MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

David Žárský

Arrowovy věty o rozporech veřejné volby

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Tímto mnohokrát děkuji doc. Daliboru Pražákovi za jeho ochotu, cenné připomínky a čas věnovaný vedení této práce.

Název práce: Arrowovy věty o rozporech veřejné volby

Autor: David Žárský

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V roce 1950 dokázal Kenneth Arrow slavnou větu, která říká, že za určitých poměrně přirozených podmínek na volební systém už mezi voliči musí existovat diktátor. Jinými slovy, žádný volební systém není bezchybný. V této práci nejprve formalizujeme pojem volebního systému a zformulujeme podmínky, které na něj klademe. Následně vyložíme pomocnou teorii a poté přistoupíme k modernějšímu důkazu Arrowovy věty pomocí množinových ultrafiltrů. Nakonec se budeme věnovat situaci, kdy je voličů nekonečně mnoho. Ukazuje se totiž, že v takovém případě už existuje volební systém splňující veškeré naše požadavky včetně neexistence diktátora. Problém diktatury však ani v nekonečném případě zcela nemizí. Ukážeme, že za jistých podmínek namísto diktátora existuje libovolně malá diktátorská skupina a také jedinec, kterého nazveme neviditelný diktátor.

Klíčová slova: veřejná volba, diktatura, ultrafiltr, rozhodující množina

Title: Arrow's Impossibility Theorems

Author: David Žárský

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In 1950 Kenneth Arrow proved a famous theorem which states that if we impose certain rather natural conditions on an electoral system, then there must be a dictator amongst the voters. In other words, no electoral system is flawless. In this thesis we first formalise the notion of an electoral system and formulate the conditions we impose thereon. After laying out and proving the auxiliary theory, we show a more modern proof of Arrow's theorem which uses set ultrafilters. On the last pages we look into the case of infinite number of voters. In this case, it holds that there exists an electoral system fulfilling all of our requirements including nonexistence of a dictator. However, the problem of dictatorship in the infinite case doesn't completely disappear. We show that under certain circumstances instead of a dictator there exists an arbitrarily small dictatorial group as well as an individual whom we call an invisible dictator.

Keywords: social choice, dictatorship, ultrafilter, decisive set

Obsah

Úvod

Ve většině dnešních demokracií se společnost rozhoduje na základě výsledků voleb. Přímá demokracie (o každém rozhodnutí hlasují všichni občané s volebním právem) jako taková neexistuje v žádném státě. Namísto toho se praktikuje zastupitelská demokracie (občané ve volbách zvolí své zástupce, jejichž náplní práce je právě činit společenská rozhodnutí) s prvky přímé demokracie (o jistých otázkách rozhodují všichni občané v tzv. referendu), přičemž míra přímé participace občanů je napříč státy různá. Ať už o daném společenském rozhodnutí hlasují všichni občané, nebo jejich dříve zvolení zástupci, vždy jde o volby, v nichž se určitý počet lidí rozhoduje mezi několika alternativami.

Přirozeně se nabízí otázka, které volební systémy jsou dobré či špatné. Jako příklad uvažujme jednoduchý systém, ve kterém společnost při volbě mezi dvěma alternativami zvolí tu z nich, kterou si přeje většina voličů. Řekněme, že probíhá hlasování o nepodmíněném základním příjmu (pravidelná peněžní dávka vyplácená ve stejné výši všem lidem a bez jakýchkoli podmínek). Alternativami mohou být například zavedení základního příjmu (A), nezavedení základního příjmu (B) a jeho zavedení, ale v různé výši pro různé skupiny lidí (C). Předpokládejme, že se ve společnosti (případně mezi zastupiteli, kteří o tomto hlasují) vytvořily tři názorové skupiny.

Skupina 1, kterou tvoří 40 % voličů, je pro zavedení základního příjmu, a tak upřednostňuje alternativu A. Pokud by tato alternativa nebyla k dispozici, tak by raději základní příjem nezaváděli (B), než aby pak docházelo ke svárům mezi jednotlivými skupinami dostávajícími různý měsíční obnos (C). Preference této skupiny dohromady zapišme jako $A \succ B \succ C$. Relace $\succ$ je zřejmě tranzitivní, takže platí i $A \succ C$.

Skupina 2, tvořená rovněž 40 % voličů, zastává názor, že by si na sebe měl každý vydělávat sám svou prací, takže základní příjem nepovažují za férový a nezavedli by ho v žádné podobě, tudíž ze všech alternativ preferují B. Jako horší alternativu pak vidí zavedení různě vysokého základního příjmu pro různé skupiny (například podle dosavadní pracovní historie, která podle nich alespoň zčásti reflektuje to, kolik peněz si kdo zaslouží), tedy alternativu C, zatímco úplně nejhorší je podle nich platit všem stejný obnos peněz (A). Preference této skupiny je tedy $B \succ C \succ A$.

Zbylých 20 % voličů ve skupině 3 se domnívá, že nejlepším řešením je základní příjem zavést, ale v rozdílné výši pro různé skupiny lidí, pročež preferují C. Jako případnou druhou nejlepší alternativu pak raději vidí platit všem stejně (A) a nejméně oblíbeným je u nich nezavedení žádného základního příjmu (B). Tato skupina tudíž preferuje $C \succ A \succ B$.

Celková situace vypadá takto:

Skupina	Podíl	Preference
1	40 %	$A \succ B \succ C$
2	40 %	$B \succ C \succ A$
3	20 %	$C \succ A \succ B$

Protože 60 % voličů upřednostňuje alternativu A před B, společnost musí také upřednostnit A před B. Plných 80 % voličů pak preferuje B před C, tudíž i společnost musí preferovat B před C. Dohromady tak ve společnosti musí platit $A \succ B \succ C$.

Zároveň ale platí, že 60 % voličů upřednostňuje C před A a taktéž 60 % voličů preferuje A před B. Preference společnosti tak musí být též $C \succ A \succ B$. Obdobně lze ukázat, že ve společnosti musí platit také $B \succ C \succ A$.

Pokud uvažujeme, že společnost by měla zavést nejvíce preferovanou alternativu, tak nám právě vyšlo, že „by měly být zavedeny všechny tři alternativy najednou“. Jde o příklad tzv. *Condorcetova paradoxu.* Ačkoliv se tak systém, ve kterém společnost při volbě mezi dvěma alternativami vybere tu, kterou upřednostňuje většina voličů, může zdát dobrý, v některých případech, které reálně mohou nastat, selhává. Podaří se nám najít nějaký jiný systém, který neselže nikdy?

Zásadní matematickou větou odpovídající na tuto otázku je tzv. Arrowova věta pojmenovaná po americkém ekonomovi a matematikovi Kennethu Arrowovi. V tomto textu ukážeme důkaz Arrowovy věty poprvé dokázané v článku [1] a jejího zobecnění pro nekonečně mnoho voličů dokázaného Peterem Fishburnem v článku [2]. Využijeme však elegantnější přístup z článku [3] Alana Kirmana a Dietera Sondermanna, ve kterém je jak Arrowova, tak i Fishburnova věta dokázána pomocí téže teorie, a to pomocí ultrafiltrů. Kirman se Sondermannem navíc v článku [3] dokázali ještě další tvrzení týkající se veřejné volby v případě nekonečně mnoha voličů, která zde rovněž uvedeme.

Z hlediska matematického je tudíž cílem tohoto textu zejména vyložit veškerou pomocnou teorii potřebnou k pochopení článku [3] a detailně rozpracovat důkazy vět z tohoto článku, které jsou místy poměrně stručné. Myšlenky důkazů veškerých tvrzení, která jsou v této práci označena jako „věty“, pocházejí právě z článku [3]. Dále si tento text klade za cíl čtenáři poskytnout komentář objasňující to, jaké důsledky plynou z dokázaných vět pro volby ve společnosti.

1. Základní definice, značení a formulace problému

V dalším budeme písmenem V značit množinu všech voličů a písmenem X množinu všech alternativ, které jsou na výběr. V celém textu budeme předpokládat, že V je neprázdná.

Množinové operace budeme zapisovat následovně:

- Potenční množinu množiny A budeme psát jako $\mathcal{P}(A)$.
- Kardinalitu (mohutnost) množiny A budeme značit $|A|$.
- Zápisem A^{c} budeme rozumět doplněk množiny A.
- Sjednocení, průnik a rozdíl množin A a B budeme psát po řadě jako $A \cup B, A \cap B$ a $A \setminus B$.
- Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin. Zápisem $\bigcup \mathcal{A}$ budeme rozumět sjednocení všech množin v $\mathcal{A}$, zatímco $\bigcap \mathcal{A}$ bude znamenat průnik všech množin v $\mathcal{A}$.

Symbolem $\neg$ budeme značit operátor negace výroku.

Dále potřebujeme nějak matematicky zapsat, že daný člověk či celá společnost upřednostňuje jednu alternativu před jinou. K tomu nám poslouží tzv. *relace ostré preference.* Při zkoumání preferencí se obvykle definují celkem tři binární relace, přičemž relace ostré preference je jednou z nich.

Definice 1. *Binární relaci R na X nazveme **relací neostré preference**, pokud splňuje:*

- $\forall\, x, y \in X : xRy \vee yRx.$ *(úplnost)*
- $\forall\, x, y \in X : (xRy \wedge yRz) \implies xRz.$ *(tranzitivita)*

*Dále definujeme **relaci ostré preference** P na X předpisem $xPy \equiv \neg\,(yRx)$ a **relaci indiference** I na X předpisem $xIy \equiv (xRy \wedge yRx)$.*

Relace neostré preference R znamená „x je upřednostňováno před nebo je stejně oblíbeno jako y“, relace ostré preference P říká „x je upřednostňováno před y“ a relace indiference (můžeme říci též lhostejnosti) praví „alternativy x a y jsou stejně oblíbeny“, neboli dotyčnému jedinci či společnosti je jedno, která z alternativ x a y bude vybrána.

Dále v tomto textu však budeme používat alternativní definici relace ostré preference.

Definice 2. *Binární relaci P na X nazveme **relací ostré preference**, pokud splňuje:*

- $\forall\, x, y \in X : xPy \implies \neg\,(yPx).$ *(antisymetrie)*
- $\forall\, x, y \in X : \neg\,(xPy) \wedge\ \neg\,(yPz) \implies \neg\,(xPz).$ *(negativní tranzitivita)*

Lemma 1. *Definice 1 a 2 relace ostré preference jsou ekvivalentní.*

Důkaz. • *1* $\Rightarrow$ *2* : Mějme relaci neostré preference R a příslušnou relaci ostré preference P z definice 1. Nechť $x, y \in X$ jsou libovolné. Z definice P víme, že platí $xPy \implies \neg(yRx)$. Z úplnosti R máme $\neg(yRx) \implies xRy$, což můžeme zapsat jako $\neg(\neg(xRy))$. To z definice P znamená, že platí $\neg(yPx)$. Tedy P je antisymetrická.

Nechť nyní $x, y, z \in X$ jsou libovolná a nechť platí $\neg(xPy)$ a $\neg(yPz)$. Z definice P dostáváme $\neg(xPy) \wedge \neg(yPz) \implies \neg(\neg(yRx)) \wedge \neg(\neg(zRy))$, a tedy $yRx \wedge zRy$. Díky tranzitivitě R platí $yRx \wedge zRy \implies zRx$, což lze zapsat také jako $\neg(\neg(zRx))$. Nyní použijeme definici P a dostaneme, že platí $\neg(xPz)$. Tím je dokázána negativní tranzitivita P.

• *2* $\Rightarrow$ *1* : Nyní mějme relaci ostré preference P z definice 2. Ukážeme, že relace R definovaná jako $yRx \equiv \neg(xPy)$ splňuje axiomy definice 1. Nejprve dokážeme platnost podmínky $\forall x, y \in X : xRy \vee yRx$, která je ekvivalentní podmínce $\forall x, y \in X : \neg(yPx) \vee \neg(xPy)$. Nechť toto pro spor neplatí, tj. existují $x, y \in X$ taková, že $yPx \wedge xPy$. Z antisymetrie P máme $xPy \implies \neg(yPx)$. Zároveň ale víme, že platí yPx, což je spor.

Nechť $x, y, z \in X$ jsou libovolná a nechť platí $xRy \wedge yRz$, což lze ekvivalentně zapsat jako $\neg(yPx) \wedge \neg(zPy)$. Z negativní tranzitivity P plyne $\neg(zPx)$, což z definice dává xRz. Tedy R je tranzitivní.

□

Lemma 2. *Každá relace ostré preference P na X splňuje:*

$$\forall x, y, z \in X : xPy \implies (xPz \vee zPy). \tag{1.1}$$

$$\forall x, y, z \in X : (xPy \wedge yPz) \implies xPz. \tag{1.2}$$

$$\forall x, y, z \in X : [\neg(yPx) \wedge yPz] \vee [xPy \wedge \neg(zPy)] \implies xPz. \tag{1.3}$$

Důkaz. • (1.1): Nechť $x, y, z \in X$ jsou libovolné tři alternativy. Z negativní tranzitivity P máme $\neg(xPz) \wedge \neg(zPy) \implies \neg(xPy)$. Přechodem k obměněné implikaci dostáváme $\neg(\neg(xPy)) \implies \neg(\neg(xPz)) \vee \neg(\neg(zPy))$, neboli platí $xPy \implies (xPz \vee zPy)$.

• (1.2): Nechť pro spor existují alternativy $x, y, z \in X$ takové, že xPy a yPz a $\neg(xPz)$. Z (1.1) víme $xPy \implies (xPz \vee zPy)$.

Je-li xPz, potom zároveň platí xPz a $\neg(xPz)$, což je spor.

Pokud zPy, pak z antisymetrie P dostáváme $\neg(yPz)$. Zároveň však platí yPz, což je spor. Obě možnosti xPz a zPy vedou ke sporu, čímž je tato část dokázána.

• (1.3): Nechť pro dané tři alternativy $x, y, z \in X$ platí $[\neg(yPx) \wedge yPz]$ nebo $[xPy \wedge \neg(zPy)]$.

Pokud platí výrok v první hranaté závorce, pak z tvrzení (1.1) použitého na fakt yPz dostáváme $yPx \vee xPz$. Možnost yPx nastat nemůže, poněvadž víme, že platí $\neg(yPx)$, a tudíž nutně xPz.

Jestliže platí výrok ve druhé hranaté závorce, pak opět z tvrzení (1.1) použitého tentokráte na xPy dostáváme $xPz \vee zPy$. Varianta zPy nastat nemůže, jelikož platí $\neg(zPy)$, takže nutně xPz.

□

Množinu všech relací ostré preference na X budeme značit $\mathcal{P}$.

Dále se nám bude hodit funkce $f : V \to \mathcal{P}$, která jako vstup dostane daného voliče a jejímž výstupem bude jemu příslušná relace ostré preference. Množinu všech takových funkcí budeme značit F.

Funkce $f \in F$ zcela popisuje preference všech voličů ve společnosti (chceme-li znát preference voliče v, stačí se podívat na relaci $f(v)$), proto jí budeme říkat také *situace (ve společnosti)*.

Definice 3. *Nechť $f, g \in F$ a $x, y \in X$.*

- *Nechť $U \subseteq V$. Řekneme, že $xf(U)y$, jestliže $\forall\, v \in U : xf(v)y$.*
- *Nechť $v \in V$. Řekneme, že $f(v) = g(v)$ na $\{x, y\}$, jestliže platí následující: $[xf(v)y \iff xg(v)y] \wedge [yf(v)x \iff yg(v)x]$.*
- *Řekneme, že $f = g$ na $\{x, y\}$, jestliže $\forall\, v \in V : f(v) = g(v)$ na $\{x, y\}$.*

Zápis $xf(U)y$ jinými slovy říká, že všichni voliči v množině U upřednostňují v situaci f alternativu x před y. Skutečnost $f(v) = g(v)$ na $\{x, y\}$ znamená, že názor voliče v na to, kterou z alternativ x a y upřednostnit, je v situacích f a g stejný. Obdobně zápis $f = g$ na $\{x, y\}$ praví, že každý volič $v \in V$ má v situaci f stejný názor na volbu mezi alternativami x a y jako v situaci g.

Naším cílem je na základě preferencí všech voličů vytvořit relaci ostré preference celé společnosti, která už v sobě obsahuje veškeré potřebné informace k následnému uskutečnění společenské volby. Hledáme tedy funkci σ, která dané situaci $f \in F$ (neboli dané kombinaci preferencí jednotlivých voličů) přiřadí relaci ostré preference $\sigma(f) \in \mathcal{P}$ (jaké preference by měla zaujmout společnost). Tuto funkci budeme nazývat *volebním systémem*.

Poznamenejme, že funkci σ se v anglickojazyčné literatuře povětšinou říká *social welfare function*, tedy *funkce společenského blahobytu*. Pokud totiž předpokládáme, že blahobyt společnosti jako celku se odvíjí od blahobytu všech jejích členů a že k dosažení blahobytu jedince je třeba uspokojit jeho přání, tak se na funkci σ můžeme dívat tak, že jejím úkolem má být co nejlépe uspokojit přání všech voličů a tím maximalizovat blahobyt společnosti.

Dále zadefinujeme slovní spojení $\sigma(f) = \sigma(g)$ na $\{x, y\}$, které znamená, že volba společnosti mezi alternativami x a y bude v situacích f a g stejná. Definice bude velmi podobná definici 3.

Definice 4. *Nechť $f, g \in F$ a $x, y \in X$. Řekneme, že $\sigma(f) = \sigma(g)$ na $\{x, y\}$, jestliže platí $[x\sigma(f)y \iff x\sigma(g)y] \wedge [y\sigma(f)x \iff y\sigma(g)x]$.*

Nyní je načase zformulovat jisté poměrně přirozené požadavky na volební systém. Předně předpokládejme, že na výběr jsou alespoň tři alternativy (nemusí jich být konečně mnoho).

$$|X| \geq 3. \tag{A1}$$

Od volebního systému bychom nejspíše čekali, že si poradí s libovolnou kombinací preferencí voličů. Ať už si jednotliví voliči alternativy podle svých preferencí uspořádají jakkoliv, volební systém by z toho vždy měl být schopen určit, jak mají být alternativy preferovány ve společnosti. Funkce σ by tudíž měla být definována pro každou situaci $f \in F$.

$$\text{Funkce } \sigma : F \to \mathcal{P} \text{ je definovaná pro všechna } f \in F. \tag{A2}$$

Rovněž se zdá rozumné požadovat, aby v případě, že všichni voliči upřednostňují jednu alternativu před druhou, také společnost upřednostnila tuto alternativu.

$$\forall\, x, y \in X \;\; \forall\, f \in F : x f(V) y \implies x \sigma(f) y. \tag{A3}$$

Preference voličů v situacích f a g mohou být jiné, takže i výsledná volba společnosti může být jiná. Pokud se ale preference jednotlivých voličů týkající se volby mezi alternativami x a y v obou situacích shodují, tak by i výsledná volba společnosti mezi alternativami x a y měla být v obou situacích stejná. Můžeme si to představit tak, že probíhá opětovné hlasování. Voliči si věc promysleli a ze starých preferencí (situace f) přešli k novým preferencím (situace g). Názor na to, kterou z alternativ x a y upřednostnit, si ale nikdo nerozmyslel. Bylo by poměrně podivné, kdyby náš volební systém po novém hlasování přesto řekl, že společnost musí mezi alternativami x a y učinit jinou volbu než předtím.

$$\forall\, x, y \in X \;\; \forall\, f, g \in F : f = g \text{ na } \{x, y\} \implies \sigma(f) = \sigma(g) \text{ na } \{x, y\}. \tag{A4}$$

Jako poslední budeme požadovat, aby mezi voliči neexistoval diktátor, který v libovolné situaci svou volbou diktuje volbu celé společnosti bez ohledu na preference ostatních voličů.

$$\nexists\, v \in V \text{ takové, že } \forall\, x, y \in X \;\; \forall\, f \in F : x f(v) y \implies x \sigma(f) y. \tag{A5}$$

Pro rozvoj teorie bude důležitá množina všech volebních systémů σ splňujících axiomy (A1) až (A4). Tuto množinu označme symbolem Σ.

2. Pomocná tvrzení

2.1 Teorie množinových ultrafiltrů

Zavedení množiny Σ nebylo samoúčelné. Jak si později ukážeme a řádně zformulujeme, ke každému volebnímu systému $\sigma \in \Sigma$ existuje právě jeden soubor $\mathcal{U}_\sigma$ podmnožin V (tedy soubor skupin voličů) zvaný ultrafiltr s tou vlastností, že libovolná skupina voličů v tomto ultrafiltru už diktuje volbu celé společnosti, to jest jakmile jistá skupina voličů v tomto ultrafiltru upřednostňuje alternativu x před y, tak už ji musí upřednostnit i celá společnost. Navíc ukážeme, že ke každému ultrafiltru $\mathcal{U}$ na V existuje (ne nutně pouze jeden) volební systém $\sigma \in \Sigma$ tak, že $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\sigma$. Pomocí ultrafiltrů na V tak velmi dobře charakterizujeme volební systémy splňující axiomy (A1) až (A4), načež už nebude příliš těžké určit, které volební systémy ze Σ splňují i axiom nediktátorství (A5).

Pro teorii v této části není ve většině případů podstatné, zda je množina V konečná či nikoliv. Nebude-li explicitně řečeno jinak, kardinalita množiny V může být libovolná.

Nejprve zaveďme pojem množinového filtru $\mathcal{F}$ na V. Podobně jako filtry v každodenním životě, množinový filtr v jistém smyslu odděluje „velké množiny“ od těch „malých“. Alespoň některé z požadavků na množinový filtr potom intuitivně dávají smysl.

Nadmnožina velké množiny je velká, neboli:

$$\forall U \in \mathcal{F} \ \ \forall W \subseteq V : U \subseteq W \implies W \in \mathcal{F}. \tag{F1}$$

Uzavřenost na konečné průniky už tolik intuitivní není, neboť není ihned vidět, proč by průnik dvou velkých množin měl být velká množina.

$$\forall U, W \in \mathcal{F} : U \cap W \in \mathcal{F}. \tag{F2}$$

Prázdná množina není velká:

$$\emptyset \notin \mathcal{F}. \tag{F3}$$

Definice 5. *Nechť $\mathcal{F}$ je neprázdný systém podmnožin V. Řekneme, že $\mathcal{F}$ je **filtr** na V, pokud splňuje* (F1)*,* (F2) *a* (F3)*.*

Požadavek neprázdnosti říká, že alespoň jedna podmnožina V je velká. Někteří autoři rovnou požadují $V \in \mathcal{F}$, což je s neprázdností ekvivalentní.

Definice 6. *Nechť $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ jsou dva filtry na V. Řekneme, že filtr $\mathcal{F}'$ je **striktně jemnější** než $\mathcal{F}$, pokud $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$.*

Definice 7. *Nechť $\mathcal{U}$ je filtr na V. Řekneme, že $\mathcal{U}$ je **ultrafiltr** na V, jestliže na V neexistuje žádný filtr striktně jemnější než $\mathcal{U}$.*

Pojem ultrafiltru je pro celou teorii velmi důležitý, a proto nás jako první budou zajímat jeho ekvivalentní definice. Pro důkaz lemmatu o charakterizaci ultrafiltru však nejprve dokažme následující pomocné lemma, které může být užitečné samo o sobě.

Lemma 3. *Nechť $\mathcal{U}$ je ultrafiltr na V, $B \subseteq V$ a $B \notin \mathcal{U}$. Potom existuje $U \in \mathcal{U}$ taková, že $B \cap U = \emptyset$.*

Důkaz. Nechť pro spor $\forall\, U \in \mathcal{U} : B \cap U \neq \emptyset$.

Označme $\mathcal{S} = \{B \cap U \mid U \in \mathcal{U}\}$.

Protože $\forall\, U \in \mathcal{U} : B \cap U \neq \emptyset$, tak $\emptyset \notin \mathcal{S}$.

Nechť nyní $B \cap U_1, B \cap U_2 \in \mathcal{S}$, kde $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ jsou libovolná. Zřejmě platí $(B \cap U_1) \cap (B \cap U_2) = B \cap (U_1 \cap U_2)$. Z (F2) plyne $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$, tudíž z definice systému $\mathcal{S}$ dostáváme $(B \cap U_1) \cap (B \cap U_2) \in \mathcal{S}$.

Systém $\mathcal{S}$ tak splňuje axiomy (F2) a (F3) definice filtru.

Nyní uvažme systém $\mathcal{S}' = \{D \subseteq V \mid \exists\, C \in \mathcal{S} : C \subseteq D\}$ všech nadmnožin prvků systému $\mathcal{S}$. Tvrdíme, že $\mathcal{S}'$ je filtr:

- $\mathcal{U}$ je filtr, tedy je neprázdný. Z toho plyne, že i $\mathcal{S}$ je neprázdný. Libovolně zvolme $S \in \mathcal{S}$. Potom $S \subseteq V \implies V \in \mathcal{S}'$. Systém $\mathcal{S}'$ je tudíž neprázdný.

- (F3): $\emptyset$ je nadmnožinou pouze prázdné množiny, ale $\emptyset \notin \mathcal{S}$, tudíž $\emptyset \notin \mathcal{S}'$.

- (F1): Nechť $D \in \mathcal{S}'$ a $D \subseteq E \subseteq V$. Chceme ukázat, že $E \in \mathcal{S}'$.

  Z definice $\mathcal{S}'$ existuje $C \in \mathcal{S}$ takové, že $C \subseteq D \subseteq E$. Tedy $\exists\, C \in \mathcal{S} : C \subseteq E$, což z definice $\mathcal{S}'$ znamená $E \in \mathcal{S}'$.

- (F2): Nechť $D', E' \in \mathcal{S}'$. Chceme $D' \cap E' \in \mathcal{S}'$.

  Z definice $\mathcal{S}'$ máme $D' \in \mathcal{S}' \implies \exists\, D \in \mathcal{S} : D \subseteq D'$. Obdobně platí také $E' \in \mathcal{S}' \implies \exists\, E \in \mathcal{S} : E \subseteq E'$. Zřejmě $D \cap E \subseteq D' \cap E'$.

  Protože už víme, že systém $\mathcal{S}$ splňuje (F2), platí $D \cap E \in \mathcal{S}$. Celkem tak $\exists\, (D \cap E) \in \mathcal{S} : (D \cap E) \subseteq (D' \cap E')$. Tudíž $D' \cap E' \in \mathcal{S}'$.

Dále ukážeme, že $\mathcal{S}'$ je striktně jemnější než $\mathcal{U}$.

Zřejmě $\forall\, U \in \mathcal{U} : (B \cap U \in \mathcal{S}$ a $B \cap U \subseteq U)$. Přímo z definice systému $\mathcal{S}'$ tak máme $U \in \mathcal{S}'$, a tedy $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}'$.

Dále $\forall\, U \in \mathcal{U} : (B \cap U \in \mathcal{S}$ a $B \cap U \subseteq B)$, tudíž $B \in \mathcal{S}'$. Jelikož $B \notin \mathcal{U}$, tak je $B \in \mathcal{S}' \setminus \mathcal{U}$.

Celkem máme $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}'$ a $B \in \mathcal{S}' \setminus \mathcal{U}$, tudíž $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{S}'$. To z definice znamená, že $\mathcal{S}'$ je striktně jemnější filtr než $\mathcal{U}$, což je však spor s tím, že $\mathcal{U}$ je ultrafiltr. □

Nyní již zmiňovaná charakterizace ultrafiltru.

Lemma 4. *Nechť $\mathcal{U}$ je filtr na V. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

i. *$\mathcal{U}$ je ultrafiltr na V.*

ii. *Pro každé $A \subseteq V$ nastane právě jedna z možností $A \in \mathcal{U}$ a $A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{U}$.*

iii. $\forall\, A, B \subseteq V : A \cup B \in \mathcal{U} \implies (A \in \mathcal{U} \vee B \in \mathcal{U})$.

Důkaz. • *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* : Sporem, nechť dokazované tvrzení neplatí, tedy existuje množina $A \subseteq V$ taková, že $(A \in \mathcal{U} \wedge A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{U})$ nebo $(A \notin \mathcal{U} \wedge A^{\mathsf{c}} \notin \mathcal{U})$.

Pokud $A \in \mathcal{U}$ a $A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{U}$, tak z (F2) také $A \cap A^{\mathsf{c}} = \emptyset \in \mathcal{U}$, což je spor s (F3).

Nechť $A \notin \mathcal{U}$ a $A^c \notin \mathcal{U}$. Z faktu $A \notin \mathcal{U}$ a předchozího lemmatu 3 máme, že existuje $U_1 \in \mathcal{U}$ taková, že $A \cap U_1 = \emptyset$, neboli $U_1 \subseteq A^c$. Aplikací téhož lemmatu na fakt $A^c \notin \mathcal{U}$ dostáváme, že existuje $U_2 \in \mathcal{U}$ taková, že $A^c \cap U_2 = \emptyset$, a tudíž $U_2 \subseteq A$. Celkem tak víme, že existují $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ takové, že $U_1 \subseteq A^c$ a $U_2 \subseteq A$, a tedy $U_1 \cap U_2 = \emptyset \in \mathcal{U}$ z (F2), což je spor s (F3). Jak $A \in \mathcal{U} \wedge A^c \in \mathcal{U}$, tak i $A \notin \mathcal{U} \wedge A^c \notin \mathcal{U}$ tudíž vede ke sporu, čímž je tato implikace dokázána.

- *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* : Nechť pro spor existuje filtr $\mathcal{U}'$ na V takový, že $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{U}'$. Potom nutně existuje množina $U \in \mathcal{U}' \setminus \mathcal{U}$. Protože $U \notin \mathcal{U}$, z předpokladu platí $U^c \in \mathcal{U}$. Tedy $U^c \in \mathcal{U} \subsetneq \mathcal{U}'$, z čehož plyne, že $U^c \in \mathcal{U}'$.

Celkem tak platí $U \in \mathcal{U}'$ a $U^c \in \mathcal{U}'$, tudíž z (F2) také $U \cap U^c = \emptyset \in \mathcal{U}'$, což je spor s (F3).

- *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* : Nechť dokazované tvrzení neplatí, to jest existují $A, B \subseteq V$ takové, že $A \cup B \in \mathcal{U}$ a $A \notin \mathcal{U}$ a $B \notin \mathcal{U}$. Z předpokladu pak nutně platí $A^c \in \mathcal{U}$ a $B^c \in \mathcal{U}$. Z De Morganových zákonů a (F2) plyne $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathcal{U}$.

Opět z (F2) dostáváme $(A \cup B) \cap (A \cup B)^c = \emptyset \in \mathcal{U}$, což je spor s (F3).

- *(iii)* $\Rightarrow$ *(ii)* : Nechť $A \subseteq V$. Protože $\mathcal{U}$ je filtr, máme $V \in \mathcal{U}$ (filtr je neprázdný a V je nadmnožinou libovolné podmnožiny V, a tak podle (F1) patří do $\mathcal{U}$). Tedy $A \cup A^c = V \in \mathcal{U}$, tudíž z předpokladu $A \in \mathcal{U}$ nebo $A^c \in \mathcal{U}$. K důkazu toho, že nastane právě jedna z možností $A \in \mathcal{U}$ a $A^c \in \mathcal{U}$, tak stačí ukázat, že současně nemůže nastat $A \in \mathcal{U}$ a $A^c \in \mathcal{U}$. Pokud by toto nastalo, tak z (F2) platí také $A \cap A^c = \emptyset \in \mathcal{U}$, což je spor s (F3).

□

Jelikož množina voličů V obvykle bývá konečná, bylo by dobré vědět, jak vypadají ultrafiltry na konečné množině. Za tímto účelem zadefinujeme tzv. *triviální ultrafiltr.*

Definice 8. *Nechť $\mathcal{U}$ je (ultra)filtr na V. Řekneme, že $\mathcal{U}$ je* ***triviální****, jestliže platí $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Pokud $\mathcal{U}$ není triviální, nazveme ho* ***netriviálním*** *(ultra)filtrem.*

Lemma 5. *Je-li V konečná, pak je každý ultrafiltr $\mathcal{U}$ na V triviální.*

Důkaz. Protože V je konečná, i její potenční množina $\mathcal{P}(V)$ je konečná. Jelikož $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(V)$, tak také $\mathcal{U}$ je konečný systém množin. Z (F2) víme, že $\mathcal{U}$ je uzavřený na konečné průniky. Jelikož $\mathcal{U}$ obsahuje pouze konečně mnoho prvků, tak platí $\bigcap \mathcal{U} \in \mathcal{U}$. Z (F3) pak ihned plyne $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

□

Lemma 6. *Ultrafiltr $\mathcal{U}$ na V je triviální* $\iff \exists\, a \in V : \mathcal{U} = \{U \subseteq V \mid a \in U\}$.

Důkaz. $\Rightarrow$: Nechť $\mathcal{U}$ je triviální ultrafiltr na V. Označme $A = \bigcap \mathcal{U}$. Z definice triviálního ultrafiltru máme $A \neq \emptyset$, a tak zvolme $a \in A$ libovolně. Podle lemmatu 4 nastane právě jedna z možností $\{a\} \in \mathcal{U}$ a $\{a\}^c = V \setminus \{a\} \in \mathcal{U}$. Jelikož A je průnikem všech množin v $\mathcal{U}$, tak je to podmnožina každé množiny v $\mathcal{U}$.

Tvrdíme, že $\{a\} \in \mathcal{U}$, k čemuž stačí ukázat $V \setminus \{a\} \notin \mathcal{U}$. Nechť pro spor $V \setminus \{a\} \in \mathcal{U}$. Protože $a \in A$ a $a \notin V \setminus \{a\}$, platí $A \nsubseteq V \setminus \{a\}$. Jenže A je podmnožina každé množiny v $\mathcal{U}$, takže $A \subseteq V \setminus \{a\}$, což je spor. Tudíž $\{a\} \in \mathcal{U}$.

Poněvadž A je podmnožina každé množiny v $\mathcal{U}$, platí $A \subseteq \{a\}$. Zároveň $a \in A$, tj. $\{a\} \subseteq A$. Tudíž $A = \{a\}$.

Tvrdíme, že $\mathcal{U} = \{U \subseteq V \mid a \in U\}$.

- $\supseteq$: Nechť $U \subseteq V, a \in U$. Potom $\{a\} \subseteq U$ a $\{a\} \in \mathcal{U}$, tudíž z (F1) $U \in \mathcal{U}$.

- $\subseteq$: Nechť $U \in \mathcal{U}$. Víme $a \in A = \bigcap \mathcal{U}$, tudíž $a \in U$.

Našli jsme tedy $a \in V$ takové, že $\mathcal{U} = \{U \subseteq V \mid a \in U\}$.

$\Leftarrow$: Nechť $\mathcal{U}$ je ultrafiltr a existuje $a \in V$ takové, že $\mathcal{U} = \{U \subseteq V \mid a \in U\}$. Potom $a \in \bigcap \mathcal{U}$, tudíž zřejmě $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$, takže $\mathcal{U}$ je triviální.

□

Na neprázdné množině V existuje alespoň jeden triviální ultrafiltr. Zvolíme-li totiž $a \in V$ libovolně a položíme-li $\mathcal{U} = \{U \subseteq V \mid a \in U\}$, tak snadno ověříme, že tento systém množin splňuje všechny axiomy ultrafiltru. Z právě dokázaného lemmatu pak víme, že tento ultrafiltr je triviální. Jak je to s existencí netriviálních ultrafiltrů? Na tuto otázku nám dají odpověď následující dvě lemmata.

Lemma 7. *Každý filtr $\mathcal{F}$ na V lze rozšířit na ultrafiltr, to jest existuje ultrafiltr $\mathcal{U}$ na V takový, že $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.*

Důkaz. Důkaz je ryze technický a spočívá ve standardní aplikaci Zornova lemmatu, proto jej vynecháme (viz [4], Theorem 1.8).

□

Lemma 8. *Nechť V je nekonečná. Potom na V existuje netriviální ultrafiltr.*

Důkaz. Uvažme systém množin $\mathcal{F} = \{U \subseteq V$ taková, že $|V \setminus U| < \infty\}$. Tomuto systému se říká *Fréchetův filtr* či *filtr kofinálních množin*. Ověříme, že jde skutečně o filtr, a ukážeme, že tento filtr je netriviální.

- Nechť $v \in V$. Potom $|V \setminus (V \setminus \{v\})| = |\{v\}| = 1 < \infty$. Tedy pro každé $v \in V$ platí $V \setminus \{v\} \in \mathcal{F}$, speciálně $\mathcal{F}$ je neprázdný.

- (F3): $\emptyset \notin \mathcal{F}$, jelikož $|V \setminus \emptyset| = |V| = \infty \not< \infty$.

- (F2): Nechť $U_1, U_2 \in \mathcal{F}$. Chceme $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{F}$. Z De Morganových zákonů platí $V \setminus (U_1 \cap U_2) = (V \setminus U_1) \cup (V \setminus U_2)$. Jelikož $U_1, U_2 \in \mathcal{F}$, máme $|V \setminus U_1| < \infty$ a $|V \setminus U_2| < \infty$.

  Tudíž $|V \setminus (U_1 \cap U_2)| = |(V \setminus U_1) \cup (V \setminus U_2)| \leq |V \setminus U_1| + |V \setminus U_2| < \infty$.

- (F1): Nechť $U \in \mathcal{F}$ a $U \subseteq W \subseteq V$. Potom $V \setminus W \subseteq V \setminus U$. Poněvadž $U \in \mathcal{F}$, platí $|V \setminus U| < \infty$. Tudíž $|V \setminus W| \leq |V \setminus U| < \infty$.

- *$\mathcal{F}$ je netriviální*: Již víme, že pro každé $v \in V$ je $V \setminus \{v\} \in \mathcal{F}$. Označme $A = \bigcap_{v \in V}(V \setminus \{v\})$. Tvrdíme, že $A = \emptyset$. Pokud by totiž existovalo $w \in A$, tak speciálně $w \in V \setminus \{w\}$, což zřejmě nemůže nastat.

  Protože průnik všech množin ve filtru je podmnožina průniku vybraných množin ve filtru, platí $\bigcap \mathcal{F} \subseteq A = \emptyset$, a tudíž $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Tedy $\mathcal{F}$ je netriviální.

Podle předchozího lemmatu 7 existuje ultrafiltr $\mathcal{U}$ na V takový, že $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Tvrdíme, že tento ultrafiltr je netriviální. Nechť pro spor existuje $v \in \bigcap \mathcal{U}$.

Potom speciálně $v \in \bigcap \mathcal{F}$, což je však spor s tím, že $\mathcal{F}$ je netriviální.

□

Následuje poslední lemma této sekce. Až do konce tohoto textu budeme množinu přirozených čísel značit jako $\mathbb{N}$, přičemž číslo 0 nebudeme považovat za přirozené číslo.

Lemma 9. *Nechť $\mathcal{U}$ je ultrafiltr na V a nechť $n \in \mathbb{N}$. Mějme libovolnou n-tici po dvou disjunktních množin $A_1, \dots, A_n \subseteq V$ takovou, že $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{U}$. Potom platí, že v $\mathcal{U}$ leží právě jedna z množin $A_1, \dots, A_n$.*

Důkaz. Indukcí podle n.

- $n = 1$: Nechť $A_1 \subseteq V$ a $A_1 \in \mathcal{U}$. Zřejmě v $\mathcal{U}$ leží právě jedna z množin A_1.
- $n = 2$: Nechť $A_1, A_2 \subseteq V$ jsou disjunktní a $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{U}$. Z lemmatu 4 máme, že $A_1 \in \mathcal{U}$ nebo $A_2 \in \mathcal{U}$. Kdyby zároveň platilo $A_1 \in \mathcal{U}$ a $A_2 \in \mathcal{U}$, tak z (F2) také $A_1 \cap A_2 = \emptyset \in \mathcal{U}$, což je spor s (F3). Tudíž v $\mathcal{U}$ leží právě jedna z množin A_1, A_2.
- $n \to n + 1$: Nechť dokazované tvrzení platí pro pevné $n \in \mathbb{N}$. Mějme po dvou disjunktní množiny $A_1, \dots, A_{n+1} \subseteq V$ a nechť $A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1} \in \mathcal{U}$. Potom jsou množiny $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ a A_{n+1} disjunktní a jejich sjednocení leží v $\mathcal{U}$, tudíž podle důkazu pro $n = 2$ buď $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{U}$ a $A_{n+1} \notin \mathcal{U}$, nebo naopak $A_1 \cup \ldots \cup A_n \notin \mathcal{U}$ a $A_{n+1} \in \mathcal{U}$.

  Uvažme nejprve případ $A_1 \cup \ldots \cup A_n \notin \mathcal{U}$ a $A_{n+1} \in \mathcal{U}$. Ukážeme, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $A_i \notin \mathcal{U}$. Nechť pro spor existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $A_i \in \mathcal{U}$. Zřejmě $A_i \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Z (F1) tak máme $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{U}$, což je spor. Platí tedy $\forall\, i \in \{1, \dots n\} : A_i \notin \mathcal{U}$ a $A_{n+1} \in \mathcal{U}$, tudíž v $\mathcal{U}$ leží právě jedna z množin $A_1, \dots, A_{n+1}$.

  Nyní uvažme případ $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{U}$ a $A_{n+1} \notin \mathcal{U}$. Podle indukčního předpokladu víme, že v ultrafiltru $\mathcal{U}$ leží právě jedna z množin $A_1, \dots, A_n$. Protože $A_{n+1} \notin \mathcal{U}$, tak platí, že v $\mathcal{U}$ leží právě jedna z množin $A_1, \dots, A_{n+1}$.

Tím je tvrzení dokázáno.

□

2.2 Charakterizace množiny Σ

Jak bylo předesláno na začátku této kapitoly, pomocí ultrafiltrů na V lze dobře charakterizovat všechny volební systémy $\sigma \in \Sigma$, tj. volební systémy splňující axiomy (A1) až (A4).

Za účelem důkazu této charakterizace zaveďme pro dané $\sigma \in \Sigma$ následující tři systémy množin.

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq V \mid \exists\, x, y \in X \;\; \exists\, f \in F : xf(U)y \wedge yf(U^{\mathsf{c}})x \wedge x\sigma(f)y\}. \tag{2.1}$$

$$\mathcal{U}' = \{U \subseteq V \mid \exists\, x, y \in X \;\; \forall\, f \in F : xf(U)y \wedge yf(U^{\mathsf{c}})x \implies x\sigma(f)y\}. \tag{2.2}$$

$$\mathcal{U}'' = \{U \subseteq V \mid \forall\, x, y \in X \;\; \forall\, f \in F : xf(U)y \wedge yf(U^{\mathsf{c}})x \implies x\sigma(f)y\}. \tag{2.3}$$

Systém $\mathcal{U}$ tvoří ty skupiny voličů $U \subseteq V$, pro které existují nějaké dvě alternativy x, y a kombinace preferencí voličů $f \in F$ taková, že všichni členové skupiny U upřednostňují x před y, všichni ostatní voliči naopak upřednostňují y před x a společnost na základě volebního systému $\sigma \in \Sigma$ učiní stejnou volbu jako skupina U, tedy upřednostní x před y.

Ostatní dva systémy už jen využívají jiné kvantifikátory. V systému $\mathcal{U}'$ požadujeme oproti $\mathcal{U}$ navíc to, aby pro všechny situace $f \in F$ platilo, že kdykoliv skupina U upřednostní x před y a zároveň všichni ostatní upřednostní y před x, tak už společnost upřednostní x před y. V systému $\mathcal{U}''$ ještě přidáváme požadavek, aby totéž platilo nejen pro všechny situace $f \in F$, ale také pro všechny dvojice alternativ $x, y \in X$, a ne jen pro nějakou dvojici.

Nyní vyslovíme a dokážeme dvě pomocná lemmata. Ačkoliv je podmínka na náležení do $\mathcal{U}''$ zdánlivě silnější než podmínka na náležení do $\mathcal{U}'$ a $\mathcal{U}$, ukazuje se, že všechny tyto systémy jsou si rovny, tedy že jde o jeden systém se třemi ekvivalentními definicemi, mezi kterými můžeme přecházet, jak se nám zrovna hodí. Dále ukážeme, že $\mathcal{U}$ (a tudíž i $\mathcal{U}'$ a $\mathcal{U}''$) je ultrafiltr.

Lemma 10. $\mathcal{U} = \mathcal{U}' = \mathcal{U}''$.

Důkaz. Z (A1) víme, že existují alespoň tři různé alternativy. Dále předpokládáme, že ve společnosti existuje aspoň jeden volič, tudíž existuje také aspoň jedna situace f. Z použitých kvantifikátorů v definicích systémů $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ a $\mathcal{U}''$ tak zřejmě platí $\mathcal{U}'' \subseteq \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$. Zbývá tedy dokázat dvě inkluze.

Jako první dokažme $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$. Nechť $U \in \mathcal{U}$. Z definice $\mathcal{U}$ víme, že existují alternativy $x, y \in X$ a $f \in F$ tak, že platí $xf(U)y \wedge yf(U^{\mathsf{c}})x \wedge x\sigma(f)y$. Mějme situaci $g \in F$ takovou, že platí $xg(U)y$ a $yg(U^{\mathsf{c}})x$. Chceme ukázat, že $x\sigma(g)y$. Zřejmě $f = g$ na $\{x, y\}$, a tak podle (A4) také $\sigma(f) = \sigma(g)$ na $\{x, y\}$. Protože $x\sigma(f)y$, tak i $x\sigma(g)y$. Tudíž podle (2.2) $U \in \mathcal{U}'$, a tedy $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$.

Nyní budeme až do konce důkazu dokazovat $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}''$. Platnost podmínky pro náležení do ultrafiltru $\mathcal{U}''$ budeme postupně ověřovat pro různé speciální dvojice alternativ, z čehož nakonec získáme platnost pro libovolnou dvojici alternativ.

Nechť $U \in \mathcal{U}'$ a mějme $x, y \in X$ taková, že platí:

$$\forall f \in F : xf(U)y \wedge yf(U^{\mathsf{c}})x \implies x\sigma(f)y. \tag{2.4}$$

Existenci těchto x, y máme z (2.2). Nechť $z \in X \setminus \{x, y\}$. Takové z existuje díky (A1). Nyní dokážeme následující tvrzení:

$$\forall f \in F : xf(U)z \wedge zf(U^{\mathsf{c}})x \implies x\sigma(f)z. \tag{2.5}$$

Mějme situaci $f \in F$ takovou, že $xf(U)z$ a $zf(U^{\mathsf{c}})x$, a uvažme situaci $g \in F$, která splňuje následující:

$$xg(U)y \wedge yg(U)z \qquad \text{[a tedy z tranzitivity také } xg(U)z] \tag{2.6}$$

$$yg(U^{\mathsf{c}})z \wedge zg(U^{\mathsf{c}})x \qquad \text{[a tedy z tranzitivity také } yg(U^{\mathsf{c}})x] \tag{2.7}$$

Díky (2.4) platí $xg(U)y \wedge yg(U^{\mathsf{c}})x \implies x\sigma(g)y$. Z (2.6) máme $yg(U)z$, z (2.7) potom $yg(U^{\mathsf{c}})z$. Tedy $yg(U \cup U^{\mathsf{c}})z$, neboli $yg(V)z$. Z axiomu (A3) tudíž platí $y\sigma(g)z$.

Dohromady tak víme, že $x\sigma(g)y$ a $y\sigma(g)z$. Z tranzitivity $\sigma(g)$ tedy $x\sigma(g)z$.

Připomeňme, že předpokládáme $xf(U)z$ a $zf(U^{\mathsf{c}})x$. Z (2.6) máme $xg(U)z$ a z (2.7) pak $zg(U^{\mathsf{c}})x$. Tudíž $f = g$ na $\{x, z\}$. Podle (A4) i $\sigma(f) = \sigma(g)$ na $\{x, z\}$. Poněvadž $x\sigma(g)z$, tak také $x\sigma(f)z$.

Celkem jsme tak ukázali, že $xf(U)z \wedge zf(U^{\mathsf{c}})x \implies x\sigma(f)z$, čímž je důkaz tvrzení (2.5) hotov.

Jako další krok dokážeme toto pomocné tvrzení:

$$\forall f \in F : zf(U)y \wedge yf(U^{\mathsf{c}})z \implies z\sigma(f)y. \tag{2.8}$$

Nechť tedy $f \in F$ splňuje $zf(U)y$ a $yf(U^{\mathsf{c}})z$. Mějme situaci $g \in F$ splňující:

$$zg(U)x \wedge xg(U)y \qquad \text{[a tedy z tranzitivity také } zg(U)y\text{]} \tag{2.9}$$

$$yg(U^{\mathsf{c}})z \wedge zg(U^{\mathsf{c}})x \qquad \text{[a tedy z tranzitivity také } yg(U^{\mathsf{c}})x\text{]} \tag{2.10}$$

Díky (2.4) víme $xg(U)y \wedge yg(U^{\mathsf{c}})x \implies x\sigma(g)y$. Dále z (2.9) máme $zg(U)x$, z (2.10) pak $zg(U^{\mathsf{c}})x$. Tudíž $zg(U \cup U^{\mathsf{c}})x$, neboli $zg(V)x$. Z axiomu (A3) tak platí $z\sigma(g)x$.

Dohromady tedy víme, že $x\sigma(g)y$ a $z\sigma(g)x$. Z tranzitivity $\sigma(g)$ tedy $z\sigma(g)y$.

Připomeňme, že předpokládáme $zf(U)y$ a $yf(U^{\mathsf{c}})z$. Z (2.9) víme $zg(U)y$ a díky (2.10) máme $yg(U^{\mathsf{c}})z$. Takže $f = g$ na $\{y, z\}$. Podle (A4) tak $\sigma(f) = \sigma(g)$ na $\{y, z\}$. Jelikož $z\sigma(g)y$, tak také $z\sigma(f)y$.

Celkem jsme ukázali, že $zf(U)y \wedge yf(U^{\mathsf{c}})z \implies z\sigma(f)y$. Tím je důkaz tvrzení (2.8) završen.

Nechť $a, b \in X$ jsou libovolné dvě alternativy mající následující vlastnost:

$$\forall f \in F : af(U)b \wedge bf(U^{\mathsf{c}})a \implies a\sigma(f)b. \tag{2.11}$$

Potom jsme právě dokázali, že pro libovolné $c \in X \setminus \{a, b\}$ platí:

$$\forall f \in F : af(U)c \wedge cf(U^{\mathsf{c}})a \implies a\sigma(f)c. \tag{2.12}$$

$$\forall f \in F : cf(U)b \wedge bf(U^{\mathsf{c}})c \implies c\sigma(f)b. \tag{2.13}$$

Konkrétně jsme věděli, že existuje jedna dvojice $a = x, b = y$, která má vlastnost (2.11), a dokázali, že pro $z \in X \setminus \{x, y\}$ platí (2.12) a (2.13), ale v důkazu mohlo jít stejně tak dobře o libovolně vybranou dvojici alternativ s touto vlastností. Stejně tak z bylo vybráno jako libovolná alternativa různá od dvojice x, y.

Díky platnosti (2.5) víme, že dvojice $a = x$ a $b = z$ má vlastnost (2.11). Z (2.13) pak pro libovolné $w \in X \setminus \{x, z\}$ dostáváme:

$$\forall f \in F : wf(U)z \wedge zf(U^{\mathsf{c}})w \implies w\sigma(f)z. \tag{2.14}$$

Speciálně pro $w = y \in X \setminus \{x, z\}$ máme:

$$\forall f \in F : yf(U)z \wedge zf(U^{\mathsf{c}})y \implies y\sigma(f)z. \tag{2.15}$$

Dále už víme, že platí (2.8), tudíž také dvojice $a = z$ a $b = y$ má vlastnost (2.11). Z (2.12) pak plyne, že pro libovolné $w \in X \setminus \{y, z\}$ platí:

$$\forall f \in F : zf(U)w \wedge wf(U^{\mathsf{c}})z \implies z\sigma(f)w. \tag{2.16}$$

Volbou $w = x \in X \setminus \{y, z\}$ pak dostáváme:

$$\forall f \in F : zf(U)x \wedge xf(U^{\mathsf{c}})z \implies z\sigma(f)x. \tag{2.17}$$

Jako další krok dokážeme následující pomocné tvrzení:

$$\forall f \in F : yf(U)x \wedge xf(U^{\mathsf{c}})y \implies y\sigma(f)x. \tag{2.18}$$

Nechť $f \in F$, $yf(U)x$ a $xf(U^{\mathsf{c}})y$. Uvažme $g \in F$ splňující:

$$yg(U)z \wedge zg(U)x \qquad \text{[a tedy z tranzitivity také } yg(U)x] \tag{2.19}$$

$$xg(U^{\mathsf{c}})z \wedge zg(U^{\mathsf{c}})y \qquad \text{[a tedy z tranzitivity také } xg(U^{\mathsf{c}})y] \tag{2.20}$$

Z (2.15) víme $yg(U)z \wedge zg(U^{\mathsf{c}})y \implies y\sigma(g)z$. Díky (2.17) pak dostáváme, že platí $zg(U)x \wedge xg(U^{\mathsf{c}})z \implies z\sigma(g)x$. Protože relace $\sigma(g)$ je tranzitivní, máme $y\sigma(g)z \wedge z\sigma(g)x \implies y\sigma(g)x$.

Z (2.19) víme $yg(U)x$, z (2.20) pak $xg(U^{\mathsf{c}})y$. Jelikož předpokládáme, že $yf(U)x$ a $xf(U^{\mathsf{c}})y$, tak zřejmě $f = g$ na $\{x, y\}$. Tudíž podle (A3) také $\sigma(f) = \sigma(g)$ na $\{x, y\}$. Poněvadž $y\sigma(g)x$, tak též $y\sigma(f)x$.

Celkem tak $yf(U)x \wedge xf(U^{\mathsf{c}})y \implies y\sigma(f)x$, čímž je tvrzení (2.18) dokázáno.

Abychom ukázali, že $U \in \mathcal{U}''$ (a tím i že $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}''$), musíme podle definice (2.3) ověřit platnost podmínky $\forall a, b \in X \;\; \forall f \in F : af(U)b \wedge bf(U^{\mathsf{c}})a \implies a\sigma(f)b$.

- $a = x \wedge b \in X \setminus \{x\}$: Pro $b = y$ to víme z (2.4), pro $b = z \in X \setminus \{x, y\}$ platnost dostáváme z (2.5).
- $a \in X \setminus \{x\} \wedge b = x$: Platnost pro možnost $a = y$ máme z (2.18), platnost pro $a = z \in X \setminus \{x, y\}$ pak dává (2.17).
- $a = y \wedge b \in X \setminus \{y\}$: Pro $b = x$ to plyne z (2.18), pro $b = z \in X \setminus \{x, y\}$ platnost dostáváme z (2.15).
- $a \in X \setminus \{y\} \wedge b = y$: Platnost pro $a = z \in X \setminus \{x, y\}$ dává (2.8), platnost pro $a = x$ víme z (2.4).
- $a = z \in X \setminus \{x, y\} \wedge b = w \in X \setminus \{x, y, z\}$: Máme z (2.16).
- $a = w \in X \setminus \{x, y, z\} \wedge b = z \in X \setminus \{x, y\}$: Víme z (2.14).

Tím je ověřena platnost pro všechna $a, b \in X$, tudíž $U \in \mathcal{U}''$, a tedy $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}''$. □

Lemma 11. *$\mathcal{U}$ je ultrafiltr na V.*

Důkaz. Nejprve ověřme, že $\mathcal{U}$ je neprázdný, k čemuž postačí $V \in \mathcal{U}$. Zvolme dvě různé alternativy $x, y \in X$ a situaci $f \in F$ takovou, že $xf(V)y$. Z axiomu (A3) máme, že $x\sigma(f)y$. Jelikož $V^{\mathsf{c}} = \emptyset$, tak jsme ukázali existenci alternativ $x, y \in X$ a situace $f \in F$, pro které platí $xf(V)y$ a $yf(V^{\mathsf{c}})x$ a $x\sigma(f)y$, tedy podle (2.1) skutečně $V \in \mathcal{U}$.

Nyní ověříme platnost (F3). Nechť pro spor $\emptyset \in \mathcal{U}$. Potom podle (2.1) existují alternativy $x, y \in X$ a situace $f \in F$ tak, že $xf(\emptyset)y$ a $yf(\emptyset^{\mathsf{c}})x$ a $x\sigma(f)y$. Protože však $\emptyset^{\mathsf{c}} = V$, máme $yf(V)x$. Z toho podle (A3) plyne $y\sigma(f)x$. Z antisymetrie $\sigma(f)$ pak máme $y\sigma(f)x \implies \neg\, [x\sigma(f)y]$. Zároveň ale platí $x\sigma(f)y$, což je spor.

Jako další ukážeme, že systém $\mathcal{U}$ splňuje (F2). Nechť $U, W \in \mathcal{U}$. Chceme ukázat, že platí $U \cap W \in \mathcal{U}$.

Zadefinujme následující disjunktní rozklad množiny V:

$$\begin{aligned} V_1 &= U \cap W \\ V_2 &= U \cap W^{\mathsf{c}} \\ V_3 &= W \cap U^{\mathsf{c}} \\ V_4 &= (U \cup W)^{\mathsf{c}} \end{aligned}$$

Zvolme tři různé alternativy $x, y, z \in X$, což můžeme z (A1), a mějme situaci $f \in F$ splňující:

$$zf(V_1)x \wedge xf(V_1)y \qquad \text{[a tedy z tranzitivity také } zf(V_1)y\text{]} \tag{2.21}$$

$$xf(V_2)y \wedge yf(V_2)z \qquad \text{[a tedy z tranzitivity také } xf(V_2)z\text{]} \tag{2.22}$$

$$yf(V_3)z \wedge zf(V_3)x \qquad \text{[a tedy z tranzitivity také } yf(V_3)x\text{]} \tag{2.23}$$

$$yf(V_4)x \wedge xf(V_4)z \qquad \text{[a tedy z tranzitivity také } yf(V_4)z\text{]} \tag{2.24}$$

Z (2.21) máme $xf(V_1)y$, zatímco z (2.22) víme $xf(V_2)y$. Tudíž $xf(V_1 \cup V_2)y$. Jelikož $V_1 \cup V_2 = U$, platí $xf(U)y$.

Dále z (2.23) víme $yf(V_3)x$ a z (2.24) máme $yf(V_4)x$. Dohromady tak dostáváme $yf(V_3 \cup V_4)x$, z čehož díky $V_3 \cup V_4 = U^{\mathsf{c}}$ plyne $yf(U^{\mathsf{c}})x$.

Z lemmatu 10 víme $\mathcal{U} = \mathcal{U}''$. Tudíž $U \in \mathcal{U} = \mathcal{U}''$. Z definice (2.3) tudíž platí $xf(U)y \wedge yf(U^{\mathsf{c}})x \implies x\sigma(f)y$.

Z (2.21) máme $zf(V_1)x$ a z (2.23) platí $zf(V_3)x$. Celkem tak $zf(V_1 \cup V_3)x$. Protože $V_1 \cup V_3 = W$, tak $zf(W)x$.

Podle (2.22) platí $xf(V_2)z$ a díky (2.24) je $xf(V_4)z$. Tudíž $xf(V_2 \cup V_4)z$. Povšimněme si, že $V_2 \cup V_4 = W^{\mathsf{c}}$, a proto $xf(W^{\mathsf{c}})z$.

Ježto $W \in \mathcal{U} = \mathcal{U}''$, z (2.3) platí $zf(W)x \wedge xf(W^{\mathsf{c}})z \implies z\sigma(f)x$.

Víme tedy, že $z\sigma(f)x$ a $x\sigma(f)y$. Z tranzitivity $\sigma(f)$ tudíž také $z\sigma(f)y$.

Všimněme si, že $U \cap W = V_1$ a $(U \cap W)^{\mathsf{c}} = V_2 \cup V_3 \cup V_4$.

Z (2.21) víme $zf(V_1)y$, tudíž $zf(U \cap W)y$.

Z (2.22), (2.23) a (2.24) máme postupně $yf(V_2)z$ a $yf(V_3)z$ a $yf(V_4)z$. Z toho dostáváme, že $yf(V_2 \cup V_3 \cup V_4)z$, neboli $yf(\,(U \cap W)^{\mathsf{c}}\,)z$.

Celkem $\exists\, y, z \in X \;\; \exists\, f \in F : zf(U \cap W)y \;\wedge\; yf(\,(U \cap W)^{\mathsf{c}}\,)z \;\wedge\; z\sigma(f)y$.

To podle definice (2.1) znamená $U \cap W \in \mathcal{U}$, čímž je podmínka (F2) ověřena.

Dále ukážeme, že pro systém $\mathcal{U}$ platí následující:

$$\textit{Pro každou } U \subseteq V \textit{ nastane právě jedna z možností } U \in \mathcal{U} \textit{ a } U^{\mathsf{c}} \in \mathcal{U}. \tag{2.25}$$

Nechť tedy $U \subseteq V$. Zvolme $a \in X$ libovolně a nechť P je relace ostré preference na $X \setminus \{a\}$ taková, že každé dvě různé alternativy jsou porovnatelné, to jest pro každou dvojici různých alternativ $x, y \in X \setminus \{a\}$ platí xPy nebo yPx.

Uvažme situaci $f \in F$ splňující:

$$\forall\, v \in V : f(v) = P \text{ na } X \setminus \{a\}. \tag{2.26}$$

$$\forall\, x \in X \setminus \{a\} : xf(U)a. \tag{2.27}$$

$$\forall\, x \in X \setminus \{a\} : af(U^{\mathsf{c}})x. \tag{2.28}$$

Podle (A1) je $|X| \geq 3$, takže $X \setminus \{a\}$ obsahuje přinejmenším dvě různé alternativy x a y, které zvolme libovolně. Dle předchozího jsou každé dvě různé alternativy z množiny $X \setminus \{a\}$ porovnatelné, a tak bez újmy na obecnosti předpokládejme xPy (jinak přeznačíme alternativy).

Z (2.26) a xPy dostáváme, že $\forall\, v \in V : xf(v)y$, neboli $xf(V)y$. Díky (A3) tak získáváme, že platí $x\sigma(f)y$.

Z vlastnosti (1.1) všech relací ostré preference použité na relaci $\sigma(f)$, alternativy $x, y, z = a$ a fakt $x\sigma(f)y$ víme, že $x\sigma(f)a$ nebo $a\sigma(f)y$.

- Nechť $x\sigma(f)a$. Z (2.27) víme $xf(U)a$, z (2.28) pak máme $af(U^{\mathsf{c}})x$. Celkem tak $\exists\, x, a \in X \;\; \exists\, f \in F : xf(U)a \wedge af(U^{\mathsf{c}})x \wedge x\sigma(f)a$. To však podle (2.1) znamená, že $U \in \mathcal{U}$.

- Nechť $a\sigma(f)y$. Z (2.28) víme $af(U^{\mathsf{c}})y$, z (2.27) pak plyne $yf(U)a$. Celkem tedy máme, že $\exists\, a, y \in X \;\; \exists\, f \in F : af(U^{\mathsf{c}})y \wedge yf(U)a \wedge a\sigma(f)y$. Jelikož zřejmě $(U^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} = U$, tak z definice (2.1) máme $U^{\mathsf{c}} \in \mathcal{U}$.

Z předchozích dvou bodů a toho, že platí $x\sigma(f)a$ nebo $a\sigma(f)y$, už plyne, že nastane alespoň jedna z možností $U \in \mathcal{U}$ a $U^{\mathsf{c}} \in \mathcal{U}$.

Nyní ukážeme, že nemůže zároveň nastat $U \in \mathcal{U}$ a $U^{\mathsf{c}} \in \mathcal{U}$. Předpokládejme pro spor, že tento případ nastane. Připomeňme, že jsme již ověřili, že $\mathcal{U}$ splňuje podmínky (F2) a (F3). Z (F2) plyne $U \cap U^{\mathsf{c}} = \emptyset \in \mathcal{U}$, což je však spor s (F3). Z toho už spolu s předchozím odstavcem dostáváme platnost tvrzení (2.25).

Nyní ověřme, že $\mathcal{U}$ splňuje (F1). Nechť $U \in \mathcal{U}$ a $U \subseteq W \subseteq V$. Chceme $W \in \mathcal{U}$.

Z (2.25) víme, že nastane právě jedna z možností $W \in \mathcal{U}$ a $W^{\mathsf{c}} \in \mathcal{U}$. Stačí tak ukázat, že $W^{\mathsf{c}} \notin \mathcal{U}$. Nechť pro spor $W^{\mathsf{c}} \in \mathcal{U}$. Potom z (F2) také $U \cap W^{\mathsf{c}} = \emptyset \in \mathcal{U}$, což je spor s (F3).

Systém $\mathcal{U}$ je tedy neprázdný a splňuje podmínky (F1), (F2) a (F3), tudíž je to filtr. Navíc víme, že $\mathcal{U}$ splňuje (2.25), což podle lemmatu 4 znamená, že je to ultrafiltr.

□

Nyní přichází na řadu slíbená věta charakterizující množinu Σ. V první části této věty ukážeme, že ke každému volebnímu systému $\sigma \in \Sigma$ existuje právě jeden ultrafiltr U_σ na V, jehož každý prvek je tzv. *rozhodující skupina* voličů, tj. skupina, která už při zavedení volebního systému $\sigma \in \Sigma$ svou volbou diktuje volbu společnosti. Tímto ultrafiltrem je navíc přesně systém $\mathcal{U}''$. Ve druhé části věty si položíme v zásadě opačnou otázku. Existuje ke každému ultrafiltru $\mathcal{U}$ skupin voličů nějaký volební systém $\sigma \in \Sigma$, jehož rozhodující skupiny jsou právě skupiny v ultrafiltru $\mathcal{U}$? Odpovědí je, že ano.

Věta 1. *(Alan Kirman, Dieter Sondermann)*

i. Pro každý volební systém $\sigma \in \Sigma$ existuje právě jeden ultrafiltr $\mathcal{U}_\sigma$ na V mající následující vlastnost:

$$\forall\, U \in \mathcal{U}_\sigma \;\; \forall\, x, y \in X \;\; \forall\, f \in F : xf(U)y \implies x\sigma(f)y. \tag{2.29}$$

ii. Označme množinu všech ultrafiltrů na V jako $\tilde{V}$.
Zobrazení $r : \Sigma \to \tilde{V}$ definované předpisem $r(\sigma) = \mathcal{U}_\sigma$ je surjekce.

Důkaz. **(i)**: Nechť $\sigma \in \Sigma$. Zadefinujme následující systém množin:

$$\mathcal{U}_\sigma = \{U \subseteq V \mid \forall x, y \in X \;\; \forall f \in F : xf(U)y \wedge yf(U^{\mathsf{c}})x \implies x\sigma(f)y\}. \tag{2.30}$$

Povšimněme si, že jde přesně o systém $\mathcal{U}''$ z definice (2.3). Díky lemmatu 10 víme, že $\mathcal{U}_\sigma = \mathcal{U}'' = \mathcal{U}$. Z lemmatu 11 pak máme, že $\mathcal{U}_\sigma = \mathcal{U}$ je ultrafiltr na V. Chceme ukázat, že takto definovaný ultrafiltr U_σ má vlastnost (2.29).

Mějme tedy libovolnou $U \in \mathcal{U}_\sigma$, alternativy $x, y \in X$, situaci $f \in F$ a nechť platí $xf(U)y$. Chceme ukázat, že $x\sigma(f)y$.

Uvažme následující disjunktní rozklad množiny V:

$$V_1 = \{v \in V \mid xf(v)y\}.$$
$$V_2 = \{v \in V \mid yf(v)x\}.$$
$$V_3 = (V_1 \cup V_2)^{\mathsf{c}}.$$

V_1 a V_2 jsou disjunktní z antisymetrie $f(v)$. Je-li totiž $xf(v)y$ (neboli $v \in V_1$), pak z definice 2 platí $\neg\,[yf(v)x]$, a tedy $v \notin V_2$.

Zvolme $z \in X \setminus \{x, y\}$, což můžeme z (A1). Mějme situaci $g \in F$ splňující:

$$xg(V_1)z \wedge zg(V_1)y. \quad \text{[a tedy z tranzitivity také } xg(V_1)y] \tag{2.31}$$

$$yg(V_2)z \wedge zg(V_2)x. \quad \text{[a tedy z tranzitivity také } yg(V_2)x] \tag{2.32}$$

$$\forall\, v \in V_3 : \neg\,[xg(v)y] \wedge \neg\,[yg(v)x] \wedge xg(v)z. \tag{2.33}$$

Připomeňme, že pro každou relaci ostré preference P na X platí (1.3), tj.

$$\forall\, a, b, c \in X : [\neg\,(bPa) \wedge bPc] \vee [aPb \wedge \neg\,(cPb)] \implies aPc.$$

Volbou $P = g(v), a = y, b = x, c = z$ dostáváme:

$$[\neg\,(xg(v)y) \wedge xg(v)z] \vee [yg(v)x \wedge \neg\,(zg(v)x)] \implies yg(v)z.$$

Z (2.33) víme $\forall\, v \in V_3 : \neg\,[xg(v)y] \wedge xg(v)z$, tudíž podle předchozího řádku platí $\forall\, v \in V_3 : yg(v)z$, neboli $yg(V_3)z$.

Přímo z definice množin V_1 a V_2 máme $xf(V_1)y$ a $yf(V_2)x$. Pro prvky množiny V_3 pak z její definice platí $\forall\, v \in V_3 : \neg\,[xf(v)y] \wedge \neg\,[yf(v)x]$. Při pohledu na (2.31), (2.32) a (2.33) vidíme, že přesně tytéž preference zaujímají voliči také v situaci g, tudíž $f = g$ na $\{x, y\}$.

Jelikož předpokládáme $xf(U)y$ a V_1 je množina všech takových $v \in V$, že $xf(v)y$, tak platí $U \subseteq V_1$. Dále předpokládáme $U \in \mathcal{U}_\sigma$. Protože z předchozího už víme, že $\mathcal{U}_\sigma$ je ultrafiltr, z $U \subseteq V_1$ a (F1) máme $V_1 \in \mathcal{U}_\sigma$.

Z (2.32) máme $yg(V_2)z$ a už dříve jsme ukázali, že $yg(V_3)z$. Z toho plyne, že platí $yg(V_2 \cup V_3)z$. Jelikož $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ je disjunktní rozklad V, platí též rovnost $V_2 \cup V_3 = V_1^{\mathsf{c}}$. Tudíž $yg(V_1^{\mathsf{c}})z$. Z (2.31) máme $zg(V_1)y$.

Víme, že $V_1 \in \mathcal{U}_\sigma$. Z definice (2.30) máme $zg(V_1)y \wedge yg(V_1^{\mathsf{c}})z \implies z\sigma(g)y$.

Označme $W = V_1 \cup V_3$. Poněvadž $V_1 \in \mathcal{U}_\sigma$ a $V_1 \subseteq W$, z (F1) máme $W \in \mathcal{U}_\sigma$.

Z (2.31) máme $xg(V_1)z$, z (2.33) pak $xg(V_3)z$. Tedy celkem $xg(V_1 \cup V_3)z$, neboli $xg(W)z$. Díky (2.32) víme $zg(V_2)x$, tudíž $zg(W^{\mathsf{c}})x$.

Protože $W \in \mathcal{U}_\sigma$, z (2.30) platí $xg(W)z \wedge zg(W^{\mathsf{c}})x \implies x\sigma(g)z$.

Celkem už jsme ukázali, že $x\sigma(g)z$ a $z\sigma(g)y$. Z tranzitivity $\sigma(g)$ tak plyne také $x\sigma(g)y$. Už dříve jsme dokázali, že $f = g$ na $\{x, y\}$. Podle (A4) tak také

$\sigma(f) = \sigma(g)$ na $\{x, y\}$. Jelikož z předchozího řádku $x\sigma(g)y$, tak též $x\sigma(f)y$, což jsme chtěli ukázat. Námi zadefinovaný systém $\mathcal{U}_\sigma$ tak má vlastnost (2.29).

Zatím tedy máme, že existuje alespoň jeden ultrafiltr $\mathcal{U}_\sigma$ na V mající vlastnost (2.29). Zbývá ukázat, že tento ultrafiltr je jednoznačně určený.

Nechť pro spor existuje $\mathcal{U}'_\sigma \in \tilde{V}$ různý od $\mathcal{U}_\sigma$, který má také vlastnost (2.29). Poněvadž $\mathcal{U}'_\sigma \neq \mathcal{U}_\sigma$, z neprázdnosti ultrafiltrů plyne, že existuje $U \subseteq V$ taková, že $U \in \mathcal{U}'_\sigma$ a $U \notin \mathcal{U}_\sigma$. Podle lemmatu 4 bod (ii) tak nutně $U^\mathsf{c} \in \mathcal{U}_\sigma$.

Zvolme dvě různé alternativy $x, y \in X$ a situaci $f \in F$ splňující $xf(U^\mathsf{c})y$ a $yf(U)x$.

Protože $\mathcal{U}'_\sigma$ má vlastnost (2.29) a $U \in \mathcal{U}'_\sigma$, dostáváme $yf(U)x \implies y\sigma(f)x$.

Jelikož $\mathcal{U}_\sigma$ má vlastnost (2.29) a $U^\mathsf{c} \in \mathcal{U}_\sigma$, máme $xf(U^\mathsf{c})y \implies x\sigma(f)y$.

Z antisymetrie $\sigma(f)$ a $y\sigma(f)x$ máme $\neg\,[x\sigma(f)y]$. Zároveň víme, že platí $x\sigma(f)y$, což je spor. Tedy $\mathcal{U}_\sigma$ je jednoznačně určený.

(ii): Nechť $\mathcal{U}$ je ultrafiltr na V. Musíme najít volební systém $\sigma \in \Sigma$ takový, že $\mathcal{U}_\sigma = \mathcal{U}$. Zadefinujme funkci σ následujícím způsobem:

$$x\sigma(f)y \equiv \{v \in V \mid xf(v)y\} \in \mathcal{U}, \text{ kde } x, y \in X \text{ a } f \in F. \tag{2.34}$$

Z definice množiny Σ musíme ukázat, že toto σ splňuje (A2), (A3) a (A4).

• (A3): Nechť $x, y \in X, f \in F$ a $xf(V)y$. Potom $\{v \in V \mid xf(v)y\} = V \in \mathcal{U}$, neboť z (F3) $\emptyset \notin \mathcal{U}$, tudíž díky lemmatu 4 platí $\emptyset^\mathsf{c} = V \in \mathcal{U}$. Z (2.34) je $x\sigma(f)y$.

• (A4): Nechť $x, y \in X$ a $f, g \in F$ a $f = g$ na $\{x, y\}$. To z definice 3 znamená:

$$\forall\, v \in V : [xf(v)y \iff xg(v)y] \wedge [yf(v)x \iff yg(v)x]. \tag{2.35}$$

Chceme ukázat $\sigma(f) = \sigma(g)$ na $\{x, y\}$, k čemuž z definice 4 stačí ověřit toto:

$$[x\sigma(f)y \iff x\sigma(g)y] \wedge [y\sigma(f)x \iff y\sigma(g)x]. \tag{2.36}$$

Z (2.35) máme množinové rovnosti $\{v \in V \mid xf(v)y\} = \{v \in V \mid xg(v)y\}$ a $\{v \in V \mid yf(v)x\} = \{v \in V \mid yg(v)x\}$. Tudíž:

$$x\sigma(f)y \iff \{v \in V \mid xf(v)y\} \in \mathcal{U} \iff \{v \in V \mid xg(v)y\} \in \mathcal{U} \iff x\sigma(g)y.$$
$$y\sigma(f)x \iff \{v \in V \mid yf(v)x\} \in \mathcal{U} \iff \{v \in V \mid yg(v)x\} \in \mathcal{U} \iff y\sigma(g)x.$$

Tím je platnost podmínky (2.36) ověřena.

• (A2): Z (2.34) je funkce σ zřejmě definovaná pro všechna $f \in F$. Zbývá ukázat, že pro každé $f \in F$ je $\sigma(f)$ relace ostré preference na X. K tomu podle definice 2 postačí dokázat, že $\sigma(f)$ je antisymetrická a negativně tranzitivní. Nechť $f \in F$ je libovolná situace.

Nejprve antisymetrie. Ať $x, y \in X$ a $x\sigma(f)y$, tj. $\{v \in V \mid xf(v)y\} \in \mathcal{U}$. Víme, že relace $f(v)$ jsou antisymetrické, takže $xf(v)y \implies \neg\,[yf(v)x]$. Množinově zapsáno, $\{v \in V \mid xf(v)y\} \subseteq \{v \in V \mid \neg\,[yf(v)x]\}$. Ježto $\mathcal{U}$ je ultrafiltr, z (F1) plyne $\{v \in V \mid \neg\,[yf(v)x]\} \in \mathcal{U}$. Z lemmatu 4 a (2.34) máme:

$$\{v \in V \mid \neg\,[yf(v)x]\}^\mathsf{c} = \{v \in V \mid yf(v)x\} \notin \mathcal{U} \iff \neg\,[y\sigma(f)x].$$

Tedy pro libovolná $x, y \in X$ platí $x\sigma(f)y \implies \neg\,[y\sigma(f)x]$.

Nyní negativní tranzitivita. Nechť $x, y, z \in X$ a $\neg\,[x\sigma(f)y]$ a $\neg\,[y\sigma(f)z]$. Podle definice (2.34) tudíž platí:

$$B_1 = \{v \in V \mid xf(v)y\} \notin \mathcal{U} \;\text{ a }\; B_2 = \{v \in V \mid yf(v)z\} \notin \mathcal{U}.$$

Tvrdíme, že také $B_1 \cup B_2 \notin \mathcal{U}$. Pokud by totiž platilo $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{U}$, tak z lemmatu 4 bod (iii) nutně $B_1 \in \mathcal{U}$ nebo $B_2 \in \mathcal{U}$, což je spor.

Poněvadž $f(v)$ jsou relace ostré preference, z (1.1) máme:

$$xf(v)z \implies xf(v)y \vee yf(v)z.$$

To znamená, že:

$$B_3 = \{v \in V \mid xf(v)z\} \subseteq \{v \in V \mid xf(v)y\} \cup \{v \in V \mid yf(v)z\} = B_1 \cup B_2.$$

Odsud nutně $B_3 \notin \mathcal{U}$. Kdyby totiž platilo $B_3 \in \mathcal{U}$, tak z axiomu (F1) a faktu $B_3 \subseteq B_1 \cup B_2$ už plyne $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{U}$, což je však spor s $B_1 \cup B_2 \notin \mathcal{U}$ dokázaným výše.

Tedy $B_3 = \{v \in V \mid xf(v)z\} \notin \mathcal{U}$, neboli $\neg\,[x\sigma(f)z]$. Tím je negativní tranzitivita relace $\sigma(f)$ dokázána a spolu s ní i to, že $\sigma \in \Sigma$.

K dokončení důkazu surjektivity r je třeba ukázat, že $\mathcal{U}_\sigma = \mathcal{U}$. K tomu postačí dokázat, že $\mathcal{U}_\sigma \subseteq \mathcal{U}$. Pokud by totiž nastalo $\mathcal{U}_\sigma \subsetneq \mathcal{U}$, tak by $\mathcal{U}$ byl striktně jemnější filtr než $\mathcal{U}_\sigma$, což by byl spor s definicí ultrafiltru.

Nechť $U \in \mathcal{U}_\sigma$. Mějme dvě různé alternativy $x, y \in X$ a situaci $f \in F$ splňující $xf(U)y$ a $yf(U^c)x$. Z antisymetrie platí $\forall v \in U^c : \neg\,[xf(v)y]$. Díky tomuto faktu, platnosti $xf(U)y$ a tomu, že $V = U \cup U^c$ je disjunktní rozklad množiny V, dostáváme $U = \{v \in V \mid xf(v)y\}$.

Jelikož $U \in \mathcal{U}_\sigma$, z (2.29) plyne $xf(U)y \implies x\sigma(f)y$. Z definice (2.34) námi vytvořeného volebního systému σ tak platí $U = \{v \in V \mid xf(v)y\} \in \mathcal{U}$. Tudíž dostáváme $\mathcal{U}_\sigma \subseteq \mathcal{U}$. Podle diskuse výše tak $\mathcal{U}_\sigma = \mathcal{U}$.

□

Všimněme si, že systém U_σ je tvořen právě všemi rozhodujícími skupinami. Pokud by totiž existovala rozhodující skupina $W \notin \mathcal{U}_\sigma$, tak z lemmatu 3 víme, že existuje $U \in \mathcal{U}_\sigma$ taková, že $U \cap W = \emptyset$. Potom však existuje situace $f \in F$ taková, že pro vybrané dvě alternativy $x, y \in X$ platí $xf(U)y$ a $yf(W)x$, a tak nutně také $x\sigma(f)y$ a $y\sigma(f)x$, což je spor s antisymetrií $\sigma(f)$.

Všechny rozhodující skupiny (příslušné danému volebnímu systému $\sigma \in \Sigma$) tedy tvoří ultrafiltr. Díky tomu o nich z axiomů filtru a lemmatu 4 o charakterizaci ultrafiltru víme následující:

(i) Každá skupina voličů obsahující rozhodující skupinu je také rozhodující.
(ii) Průnik dvou rozhodujících skupin je rozhodující skupina.
(iii) Pro každou skupinu voličů platí, že buď tato skupina, nebo její doplněk je rozhodující.
(iv) Rozdělíme-li rozhodující skupinu na dvě (ne nutně disjunktní) podskupiny, alespoň jedna z nich je rozhodující.

Zejména to, že průnik dvou rozhodujících skupin je také rozhodující skupina, je poměrně neintuitivní a překvapující výsledek. Cesta k němu také nebyla úplně jednoduchá. Nejprve jsme lemmatem 10 dokázali, že systémy $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ a $\mathcal{U}''$ definované po řadě předpisy (2.1), (2.2) a (2.3) se rovnají, tedy že jde jen o tři ekvivalentní definice jednoho množinového systému. Poté jsme v lemmatu 11 ukázali, že tento množinový systém je ultrafiltr (tedy speciálně že průnik dvou jeho prvků v něm také leží). Nakonec jsme v části (i) věty 1 a v odstavci ihned za větou ukázali, že tento ultrafiltr je tvořen právě všemi rozhodujícími skupinami.

Část (ii) právě dokázané věty 1 nám slovy říká následující: „Vyberme nějaké skupiny voličů. Pokud tyto skupiny tvoří ultrafiltr, tak už existuje volební systém $\sigma \in \Sigma$ takový, že jemu příslušné rozhodující skupiny jsou přesně námi vybrané skupiny.“ Ještě jinými slovy: „Předepišme, které skupiny voličů mají být rozhodující. Pokud takto předepsané rozhodující skupiny tvoří ultrafiltr, tak už existuje volební systém $\sigma \in \Sigma$, jehož rozhodující skupiny jsou přesně ty skupiny, které jsme předepsali.“ Vzorec (2.34) z důkazu nám navíc dává, jak tento volební systém σ zkonstruovat. Jako volební pravidlo stačí vzít jednoduše „jakmile si něco přeje libovolná z předepsaných rozhodujících skupin, tak už tutéž volbu musí učinit i společnost.“ Podle důkazu pak takto definovaný volební systém σ skutečně splňuje (A1) až (A4), tedy $\sigma \in \Sigma$. Všimněme si, že část (ii) věty 1 říká pouze to, že k danému ultrafiltru předepsaných rozhodujících skupin dokážeme najít (dokonce přímo zkonstruovat) aspoň jeden volební systém $\sigma \in \Sigma$ s přesně těmito rozhodujícími skupinami. Volebních systémů s týmiž rozhodujícími skupinami však může být více, o tom už věta nic neříká.

Posledním tvrzením této kapitoly bude věta charakterizující všechny volební systémy $\sigma \in \Sigma$, které splňují také axiom nediktátorství (A5).

Věta 2. *Volební systém $\sigma \in \Sigma$ splňuje* (A5) $\iff$ *$\mathcal{U}_\sigma$ je netriviální.*

Důkaz. $\Rightarrow$: Nechť $\sigma \in \Sigma$ splňuje (A5) a nechť pro spor $\mathcal{U}_\sigma$ je triviální. Podle lemmatu 6 existuje $v_0 \in V$ tak, že $\mathcal{U}_\sigma = \{U \subseteq V \mid v_0 \in U\}$. Tudíž $\{v_0\} \in \mathcal{U}_\sigma$. Z vlastnosti (2.29) ultrafiltru $\mathcal{U}_\sigma$ tak plyne:

$$\forall\, x, y \in X \ \ \forall\, f \in F : xf(v_0)y \implies x\sigma(f)y.$$

To znamená, že volič v_0 je diktátor, což je spor s (A5).

$\Leftarrow$: Nechť $\sigma \in \Sigma$. Ať $\mathcal{U}_\sigma$ je netriviální a nechť pro spor neplatí (A5), tj.

$$\exists\, v_0 \in V \text{ takové, že } \forall\, x, y \in X \ \ \forall\, f \in F : xf(v_0)y \implies x\sigma(f)y. \tag{2.37}$$

Tvrdíme, že $\{v_0\} \in \mathcal{U}_\sigma$. Nechť pro spor $\{v_0\} \notin \mathcal{U}_\sigma$. Potom z lemmatu 4 nutně platí $\{v_0\}^\mathsf{c} \in \mathcal{U}_\sigma$. Zvolme dvě různá $x, y \in X$ libovolně a uvažme situaci $f \in F$ splňující $xf(v_0)y$ a $yf(\{v_0\}^\mathsf{c})x$. Z (2.37) platí $xf(v_0)y \implies x\sigma(f)y$. Protože $\mathcal{U}_\sigma$ má vlastnost (2.29), platí též $yf(\{v_0\}^\mathsf{c})x \implies y\sigma(f)x$. Z antisymetrie $\sigma(f)$ pak dostáváme $\neg\,[x\sigma(f)y]$. Zároveň však $x\sigma(f)y$, což je spor.

Nyní ukážeme, že $\mathcal{U}_\sigma = \{U \subseteq V \mid v_0 \in U\}$.

- $\supseteq$: Nechť $U \subseteq V$ a $v_0 \in U$. Víme, že $\{v_0\} \in \mathcal{U}_\sigma$ a $\{v_0\} \subseteq U$, takže z (F1) dostáváme $U \in \mathcal{U}_\sigma$.
- $\subseteq$: Nechť pro spor existuje $U \in \mathcal{U}_\sigma$ taková, že $v_0 \notin U$. Potom však zřejmě $U \subseteq V \setminus \{v_0\}$, tudíž podle (F1) platí $V \setminus \{v_0\} \in \mathcal{U}_\sigma$. Zároveň víme, že $\{v_0\} \in \mathcal{U}_\sigma$. Díky (F2) tak $\{v_0\} \cap (V \setminus \{v_0\}) = \emptyset \in \mathcal{U}_\sigma$, což je spor s (F3).

Tedy $\mathcal{U}_\sigma = \{U \subseteq V \mid v_0 \in U\}$, což podle lemmatu 6 znamená, že $\mathcal{U}_\sigma$ je triviální. To je však spor s předpokladem toho, že tento ultrafiltr je netriviální.

□

3. Arrowova věta a otázka diktatury

3.1 Konečný případ

Na začátku tohoto textu jsme zformulovali jisté požadavky na přijatelný volební systém a dali si za cíl zjistit, které volební systémy těmto požadavkům vyhovují. Odpovědí na tuto otázku je Arrowova věta.

Věta 3. *(Kenneth Arrow)*
Nechť V je konečná. Potom pro každý volební systém $\sigma \in \Sigma$ platí $\neg$ (A5)*. Jinými slovy, zavedení libovolného volebního systému splňujícího axiomy* (A1) *až* (A4) *má nutně za následek nastolení diktatury jednoho člověka.*

Důkaz. Nechť $\sigma \in \Sigma$ a $\mathcal{U}_\sigma$ je příslušný ultrafiltr z věty 1. Podle věty 2 splňuje volební systém $\sigma \in \Sigma$ axiom (A5) právě tehdy, když je $\mathcal{U}_\sigma$ netriviální. Podle lemmatu 5 je ale každý ultrafiltr na konečné množině V triviální, tedy i $\mathcal{U}_\sigma$ je triviální. Volební systém σ tak (A5) nesplňuje, neboli platí $\neg$ (A5). $\square$

Na první pohled jde o poměrně skličující výsledek. Poznamenejme však, že jsme v celém textu předpokládali (a nejednou toho využili v důkazech) platnost podmínky (A1), tedy že na výběr jsou alespoň tři alternativy. Je dokázáno, že pokud jsou na výběr dvě alternativy, problém diktatury nenastává.

Dále si uvědomme, že věta dokazuje neexistenci volebního systému, který by fungoval *vždy*, což však nemusí ihned znamenat, že daný volební systém je veskrze špatný. Pokud se nespokojíme s diktaturou a dále trváme na tom, že na výběr jsou alespoň tři alternativy, pak dostáváme, že pro daný volební systém neplatí alespoň jedna z podmínek (A2), (A3) a (A4). To však také může znamenat pouze to, že existuje jedna možná „špatná“ situace (tedy kombinace preferencí voličů), pro kterou daný volební systém selhává, zatímco ve všech ostatních možných situacích bude tento volební systém uspokojivý. Navíc může být velice nepravděpodobné, že tato špatná situace skutečně někdy nastane. O každém volebním systému (alespoň tak, jak jej chápeme v tomto textu) však s jistotou víme to, že pro něj nějaká taková špatná situace existuje. Podobně jako u lidí tudíž také u volebních systémů platí, že nikdo není dokonalý.

3.2 Nekonečný případ

3.2.1 Diktatura jedince

Poněkud jiný přístup k Arrowově větě zvolil Peter Fishburn, který předpokládal platnost axiomů (A1) až (A5) a ukázal, že z toho nutně plyne $|V| = \infty$, tedy že nutnou podmínkou je, aby voličů bylo nekonečně mnoho (viz [2]). Když tohle víme, přirozeně se nabízí otázka, zda náhodou nejde i o podmínku postačující. Odpovědí je, že ano.

Věta 4. *(Peter Fishburn)*
Nechť V je nekonečná. Potom existuje volební systém $\sigma \in \Sigma$ splňující axiom (A5).

Důkaz. V je nekonečná, a tak díky lemmatu 8 víme, že na V existuje netriviální ultrafiltr $\mathcal{U}$. Podle věty 1 část (ii) existuje volební systém $\sigma \in \Sigma$ takový, že $\mathcal{U}_\sigma = \mathcal{U}$. Protože $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\sigma$ je netriviální, z věty 2 máme, že tento volební systém σ splňuje axiom nediktátorství (A5).

□

S trochou nadsázky se tak dá říci, že jako lidstvo máme smůlu, neboť je nás jen konečně mnoho. Dokonce ani tento výsledek však není úplně uspokojivý. Ukázali jsme sice, že v případě nekonečně mnoha voličů existuje volební systém splňující veškeré naše požadavky, jenže *nevíme, jak vypadá.* V důkazu Fishburnovy věty jsme totiž použili lemma 8, které využilo platnosti lemmatu 7 o rozšíření filtru na ultrafiltr, jež je aplikací Zornova lemmatu. Nevýhoda použití Zornova lemmatu spočívá v tom, že nám dává pouze existenci daného ultrafiltru, ale už ne jeho popis. Na základě tohoto ultrafiltru jsme tak sice schopni zkonstruovat volební systém (a to pomocí (2.34) z důkazu části (ii) věty 1), ale abychom takto definovaný volební systém mohli reálně použít, musíme vědět, jak příslušný ultrafiltr vypadá, což bohužel nevíme.

3.2.2 Diktatura skupiny

Z jistého úhlu pohledu není výsledek Fishburnovy věty 4 tolik překvapivý. Zatímco v konečném případě ($|V| < \infty$) tvoří jeden volič jistou nenulovou část množiny všech voličů, v nekonečném případě ($|V| = \infty$) bychom čekali, že jedinec bude zanedbatelný. Můžeme si to neformálně představit buď tak, že kardinalita množiny V se v nekonečném případě odstraněním jednoho voliče nijak nezmění ($\infty - 1 = \infty$), takže si ani nevšimneme, že daný volič už se voleb neúčastní, nebo tak, že každý volič tvoří „nulovou část“ množiny všech voličů ($\frac{1}{\infty} = 0$).

Od jediného voliče bychom tak nejspíše neočekávali, že bude diktovat společenskou volbu. Příslušná formulace diktatury by spíše zněla tak, že existuje nějaká malá skupina tvořící nenulovou část množiny všech voličů, která už v každé situaci svou volbou diktuje volbu celé společnosti (tento požadavek řádně zformulujeme později). K vyšetření toho, zda v nekonečném případě nastane diktatura takové skupiny, však nejdřív musíme zavést nějaký model, který by nám řekl, jak velkou část množiny V všech voličů daná skupina tvoří, přičemž speciálně každý jeden volič by v tomto modelu měl tvořit nulovou část množiny V.

Určit, jak velkou část množiny všech voličů daná skupina tvoří, není v případě, že $|V| < \infty$, tak těžké. Pro skupinu $U \subseteq V$ můžeme říci, že tvoří část o velikosti $\frac{|U|}{|V|}$. Tomuto číslu budeme dále v textu říkat *rozsah.* Například rozsah 0,5 v konečném případě znamená, že daná skupina tvoří 50 % všech voličů. V případě $|V| = \infty$ bychom chtěli mít něco podobného. Pokud však také $|U| = \infty$, tak výše uvedený postup selhává, neboť není vidět, kolik by $\frac{\infty}{\infty}$ mělo být. Potřebujeme tudíž něco sofistikovanějšího.

Za tím účelem si vypůjčíme myšlenku, kterou poprvé použil Robert Aumann v ekonomii, když se snažil vytvořit model tzv. dokonalé konkurence (viz [5]). Stejně jako v našem problému má totiž i v dokonalé konkurenci být jedinec zanedbatelný.

Nejprve však připomeňme několik pojmů z teorie míry.

Definice 9. *Nechť V je množina. Řekneme, že systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny V je $\sigma-$**algebra** na V, jestliže platí:*

- $\emptyset \in \mathcal{S}$.
- $A \in \mathcal{S} \implies (V \setminus A) \in \mathcal{S}$. *(uzavřenost na doplňky)*
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S} \implies \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \in \mathcal{S}$. *(uzavřenost na spočetná sjednocení)*

Definice 10. *Nechť V je množina a $\mathcal{S}$ je $\sigma-$algebra na V. Řekneme, že zobrazení $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ je **míra,** jestliže splňuje:*

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- *Mějme spočetně mnoho po dvou disjunktních množin $A_n \in \mathcal{S}$. Potom:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \qquad \textit{(spočetná aditivita)}$$

*Trojici $(V, \mathcal{S}, \mu)$ budeme nazývat **prostor s mírou**. Množinám v systému $\mathcal{S}$ budeme říkat **měřitelné množiny**.*

Definice 11. *Nechť $(V, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že míra μ je:*

- ***konečná**, jestliže $\mu(V) < \infty$;*
- ***neatomická**, jestliže pro každé $U \in \mathcal{S}, \mu(U) > 0$ existuje $W \subseteq U$ taková, že $0 < \mu(W) < \mu(U)$.*

Modelem, který použijeme, bude právě prostor $(V, \mathcal{S}, \mu)$ s konečnou neatomickou mírou. Systém $\mathcal{S}$ bude soubor skupin voličů, tzv. *koalic*, a míra μ bude množinová funkce, která těmto koalicím přiřadí jejich rozsah. Budeme předpokládat, že každá jednoprvková podmnožina V (jeden volič) je měřitelná. Dále budeme požadovat, aby μ byla nejenom konečná, ale také aby $\mu(V) \neq 0$ (jinak by šlo o identicky nulovou míru). V takovém případě už lze lehce zařídit, aby $\mu(V) = 1$. Rozsahy koalic pak budou opět mezi 0 a 1 jako v konečném případě. Díky neatomičnosti míry máme navíc zajištěno, že rozsah jedince bude nulový. Kdyby totiž existoval volič $v \in V$ o rozsahu $\mu(\{v\}) > 0$, tak z neatomičnosti existuje $A \subseteq \{v\}$ taková, že $0 < \mu(A) < \mu(\{v\})$. Jedinými podmnožinami množiny $\{v\}$ jsou však $\emptyset$ a $\{v\}$. Přímo z definice míry máme $0 \not< 0 = \mu(\emptyset)$ a zřejmě platí $\mu(\{v\}) \not< \mu(\{v\})$. Nutně tak $\mu(\{v\}) = 0$.

Všimněme si, že nejen jedinec, ale také každá spočetná (tudíž i konečná) koalice $K = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$ má nulový rozsah. To snadno nahlédneme díky spočetné aditivitě míry μ:

$$\mu(K) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{v_n\} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{v_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Z toho plyne, že pokud je V spočetná, tak už nutně $\mu(V) = 0$, neboli μ je identicky nulová míra. Tento model je tedy použitelný pouze tehdy, když je V nespočetná. I z tohoto důvodu se také při modelování dokonalé konkurence v ekonomii, které bylo zmíněno výše, předpokládá, že V má velikost kontinua, to jest $|V| = |\mathbb{R}|$.

Podmínku diktatury ve společnosti nyní zformulujeme takto:

Pro každé $\epsilon > 0$ existuje koalice $K \in \mathcal{S}$ o rozsahu $\mu(K) \leq \epsilon$ taková, že platí

$$\forall\, x, y \in X \ \ \forall\, f \in F : xf(K)y \implies x\sigma(f)y. \tag{D}$$

Jinými slovy, ať už zvolíme libovolně malý rozsah, vždy existuje skupina voličů menšího nebo téhož rozsahu, která už diktuje volbu celé společnosti.

K vyšetření takto zformulované diktatury se nám budou hodit následující dvě pomocná lemmata.

Lemma 12. *Nechť $(V, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s konečnou neatomickou mírou. Nechť $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) > 0$. Potom pro každé reálné číslo $a > 0$ existuje $E' \subseteq E$ taková, že $0 < \mu(E') < a$.*

Důkaz. Nechť $E \in \mathcal{S}, \mu(E) > 0, a > 0$. Jestliže $\mu(E) < a$, položme $E' = E$.

Nechť $a \leq \mu(E)$. Z neatomičnosti míry μ existuje $A_1 \in \mathcal{S}, A_1 \subseteq E$ taková, že $0 < \mu(A_1) < \mu(E)$. Zřejmě A_1 a $E \setminus A_1$ jsou disjunktní, a tak z vlastností míry plyne $\mu(E) = \mu(A_1 \cup (E \setminus A_1)) = \mu(A_1) + \mu(E \setminus A_1)$. Protože z předchozího víme $0 < \mu(A_1) < \mu(E)$, nutně musí platit také $0 < \mu(E \setminus A_1) < \mu(E)$.

Tvrdíme, že $\mu(A_1) \leq \mu(E)/2$ nebo $\mu(E \setminus A_1) \leq \mu(E)/2$. Nechť toto pro spor neplatí, tedy $\mu(A_1) > \mu(E)/2$ a $\mu(E \setminus A_1) > \mu(E)/2$. Potom dostáváme:

$$\mu(E) = \mu(A_1 \cup (E \setminus A_1)) = \mu(A_1) + \mu(E \setminus A_1) > \mu(E)/2 + \mu(E)/2 = \mu(E).$$

Tedy $\mu(E) > \mu(E)$, což je spor.

- Pokud $\mu(A_1) \leq \mu(E)/2$, položme $B_1 = A_1 \subseteq E$.
- Pokud $\mu(A_1) > \mu(E)/2$, tak z předchozího nutně $\mu(E \setminus A_1) \leq \mu(E)/2$. Položme $B_1 = E \setminus A_1 \subseteq E$.

Tím jsme ukázali existenci $B_1 \subseteq E$ s mírou $0 < \mu(B_1) \leq \mu(E)/2$.

Opakovanou aplikací tohoto postupu tak pro každé $n \in \mathbb{N}$ dokážeme najít množinu $B_n \subseteq B_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq E$ takovou, že $0 < \mu(B_n) \leq \mu(E)/2^n$. Nalezněme číslo $N \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu(E)/2^N < a$, a položme $E' = B_N$. Zřejmě E' má požadované vlastnosti.

□

Lemma 13. *Nechť $(V, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s konečnou neatomickou mírou. Potom pro každé $\epsilon > 0$ existuje konečný disjunktní rozklad $A_1 \cup \ldots \cup A_n = V$ množiny V takový, že $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : \mu(A_i) \leq \epsilon$.*

Důkaz. Nechť $\epsilon > 0$. Je-li $\mu(V) \leq \epsilon$, pak $A_1 = V$ je hledaný rozklad.

Nechť $\epsilon < \mu(V)$, speciálně $\mu(V) > 0$. Nalezněme množinu $A_1 \subseteq V$ takovou, že platí $0 < \mu(A_1) < \epsilon$. Tuto množinu získáme použitím předchozího lemmatu 12 pro $E = V$ $(\mu(V) > 0)$ a $0 < a = \epsilon$.

Dále postupujeme indukcí. Předpokládejme, že máme po dvou disjunktní měřitelné množiny $A_1, \ldots, A_n \subseteq V$ takové, že $D_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ má míru $\mu(D_n) < \epsilon$. Pro $n = 1$ toto zařídit umíme díky výše řečenému.

Zadefinujme systém množin $\mathcal{F}_n = \{C \subseteq (V \setminus D_n) \mid 0 < \mu(C) < \epsilon - \mu(D_n)\}$. Protože $\mu(V \setminus D_n) = \mu(V) - \mu(D_n) > \mu(V) - \epsilon > \epsilon - \epsilon = 0$ a $\epsilon - \mu(D_n) > 0$, z lemmatu 12 použitého na $E = V \setminus D_n$ a $a = \epsilon - \mu(D_n)$ dostáváme, že $\mathcal{F}_n$ je neprázdný.

Dále zadefinujme systém $\mathcal{G}_n = \{C \subseteq (V \setminus D_n) \mid \frac{1}{n} \leq \mu(C) < \epsilon - \mu(D_n)\}$.

Množinu A_{n+1} zvolme následovně:

- Je-li $\mathcal{G}_n \neq \emptyset$, zvolme A_{n+1} jako libovolnou množinu v $\mathcal{G}_n$.
- Je-li $\mathcal{G}_n = \emptyset$, zvolme A_{n+1} jako libovolnou množinu v $\mathcal{F}_n$. Podle předchozí diskuse taková množina vždy existuje.

Protože A_{n+1} leží v $\mathcal{F}_n$ nebo $\mathcal{G}_n$, platí $A_{n+1} \subseteq (V \setminus D_n)$, a tedy D_n a A_{n+1} jsou disjunktní, tudíž také $A_1, \dots, A_{n+1}$ jsou po dvou disjunktní.

Jelikož každá množina v $\mathcal{F}_n$ a $\mathcal{G}_n$ má míru menší než $\epsilon - \mu(D_n)$, tak také $\mu(A_{n+1}) < \epsilon - \mu(D_n)$. Protože $D_{n+1} = A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1} = D_n \cup A_{n+1}$, z vlastností míry platí:

$$\mu(D_{n+1}) = \mu(D_n \cup A_{n+1}) = \mu(D_n) + \mu(A_{n+1}) < \mu(D_n) + \epsilon - \mu(D_n) = \epsilon.$$

Celkem tedy máme po dvou disjunktní měřitelné množiny $A_1, \dots, A_{n+1}$ takové, že platí $\mu(D_{n+1}) < \epsilon$, čímž je indukční krok dokončen.

Nyní položme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Z vlastností míry platí $\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Podíváme-li se na n-tý částečný součet, dostaneme:

$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \mu(D_n) < \epsilon,$ tudíž nutně $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \epsilon.$

Tvrdíme, že $\mu(A) = \epsilon$. Nechť pro spor $\mu(A) < \epsilon$.

Potom platí $\mu(V \setminus A) = \mu(V) - \mu(A) > \epsilon - \epsilon = 0$ a $\epsilon - \mu(A) > \epsilon - \epsilon = 0$. Podle lemmatu 12 použitého na $E = V \setminus A$ a $a = \epsilon - \mu(A)$ existuje $B \subseteq (V \setminus A)$ taková, že $0 < \mu(B) < \epsilon - \mu(A)$. Potom $\forall n \in \mathbb{N} : B \subseteq (V \setminus D_n)$, neboť:

$$B \subseteq (V \setminus A) = V \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \subseteq V \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = V \setminus D_n.$$

Dále platí $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < \mu(B) < \epsilon - \mu(A) \leq \epsilon - \mu(D_n)$, jelikož:

$$\mu(D_n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu(A), \text{ neboli } -\mu(A) \leq -\mu(D_n).$$

Nalezněme $N \in \mathbb{N}$ takové, že $0 < \frac{1}{N} \leq \mu(B)$.

Potom $\forall n \geq N, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \mu(B) < \epsilon - \mu(D_n)$, a tudíž $B \in \mathcal{G}_n$. To znamená, že $\forall n \geq N, n \in \mathbb{N} : \mathcal{G}_n \neq \emptyset$. Z konstrukce množin A_n tak víme, že $\forall n \geq N, n \in \mathbb{N}$ platí $A_n \in \mathcal{G}_n$, tedy speciálně $\mu(A_n) \geq \frac{1}{n}$. Potom však:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n) \geq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Tudíž $\mu(A) = \infty$, což je spor s $\mu(A) < \epsilon \in \mathbb{R}$, takže skutečně $\mu(A) = \epsilon$.

Celkem jsme tedy začali s množinou V nenulové míry větší než ϵ a našli její měřitelnou podmnožinu A takovou, že $\mu(A) = \epsilon$.

Položme $B_1 = A$. Množina $V \setminus B_1$ je měřitelná díky tomu, že σ-algebra je uzavřená na doplňky. Pokud je $\mu(V \setminus B_1) \leq \epsilon$, jsme hotovi a hledaný rozklad je $V = B_1 \cup (V \setminus B_1)$. V opačném případě aplikací výše uvedeného postupu na množinu $V \setminus B_1$ získáme $B_2 \subseteq (V \setminus B_1)$ takovou, že $\mu(B_2) = \epsilon$. Protože σ-algebra je uzavřená na spočetná sjednocení a doplňky, množina $V \setminus (B_1 \cup B_2)$ je měřitelná. Pokud je míra této množiny $\leq \epsilon$, tak je hotovo. V opačném případě opět najdeme množinu $B_3 \subseteq V \setminus (B_1 \cup B_2)$ takovou, že $\mu(B_3) = \epsilon$.

Budeme-li takto pokračovat, tak poněvadž $\mu(V) < \infty$, po konečně mnoha krocích, jejichž počet označme K, bude pro $B_{K+1} = V \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_K)$ platit $\mu(B_{K+1}) = \mu(V) - K\epsilon \leq \epsilon$. Rozklad $V = B_1 \cup \ldots \cup B_{K+1}$ je zřejmě disjunktní a z konstrukce množin zřejmě $\forall\, i \in \{1, \ldots, K+1\} : \mu(B_i) \leq \epsilon$.

□

Povšimněme si, že jsme dokázali o trochu silnější tvrzení. Ukázali jsme, že pro každé $\epsilon > 0$ jsme schopni najít disjunktní rozklad množiny V, ve kterém mají všechny množiny míru $\leq \epsilon$, přičemž míra všech množin v tomto rozkladu až na jednu je navíc přesně rovna ϵ.

Věta 5. *Nechť* $(V, \mathcal{S}, \mu)$ *je prostor s konečnou neatomickou mírou. Potom pro každý volební systém* $\sigma \in \Sigma$ *platí* (D).

Důkaz. Nechť $\sigma \in \Sigma$ a $\epsilon > 0$. Podle předchozího lemmatu 13 existuje konečný disjunktní rozklad $K_1 \cup \ldots \cup K_n = V$ takový, že $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : \mu(K_i) \leq \epsilon$. Nechť $\mathcal{U}_\sigma$ je příslušný ultrafiltr z věty 1. Zřejmě $K_1 \cup \ldots \cup K_n = V \in \mathcal{U}_\sigma$, jinak by nutně $V^{\mathsf{c}} = \emptyset \in \mathcal{U}_\sigma$, což by byl spor s (F3). Podle lemmatu 9 existuje právě jedno $i \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $K_i \in \mathcal{U}_\sigma$. Protože $\mathcal{U}_\sigma$ má vlastnost (2.29), platí $\forall\, x, y \in X \;\; \forall\, f \in F : x f(K_i) y \implies x \sigma(f) y$. Pro dané $\epsilon > 0$ tudíž platí:

$$\exists\, K \in \mathcal{S}, \mu(K) \leq \epsilon \text{ taková, že } \forall\, x, y \in X \;\; \forall\, f \in F : x f(K) y \implies x \sigma(f) y.$$

□

Ukázali jsme tedy, že pokud je V nespočetná a $\mu(V) \neq 0$, tak ve společnosti nastává diktatura ve smyslu podmínky (D). Množinu voličů V jsme schopni rozložit na konečně mnoho navzájem disjunktních skupin o rozsahu menším nebo rovno libovolně zvolené $\epsilon > 0$ a právě jedna ze skupin v tomto rozkladu už svými preferencemi diktuje preference celé společnosti.

Nyní uvažme případ $\mu(V) = 0$. Podle právě dokázané věty je i tehdy splněno (D), což ale není nic překvapivého. „Diktaturu“ množiny V požadujeme přímo v axiomu (A3), a protože $\mu(V) = 0$, podmínka (D) je tím triviálně splněna. Je-li V konečná, tak z Arrowovy věty 3 už víme, že nastává diktatura jedince. Pokud je V spočetná, můžeme využít podobnou myšlenku jako v důkazu předešlé věty. Rozložíme-li V na konečně mnoho disjunktních skupin voličů, tak nám lemma 9 říká, že právě jedna z těchto skupin leží v $\mathcal{U}_\sigma$, tedy že už svou volbou diktuje volbu celé společnosti. Totéž platí i pro případ, kdy je V nespočetná a $\mu(V) = 0$.

3.2.3 Neviditelný diktátor

V poslední části tohoto textu si ukážeme, že i v nekonečném případě v jistém smyslu přetrvává diktatura jedince, kterému budeme říkat „neviditelný diktátor“. K zadefinování a důkazu existence tohoto jedince bude třeba využít několika pojmů a poznatků z obecné topologie, které zde nejprve shrneme.

Definice 12. *Nechť Y je množina a $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(Y)$.*
*Dvojici $(Y, \mathcal{T})$ nazveme **topologický prostor**, jestliže platí následující:*

- $\emptyset, Y \in \mathcal{T}$.
- $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \implies U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.
- $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{W} \in \mathcal{T}$.

*Systém $\mathcal{T}$ se nazývá **topologie** a jeho prvkům říkáme **otevřené množiny**. Doplňky otevřených množin se nazývají **uzavřené množiny**.*

Zatímco v metrických prostorech jsou otevřené množiny určeny zvolenou metrikou, v topologických prostorech přímo předepisujeme, které množiny budeme považovat za otevřené. Takto zvolené otevřené množiny však musí splňovat výše uvedené podmínky. Volba těchto podmínek není náhodná, jelikož přesně tytéž vlastnosti mají otevřené množiny v metrických prostorech (a tudíž každý metrický prostor se svými otevřenými množinami je také topologický prostor). Může se ovšem stát, že námi předepsané otevřené množiny splňují všechny axiomy topologického prostoru, ale přitom na Y neexistuje metrika, která by generovala přesně tytéž otevřené množiny, neboli ne každý topologický prostor je takzvaně „metrizovatelný“.

Definice 13. *Nechť Y, Z jsou množiny, $\mathcal{F}$ je filtr na Y a $f : Y \to Z$ je zobrazení. Symbolem $f_*\mathcal{F}$ rozumíme systém $f_*\mathcal{F} = \{A \subseteq Z \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$, kde $f^{-1}(A)$ značí vzor množiny A při zobrazení f.*

Lemma 14. *Nechť Y, Z jsou množiny, $\mathcal{U}$ je (ultra)filtr na Y a $f : Y \to Z$ je zobrazení. Potom $f_*\mathcal{U}$ je (ultra)filtr na Z.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že pokud je $\mathcal{U}$ filtr, tak i $f_*\mathcal{U}$ je filtr.

- Víme, že $f^{-1}(Z) = Y \in \mathcal{U}$, tudíž $Z \in f_*\mathcal{U}$, tedy $f_*\mathcal{U}$ je neprázdný.
- (F3): $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin \mathcal{U}$ z (F3) použitého na filtr $\mathcal{U}$, tudíž $\emptyset \notin f_*\mathcal{U}$.
- (F1): Nechť $A \subseteq B \subseteq Z$ a $A \in f_*\mathcal{U}$. Chceme $B \in f_*\mathcal{U}$.

  Jelikož $A \subseteq B$, tak též $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. Protože z definice systému $f_*\mathcal{U}$ je $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$, z axiomu (F1) použitého na filtr $\mathcal{U}$ máme $f^{-1}(B) \in \mathcal{U}$, neboli $B \in f_*\mathcal{U}$.
- (F2): Nechť $A_1, A_2 \in f_*\mathcal{U}$. Potom z definice $f^{-1}(A_1) \in \mathcal{U}$ a $f^{-1}(A_2) \in \mathcal{U}$. Z (F2) použitého na filtr $\mathcal{U}$ máme $f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{U}$, tudíž platí $A_1 \cap A_2 \in f_*\mathcal{U}$.

Nyní předpokládejme, že $\mathcal{U}$ je ultrafiltr. Už jsme ukázali, že $f_*\mathcal{U}$ je filtr. Podle lemmatu 4 tak k důkazu toho, že $f_*\mathcal{U}$ je ultrafiltr, stačí dokázat, že pro každou množinu $A \subseteq Z$ nastane právě jedna z možností $A \in f_*\mathcal{U}$ a $A^{\mathsf{c}} \in f_*\mathcal{U}$.

Pokud $A \in f_*\mathcal{U}$ a $A^{\mathsf{c}} \in f_*\mathcal{U}$ pro nějakou $A \subseteq Z$, tak protože $f_*\mathcal{U}$ je filtr, z axiomu (F2) dostáváme $A \cap A^{\mathsf{c}} = \emptyset \in f_*\mathcal{U}$, což je spor s (F3), takže tento případ nastat nemůže.

Jestliže pro nějakou $A \subseteq Z$ platí $A \notin f_*\mathcal{U}$ a $A^{\mathsf{c}} \notin f_*\mathcal{U}$, tak z definice platí také $f^{-1}(A) \notin \mathcal{U}$ a $f^{-1}(A^{\mathsf{c}}) \notin \mathcal{U}$. Avšak:

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(A^{\mathsf{c}}) = f^{-1}(A \cup A^{\mathsf{c}}) = f^{-1}(Z) = Y \in \mathcal{U}.$$

Podle lemmatu 4 bod (iii) pak nutně $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ nebo $f^{-1}(A^{\mathsf{c}}) \in \mathcal{U}$, což je spor. Pro každou množinu $A \subseteq Z$ tak skutečně nastane právě jedna z možností $A \in f_*\mathcal{U}$ a $A^{\mathsf{c}} \in f_*\mathcal{U}$, tudíž $f_*\mathcal{U}$ je ultrafiltr.

□

Definice 14. *Nechť $(Y, \mathcal{T})$ je topologický prostor.*

- *Řekneme, že systém množin $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$ je **otevřené pokrytí**, jestliže $\bigcup \mathcal{O} = Y$.*
- *Řekneme, že $(Y, \mathcal{T})$ je **kompaktní**, jestliže pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{O}$ existuje konečný systém $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{O}$ tak, že $\bigcup \mathcal{Q} = Y$.*
- *Prostor $(Y, \mathcal{T})$ nazveme **Hausdorffův**, jestliže platí následující:*

$$\forall\, x, y \in Y, x \neq y, \exists\, U_1, U_2 \in \mathcal{T} : x \in U_1 \wedge y \in U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

- *Nechť $\mathcal{F}$ je filtr na Y. Řekneme, že $\mathcal{F}$ **konverguje** k bodu $y \in Y$, jestliže:*

$$\forall\, U \in \mathcal{T} : y \in U \implies U \in \mathcal{F}.$$

Lemma 15. *Nechť $(Y, \mathcal{T})$ je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $\mathcal{U}$ je ultrafiltr na Y. Potom $\mathcal{U}$ konverguje k právě jednomu bodu.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\mathcal{U}$ nekonverguje k žádnému $y \in Y$. Potom z definice (ne)konvergence filtru platí $\forall\, y \in Y \;\; \exists\, U_y \in \mathcal{T} : y \in U_y \wedge U_y \notin \mathcal{U}$.

Zřejmě $Y = \bigcup\limits_{y \in Y} U_y$. Z kompaktnosti existují $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tak, že $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}$.

Protože $U_{y_1} \cup (U_{y_2} \cup \ldots \cup U_{y_n}) = Y \in \mathcal{U}$, z lemmatu 4 víme, že $U_{y_1} \in \mathcal{U}$ nebo $U_{y_2} \cup \ldots \cup U_{y_n} \in \mathcal{U}$. Jelikož však z předchozího $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : U_{y_i} \notin \mathcal{U}$, nutně $U_{y_2} \cup \ldots \cup U_{y_n} \in \mathcal{U}$. Obdobným způsobem dostaneme $U_{y_3} \cup \ldots \cup U_{y_n} \in \mathcal{U}$ a tak dále, až nakonec $U_{y_{n-1}} \cup U_{y_n} \in \mathcal{U}$, a tedy podle lemmatu 4 nutně $U_{y_{n-1}} \in \mathcal{U}$ nebo $U_{y_n} \in \mathcal{U}$, což je však spor. Tudíž $\mathcal{U}$ konverguje k alespoň jednomu bodu.

Předpokládejme nyní, že $\mathcal{U}$ konverguje ke dvěma různým bodům $x, y \in Y$. Poněvadž Y je Hausdorffův, existují $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ takové, že $x \in U_1$ a $y \in U_2$ a $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Protože $\mathcal{U}$ konverguje k x, z definice konvergence máme $U_1 \in \mathcal{U}$. Dále $\mathcal{U}$ konverguje k y, tudíž z definice konvergence $U_2 \in \mathcal{U}$. Podle axiomu (F2) platí $U_1 \cap U_2 = \emptyset \in \mathcal{U}$, což je spor s (F3).

□

Definice 15. *Nechť* $(Y, \mathcal{T}_D)$ *je topologický prostor. Topologie* $\mathcal{T}_D$ *se nazývá* ***diskrétní****, jestliže* $\mathcal{T}_D = \mathcal{P}(Y)$*, tedy pokud je každá podmnožina množiny* Y *otevřená. Prostor* $(Y, \mathcal{T}_D)$ *s diskrétní topologií budeme nazývat* ***diskrétní prostor****.*

Je-li Y konečná množina a uvažujeme-li na Y diskrétní topologii $\mathcal{T}_D$, pak je prostor $(Y, \mathcal{T}_D)$ kompaktní a Hausdorffův. Konečná množina má totiž pouze konečně mnoho podmnožin, a tak je každé otevřené pokrytí konečné, tudíž je ihned splněna definice kompaktnosti. Protože každá množina v diskrétním prostoru je otevřená, tak pro každé $x, y \in Y, x \neq y$ existují otevřené množiny $\{x\}$ a $\{y\}$ takové, že $x \in \{x\}, y \in \{y\}$ a $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$, tj. prostor je Hausdorffův.

Definice 16. *Nechť* $(Y, \mathcal{T}_1), (Z, \mathcal{T}_2)$ *jsou topologické prostory a* $f : Y \to Z$ *je zobrazení. Řekneme, že* f *je* ***spojité****, pokud* $\forall U \in \mathcal{T}_2 : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$*.*

Každé zobrazení $f : (Y, \mathcal{T}_D) \to (Z, \mathcal{T})$ je spojité, protože každá podmnožina diskrétního prostoru je otevřená, tedy i $\forall U \in \mathcal{T} : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_D$.

Definice 17. *Nechť* $(Y, \mathcal{T})$ *je topologický prostor a* $A \subseteq Y$*.* ***Uzávěrem*** *množiny* A *rozumíme množinu* $\mathrm{cl}(A) = \bigcap\{F \subseteq Y \mid A \subseteq F \wedge F \text{ je uzavřená}\}$*.*
Řekneme, že A *je* ***hustá*** *v* Y*, jestliže* $\mathrm{cl}(A) = Y$*.*

Z obecné topologie víme, že pro každý topologický prostor $(Y, \mathcal{T})$ existuje topologický prostor $(\overline{Y}, \overline{\mathcal{T}})$ zvaný *Stone-Čechova kompaktifikace*, pro který platí následující:

- $(\overline{Y}, \overline{\mathcal{T}})$ je kompaktní Hausdorffův.
- Y je hustá v $\overline{Y}$.
- Nechť $(K, \mathcal{S})$ je kompaktní Hausdorffův prostor. Každé spojité zobrazení $f : Y \to K$ lze jednoznačně rozšířit na spojité zobrazení $\overline{f} : \overline{Y} \to K$, tj. $f = \overline{f}$ na Y.

Zaveďme na množině voličů V diskrétní topologii, tj. každá podmnožina V bude otevřená (a tím pádem i uzavřená). Předpokládejme, že množina X všech alternativ, které jsou na výběr, je konečná. Na množině $\mathcal{P}$ všech relací ostré preference na X uvažujme taktéž diskrétní topologii. Protože V je diskrétní prostor, podle předchozí diskuse bude každé zobrazení $f : V \to \mathcal{P}$ (neboli každé $f \in F$) spojité. Jelikož X je konečná, tak i $\mathcal{P}$ je konečná, což dle dříve řečeného znamená, že $\mathcal{P}$ s diskrétní topologií bude kompaktní Hausdorffův prostor. Díky existenci Stone-Čechovy kompaktifikace víme, že existuje prostor $(\overline{V}, \overline{\mathcal{T}})$ takový, že:

- $(\overline{V}, \overline{\mathcal{T}})$ je kompaktní Hausdorffův.
- V je hustá ve $\overline{V}$ (speciálně $V \subseteq \overline{V}$).
- Každé $f \in F$ lze jednoznačně rozšířit na spojité zobrazení $\overline{f} : \overline{V} \to \mathcal{P}$.

Prostor $\overline{V}$ si můžeme představit tak, že jsme k naší množině voličů V vhodně přidali další jedince odjinud, kteří se sice neúčastní voleb, ale také mají své preference. Každou situaci $f : V \to \mathcal{P}$, která voličům ve V přiřadí jim příslušnou relaci ostré preference (tj. jaké preference zaujali), pak rozšíříme na funkci $\overline{f} : \overline{V} \to \mathcal{P}$, která nám navíc řekne, jaké preference v dané situaci zaujali nově přidaní jedinci ve $\overline{V} \setminus V$.

Podobně jako dříve se nabízí otázka, zda existuje nějaký jedinec $v_0 \in \overline{V}$, který svými preferencemi diktuje volbu společnosti, v níž však volí pouze voliči z množiny V. Tuto formu diktatury matematicky zapíšeme následovně:

$$\exists\, v_0 \in \overline{V} \text{ tak, že } \forall\, x, y \in X \;\; \forall\, f \in F : x\overline{f}(v_0)y \implies x\sigma(f)y. \tag{ND}$$

Věta 6. *Nechť $|X| < \infty$. Potom pro každý volební systém $\sigma \in \Sigma$ platí* (ND).

Důkaz. Nechť $\sigma \in \Sigma$ a $\mathcal{U}_\sigma$ je ultrafiltr z věty 1. U_σ je sice ultrafiltr na V, avšak na $\overline{V}$ to není ani filtr, neboť např. $\overline{V} \notin \mathcal{U}_\sigma$, tj. $\mathcal{U}_\sigma$ není uzavřený na nadmnožiny.

Zadefinujme systém $\overline{\mathcal{U}_\sigma} = \{W \subseteq \overline{V} \mid \exists\, U \in \mathcal{U}_\sigma : U \subseteq W\}$ všech nadmnožin prvků v $\mathcal{U}_\sigma$. Tvrdíme, že to už je ultrafiltr na $\overline{V}$.

- $V \subseteq \overline{V}$ a $V \in \mathcal{U}_\sigma$, tudíž $\overline{V} \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}$, tedy $\overline{\mathcal{U}_\sigma}$ je neprázdný.
- (F3): Prázdná množina je nadmnožinou pouze prázdné množiny, ale $\emptyset \notin \mathcal{U}_\sigma$, tudíž $\emptyset \notin \overline{\mathcal{U}_\sigma}$.
- (F1): Nechť $W \subseteq T \subseteq \overline{V}$ a $W \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}$. Potom z definice systému $\overline{\mathcal{U}_\sigma}$ existuje množina $U \in \mathcal{U}_\sigma$ taková, že $U \subseteq W \subseteq T$, speciálně $U \subseteq T$. Tudíž $T \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}$.
- (F2): Nechť $W_1, W_2 \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}$. Potom podle definice existují $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_\sigma$ tak, že $U_1 \subseteq W_1$ a $U_2 \subseteq W_2$. Z (F2) použitého na $\mathcal{U}_\sigma$ platí $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_\sigma$ a zřejmě platí $U_1 \cap U_2 \subseteq W_1 \cap W_2$, tudíž $W_1 \cap W_2 \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}$.

Tedy $\overline{\mathcal{U}_\sigma}$ je filtr na $\overline{V}$. K důkazu toho, že jde o ultrafiltr, stačí dle lemmatu 4 ukázat, že kdykoliv $W_1 \cup W_2 \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}$, tak $W_1 \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}$ nebo $W_2 \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}$.

Nechť tedy $W_1 \cup W_2 \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}$. Potom z definice existuje $U \in \mathcal{U}_\sigma$ taková, že $U \subseteq W_1 \cup W_2$. Platí $U = U \cap V \subseteq (W_1 \cup W_2) \cap V = (W_1 \cap V) \cup (W_2 \cap V)$. Protože $U \in \mathcal{U}_\sigma$ a $(W_1 \cap V), (W_2 \cap V) \subseteq V$, z (F1) je $(W_1 \cap V) \cup (W_2 \cap V) \in \mathcal{U}_\sigma$. Podle lemmatu 4 tak platí $W_1 \cap V \in \mathcal{U}_\sigma$ nebo $W_2 \cap V \in \mathcal{U}_\sigma$. Jelikož $W_1 \cap V \subseteq W_1$ a $W_2 \cap V \subseteq W_2$, z definice $\overline{\mathcal{U}_\sigma}$ dostáváme $W_1 \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}$ nebo $W_2 \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}$.

$\overline{\mathcal{U}_\sigma}$ je tak skutečně ultrafiltr na $\overline{V}$. Protože $(\overline{V}, \overline{\mathcal{T}})$ je kompaktní Hausdorffův, z lemmatu 15 víme, že $\overline{\mathcal{U}_\sigma}$ konverguje k právě jednomu bodu $v_0 \in \overline{V}$, tedy že existuje právě jedno $v_0 \in \overline{V}$ takové, že:

$$\forall\, W \in \overline{\mathcal{T}} : v_0 \in W \implies W \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}. \tag{3.1}$$

Nechť $f \in F$ a $\overline{f} : \overline{V} \to \mathcal{P}$ je příslušné jednoznačně určené spojité rozšíření f. Z lemmatu 14 víme, že $\overline{f}_* \overline{\mathcal{U}_\sigma} = \{\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} \mid \overline{f}^{-1}(\mathcal{R}) \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}\}$ je ultrafiltr na $\mathcal{P}$. Jelikož prostor $\mathcal{P}$ je kompaktní Hausdorffův, podle lemmatu 15 tento ultrafiltr konverguje k právě jednomu $P_0 \in \mathcal{P}$, neboli existuje právě jedno $P_0 \in \mathcal{P}$ tak, že:

$$\forall\, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} \text{ otevřenou platí: } P_0 \in \mathcal{R} \implies \mathcal{R} \in \overline{f}_* \overline{\mathcal{U}_\sigma}.$$

Poněvadž na $\mathcal{P}$ uvažujeme diskrétní topologii, každá podmnožina $\mathcal{P}$ je otevřená, a tedy:

$$\forall\, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} : P_0 \in \mathcal{R} \implies \mathcal{R} \in \overline{f}_* \overline{\mathcal{U}_\sigma}. \tag{3.2}$$

Nyní dokážeme následující pomocné tvrzení:

$$\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} : P_0 \notin \mathcal{R} \implies \mathcal{R} \notin \overline{f}_* \overline{\mathcal{U}_\sigma}. \tag{3.3}$$

Nechť pro spor existuje $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ tak, že $P_0 \notin \mathcal{R}$ a $\mathcal{R} \in \overline{f}_* \overline{\mathcal{U}_\sigma}$. Zřejmě $P_0 \in \{P_0\}$, takže dle (3.2) platí $\{P_0\} \in \overline{f}_* \overline{\mathcal{U}_\sigma}$. Podle (F2) tak $\mathcal{R} \cap \{P_0\} = \emptyset \in \overline{f}_* \overline{\mathcal{U}_\sigma}$, což je ale spor s (F3). Tím je platnost tvrzení (3.3) dokázána.

Jako další ukážeme platnost následujícího tvrzení:

$$\forall \mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} : v_0 \in \overline{f}^{-1}(\mathcal{R}) \implies P_0 \in \mathcal{R}. \tag{3.4}$$

Dokážeme obměněnou implikaci. Nechť $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ a $P_0 \notin \mathcal{R}$. Podle (3.3) pak platí $\mathcal{R} \notin \overline{f}_* \overline{\mathcal{U}_\sigma}$, neboli $\overline{f}^{-1}(\mathcal{R}) \notin \overline{\mathcal{U}_\sigma}$. Protože $\overline{f}$ je spojitá a každá $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ je otevřená, z definice spojité funkce máme $\overline{f}^{-1}(\mathcal{R}) \in \overline{\mathcal{T}}$. Obměněná implikace v tvrzení (3.1) nám dává $v_0 \notin \overline{f}^{-1}(\mathcal{R})$. Celkem tak $P_0 \notin \mathcal{R} \implies v_0 \notin \overline{f}^{-1}(\mathcal{R})$. Tím je důkaz tvrzení (3.4) završen.

Nechť $\widehat{P} \in \mathcal{P}$ je relace ostré preference na X příslušná jedinci v_0, tj. $\overline{f}(v_0) = \widehat{P}$. Potom $v_0 \in \overline{f}^{-1}(\{\widehat{P}\})$. Dle (3.4) tak platí $P_0 \in \{\widehat{P}\}$, tudíž zřejmě $\widehat{P} = P_0$.

Podle (3.2) platí $\{P_0\} \in \overline{f}_* \overline{\mathcal{U}_\sigma}$, neboli $\overline{f}^{-1}(\{P_0\}) \in \overline{\mathcal{U}_\sigma}$. Z definice systému $\overline{\mathcal{U}_\sigma}$ existuje $U \subseteq V, U \in \mathcal{U}_\sigma$ taková, že $U \subseteq \overline{f}^{-1}(\{P_0\})$. Jelikož $\overline{f}$ přiřadí každému jedinci právě jednu relaci ostré preference, platí $\overline{f}(U) = P_0$.

Ukázali jsme tedy, že $\overline{f}(v_0) = P_0$ a také $\overline{f}(U) = P_0$. Tudíž $\overline{f}(U) = \overline{f}(v_0)$. Protože $f = \overline{f}$ na V, platí též $f(U) = \overline{f}(U)$, tedy celkem $f(U) = \overline{f}(v_0)$.

Jelikož $U \in \mathcal{U}_\sigma$, z (2.29) víme $\forall\, x, y \in X : x f(U) y \implies x \sigma(f) y$.

Avšak $f(U) = \overline{f}(v_0)$, takže $\forall\, x, y \in X : x \overline{f}(v_0) y \implies x \sigma(f) y$.

Všimněme si, že $f \in F$ bylo zvoleno libovolně. Pro různá $f \in F$ může dle důkazu vyjít různá množina U a rozdílné P_0, ale v_0 na volbě f nijak nezávisí.

Tudíž platí:

$$\exists\, v_0 \in \overline{V} \text{ tak, že } \forall\, x, y \in X \;\; \forall f \in F : x \overline{f}(v_0) y \implies x \sigma(f) y.$$

□

Jestliže je V konečná a zavedeme-li na ní diskrétní topologii, tak je z předchozí diskuse výsledný prostor kompaktní Hausdorffův, a tak můžeme položit $\overline{V} = V$. Potom nám právě dokázaná věta 6 říká, že existuje diktátor ve V, tedy jde o jiný důkaz Arrowovy věty 3 pro konečně mnoho alternativ.

Pokud je však V nekonečná a alternativ je konečně mnoho, tak z věty 6 víme, že existuje diktátor $v_0 \in \overline{V}$ ve smyslu podmínky (ND). Díky Fishburnově větě 4 navíc víme, že tento jedinec nemůže být z V, takže $v_0 \in \overline{V} \setminus V$. Za těchto podmínek tak jinými slovy existuje jedinec „odjinud“, který svými preferencemi diktuje volbu celé společnosti, ačkoliv se přímo neúčastní voleb (neleží ve V), ale místo toho „nepozorovaně jedná v zákulisí“. Tento jedinec je tedy *neviditelný diktátor*.

Závěr

V úvodu tohoto textu jsme si položili otázku, zda dokážeme najít nějaký volební systém, který „nikdy neselže“. Na přijatelný volební systém jsme vznesli požadavky (A1) až (A5) a zjistili jsme, že pokud je ve společnosti konečně mnoho voličů, tak neexistuje žádný volební systém splňující tyto podmínky. To sice ještě nutně neznamená, že zvolený volební systém bude zcela špatný, ale s jistotou o něm víme to, že pro něj existuje podobná špatná situace jako pro volební systém, v němž společnost při volbě mezi dvěma alternativami zvolí tu z nich, jež je preferována většinou voličů, který jsme uvedli jako příklad na začátku tohoto textu. Přesněji jsme ukázali, že volební systém splňující (A1) až (A4) už nesplňuje podmínku (A5), tedy že mezi voliči v takovém případě nutně existuje diktátor.

Pro volební systém splňující (A1) až (A4) jsme také charakterizovali všechny rozhodující skupiny voličů, tj. skupiny, které už v každé situaci svými preferencemi diktují preference celé společnosti. Zjistili jsme, že rozhodující skupiny tvoří ultrafiltr na množině všech voličů, z čehož plyne následující:

(i) Každá skupina voličů obsahující rozhodující skupinu je také rozhodující.
(ii) Průnik dvou rozhodujících skupin je rozhodující skupina.
(iii) Pro každou skupinu voličů platí, že buď tato skupina, nebo její doplněk je rozhodující.
(iv) Rozdělíme-li rozhodující skupinu na dvě (ne nutně disjunktní) podskupiny, alespoň jedna z nich je rozhodující.

Pokud je voličů nekonečně mnoho, tak problém diktatury jedince nenastává, tj. existuje „dokonalý“ volební systém splňující všechny požadavky (A1) až (A5). Nevíme ovšem, jak tento volební systém vypadá. Diktatura navíc přetrvává v jiných formách. Je-li voličů nespočetně mnoho a použijeme-li model s konečnou neatomickou mírou, která není identicky nulová, tak dochází k diktatuře libovolně malé skupiny ve smyslu podmínky (D). Jakmile je množina voličů nekonečná a alternativ je konečně mnoho, tak navíc existuje neviditelný diktátor, tedy jedinec odjinud, který se sice voleb neúčastní, ale přesto je schopen „v ústraní tahat za nitky“ natolik dobře, že už v každé situaci diktuje volbu společnosti, neboli platí podmínka (ND).

Seznam použité literatury

[1] K. J. Arrow, "A difficulty in the concept of social welfare," *Journal of political economy*, vol. 58, no. 4, pp. 328–346, 1950.

[2] P. C. Fishburn, "Arrow's impossibility theorem: Concise proof and infinite voters," *Journal of Economic Theory*, vol. 2, no. 1, pp. 103–106, 1970.

[3] A. P. Kirman and D. Sondermann, "Arrow's theorem, many agents, and invisible dictators," *Journal of Economic Theory*, vol. 5, no. 2, pp. 267–277, 1972.

[4] T. Neve and K. Hart, "Theorems on ultrafilters," 2013. `http://web.math.leidenuniv.nl/scripties/NeveBach.pdf`.

[5] R. J. Aumann, "Markets with a continuum of traders," *Econometrica*, vol. 32, pp. 39–50, 1964.