 2.1, řešení budeme hledat ve tvaru $u(t, y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t)u_i(t)$. Označme $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ bázi prostoru $W = C^2((0, h)) \cap c([0, h])$ splňující

$$-u_i''(y) = \lambda_i^2 u_i(y), \quad y \in (0, h), \quad (2.12a)$$

$$u_i(0) = 0, \quad (2.12b)$$

$$u_i(h) = 0, \quad (2.12c)$$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \int_0^h \nu u_i' u_j' dy = \delta_{ij}. \quad (2.12d)$$

Z (2.12a) a (2.12b) dostáváme

$$u_i(y) = A_i \sin(\lambda_i y), \quad (2.13)$$

přičemž bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A_i, \lambda_i > 0$. Z (2.12c) plyne

$$A_i \sin(\lambda_i h) = 0 \implies \sin(\lambda_i h) = 0 \implies \lambda_i \in \left\{ k \frac{\pi}{h} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (2.14)$$

Koeficient A_i můžeme vypočítat z (2.12d):

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^h \nu A_i^2 \lambda_i^2 \cos^2(\lambda_i y) dy = \nu A_i^2 \lambda_i^2 \frac{2h\lambda_i + \sin(2h\lambda_i)}{4\lambda_i} \\ &= \frac{1}{2} \nu A_i^2 \lambda_i^2 h \implies A_i = \sqrt{\frac{2}{\nu h \lambda_i^2}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Integrální verze (2.2) byla již odvozena v sekci 2.1, viz (2.7). V tomto případě ale místo (2.2) máme (2.11) a integrální rovnice má tedy tvar

$$\begin{aligned} \int_0^h \sum_{i=1}^{\infty} c_i' u_i u_j + \nu \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i' u_j' dy &= - \int_0^h \frac{w_\delta'}{h} y u_j dy \\ \sum_{i=1}^{\infty} c_i' \int_0^h u_i u_j dy + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_0^h \nu u_i' u_j' dy &= - \int_0^h \frac{w_\delta'}{h} y u_j dy \end{aligned}$$

Prostřední integrál je definice skalárního součinu (2.12d) a proto je roven δ_{ij} . K úpravě prvního integrálu použijeme (2.12c), (2.12b) a per partes:

$$\int_0^h u_i u_j dy = -\frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^h u_i'' u_j dy = -\frac{1}{\lambda_i^2} \left([u_i' u_j]_0^h - \int_0^h u_i' u_j' dy \right) = \frac{1}{\lambda_i^2 \nu} \delta_{ij}.$$

Integrál na pravé straně rovnice upravíme podobným způsobem:

$$\begin{aligned} - \int_0^h \frac{w_\delta'}{h} y u_j dy &= \frac{w_\delta'}{h \lambda_j^2} \int_0^h y u_j'' dy = \frac{w_\delta'}{h \lambda_j^2} \left([y u_j']_0^h - \int_0^h u_j'' dy \right) \\ &= \frac{w_\delta'}{h \lambda_j^2} (h u_j'(h) - u_j'(h) + u_j'(0)) = \frac{w_\delta'}{h \lambda_j^2} (h u_j'(h) + u_j'(0) - u_j'(h)) \end{aligned}$$

Dostáváme tedy následující diferenciální rovnici pro c_j :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_j^2 \nu} c_j' + c_j &= \frac{w_\delta'}{h \lambda_j^2} (h u_j'(h) + u_j'(0) - u_j'(h)) \\ \frac{1}{\lambda_j^2 \nu} \left(c_j(t) e^{\lambda_j^2 \nu t} \right)' &= \frac{w_\delta'}{h \lambda_j^2} (h u_j'(h) + u_j'(0) - u_j'(h)) e^{\lambda_j^2 \nu t} \end{aligned}$$

Tuto rovnici můžeme jednoduše vyřešit

$$\begin{aligned}
c_j(t) &= e^{-\lambda_j^2 \nu t} \frac{\nu}{h} (hu'_j(h) + u'_j(0) - u'_j(h)) \int_0^t w'_\delta e^{\lambda_j^2 \nu \tau} d\tau \\
&= e^{-\lambda_j^2 \nu t} \frac{\nu}{h} (hu'_j(h) + u'_j(0) - u'_j(h)) \frac{1}{\delta \lambda_j^2 \nu} (e^{\lambda_j^2 \nu t} - 1) \quad t < \delta, \\
c_j(t) &= e^{-\lambda_j^2 \nu t} \frac{\nu}{h} (hu'_j(h) + u'_j(0) - u'_j(h)) \left(\int_0^\delta w'_\delta e^{\lambda_j^2 \nu \tau} d\tau + \int_\delta^t w'_\delta e^{\lambda_j^2 \nu \tau} d\tau \right) \\
&= e^{-\lambda_j^2 \nu t} \frac{\nu}{h} (hu'_j(h) + u'_j(0) - u'_j(h)) \frac{1}{\delta \lambda_j^2 \nu} (e^{\lambda_j^2 \nu \delta} - 1) \quad t \geq \delta.
\end{aligned}$$

Nyní už můžeme napsat výsledné řešení:

$$\tilde{u}(t, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i^2 \nu t} (hu'_i(h) + u'_i(0) - u'_i(h)) \frac{1}{h \delta \lambda_i^2} (e^{\lambda_i^2 \nu t} - 1) u_i(y), & t \in (0, \delta), \\ \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i^2 \nu t} (hu'_i(h) + u'_i(0) - u'_i(h)) \frac{1}{h \delta \lambda_i^2} (e^{\lambda_i^2 \nu \delta} - 1) u_i(y), & t \in [\delta, \infty). \end{cases} \quad (2.16)$$

Toto řešení zřejmě konverguje k nulovému řešení, tedy $\tilde{u} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{u} \equiv 0$.

Nalezli jsme tedy funkci \tilde{u} takovou, že $\tilde{u} + U$ řeší naši rovnici se zvolenými okrajovými podmínkami.

2.3 Couettovo proudění s dynamickými okrajovými podmínkami I

Nyní budeme oproti předcházející kapitole předpokládat dynamické okrajové podmínky. Příklad, který je níže vyřešen, byl již částečně vyřešen v (Maringová, 2019, kapitola 2, s. 23-28). My ale uvažujeme obecnější okrajovou podmínku na horní desce (původní text neobsahuje parametr θ) a obecnou viskozitu (v původním textu je $\nu = 1$) a použijeme jiný skalární součin.

Stejně jako v předchozím příkladu předpokládejme, že se horní deska pohybuje rychlostí $w_\delta = \min\{1, \frac{t}{\delta}\}$, $\delta > 0$.

Na horní desce budeme předpokládat obecnou okrajovou podmínku (1.18)

$$\theta(\alpha(u - w_\delta) + \beta \partial_t(u - w_\delta)) + (1 - \theta)\nu \partial_y u = 0 \quad \text{v } (0, T) \times (0, h),$$

přičemž budeme předpokládat, že $\theta \in (0, 1)$. Na spodní desce budeme uvažovat případ, kdy nedochází ke skluzu a tedy

$$u = 0 \quad \text{v } (0, T) \times (0, h).$$

Celý náš systém je tedy možné formulovat následujícím způsobem:

$$\partial_t u - \nu \partial_{yy} u = 0, \quad \text{v } (0, T) \times (0, h), \quad (2.17a)$$

$$u(0, y) = 0, \quad \text{v } (0, h), \quad (2.17b)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad \text{v } (0, T), \quad (2.17c)$$

$$\theta(\alpha(u - w_\delta) + \beta \partial_t(u - w_\delta)) + (1 - \theta)\nu \partial_y u = 0, \quad \text{v } (0, T) \times \{h\}. \quad (2.17d)$$

Pokusíme se najít řešení (2.17a) ve tvaru řady na prostoru $W = C^2((0, h)) \cap C([0, h])$. Označme $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ bázi tohoto prostoru splňující

$$-\nu u_i'' = \nu \lambda_i^2 u_i, \quad y \in (0, h), \quad (2.18a)$$

$$\theta \alpha u_i(h) + \nu(1 - \theta) u_i'(h) = \lambda_i^2 \theta \beta u_i(h), \quad (2.18b)$$

$$u_i(0) = 0 \quad (2.18c)$$

$$\langle u_i, u_j \rangle_V := \int_0^h \nu \partial_y u_i \partial_y u_j dy + \frac{\theta \alpha}{1 - \theta} u_i(h) u_j(h) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}. \quad (2.18d)$$

Z (2.18a) a (2.18c) plyne, že

$$u_i(y) = A_i \sin(\lambda_i y), \quad (2.19)$$

přičemž bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A_i, \lambda_i > 0$. Z (2.18b) a (2.19) dostáváme

$$\begin{aligned} \theta \alpha A_i \sin(\lambda_i h) + \nu(1 - \theta) A_i \lambda_i \cos(\lambda_i h) &= \lambda_i^2 \theta \beta A_i \sin(\lambda_i h) \\ \theta(\alpha - \beta \lambda_i^2) \sin(\lambda_i h) &= -\nu(1 - \theta) \lambda_i \cos(\lambda_i h), \end{aligned} \quad (2.20)$$

což můžeme spolu s (2.18d) využít k tomu, že spočítáme koeficient A_i :

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_i \rangle &= A_i^2 \int_0^h \nu \lambda_i^2 \cos(\lambda_i y) dy + \frac{\theta \alpha}{1 - \theta} A_i^2 \sin^2(\lambda_i h) \\ &= A_i^2 \lambda_i^2 \nu \frac{1}{2} \left[y + \frac{\sin(\lambda_i y) \cos(\lambda_i y)}{\lambda_i} \right]_0^h + \frac{\theta \alpha}{1 - \theta} A_i^2 \sin^2(\lambda_i h) \\ &= \frac{A_i^2 \lambda_i^2 \nu}{2} \left(h + \frac{\theta(\lambda_i^2 \beta - \alpha)}{\nu(1 - \theta) \lambda_i} \sin^2(\lambda_i h) \right) + \frac{\theta \alpha}{1 - \theta} A_i^2 \sin^2(\lambda_i h) \\ &= A_i^2 \left(\frac{\lambda_i^2 \nu h}{2} + \frac{\theta(\lambda_i^2 \beta + \alpha) \sin^2(\lambda_i h)}{2(1 - \theta)} \right) \\ \implies A_i &= \left(\frac{\lambda_i^2 \nu h}{2} + \frac{\theta(\lambda_i^2 \beta + \alpha) \sin^2(\lambda_i h)}{2(1 - \theta)} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Integrální verze rovnice (2.17a) již byla odvozena v části 2.1, viz (2.7). Oproti odvození v části 2.1 ale uvažujeme pohybuující se horní desku, což se projeví na pravé straně rovnice.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty} c_i'(t) \left(\int_0^h u_i u_j dy + \frac{\theta \beta}{1 - \theta} u_i(h) u_j(h) \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) \left(\int_0^h \nu u_i' u_j' dy + \frac{\theta \alpha}{1 - \theta} u_i(h) u_j(h) \right) = \frac{\theta}{1 - \theta} (\alpha w_\delta(t) + \beta w_\delta'(t)) u_j(h). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Druhý integrál v rovnici (2.22) není nic jiného než definice skalárního součinu (2.18d) a proto je roven δ_{ij} . První integrál upravíme pomocí (2.18a), (2.18b) a per partes.

$$\begin{aligned} &\int_0^h u_i u_j dy + \frac{\theta \beta}{1 - \theta} u_i(h) u_j(h) = -\frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^h u_i'' u_j dy + \frac{\theta \beta}{1 - \theta} u_i(h) u_j(h) \\ &= -\frac{1}{\lambda_i^2} u_i'(h) u_j(h) + \frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^h u_i' u_j' dy + \frac{\theta \beta}{1 - \theta} u_i(h) u_j(h) \\ &= \frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^h u_i' u_j' dy + \frac{\theta \alpha}{\lambda_i^2 \nu (1 - \theta)} u_i(h) u_j(h) = \frac{1}{\lambda_i^2 \nu} \delta_{ij} \end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_j^2 \nu} c_j'(t) + c_j(t) &= \frac{\theta}{1-\theta} (\alpha w_\delta(t) + \beta w_\delta'(t)) u_j(h) \\ \frac{1}{\lambda_j^2 \nu} (c_j(t) e^{\lambda_j^2 \nu t})' &= \frac{\theta}{1-\theta} (\alpha w_\delta(t) + \beta w_\delta'(t)) u_j(h) e^{\lambda_j^2 \nu t}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

jejíž řešení má následující podobu:

$$\begin{aligned} c_j(t) &= \frac{\theta \nu}{1-\theta} u_j(h) \lambda_j^2 e^{-\lambda_j^2 \nu t} \int_0^t \frac{\alpha \tau + \beta}{\delta} e^{\lambda_j^2 \nu \tau} d\tau \\ &= \frac{\theta u_j(h)}{(1-\theta)\delta} \left(\alpha t + \beta + \frac{-\alpha + \alpha e^{-\lambda_j^2 \nu t} - \beta \lambda_j^2 e^{-\lambda_j^2 \nu t}}{\lambda_j^2 \nu} \right) \\ &= \frac{\theta u_j(h)}{(1-\theta)\delta} \left(\alpha t - (\alpha - \beta \lambda_j^2 \nu) \frac{e^{-\lambda_j^2 \nu t} - 1}{-\lambda_j^2 \nu} \right) \quad \text{pro } t < \delta \\ c_j(t) &= \frac{\theta \nu}{1-\theta} u_j(h) \lambda_j^2 e^{-\lambda_j^2 \nu t} \left(\int_0^\delta \frac{\alpha \tau + \beta}{\delta} e^{\lambda_j^2 \nu \tau} d\tau + \int_\delta^t \alpha e^{\lambda_j^2 \nu \tau} d\tau \right) \\ &= \frac{\theta u_j(h)}{(1-\theta)\delta} e^{-\lambda_j^2 \nu t} \left(\alpha \delta e^{\lambda_j^2 \nu \delta} + (\beta - \frac{\alpha}{\lambda_j^2 \nu}) (e^{\lambda_j^2 \nu \delta} - 1) + \alpha \delta \frac{e^{\lambda_j^2 \nu t} - e^{\lambda_j^2 \nu \delta}}{\lambda_j^2 \nu} \right) \\ &= \frac{\theta}{1-\theta} u_j(h) \left(\alpha + (\beta \lambda_j^2 \nu - \alpha) e^{-\lambda_j^2 \nu t} \frac{e^{\lambda_j^2 \nu \delta} - 1}{\lambda_j^2 \nu \delta} \right) \quad \text{pro } t \geq \delta \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nyní už můžeme napsat výsledné řešení:

$$u(t, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta}{(1-\theta)\delta} \left(\alpha t + (\beta \lambda_i^2 \nu - \alpha) \frac{e^{-\lambda_i^2 \nu t} - 1}{-\lambda_i^2 \nu} \right) u_i(h) u_i(y) & t \in (0, \delta), \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta}{1-\theta} \left(\alpha + (\beta \lambda_i^2 \nu - \alpha) \frac{e^{\lambda_i^2 \nu (\delta-t)} - e^{-\lambda_i^2 \nu t}}{\lambda_i^2 \nu \delta} \right) u_i(h) u_i(y) & t \in [\delta, \infty). \end{cases} \quad (2.25)$$

Podívejme se na chování řešení pro $y = h$ a $\delta \rightarrow 0^+$. Z (2.20) dostáváme

$$\sin^2(\lambda_i h) = \frac{\nu^2 (1-\theta)^2 \lambda_i^2}{\lambda_i^2 \nu^2 (1-\theta)^2 + \theta^2 (\beta \lambda_i^2 - \alpha)^2}.$$

Spolu s předpisem pro bázi (2.19), (2.21), limitou $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda_i^2 \delta} - 1}{\lambda_i^2 \delta} = 1$ a vzorcem pro řešení (2.25) dostáváme

$$\begin{aligned} u(t, h) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta}{1-\theta} \left(\alpha + (\beta \lambda_i^2 \nu - \alpha) e^{-\lambda_i^2 \nu t} \right) u_i^2(h) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta}{1-\theta} \frac{2\lambda_i^2 \nu^2 (1-\theta)^2 + 2\theta^2 (\beta \lambda_i^2 - \alpha)^2}{\lambda_i^2 h \nu (\lambda_i^2 \nu^2 (1-\theta)^2 + \theta^2 (\beta \lambda_i^2 - \alpha)^2) + \theta (\lambda_i^2 \beta + \alpha) \nu^2 (1-\theta) \lambda_i^2} \\ &\quad \frac{\nu^2 (1-\theta)^2 \lambda_i^2}{\lambda_i^2 \nu (1-\theta)^2 + \theta^2 (\beta \lambda_i^2 - \alpha)^2} (\alpha + (\beta \lambda_i^2 \nu - \alpha) e^{-\lambda_i^2 \nu t}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\theta \nu (1-\theta)}{h (\lambda_i^2 \nu^2 (1-\theta)^2 + \theta^2 (\beta \lambda_i^2 - \alpha)^2) + \theta (\lambda_i^2 \beta + \alpha) \nu (1-\theta)} \\ &\quad (\alpha + (\beta \lambda_i^2 \nu - \alpha) e^{-\lambda_i^2 \nu t}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Tento vzorec je pro $\theta = \frac{1}{2}$ a $\nu = 1$ totožný se vzorcem v Maringová (2019).

Na závěr se podíváme na konvergenci našeho řešení k řešení stacionárnímu. Označme si proto funkci $\bar{u}(y) = Ay$, kde A je konstanta. V naší bázi ji můžeme vyjádřit jako $\bar{u}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{c}_i u_i(y)$. Ke spočítání koeficientů využijeme toho, že $\langle \bar{u}, u_i \rangle = \bar{c}_i$. S použitím definice skalárního součinu (2.18d) tedy dostáváme

$$\bar{c}_i = \int_0^h \nu A A_i \lambda_i \cos(\lambda_i y) dy + \frac{\theta \alpha}{1 - \theta} A h A_i \sin(\lambda_i h) = u_i(h) A \left(\frac{\theta \alpha h}{1 - \theta} + \nu \right).$$

Pro určení konstanty A se podíváme na rozdíl našeho a stacionárního řešení pro $t \rightarrow \infty$.

$$u(t, y) - \bar{u}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} (c_i(t) - \bar{c}_i) u_i(y) \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\theta \alpha}{1 - \theta} - A \left(\frac{\theta \alpha h}{1 - \theta} + \nu \right) \right) u_i(h) u_i(y).$$

Vidíme tedy, že rozdíl půjde k nule pro $A = \frac{\theta \alpha}{\theta \alpha h + \nu(1 - \theta)}$ a tedy $u(t, y) \rightarrow \bar{u}(y) = \frac{\theta \alpha}{\theta \alpha h + \nu(1 - \theta)} y$. Toto stacionární řešení můžeme nalézt i v tabulce 1.1.

2.3.1 Simulace

V této sekci provedeme několik simulací chování na horní desce, přičemž budeme uvažovat $\nu = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$ a $h = \pi$. Nejdříve se ale podíváme na rozložení vlastních čísel. Definujme si pro každé i pomocnou funkci $f_i : [0, \frac{2\pi}{h}] \rightarrow \mathbb{R}$ následujícím předpisem:

$$f_i(y) = \left(\alpha - \beta \left(y + i \frac{2\pi}{h} \right)^2 \right) \sin(yh) + \left(y + i \frac{2\pi}{h} \right) \cos(yh). \quad (2.27)$$

Takto definované funkce jsou spojité a platí pro ně, že $\lim_{y \rightarrow 0^+} f_0(y) = 0$, $f_i(\frac{\pi}{h}) = -(2i+1)\frac{\pi}{h} < 0$ a $f_i(\frac{2\pi}{h}) = f_{i+1}(0) = (i+1)\frac{2\pi}{h} > 0$. Tedy pro každý interval $(i\frac{2\pi}{h}, (i+1)\frac{2\pi}{h})$ platí, že existují alespoň 2 řešení rovnice $f_i(y) = 0$. Zároveň z

$$f_i(y) = 0 \iff \cot(yh) = \beta \left(y + i \frac{2\pi}{h} \right) - \frac{\alpha}{y + i \frac{2\pi}{h}}$$

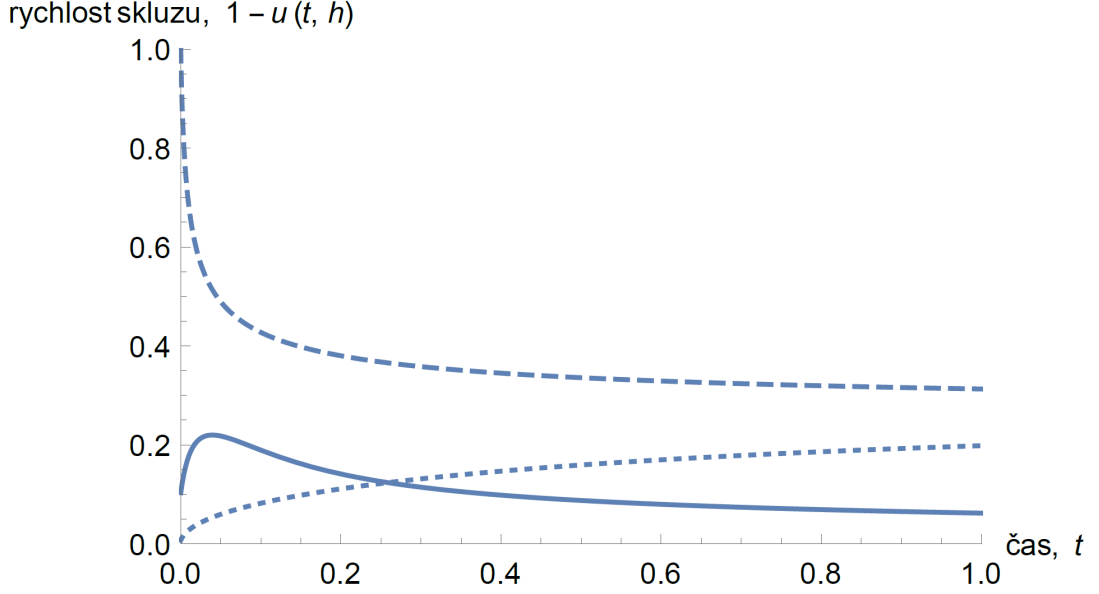
dostáváme, že řešení mohou být nejvýše dvě, protože funkce na pravé straně je rostoucí a kotangens je klesající na $(0, \frac{\pi}{h})$ a $(\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h})$. Celkem tedy pro každé přirozené i existuje právě jedno $\lambda_i \in ((i-1)\frac{\pi}{h}, i\frac{\pi}{h})$, které splňuje (2.20).

Z tvaru řešení (2.25) plyne, že největší vliv na řešení mají nejmenší vlastní čísla, tedy ta s malým indexem i . V numerických simulacích proto budeme počítat pouze prvních 10 vlastních čísel a členy příslušné ostatním vlastním číslům zanedbáme.

Nyní se už můžeme podívat na numerické simulace. Nejdříve uvedeme prvních deset vypočítaných vlastních čísel λ_i (čísla budou uříznuta, ne zaokrouhlena) a poté ukážeme grafy pro $1 - u(t, h)$, což odpovídá $w_\delta(t) - u(t, h)$ pro $\delta \rightarrow 0^+$.

Na obrázku 2.1 studujeme chování pro krátké časy, konečný čas T je proto roven 1. V první simulaci jsme volili $\alpha = 1$ a $\beta = 4$. Prvních deset vlastních čísel λ_i je přibližně rovno

$$\{0,5; 1,089; 2,041; 3,026; 4,020; 5,016; 6,013; 7,011; 8,009; 9,008\}.$$



Obrázek 2.1: Srovnání rychlosti skluzu $1 - u(t, h)$ pro různé hodnoty α a β . Tečkovaná čára představuje $(\alpha, \beta) = (1, 4)$, plná čára $(\alpha, \beta) = (10; 0,5)$ (dva příklady dynamického skluzu) a čárkovaná čára reprezentuje $(\alpha, \beta) = (10, 0)$ (Navierův skluz).

Pro druhou simulaci jsme zvolili $\alpha = 10$ a $\beta = 5$. Výpočet prvních deseti vlastních čísel dopadl takto:

$$\{0,967; 1,926; 2,856; 3,720; 4,493; 5,293; 6,189; 7,137; 8,108; 9,089\}.$$

V posledním případě bylo α nastaveno na 10 a β na 0, což odpovídá Navierovu skluzu. Prvních deset vlastních čísel:

$$\{0,969; 1,939; 2,909; 3,882; 4,856; 5,831; 6,809; 7,789; 8,770; 9,753\}.$$

Druhá simulace ukazuje vliv β na skluz a konvergenci. Hodnota parametru α byla zvolena jako 30. V obrázku 2.2 je vidět porovnání grafů $1 - u(t, h)$ pro $\beta \in \{5, 30, 150\}$ a stacionárního řešení $\bar{u}(h) = \frac{\alpha h}{\alpha h + 1}$. Prvních 10 vypočítaných vlastních čísel je přibližně rovno:

$$\begin{aligned} \{0,987; 1,944; 2,461; 3,057; 4,025; 5,016; 6,012; 7,010; 8,008; 9,007\} & \text{ pro } \beta = 5, \\ \{0,929; 1,073; 2,007; 3,003; 4,002; 5,002; 6,001; 7,001; 8,001; 9,001\} & \text{ pro } \beta = 30, \\ \{0,447; 1,002; 2,001; 3,000; 4,000; 5,000; 6,000; 7,000; 8,000; 9,000\} & \text{ pro } \beta = 30. \end{aligned}$$

2.4 Couettovo proudění s dynamickými okrajovými podmínkami II

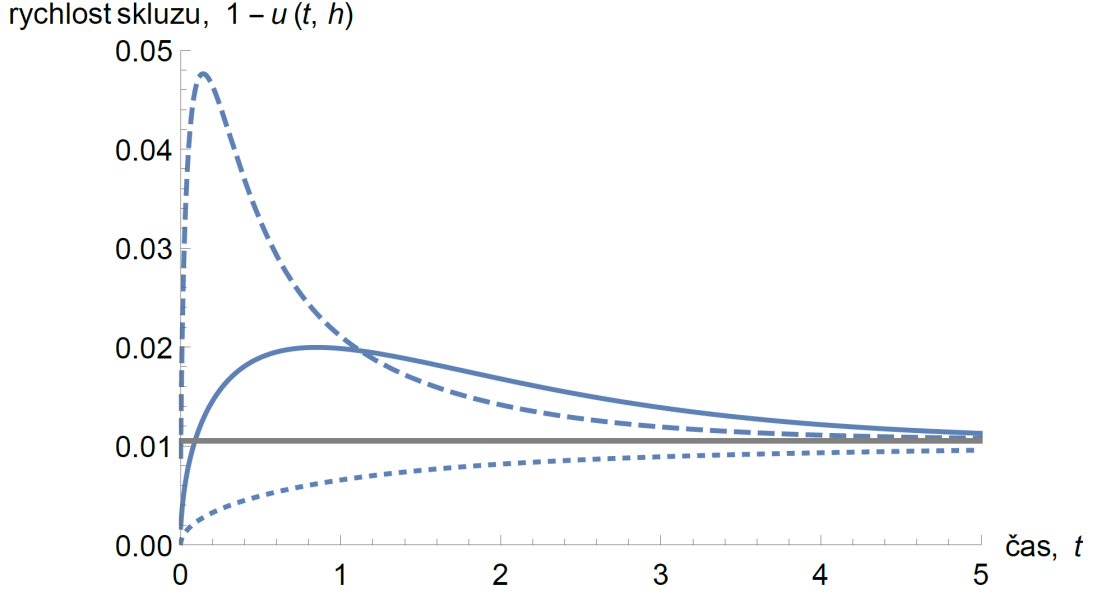
Nyní budeme místo podmínky $u = 0$ na spodní desce uvažovat podmínku $(\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau = \mathbf{0}$, tedy případ, kdy tekutina po desce volně klouže. Pomocí funkce u pak můžeme celý systém formulovat následujícím způsobem:

$$\partial_t u - \nu \partial_{yy} u = 0 \quad \text{v } (0, T) \times (0, h), \quad (2.28a)$$

$$u(0, y) = 0 \quad \text{v } (0, h), \quad (2.28b)$$

$$\partial_y u(t, 0) = 0 \quad \text{v } (0, T), \quad (2.28c)$$

$$\theta(\alpha(u - w_\delta) + \beta \partial_t(u - w_\delta)) + (1 - \theta)\nu \partial_y u = 0 \quad \text{v } (0, T) \times \{h\}. \quad (2.28d)$$



Obrázek 2.2: Srovnání rychlosti skluzu $1 - u(t, h)$ pro fixní hodnotu $\alpha = 30$ a různé hodnoty β . Čárkovaná čára představuje $\beta = 5$, plná čára $\beta = 30$ a tečkovaná čára reprezentuje $\beta = 150$.

Jako prostor budeme volit $W = C^2(0, h) \cap C([0, h])$ se skalárním součinem $\langle v_1, v_2 \rangle = \int_0^h \nu \partial_y v_1 \partial_y v_2 dy + \frac{\theta \alpha}{1 - \theta} v_1(h) v_2(h)$. Označme $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ bázi W splňující

$$-\nu u_i'' = \nu \lambda_i^2 u_i, \quad \text{v } (0, h) \quad (2.29a)$$

$$\theta \alpha u_i(h) + \nu(1 - \theta) u_i'(h) = \lambda_i^2 \theta \beta u_i(h), \quad (2.29b)$$

$$u_i'(0) = 0 \quad (2.29c)$$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \int_0^h \nu \partial_y u_i \partial_y u_j dy + \frac{\theta \alpha}{1 - \theta} u_i(h) u_j(h) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}. \quad (2.29d)$$

Z (2.29a) a (2.29c) plyne, že

$$u_i = B_i \cos(\lambda_i y).$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $B_i, \lambda_i > 0$. Z (2.29b) plyne

$$\theta(\alpha - \beta \lambda_i^2) \cos(\lambda_i h) = \lambda_i \nu (1 - \theta) \sin(\lambda_i h). \quad (2.30)$$

Analogicky jako v (2.21) použitím definice skalárního součinu a (2.29d) dostáváme

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_i \rangle &= B_i^2 \left(\int_0^h \nu \lambda_i^2 \sin^2(\lambda_i y) dy + \frac{\theta \alpha}{1 - \theta} \cos^2(\lambda_i^2 h) \right) \\ &= B_i^2 \left(\frac{\lambda_i^2 \nu h}{2} + \frac{\theta(\alpha + \beta \lambda_i^2) \cos^2(\lambda_i h)}{2(1 - \theta)} \right) \\ \implies B_i &= \left(\frac{\lambda_i^2 \nu h}{2} + \frac{\theta(\alpha + \beta \lambda_i^2) \cos^2(\lambda_i h)}{2(1 - \theta)} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Integrální verze (2.28a) již byla odvozena v části 2.1 Úvodní úvahy. Podobně jako v předchozím příkladě je jediným rozdílem pohyb horní desky. Výsledná

rovnice má proto podobu

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} c_i'(t) \left(\int_0^h u_i u_j dy + \frac{\theta\beta}{1-\theta} u_i(h) u_j(h) \right) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) \left(\int_0^h \nu u_i' u_j' dy + \frac{\theta\alpha}{1-\theta} u_i(h) u_j(h) \right) = \frac{\theta}{1-\theta} (\alpha w_\delta(t) + \beta w_\delta'(t)) u_j(h). \end{aligned}$$

Další výpočet je stejný jako v předcházejícím případě a proto ho pouze slovně popíšeme. Vhodnou úpravou integrálů dostaneme diferenciální rovnici pro koeficienty c_j

$$\frac{1}{\lambda_j^2 \nu} \left(c_j(t) e^{\lambda_j^2 \nu t} \right)' = \frac{\theta}{1-\theta} (\alpha w_\delta(t) + \beta w_\delta'(t)) u_j(h) e^{\lambda_j^2 \nu t}, \quad (2.32)$$

jejíž řešení má následující podobu:

$$\begin{aligned} c_j(t) &= \frac{\theta u_j(h)}{(1-\theta)\delta} \left(\alpha t - (\alpha - \beta \lambda_j^2 \nu) \frac{e^{-\lambda_j^2 \nu t} - 1}{-\lambda_j^2 \nu} \right) \quad \text{pro } t < \delta \\ c_j(t) &= \frac{\theta}{1-\theta} u_j(h) \left(\alpha + (\beta \lambda_j^2 \nu - \alpha) e^{-\lambda_j^2 \nu t} \frac{e^{\lambda_j^2 \nu \delta} - 1}{\lambda_j^2 \nu \delta} \right) \quad \text{pro } t \geq \delta \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nyní už můžeme napsat výslednou podobu řešení:

$$u(t, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta}{(1-\theta)\delta} \left(\alpha t + (\beta \lambda_i^2 \nu - \alpha) \frac{e^{-\lambda_i^2 \nu t} - 1}{-\lambda_i^2 \nu} \right) u_i(h) u_i(y) & t \in (0, \delta), \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta}{1-\theta} \left(\alpha + (\beta \lambda_i^2 \nu - \alpha) e^{-\lambda_i^2 \nu t} \frac{e^{\lambda_i^2 \nu \delta} - 1}{\lambda_i^2 \nu \delta} \right) u_i(h) u_i(y) & t \in [\delta, \infty). \end{cases} \quad (2.34)$$

Stejně jako v minulé sekci se podíváme na chování řešení na horní desce. Nechtě tedy $y = h$ a $\delta \rightarrow 0^+$. Z (2.30) dostáváme

$$\cos^2(\lambda_i h) = \frac{\lambda_i^2 \nu^2 (1-\theta)^2}{\theta^2 (\alpha - \beta \lambda_i^2)^2 + \lambda_i^2 \nu^2 (1-\theta)^2}.$$

Využijeme-li tento vztah spolu s (2.31) ve vzorci pro naše řešení (2.34), pak nám vyjde

$$\begin{aligned} u(t, h) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta}{1-\theta} \left(\alpha + (\beta \lambda_i^2 \nu - \alpha) e^{-\lambda_i^2 \nu t} \right) u_i^2(h) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\theta^2 (\alpha - \beta \lambda_i^2)^2 + 2\lambda_i^2 \nu^2 (1-\theta)^2}{\lambda_i^2 \nu h (\theta^2 (\alpha - \beta \lambda_i^2)^2 + \lambda_i^2 \nu^2 (1-\theta)^2) + \theta (\alpha + \beta \lambda_i^2) \lambda_i^2 \nu^2 (1-\theta)} \\ &\quad \frac{\lambda_i^2 \nu^2 (1-\theta)}{\theta^2 (\alpha - \beta \lambda_i^2)^2 + \lambda_i^2 \nu^2 (1-\theta)^2} \theta \left(\alpha + (\beta \lambda_i^2 \nu - \alpha) e^{-\lambda_i^2 \nu t} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\theta \nu (1-\theta)}{h (\lambda_i^2 \nu^2 (1-\theta)^2 + \theta^2 (\beta \lambda_i^2 - \alpha)^2) + \theta (\lambda_i^2 \beta + \alpha) \nu (1-\theta)} \\ &\quad \left(\alpha + (\beta \lambda_i^2 \nu - \alpha) e^{-\lambda_i^2 \nu t} \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Tento vzorec je totožný s (2.26).

Na závěr se podíváme na konvergenci ke stacionárnímu řešení. Definujme si konstantní funkci $\bar{u} = A, A \in \mathbb{R}$. Tuto funkci můžeme v naší bázi vyjádřit jako $\bar{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{c}_i u_i(y)$. Pro určení koeficientů využijeme definici skalárního součinu:

$$\langle \bar{u}, u_i \rangle = \bar{c}_i = \frac{\theta\alpha}{1-\theta} A u_i(h).$$

Konstantu A určíme tím, že se podíváme na chování rozdílu $u(t, y) - \bar{u}(y)$ pro $t \rightarrow \infty$:

$$u(t, y) - \bar{u}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} (c_i(t) - \bar{c}_i) u_i(y) \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\theta\alpha}{1-\theta} u_i(h) - \frac{\theta\alpha}{1-\theta} A u_i(h) \right) u_i(y).$$

Rozdíl tedy jde k nule, pokud $A = 1$. Naše řešení tedy konverguje ke stacionárnímu řešení $\bar{u}(y) = 1$. Toto stacionární řešení odpovídá stacionárnímu řešení z tabulky 1.1.

2.4.1 Simulace

Tato část bude velmi podobná minulé sekci o numerické simulaci. I zde nás bude zajímat vliv parametrů α a β na chování tekutiny na horní desce. Pro porovnání vlivu podmínky na spodní desce na proudění budeme uvažovat stejné hodnoty parametrů, jako v minulé simulaci. Nechtě tedy $\nu = 1, \theta = \frac{1}{2}$ a $h = \pi$.

Znovu se nejprve podíváme na rozložení vlastních čísel λ_i . Definujme pomocné funkce $f_i : [0, \frac{2\pi}{h}] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f_i(y) = \left(\beta \left(y + i \frac{2\pi}{h} \right)^2 - \alpha \right) \cos(yh) + \left(y + i \frac{2\pi}{h} \right) \sin(yh).$$

Tyto funkce jsou zřejmě spojité a splňují, že $f_0(0) = -\alpha$ a $f_i(\frac{2\pi}{h}) = f_{i+1}(0)$. Zároveň platí, že $f_i(\frac{\pi}{2h}) = (\frac{\pi}{2h} + i \frac{2\pi}{h})$ a $f_i(\frac{3\pi}{2h}) = -(\frac{3\pi}{2h} + i \frac{2\pi}{h})$. Tedy na každém intervalu $(i \frac{2\pi}{h} + \frac{\pi}{2h}, i \frac{2\pi}{h} + \frac{3\pi}{2h})$ existuje alespoň jedno y , že $f_i(y) = 0$. Takové y je právě jedno, jak můžeme vidět z následujícího výrazu:

$$f_i(y) = 0 \iff \tan(yh) = -\frac{\beta \left(y + i \frac{2\pi}{h} \right)^2}{y + i \frac{2\pi}{h}} + \frac{\alpha}{y + i \frac{2\pi}{h}}.$$

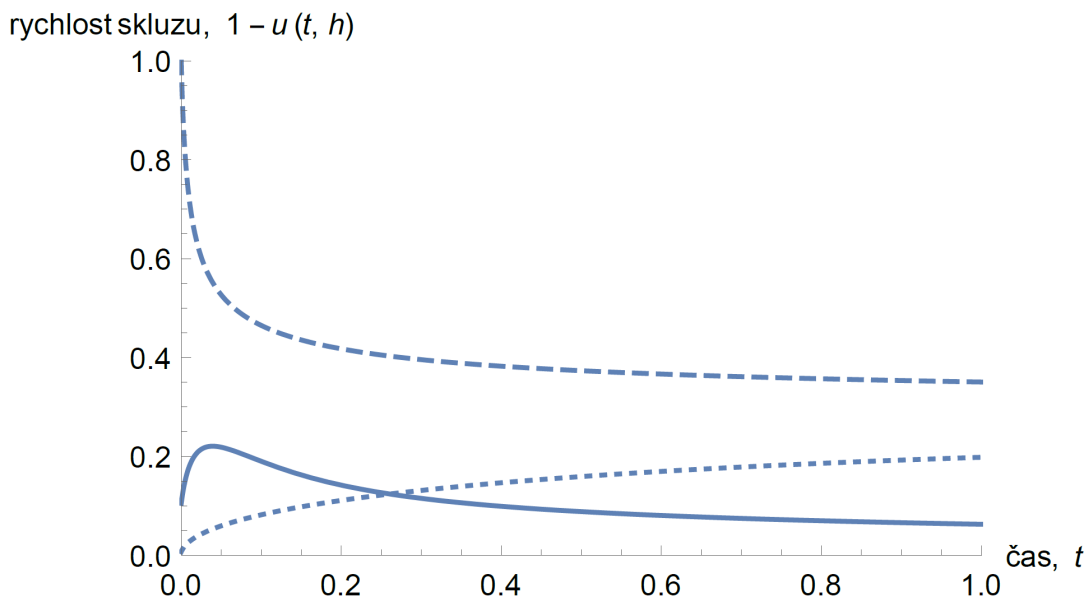
Tangens je rostoucí na intervalu $(\frac{\pi}{2h}, \frac{3\pi}{2h})$, zatímco funkce na pravé straně je klesající pro každé i . Celkem tedy dostáváme, že pro $i \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno $\lambda_i \in (i \frac{2\pi}{h} - \frac{3\pi}{2h}, i \frac{2\pi}{h} - \frac{\pi}{2h})$, které splňuje (2.30).

Z těchto úvah tedy vyplývá, že vlastní čísla jsou seřazena dle velikosti. Z tvaru řešení (2.34) plyne, že větší vlastní čísla mají na výsledné řešení menší vliv. V numerických simulacích se proto omezíme pouze na prvních 10 vlastních čísel a ostatní zanedbáme.

Nyní se podíváme na samotné simulace. Struktura bude stejná jako v minulé sekci o numerické simulaci. Celkem uvedeme 6 různých simulací chování tekutiny na horní desce, přičemž pro každou uvedeme hodnoty parametrů α a β a prvních 10 vlastních čísel (desetinná část není zaokrouhlena, ale odsekuta).

V prvních třech simulacích, viz obrázky 2.3, zkoumáme vliv různých hodnot parametrů na chování v krátkém času a proto $T = 1$. Nejdříve jsme zvolili $\alpha = 10$ a $\beta = 0$. Vlastní čísla vyšla následovně:

$$\{0,484; 1,454; 2,424; 3,395; 4,368; 5,343; 6,320; 7,299; 8,279; 9,262\}$$



Obrázek 2.3: Porovnání rychlosti skluzu $1 - u(t, h)$ pro různé hodnoty α a β . Čárkovaná čára představuje $\alpha = 0$ a $\beta = 0$, plná čára $\alpha = 10$, $\beta = 0,5$ a tečkovaná čára reprezentuje $\alpha = 1$ a $\beta = 4$.

V druhém případě bylo α rovno 10 a β 0,5. Vlastní čísla v tomto případě jsou přibližně rovna

$$\{0,484; 1,448; 2,396; 3,300; 4,113; 4,881; 5,731; 6,659; 7,621; 8,598\}.$$

A na závěr jsme zvolili $\alpha = 1$ a $\beta = 4$. Vlastní čísla:

$$\{0,330; 0,700; 1,556; 2,532; 3,523; 4,517; 5,514; 6,512; 7,510; 8,509\}.$$

V dalších 3 simulacích, viz obrázek 2.4, nás zajímá vliv parametru β na proudění. α je proto vždy rovno 30 a parametr β nabývá hodnot 5, 30 a 150. Pro lepší znázornění konvergence ke stacionárnímu řešení je $T = 7$. Vypočítaná vlastní čísla jsou rovna:

$$\begin{aligned} \{0,494; 1,475; 2,308; 2,651; 3,534; 4,519; 5,514; 6,511; 7,509; 8,508\} & \quad \beta = 5 \\ \{0,493; 1,151; 2,505; 3,503; 4,502; 5,501; 6,501; 7,501; 8,501\} & \quad \beta = 30 \\ \{0,432; 0,516; 1,501; 2,500; 3,500; 4,500; 5,500; 6,500; 7,500; 8,500\} & \quad \beta = 150 \end{aligned}$$

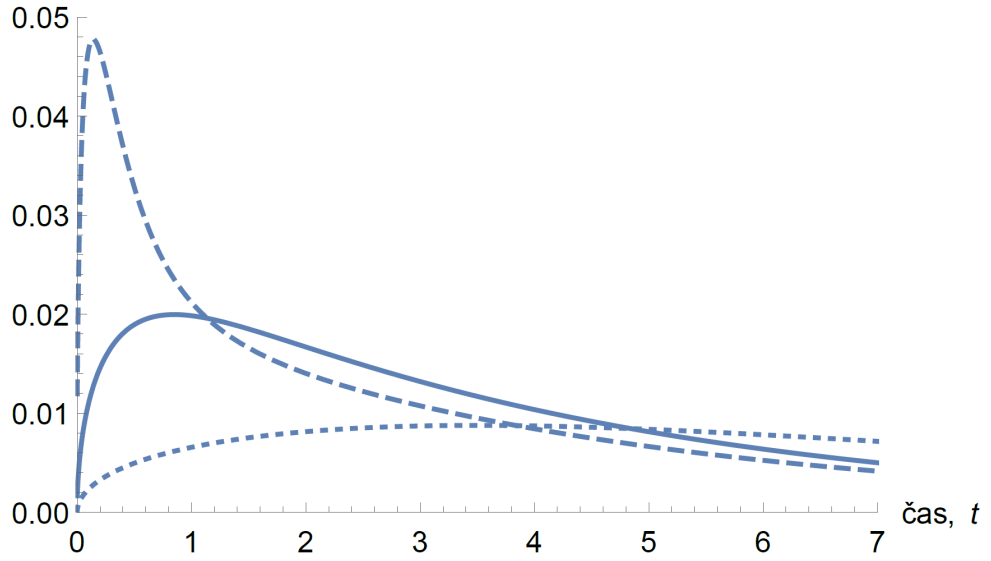
2.5 Poiseuilleovo proudění se statickými okrajovými podmínkami

V poslední části se podíváme na Poiseuilleovo proudění. Budeme předpokládat, že tlakový gradient má tvar $g_\delta(t) = \min\{1, \frac{t}{\delta}\}$, $\delta > 0$.

Jako okrajové podmínky pro obě desky budeme uvažovat, že tekutina na deskách ulpívá a tedy

$$u(t, 0) = u(t, h) = 0 \quad t \in (0, T).$$

rychlost skluzu, $1 - u(t, h)$



Obrázek 2.4: Porovnání vlivu parametru β na rychlost skluzu $1 - u(t, h)$. Parametr α je ve všech třech případech roven 30. Čárkovaná čára představuje $\beta = 5$, plná $\beta = 30$ a tečkovaná $\beta = 150$.

Definujme ortonormální bázi na prostoru W následujícím způsobem:

$$-\nu u_i'' = \lambda_i^2 \nu u_i, \quad y \in (0, h), \quad (2.36a)$$

$$u_i(0) = 0, \quad (2.36b)$$

$$u_i(h) = 0, \quad (2.36c)$$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \int_0^h \nu u_i' u_j' dy = \delta_{ij}. \quad (2.36d)$$

Z (2.36a) a (2.36b) plyne, že báze funkce u_i jsou tvaru

$$u_i(y) = A_i \sin(\lambda_i y),$$

kde A_i a λ_i jsou konstanty, přičemž bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsou kladné. Z (2.36c) dostáváme

$$A_i \sin(\lambda_i h) = 0 \implies \lambda_i h \in \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \implies \lambda_i \in \left\{ \frac{k}{h} \pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Koeficient A_i lze spočítat z (2.36d). Výpočet jsme již provedli v části věnované Couettovu proudění se statickými okrajovými podmínkami (viz (2.15)) a proto zde uvedeme pouze výsledný tvar:

$$A_i = \sqrt{\frac{2}{\nu h \lambda_i^2}}.$$

Integrální verzi rovnice (1.16) byla částečně odvozena v části (2.1) Úvodní úvahy, viz (??). Jediným rozdílem je funkce $-g_\delta$ na pravé straně rovnice. Rovnice má tedy tvar

$$\int_0^h \sum_{i=1}^{\infty} c_i' u_i u_j + \nu \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i' u_j' dy = - \int_0^h g_\delta u_j dy. \quad (2.37)$$

Další výpočet je obdobný jako v části 2.2 věnované Couettovu proudění se statickými okrajovými podmínkami a proto pouze stručně okomentujeme postup. Jediný rozdíl je ve funkci na pravé straně integrální rovnice (2.37). Integrály vyskytující se v rovnici upravíme a dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro c_i .

$$-\int_0^h g_\delta(t) u_j(y) dy = g_\delta(t) \frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^h u_j'' dy = g_\delta(t) \frac{1}{\lambda_i^2} (u_j'(h) - u_j'(0))$$

Po dosazení do integrální rovnice (2.37) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_j^2 \nu} c_j' + c_j &= g_\delta(t) \frac{1}{\lambda_i^2} (u_j'(h) - u_j'(0)) \\ \frac{1}{\nu} (c_j(t) e^{\lambda_j^2 \nu t})' &= g_\delta(t) (u_j'(h) - u_j'(0)) e^{\lambda_j^2 \nu t}. \end{aligned}$$

Řešení této rovnice má následující tvar:

$$\begin{aligned} c_j(t) &= e^{-\lambda_j^2 \nu t} \nu (u_j'(h) - u_j'(0)) \int_0^t \frac{\tau}{\delta} e^{\lambda_j^2 \nu \tau} d\tau \\ &= e^{-\lambda_j^2 \nu t} \frac{\nu}{\delta} (u_j'(h) - u_j'(0)) \left(t \frac{e^{\lambda_j^2 \nu t}}{\lambda_j^2 \nu} - (e^{\lambda_j^2 \nu t} - 1) \right) \\ &= \frac{\nu}{\delta} (u_j'(h) - u_j'(0)) \left(\frac{t}{\lambda_j^2 \nu} + e^{-\lambda_j^2 \nu t} - 1 \right), \quad t < \delta, \\ c_j(t) &= e^{-\lambda_j^2 \nu t} \nu (u_j'(h) - u_j'(0)) \left(\int_0^\delta \frac{\tau}{\delta} e^{\lambda_j^2 \nu \tau} d\tau + \int_\delta^t e^{\lambda_j^2 \nu \tau} d\tau \right) \\ &= e^{-\lambda_j^2 \nu t} \nu (u_j'(h) - u_j'(0)) \left(\frac{e^{\lambda_j^2 \nu \delta}}{\lambda_j^2 \nu} - (e^{\lambda_j^2 \nu \delta} - 1) + \frac{e^{\lambda_j^2 \nu t}}{\lambda_j^2 \nu} - \frac{e^{\lambda_j^2 \nu \delta}}{\lambda_j^2 \nu} \right) \\ &= e^{-\lambda_j^2 \nu t} \nu (u_j'(h) - u_j'(0)) \left(\frac{e^{\lambda_j^2 \nu t}}{\lambda_j^2 \nu} - (e^{\lambda_j^2 \nu \delta} - 1) \right), \quad t \geq \delta. \end{aligned}$$

Výsledné řešení má tedy podobu

$$u(t, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu}{\delta} (u_i'(h) - u_i'(0)) \left(\frac{t}{\lambda_i^2 \nu} + e^{-\lambda_i^2 \nu t} - 1 \right) u_i(y), & t < \delta, \\ \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i^2 \nu t} \nu (u_i'(h) - u_i'(0)) \left(\frac{e^{\lambda_i^2 \nu t}}{\lambda_i^2 \nu} - (e^{\lambda_i^2 \nu \delta} - 1) \right) u_i(y), & t \geq \delta. \end{cases}$$

Naposledy se podíváme na konvergenci ke stacionárnímu řešení. Označme $\bar{u}(y) = Ay^2 + By$, $A, B \in \mathbb{R}$. Vůči bázi můžeme tuto funkci vyjádřit jako $\bar{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{c}_i u_i$. Využitím definice skalárního součinu (2.36d), okrajových podmínek (2.36c) a (2.36b) a per partes dostáváme

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, u_i \rangle &= \bar{c}_i = \int_0^h \nu (2Ay + B) A_i \lambda_i \cos(\lambda_i y) dy = 2\nu A A_i \int_0^h y \lambda_i \cos(\lambda_i y) dy \\ &\quad + \nu B (u_i(h) - u_i(0)) = 2\nu A A_i \left([y \sin(\lambda_i y)]_0^h - \int_0^h \sin(\lambda_i y) dy \right) \\ &= 2\nu A A_i \left(\frac{\cos(\lambda_i h)}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_i} \right) = 2\nu A \frac{1}{\lambda_i^2} (u_i'(h) - u_i'(0)) \end{aligned}$$

Podívejme se nyní na rozdíl $u - \bar{u}$ pro $t \rightarrow \infty$:

$$u - \bar{u} = \sum_{i=1}^{\infty} (c_i - \bar{c}_i) u_i \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_i^2 \nu} - e^{-\lambda_i^2 \nu t} (e^{\lambda_i^2 \nu \delta - 1}) - \frac{2A}{\lambda_i^2} \right) \nu (u_i'(h) - u_i'(0)) u_i(y).$$

Vidíme, že rozdíl vymizí pro $\frac{1}{\nu} = 2A$, z čehož vyplývá, že $A = \frac{1}{2\nu}$. Koeficient B dopočítáme z podmínky $\bar{u}(h) = 0$:

$$Ah^2 + Bh = 0 \implies B = \frac{-Ah^2}{h} = -\frac{h}{2\nu}.$$

Řešení tedy konverguje ke stacionárnímu řešení $\bar{u}(y) = \frac{1}{2\nu} y(y - h)$, což odpovídá řešení z tabulky 1.2.

2.6 Závěr

V práci jsme studovali rovinné Couettovo a Poisseuilleovo proudění, která představují dva typy proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami. Důraz byl věnován nestandardním a doposud málo studovaným dynamickým okrajovým podmínkám.

První kapitola obsahuje obecný popis proudění nestlačitelné newtonovské tekutiny v omezené nepropustné třírozměrné oblasti, formulaci dynamických okrajových podmínek, energetickou bilanci a redukci rovnic, okrajových a počátečních podmínek pro proudění ve zjednodušené geometrii (proudění mezi deskami).

Druhá kapitola obsahuje řešení čtyř specifických úloh. Jednu pro Poisseuilleovo a tři pro Couettovo proudění, z nichž ty, které se týkají dynamických okrajových podmínek na horní desce, jsou doplněny numerickými simulacemi. Studované příklady je možné dále zobecnit.

Mohli bychom například uvažovat, místo námi uvažovaného ulpívání a dokonalého skluzu, obecnou dynamickou podmínku na spodní desce, nebo řešit úlohu s pohybující se nejenom horní, ale i spodní deskou. Otevřené také zůstalo řešení obecnějšího Couette-Poiseuilleovo proudění.

Jak bylo naznačeno v sekci 2.1, bylo by přirozenější řešit úlohu v Lebesgueových a Sobolevových prostorech. Toto rozšíření přesahovalo rámec a rozsah této práce.

Seznam použité literatury

- FEFFERMAN, C. L. (2006). Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. In *The millennium prize problems*, pages 57–67. Clay Math. Inst., Cambridge, MA.
- HATZIKIRIAKOS, S. G. a DEALY, J. M. (1991). Wall slip of molten high density polyethylene. I. Sliding plate rheometer studies. *Journal of Rheology*, **35**(4), 497–523. doi: 10.1122/1.550178. URL <https://doi.org/10.1122/1.550178>.
- HRON, J., LE ROUX, C., MÁLEK, J. a RAJAGOPAL, K. (2008). Flows of Incompressible Fluids subject to Navier’s slip on the boundary. *Computers & Mathematics with Applications*, **56**, 2128–2143. doi: 10.1016/j.camwa.2008.03.058.
- MARINGOVÁ, E. (2019). *Mathematical analysis of models arising in continuum mechanics with implicitly given rheology and boundary conditions*. PhD thesis, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova.
- PEARSON, J. R. A. a PETRIE, C. J. S. (1965). On the melt-flow instability of extruded polymers. In *Proceedings of the Fourth International Congress on Rheology, Part 3*, pages 265–282.

Seznam obrázků

1.1	Ilustrace volby souřadnicových os u proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami. Dvě rovnoběžné desky jsou vzdálené o h , přičemž u Couettova proudění se horní pohybuje rychlostí $\mathbf{w} = (w, 0, 0)$, což způsobuje proudění tekutiny o rychlosti \mathbf{v} , které pak hledáme ve speciálním tvaru $\mathbf{v} = (u, 0, 0)$; tlak je konstantní. U Poiseuilleova proudění je $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ a proudění je generováno tlakovým spádem.	8
2.1	Srovnání rychlosti skluzu $1 - u(t, h)$ pro různé hodnoty α a β . Tečkovaná čára představuje $(\alpha, \beta) = (1, 4)$, plná čára $(\alpha, \beta) = (10; 0,5)$ (dva příklady dynamického skluzu) a čárkovaná čára reprezentuje $(\alpha, \beta) = (10, 0)$ (Navierův skluz).	20
2.2	Srovnání rychlosti skluzu $1 - u(t, h)$ pro fixní hodnotu $\alpha = 30$ a různé hodnoty β . Čárkovaná čára představuje $\beta = 5$, plná čára $\beta = 30$ a tečkovaná čára reprezentuje $\beta = 150$	21
2.3	Porovnání rychlosti skluzu $1 - u(t, h)$ pro různé hodnoty α a β . Čárkovaná čára představuje $\alpha = 0$ a $\beta = 0$, plná čára $\alpha = 10$, $\beta = 0,5$ a tečkovaná čára reprezentuje $\alpha = 1$ a $\beta = 4$	24
2.4	Porovnání vlivu parametru β na rychlost skluzu $1 - u(t, h)$. Parametr α je ve všech třech případech roven 30. Čárkovaná čára představuje $\beta = 5$, plná $\beta = 30$ a tečkovaná $\beta = 150$	25

Seznam tabulek

- 1.1 V této tabulce jsou ukázány řešení stacionární úlohy Couettova proudění pro některé speciální hodnoty parametrů θ_0 a θ_h 11
- 1.2 Tato tabulka obsahuje stacionární řešení Poiseuilleova proudění pro hodnoty parametrů θ_0 a θ_h , které dále použijeme. 11