MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Radek Hronek

Aditivní systémy borelovských množin

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematická analýza

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Rád bych poděkoval své rodině za neutuchající podporu, a především doc. RNDr. Miroslavu Zelenému, Ph.D., za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování diplomové práce.

Název práce: Aditivní systémy borelovských množin

Autor: Radek Hronek

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá existencí σ-diskrétního zjemnění bodově spočetných borelovsky aditivních systémů v úplných metrických prostorech. V prvních třech kapitolách se zaobíráme nižšími borelovskými třídami, a to postupně G_δ-aditivními, F_σ-aditivními a $F_{\sigma\delta}$-aditivními systémy. Ve všech případech ukazujeme existenci σ-diskrétního zjemnění daných systému a dokonce pro G_δ-aditivní systémy nepotřebujeme bodovou spočetnost. Ve čtvrté kapitole se věnujeme obecným borelovsky aditivním systémům, ale klademe omezující podmínku na váhu prostoru. V páté kapitole uvádíme přehled výsledků, které můžeme obdržet za předpokladu určitých dodatečných axiomů.

Klíčová slova: σ-diskrétní, borelovsky aditivní, zjemnění, bodově spočetný

Title: Additive families of Borel sets

Author: Radek Hronek

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: This master thesis focuses on the existence of σ-discrete refinement of point countable Borel additive systems in complete metric spaces. In the first three chapters we deal with the lower Borel classes, namely G_δ-additive, F_σ-additive and $F_{\sigma\delta}$-additive systems. In all cases we show the existence of σ-discrete refinement of the systems and even for G_δ-additive systems we don't need point countability. In the fourth chapter we deal with general Borel additive systems, but we place a limiting condition on the weight of space. In the fifth chapter we present an overview of the results that can be obtained by assuming certain additional axioms.

Keywords: σ-discrete, Borel additive, refinement, point countable

Obsah

Značení a konvence

Ve všech větách či lemmatech budeme vždy předpokládat, že zadaný systém nebo prostor je neprázdný.

- *Prostorem* budeme vždy rozumět metrizovatelný topologický prostor. Budeme psát (X, ρ), pokud bude specifikována kompatibilní metrika ρ.
- *Okolím* bodu x budeme rozumět libovolnou množinu, jejíž vnitřek obsahuje x. *Otevřeným okolím* bodu x budeme rozumět libovolnou otevřenou množinu obsahující x.
- Symbolem $\mathbb{R}$ budeme označovat reálná čísla.
- Říkáme, že množina A v prostoru X je typu F_σ, pokud ji můžeme zapsat jako spočetné sjednocení uzavřených množin.
- Říkáme, že množina A v prostoru X je typu G_δ, pokud ji můžeme zapsat jako spočetný průnik otevřených množin.
- Říkáme, že množina A v prostoru X je typu FG, pokud ji můžeme zapsat jako průnik otevřené a uzavřené množiny.
- Pokud $\mathcal{A}$ je systém podmnožin prostoru X a $F \subseteq X$, zavádíme $\mathcal{A} \restriction_F$ jako systém množin $\{A \cap F : A \in \mathcal{A}\}$.
- Výrazem $2^{<\omega}$ rozumíme prostor všech konečných posloupností s členy 0 nebo 1.
- Výrazem $\omega^{<\omega}$ rozumíme prostor všech konečných posloupností přirozených čísel. Pro $s \in \omega^{<\omega}$ zavádíme symbol $|s|$ jako délku posloupnosti s. Symbolem $\emptyset$ myslíme prázdnou posloupnost s délkou 0. Pro $n \in \omega$ položíme $s\hat{\ }n$ jako $(s_0, \dots, s_{|s|-1}, n)$.
- Pro posloupnost σ v Cantorově množině 2^ω nebo v Baireově prostoru ω^ω a $n \in \omega$ rozumíme $\sigma \restriction n$ jako konečnou posloupnost $(\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1})$. Přijímáme konvenci, že $\sigma \restriction 0 = \emptyset$.
- Výrazem $\mathcal{N}(s)$, kde $s \in \omega^{<\omega}$, budeme označovat množinu $\{\sigma \in \omega^\omega : \sigma \restriction |s| = s\}$.
- Pro $s \in \omega^{<\omega}$ položme $\|s\| = \sum_{k=0}^{n-1} s_k$, kde $s = (s_0, \dots, s_{n-1})$.
- Pro $s \in \omega^{<\omega}$ budeme výrazem $s\hat{\ }\overline{0}$ rozumět nekonečnou posloupnost $(s_0, \dots, s_{|s|-1}, 0, 0, \dots) \in \omega^\omega$.
- Pro $n \in \omega$ výrazem $2^{<n}$ rozumíme množinu $\{s \in 2^{<\omega} : |s| < n\}$. Analogicky zavádíme $2^{\leq n}$.
- Výrazem $\omega(X)$ rozumět váhu topologického prostoru X.

- Pro množinu nebo systém A budeme symbolem $|A|$ rozumět její/jeho mohutnost.
- Symbolem c budeme označovat mohutnost kontinua, ω první nekonečný ordinál a pro obecný ordinál α označme ω_α jako počíteční ordinál kardinálu $\aleph_\alpha$.
- Pro ordinál α budeme symbolem $W(\alpha)$ rozumět množinu všech ordinálů menších než α.
- Pro kardinál κ budeme pro množinu X výrazem $[X]^{\leq\kappa}$ rozumět systém $\{Y \subseteq X : |Y| \leq \kappa\}$.
- Pro množiny A a B budeme výrazem $A \triangle B$ rozumět jejich symetrickou diferenci.
- Výrazem $Borel(X)$ budeme rozumět σ-algebru borelovských množin prostoru X.
- Suslinovým schématem (na topologickém prostoru X) rozumíme systém podmnožin X indexovaný prvky $\omega^{<\omega}$. Suslinovou operací aplikovanou na schéma $(P_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ dostáváme množinu $\mathcal{A}P = \bigcup_{s\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} P_{s\restriction n}$. Výrazem $S\mathcal{F}(X)$ budeme rozumět systém podmnožin topologického prostoru X, které můžeme získat aplikací Suslinovy operace na Suslinovo schéma uzavřených podmnožin X. Budeme je nazývat suslinovské množiny.

Úvod

V neseparabilních metrických prostorech se často potýkáme s problémem, zda daný systém množin lze rozložit na spočetně mnoho diskrétních systémů. V tomto případě lze použít standardní metody separabilní deskriptivní teorie množin k obdržení analogických výsledků jako v separabilních prostorech. Například, existence měřitelných selektorů pro vícehodnotová zobrazení v neseparabilních metrických prostorech často záleží na σ-diskrétním rozložení určitého typu (viz [1]).

Cílem této práce je seznámit se s pojmy související s touto problematikou s přihlédnutím k otevřenému problému, zda v ZFC každý bodově spočetný $Borel(X)$-aditivní systém je σ-diskrétně zjemnitelný. Definice výše zmíněných pojmů bude následovat.

Definice 1. Nechť $\mathcal{B}$ je systém množin v prostoru X, poté systém množin $\mathcal{A}$ nazveme *$\mathcal{B}$-aditivní*, jestliže pro každý podsystém $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ platí $\bigcup \mathcal{A}' \in \mathcal{B}$. Pokud $\bigcup \mathcal{A}' \in \mathcal{B}$ pro každý spočetný podsystém $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, poté nazveme $\mathcal{A}$ *spočetně $\mathcal{B}$-aditivní*.

Definice 2. Systém množin $\mathcal{A}$ v prostoru X nazveme *bodově spočetný*, pokud je systém $\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ spočetný pro každé $x \in X$.

Definice 3. Systém množin $\mathcal{A}$ v prostoru X nazveme *diskrétní*, pokud pro každé $x \in X$ existuje jeho otevřené okolí protínající nejvýše jeden prvek $\mathcal{A}$. Pokud $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{A}_n$, kde $\mathcal{A}_n$ jsou diskrétní systémy, poté nazýváme $\mathcal{A}$ *σ-diskrétní*.

Definice 4. Systém množin $\mathcal{R}$ nazveme *zjemnění* systému $\mathcal{A}$, pokud $\bigcup \mathcal{R} = \bigcup \mathcal{A}$ a pro každou $R \in \mathcal{R}$ existuje $A \in \mathcal{A}$ splňující $R \subseteq A$.

Definice 5. Říkáme, že systém množin $\mathcal{A}$ má σ-diskrétní zjemnění, pokud existuje systém množin $\mathcal{R}$, který je zjemněním $\mathcal{A}$ a je σ-diskrétní. Podrobně řečeno, $\mathcal{R}$ splňuje

(i) $\bigcup \mathcal{R} = \bigcup \mathcal{A}$,

(ii) pro každou $R \in \mathcal{R}$ existuje $A \in \mathcal{A}$ splňující $R \subseteq A$,

(iii) $\mathcal{R} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{R}_n$, kde $\mathcal{R}_n$ jsou diskrétní systémy.

1. G_δ-aditivní systémy

V této kapitole dokážeme několik základních tvrzení o systémech, které mají σ-diskrétní zjemnění. Hlavním výsledkem kapitoly bude věta, že každý spočetně G_δ-aditivní systém má σ-diskrétní zjemnění. Důkaz vychází z článku [3]. Stojí za povšimnutí, že v tomto případě nepotřebujeme bodovou spočetnost a předpokládáme pouze spočetnou G_δ-aditivitu systému.

Věta 6. *Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin v prostoru X a $V \subseteq U \subseteq X$. Pokud $\mathcal{A} \restriction_U$ má σ-diskrétní zjemnění, potom $\mathcal{A} \restriction_V$ má σ-diskrétní zjemnění.*

Důkaz. Podle předpokladu má $\mathcal{A} \restriction_U$ σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{P}$, které můžeme zapsat jako $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_n$, kde $\mathcal{P}_n$ jsou diskrétní systémy. Pro systém množin $\mathcal{R} = \{P \cap V : P \in \mathcal{P}\}$ ukážeme, že splňuje podmínky (i) až (iii) z Definice 5. Tím bude důkaz hotov.

(i) Nechť $x \in \bigcup \mathcal{A} \restriction_V$. Poté x je prvkem $\bigcup \mathcal{A}$ a zároveň leží v množině V. Tudíž je i prvkem $\bigcup \mathcal{P}$. Celkově tedy dostáváme, že $x \in \bigcup \mathcal{R}$. Opačná inkluze je zřejmá.

(ii) Zvolme $R \in \mathcal{R}$. Poté můžeme nalézt $P \in \mathcal{P}$ splňující $R = P \cap V$. Podle předpokladu existuje množina $A \in \mathcal{A}$ taková, že $P \subseteq A \cap U$. Poté zřejmě platí

$$R = P \cap V \subseteq A \cap V.$$

(iii) Mějme $n \in \omega$ pevné. Volme $\mathcal{R}_n = \mathcal{P}_n \restriction_V$. Protože je $\mathcal{P}_n$ diskrétní systém, je zřejmě $\mathcal{R}_n$ také diskrétní systém a platí $\mathcal{R} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{R}_n$.

□

Věta 7. *Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin v prostoru X a $U_n \subseteq X$, $n \in \omega$. Označme $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$. Pokud pro každé $n \in \omega$ mají systémy $\mathcal{A} \restriction_{U_n}$ σ-diskrétní zjemnění, poté $\mathcal{A} \restriction_U$ má σ-diskrétní zjemnění.*

Důkaz. Pro pevně zvolené $n \in \omega$ má $\mathcal{A} \restriction_{U_n}$ σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{P}^n$, který můžeme zapsat jako $\bigcup_{m\in\omega} \mathcal{P}^n_m$, kde $\mathcal{P}^n_m$ jsou diskrétní systémy. Pro systém množin $\mathcal{R} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}^n$ ukážeme, že splňuje podmínky (i) až (iii) z Definice 5. Tím bude důkaz hotov.

(i) Nechť $x \in \bigcup \mathcal{A} \restriction_U$. Poté existuje $n \in \omega$, že x je prvkem $\bigcup \mathcal{A} \restriction_{U_n}$. Tudíž je prvkem $\bigcup \mathcal{P}^n$, a tedy i $\bigcup \mathcal{R}$. Opačná inkluze je zřejmá.

(ii) Podle předpokladu pro každé $n \in \omega, P \in \mathcal{P}^n$ existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $P \subseteq A \cap U_n$. Zřejmě pak platí

$$P \subseteq A \cap U_n \subseteq A \cap U.$$

(iii) Pro $n, m \in \omega$ je z předpokladu $\mathcal{P}^n_m$ diskrétní systém a zřejmě platí $\mathcal{R} = \bigcup_{n\in\omega} \bigcup_{m\in\omega} \mathcal{P}^n_m$.

$\square$

Věta 8 (Stone)**.** *Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí prostoru X. Poté má σ-diskrétní zjemnění tvořené otevřenými množinami.*

Důkaz. Zafixujme na X kompatibilní metriku ρ. Nechť $\mathcal{U}$ je systém splňující předpoklady a $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in [0, \kappa)\}$ je jeho očíslování. Pro $n \in \omega$ zadefinujeme systém $\mathcal{V}_n = \{V_{n,\alpha} : \alpha \in [0, \kappa)\}$ podmnožin X jako

$$V_{n,\alpha} = \bigcup B(c, 1/2^n),$$

kde sjednocení bereme přes všechny body $c \in X$ splňující následující podmínky

(i) α je nejmenší ordinál splňující $x \in U_\alpha$,

(ii) $c \notin V_{k,\beta}$ pro všechna $k < n$ a $\beta \in [0, \kappa)$,

(iii) $B(c, 3/2^n) \subseteq U_\alpha$.

Ze způsobu definice množin $V_{n,\alpha}$ plyne, že jsou otevřené. Dále podle vlastnosti (iii) vidíme, že $V_{n,\alpha} \subseteq U_\alpha$. Nechť $x \in X$. Poté nalezneme nejmenší $\alpha \in [0, \kappa)$ splňující $x \in U_\alpha$ a $n \in \omega$, které splňuje $B(x, 3/2^n) \subseteq U_\alpha$. Poté zřejmě platí, že buď $x \in V_{k,\beta}$ pro nějaké $k < n$ a $\beta \in [0, \kappa)$, nebo $x \in V_{n,\alpha}$. Tudíž systém $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$ je zjemnění systému $\mathcal{U}$ tvořený otevřenými množinami.

Nyní už stačí ukázat, že pro každé $n \in \omega$ platí

pokud $x \in V_{n,\alpha}$, $y \in V_{n,\beta}$ a $\alpha \neq \beta$, poté $\rho(x, y) > 1/2^n$.

Tímto ukážeme, že systém $\mathcal{V}_n$ je diskrétní, neboť každá otevřená koule s poloměrem $1/2^{n+1}$ protne maximálně jednu množinu $\mathcal{V}_n$.

Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že $\alpha < \beta$. Poté z definice množin $V_{n,\alpha}$ a $V_{n,\beta}$ existují body c_1 a c_2 splňující podmínky (i) až (iii) takové, že $x \in B(c_1, 1/2^n)$ a $y \in B(c_2, 1/2^n)$. Z podmínky (iii) plyne vztah $B(c_1, 3/2^n) \subseteq U_\alpha$ a podle (i) $c_2 \notin U_\alpha$, tudíž platí $\rho(c_1, c_2) > 3/2^n$. Nyní dostáváme

$$\rho(x, y) \geq \rho(c_1, c_2) - \rho(c_1, x) - \rho(c_2, y) > 1/2^n,$$

čímž je dokázána diskrétnost systému $\mathcal{V}_n$, a důkaz je tedy dokončen.

$\square$

Definice 9. Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin v prostoru X. Poté řekneme, že $\mathcal{A}$ je *nikde σ-diskrétně zjemnitelný*, pokud $\bigcup \mathcal{A} \neq \emptyset$ a pro každou otevřenou U protínající $\bigcup \mathcal{A}$ platí, že systém $\mathcal{A} \restriction_U$ nemá σ-diskrétní zjemnění.

Věta 10. *Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin v prostoru X, který nemá σ-diskrétní zjemnění. Označme*

$$G = \bigcup\{U : U \text{ je otevřená podmnožina } X,\ \mathcal{A}\restriction_U \text{ má } \sigma\text{-diskrétní zjemnění}\}.$$

Poté $\mathcal{A}\restriction_G$ má σ-diskrétní zjemnění a $\mathcal{A}\restriction_{X\setminus G}$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný.

Důkaz. Nechť $\mathcal{U}$ je systém všech otevřených množin U takových, že $\mathcal{A}\restriction_U$ má σ-diskrétní zjemnění. Zafixujme na X kompatibilní metriku ρ. Označme $G = \bigcup\mathcal{U}$ a $V_n = \{x \in G : \operatorname{dist}(x, X\setminus G) > \frac{1}{n+1}\}$, kde $n \in \omega$. Podle Věty 8 má systém $\mathcal{U}$ σ-diskrétní zjemnění v podprostoru G. Podle Věty 6 a způsobu zadefinování množin V_n platí

$$\mathcal{U}\restriction_{V_n} \text{ má } \sigma\text{-diskrétní zjemnění v prostoru X,}$$
$$\textstyle\bigcup_{n\in\omega} V_n = G.$$

Tudíž podle Věty 7 má $\mathcal{U}$ σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{R}$ v prostoru X. Dále platí, že existují

$$\textstyle\mathcal{R} = \bigcup_{n\in\omega}\mathcal{R}_n, \text{ kde } \mathcal{R}_n \text{ jsou diskrétní systémy,}$$
$$\mathcal{A}\restriction_R \text{ má } \sigma\text{-diskrétní zjemnění } \mathcal{P}_R \text{ pro každou } R \in \mathcal{R},$$
$$\textstyle\mathcal{P}_R = \bigcup_{m\in\omega}\mathcal{P}_{R,m}, \text{ kde } \mathcal{P}_{R,m} \text{ jsou diskrétní systémy.}$$

Položme $\mathcal{P} = \bigcup_{n,m\in\omega}(\bigcup_{R\in\mathcal{R}_n}\mathcal{P}_{R,m})$. Ověříme, že takto zadefinovaný systém je σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{A}\restriction_G$. Vlastnosti (i) a (ii) z Definice 5 jsou zřejmé. Dokážeme vlastnost (iii). Tím bude první část důkazu hotova.

Zvolme $n, m \in \omega$ pevné. Chceme ukázat, že $\bigcup_{R\in\mathcal{R}_n}\mathcal{P}_{R,m}$ je diskrétní systém. Nechť $x \in X$. Hledáme jeho otevřené okolí U protínající nejvýše jeden prvek $\bigcup_{R\in\mathcal{R}_n}\mathcal{P}_{R,m}$. Víme, že existuje otevřené okolí V bodu x protínající nejvýše jeden prvek $\mathcal{R}_n$. Pokud ho neprotíná vůbec, volme $U = V$ a jsme hotovi. V opačném případě existuje právě jedna množina $R \in \mathcal{R}_n$, že $V \cap R \neq \emptyset$. Poté existuje otevřené okolí W bodu x protínající nejvýše jeden prvek $\mathcal{P}_{R,m}$. Volme $U = V \cap W$ a jsme hotovi.

Nyní přistoupíme k důkazu druhé části tvrzení. Podle Věty 7 $\mathcal{A}\restriction_{X\setminus G}$ nemá σ-diskrétní zjemnění, a tedy $\bigcup\mathcal{A}\restriction_{X\setminus G} \neq \emptyset$. Předpokládejme existenci otevřené neprázdné množiny U protínající $X \setminus G$, pro kterou má $\mathcal{A}\restriction_{U\cap(X\setminus G)}$ σ-diskrétní zjemnění. Protože $U = (U\cap G)\cup(U\setminus G)$, plyne z předchozí části, Věty 6 a Věty 7 σ-diskrétní zjemnitelnost $\mathcal{A}\restriction_U$. Tudíž $U \subseteq G$, což je spor.

□

Věta 11. *Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin v prostoru X, $F \subseteq X$ je typu F_σ a $\mathcal{A}\restriction_F$ nemá σ-diskrétní zjemnění. Poté existuje uzavřená množina $H \subseteq F$, že $\mathcal{A}\restriction_H$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný.*

Důkaz. Množinu F lze napsat jako $\bigcup_{n\in\omega} F_n$, kde (F_n) je neklesající posloupnost uzavřených množin vzhledem k inkluzi. Podle Věty 7 existuje $k \in \omega$, že $\mathcal{A} \restriction F_k$ nemá σ-diskrétní zjemnění. Věta 10 nám dává existenci otevřené množiny $G \subseteq X$, že $\mathcal{A} \restriction_{F_k \cap (X\setminus G)}$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný. Volbou $H = F_k \cap (X \setminus G)$ je věta dokázána.

$\square$

Věta 12 (Baire)**.** *Nechť X je úplný prostor a $U_n \subseteq X$, $n \in \omega$, jsou otevřené husté množiny. Poté $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ je hustá množina.*

Důkaz věty lze najít v [2, Corollary 3.9.4].

Věta 13. *Nechť $\mathcal{A}$ je spočetně G_δ-aditivní systém množin v úplném prostoru X. Poté existuje otevřená neprázdná $U \subseteq X$ taková, že $\mathcal{A} \restriction_U$ má σ-diskrétní zjemnění.*

Důkaz. Budeme postupovat sporem. Nechť tedy existuje spočetně G_δ-aditivní systém $\mathcal{A}$, že pro každou neprázdnou otevřenou $U \subseteq X$ nemá systém $\mathcal{A} \restriction_U$ σ-diskrétní zjemnění. Pokud by existovala otevřená množina V, že $V \subseteq A$ pro nějakou $A \in \mathcal{A}$, poté $\{V\}$ tvoří σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{A} \restriction_V$. Tedy množiny $A \in \mathcal{A}$ mají prázdný vnitřek.

Zafixujeme na X kompatibilní úplnou metriku ρ splňující $\operatorname{diam}(X) < 1$.

Pro každou $s \in 2^{<\omega}$ nalezneme neprázdnou otevřenou množinu $U_s \subseteq X$, neprázdnou uzavřenou množinu $F_s \subseteq X$, bod $x_s \in X$ a množinu $A_s \in \mathcal{A}$ takovou, že pro každou $s \in 2^{<\omega}$ jsou splněny následující podmínky.

(i) $\overline{U}_{s\hat{}0} \cap \overline{U}_{s\hat{}1} = \emptyset$, $\overline{U}_{s\hat{}0} \cup \overline{U}_{s\hat{}1} \subseteq U_s$, $\operatorname{diam} U_s < 2^{-|s|}$,

(ii) $x_s \in F_s \cap A_s$, $x_{s\hat{}0} = x_s$, $A_{s\hat{}0} = A_s$,

(iii) $F_{s\hat{}0} \cup F_{s\hat{}1} \subseteq F_s \subseteq \overline{U}_s$,

(iv) $\mathcal{A} \restriction_{F_s}$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný,

(v) $F_{s\hat{}1} \cap \bigcup\{A_t : |t| \le |s|\} = \emptyset$.

Tyto objekty zkonstruujeme pomocí matematické indukce. Položme $U_\emptyset = F_\emptyset = X$. Zřejmě $\bigcup \mathcal{A} \neq \emptyset$. Nalezneme množinu $A_\emptyset$, pro kterou platí $U_\emptyset \cap A_\emptyset \neq \emptyset$. Nechť $x_\emptyset$ je bod $U_\emptyset \cap A_\emptyset$.

Nechť $n \in \omega$ a požadované objekty výše jsou zadefinovány pro každou $s \in 2^{<\omega}$ splňující $|s| \le n$. Zvolme pevně $s \in 2^{<\omega}$ splňující $|s| = n$. Položme $x_{s\hat{}0} = x_s$ a $A_{s\hat{}0} = A_s$. Nalezneme neprázdné otevřené množiny $U_{s\hat{}0}, U_{s\hat{}1}$ splňující podmínku (i) takové, že $x_{s\hat{}0} \in U_{s\hat{}0}$ a $U_{s\hat{}1} \cap F_s \neq \emptyset$. (Poznamenejme, že $\mathcal{A} \restriction_{F_s}$

je z (iv) nikde σ-diskrétně zjemnitelný, speciálně $x_{s\hat{}0}$ není izolovaný bod. Tudíž $U_{s\hat{}1}$ může být zvolena způsobem požadovaným v (i).) Položme $F_{s\hat{}0} = F_s \cap \overline{U}_{s\hat{}0}$. Zřejmě $x_{s\hat{}0} \in F_{s\hat{}0}$. Ukážeme, že $\mathcal{A} \restriction_{F_{s\hat{}0}}$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelná. Nechť pro spor existuje neprázdná otevřená množina V protínající $F_{s\hat{}0}$, že $\mathcal{A} \restriction_{F_{s\hat{}0} \cap V}$ má σ-diskrétní zjemnění. Poté ale podle Věty 6 má $\mathcal{A} \restriction_{U_{s\hat{}0} \cap V}$ σ-diskrétní zjemnění, čímž dostáváme spor.

Položme

$$D = F_s \cap U_{s\hat{}1}.$$

Protože $\mathcal{A} \restriction_D$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný z podmínky (iv), je navíc i

$$\mathcal{A} \restriction_{D \setminus \bigcup\{A_t : |t| \leq n\}}$$

nikde σ-diskrétně zjemnitelný. Tudíž $D \setminus \bigcup\{A_t : |t| \leq n\} \neq \emptyset$ a je typu F_σ, tudíž podle Věty 11 nalezneme uzavřenou množinu

$$H \subseteq D \setminus \bigcup\{A_t : |t| \leq n\}$$

takovou, že $\mathcal{A} \restriction_H$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný. Nalezneme množinu $A_{s\hat{}1}$ splňující $A_{s\hat{}1} \cap H \neq \emptyset$ a bod $x_{s\hat{}1} \in A_{s\hat{}1} \cap H$. Položme $F_{s\hat{}1} = H$. Protože

$$F_{s\hat{}1} \cap \bigcup\{A_t : |t| \leq n\} = \emptyset,$$

je tímto indukční krok dokončen.

Poněvadž prostor X je úplný, podmínka (i) zajišťuje, že množina

$$C = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{|s|=n} U_s$$

je dobře definovaná homeomorfní kopie Cantorovy množiny 2^ω. Zřejmě

$$C = \bigcup_{\sigma\in 2^\omega} \bigcap_{n\in\omega} U_{\sigma\restriction n}$$

a každé $\sigma \in 2^\omega$ definuje jednoznačně bod $\{x_\sigma\} = \bigcap_{n\in\omega} U_{\sigma\restriction_n}$. Položme

$$A = \{x_s : s \in 2^{<\omega}\}.$$

(Poznamenejme, že $x_s = x_\sigma$ pro $s \in 2^{<\omega}$ a $\sigma \in 2^\omega$, pokud tyto posloupnosti splňují $\sigma = s\hat{}\overline{0}$)
K dokončení důkazu budeme potřebovat dvě pomocná tvrzení.

Tvrzení 14. *Nechť $\sigma \in 2^\omega$ a $s \in 2^{<\omega}$ splňuje $\sigma \restriction |s| = s$. Poté $x_\sigma \in F_s$.*

Důkaz. Nechť σ a s splňují předpoklady. Podle podmínky (iii),

$$F_{\sigma\restriction n} \subseteq \overline{U}_{\sigma\restriction n}$$

pro každé $n \in \omega$. Dále opět z podmínky (iii) máme

$$\overline{U}_{\sigma\restriction n} \cap F_s \neq \emptyset$$

pro každé $n \geq |s|$. K tomu dohromady s podmínkou (i) dostáváme

$$F_s \cap \bigcap_{n\in\omega} U_{\sigma\restriction n} = \bigcap_{n\in\omega} (F_s \cap \overline{U}_{\sigma\restriction n}) \neq \emptyset,$$

protože v posledním výrazu se jedná o systém do sebe zařazených uzavřených množin s diametrem jdoucím k 0 a prostor X je úplný. Protože $\bigcap_{n\in\omega} U_{\sigma\restriction n} = \{x_\sigma\}$, je tím důkaz hotov.

□

Tvrzení 15. *Platí následující tvrzení*

(a) $A \subseteq \bigcup\{A_s : s \in 2^{<\omega}\}$,

(b) $(C \setminus A) \cap \bigcup\{A_s : s \in 2^{<\omega}\} = \emptyset$.

Důkaz. Tvrzení (a) je zřejmé, protože $x_s \in A_s$ pro každou $s \in 2^{<\omega}$.
K důkazu tvrzení (b), ať $\sigma \in 2^\omega$ je posloupnost obsahující číslo 1 nekonečně krát. Nechť $\{n_k\}_{k\in\omega}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že $\sigma_{n_k} = 1$. Pro danou posloupnost $s \in 2^{<\omega}$ zvolme $k \in \omega$ splňující $n_k - 1 \geq |s|$. Podle Tvrzení 14 a podmínky (v),

$$x_\sigma \in F_{(\sigma_0,\ldots,\sigma_{n_k-1},1)} \subseteq X \setminus A_s.$$

Protože $s \in 2^{<\omega}$ bylo voleno libovolně,

$$x_\sigma \in C \setminus \bigcup\{A_s : s \in 2^{<\omega}\}.$$

Čímž je důkaz hotov.

□

Nyní můžeme dokončit důkaz původní věty. Z Tvrzení 15 víme

$$A = C \cap \bigcup\{A_s : s \in 2^{<\omega}\}.$$

Protože $\mathcal{A}$ je spočetně G_δ-aditivní systém, A je G_δ-podmnožina C. Položme

$$B = \bigcap_{s\in 2^{<\omega}} (C \setminus \{x_s\}).$$

Poté B je G_δ podmnožina C. Poněvadž pro každé $s \in 2^{<\omega}$ je $C \setminus \{x_s\}$ hustá podmnožina C, je i podle Věty 12 množina B hustá. Nechť $x \in C$. Poté existuje $\sigma \in 2^\omega$ splňující $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} U_{\sigma\restriction n}$. Protože $x_{\sigma\restriction n} \in A \cap U_{\sigma\restriction n}$ pro každé $n \in \omega$, je A také hustá podmnožina C. Ale zároveň $A \cap B = \emptyset$, což je spor s Větou 12.

□

Věta 16. *Nechť $\mathcal{A}$ je spočetně G_δ-aditivní systém množin v úplném prostoru X. Poté $\mathcal{A}$ má σ-diskrétní zjemnění.*

Důkaz. Budeme postupovat sporem. Nechť $\mathcal{A}$ nemá σ-diskrétní zjemnění. Zadefinujme množinu G následovně

$$G = \bigcup\{U : U \text{ je otevřená podmnožina } X,\ \mathcal{A} \restriction_U \text{ má } \sigma\text{-diskrétní zjemnění }\}.$$

Podle Věty 10, $\mathcal{A} \restriction_G$ má σ-diskrétní zjemnění. Chceme ukázat, že $G = X$.

Nechť pro spor $X \setminus G \neq \emptyset$. Aplikujeme Větu 13 na G_δ-aditivní systém $\mathcal{A} \restriction_{X \setminus G}$ a úplný prostor $Y = X \setminus G$. Obdržíme neprázdnou otevřenou množinu V v prostoru Y, že $\mathcal{A} \restriction_V$ má σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{R}$ v prostoru Y. Dále navíc platí

$$V = (X \setminus G) \cap U, \text{ pro nějakou otevřenou } U \text{ v prostoru } X,$$
$$U \setminus G \neq \emptyset,$$
$$\mathcal{R} \text{ je } \sigma\text{-diskrétní zjemnění } \mathcal{A} \restriction_{U \setminus G} \text{ v prostoru } X.$$

Podle Věty 6 má $\mathcal{A} \restriction_{U \cap G}$ σ-diskrétní zjemnění. Protože $U = (U \cap G) \cup (U \setminus G)$, má $\mathcal{A} \restriction_U$ σ-diskrétní zjemnění podle Věty 7. Tudíž $U \subseteq G$ a zároveň $U \setminus G \neq \emptyset$, což je spor.

$\square$

2. F_σ-aditivní systémy

V této kapitole dokážeme, že bodově spočetné F_σ-aditivní systémy mají σ-diskrétní zjemnění. Budeme vycházet ze článků [4] a [5], kde se využívá dědičných tříd a slabé diskrétnosti F_σ-aditivních systému. Na závěr kapitoly uvedeme alternativní důkaz, který vychází z konstrukce vhodného Cantorova diskontinua.

Definice 17. Nechť P je třída prostorů. Řekneme, že třída P je *dědičná*, pokud pro každý prostor $X \in P$ a jeho uzavřený podprostor Y platí $Y \in P$.

Definice 18. Nechť P je třída prostorů. Řekneme, že třída P je *úplně dědičná*, pokud pro každý prostor $X \in P$ a jeho podprostor Y platí $Y \in P$.

Definice 19. Nechť P je dědičná třída prostorů a X je prostor. Poté řekneme, že X je *lokálně* P, pokud pro každý bod $x \in X$ existuje jeho okolí náležící do P. Jestliže žádné okolí libovolného bodu nepatří do P, říkáme, že X je *nikde lokálně* P.

Poznámka. Pokud je P úplně dědičná třída, plyne z definice, že X je *nikde lokálně* P, pokud žádná neprázdná otevřená podmnožina X nenáleží do P.

Věta 20. *Nechť P je dědičná třída a X je prostor. Poté existuje uzavřená podmnožina $F = F(P,X) \subseteq X$, která splňuje*

(*i*) *F je nikde lokálně P,*

(*ii*) *kdykoli je H uzavřená podmnožina X, která je nikde lokálně P, poté $H \subseteq F$.*

Důkaz. Pomocí transfinitní indukce zadefinujme pro každý ordinál α množinu F_α a G_α.

<u>$\alpha = 0$</u>
Volíme $F_\alpha = X$ a $G_\alpha = \emptyset$.

<u>Indukční krok</u>
Nechť jsou požadované objekty výše zadefinovány pro všechna $\beta < \alpha$. Pokud je α limitní ordinál, volíme $F_\alpha = \bigcap\{F_\beta : \beta < \alpha\}$ a $G_\alpha = \emptyset$. Pokud α není limitní ordinál, můžeme psát $\alpha = \beta + 1$ a požadované množiny zadefinujeme následovně

$$G_\alpha = \{x \in F_\beta : \text{existuje okolí } x \text{ v } F_\beta, \text{ které patří do } P\}$$
$$F_\alpha = F_\beta \setminus G_\alpha.$$

Tím je konstrukce dokončena.

Zřejmě platí $F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots$ a (F_α) je transfinitní posloupnost uzavřených množin. Pro transfinitní nerostoucí posloupnost množin musí platit, že již od určitého ordinálu ξ je konstatní. Položme tedy $F = F_\xi = F_{\xi+1} = \cdots$. Pokud pro nějaké $x \in F$ existuje jeho okolí v F náležící do P, poté $x \in G_{\xi+1}$, a tedy $x \notin F_\xi$. Čímž dostáváme spor a dokázali jsme tedy část (i). Pokud je H uzavřená množina, která je nikde lokálně P, ukážeme pomocí transfinitní indukce, že pro každý ordinál α platí $H \subseteq F_\alpha$.

$\underline{\alpha = 0}$
Protože $F_0 = X$, je požadovaný vztah triviálně splněn.

Indukční krok
Nechť pro každý ordinál $\beta < \alpha$ platí $H \subseteq F_\beta$. Pokud je α limitní ordinál, poté je ze způsobu zadefinování F_α a indukčního předpokladu požadovaný vztah zřejmě splněn. Pokud α není limitní ordinál, můžeme psát $\alpha = \beta + 1$. Předpokládejme, že $x \in H \cap G_\alpha$. Poté existuje okolí U v F_β bodu x, které patří do P. Protože je H uzavřená podmnožina F_β, $U \cap H$ je okolí bodu x v H, které náleží do P. Což je ale ve sporu s předpokladem na H. Tudíž $H \cap G_\alpha = \emptyset$, a tedy $H \subseteq F_\alpha$.

Celkově tedy máme $H \subseteq F_\xi = F$, čímž je důkaz hotov.

□

Poznámka. Pokud je P úplně dědičná třída, lze ukázat, že F je největší podmnožina X, která je nikde lokálně P.

Úmluva. Množiny F_α a G_α budeme používat i v dalším důkazu, proto bychom měli správně psát $F_\alpha(X,P)$ a $G_\alpha(X,P)$. Pokud je ale zřejmé, s jakou dědičnou třídou či prostorem pracujeme, budeme zkráceně psát $F_\alpha(X)$, $G_\alpha(X)$, nebo jen F_α, G_α.

Pozorování. Pokud P je dědičná třída, X je prostor a Y jeho otevřená podmnožina, poté platí

(i) $F_\alpha(Y) = Y \cap F_\alpha(X)$,

(ii) $F(X \setminus F(X)) = \emptyset$.

Lemma 21. *Nechť X je prostor a $\mathcal{A}$ je diskrétní systém FG-podmnožin prostoru X. Poté je množina $\bigcup \mathcal{A}$ typu FG.*

Důkaz. Pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$ nalezneme příslušnou uzavřenou množinu F_A a otevřenou množinu G_A splňující $A = F_A \cap G_A$. Položme $B_A = \bigcup_{B \in \mathcal{A} \setminus \{A\}} \overline{B}$, $F = \bigcup\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\}$ a $G = \bigcup\{G_A \setminus B_A : A \in \mathcal{A}\}$. Protože je systém $\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\}$ diskrétní, jsou množiny B_A a F uzavřené a množina G je otevřená. Dále je již snadné ověřit, že $\bigcup \mathcal{A} = F \cap G$.

□

Lemma 22. *Nechť P je dědičná třída a X je prostor. Poté lze $X \setminus F(P,X)$ vyjádřit jako sjednocení spočetného systému $\mathcal{A}$, jehož množiny jsou typu FG a každá je lokálně P.*

Důkaz. Nejdříve dokážeme speciální případ, když $F(P,X) = \emptyset$. V tomto případě z důkazu Věty 20 plyne, že existuje ordinál α splňující $F_\alpha(X) = \emptyset$. Důkaz provedeme transfinitní indukcí podle α.

<u>$\alpha = 0$</u>
Pokud Z je prostor splňující $Z = F_0(Z) = \emptyset$, je tento případ triviální.

<u>Indukční krok</u>
Nechť tedy Lemma platí pro všechny prostory Z, pro které $F_\beta(Z) = \emptyset$ pro nějaké $\beta < \alpha$. Nejdříve předpokládejme, že α je limitní ordinál. Poté $\bigcap\{F_\beta(X) : \beta < \alpha\} = F_\alpha(X) = \emptyset$. Otevřené pokrytí prostoru X systémem $\{X \setminus F_\beta(X) : \beta < \alpha\}$ má podle Věty 8 σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{U}_n$ tvořené otevřenými množinami, kde $\mathcal{U}_n$ jsou diskrétní systémy. Můžeme předpokládat, že $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Pro každé $n \in \omega$, $U \in \mathcal{U}_n$ má množina U prázdný průnik s nějakou $F_\beta(X)$, a platí tedy podle Pozorování (i) $F_\beta(U) = U \cap F_\beta(X) = \emptyset$. Podle indukčního předpokladu můžeme vyjádřit U jako sjednocení $\bigcup_{m\in\omega} A_m^U$, kde tyto množiny jsou typu FG a každá je lokálně P. Položme $A_{n,m} = \bigcup\{A_m^U : U \in \mathcal{U}_n\}$. Podle Lemmatu 21 je to FG množina, která je zřejmě lokálně P. Poté je $\mathcal{A} = \{A_{n,m} : n, m \in \omega\}$ hledaný systém a důkaz je pro limitní ordinál hotov.

Pokud α není limitní ordinál, můžeme psát $\alpha = \beta + 1$. Poté $F_\beta \subseteq G_\alpha$ a pro každý bod $x \in F_\beta(X)$ tedy existuje jeho otevřené okolí U_x v $F_\beta(X)$, jehož uzávěr patří do P. Poté systém $\{U_x : x \in F_\beta(X)\}$ tvoří otevřené pokrytí $F_\beta(X)$ a můžeme podle Věty 8 nalézt jeho otevřené σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{U}_n$, kde $\mathcal{U}_n$ jsou diskrétní systémy v $F_\beta(X)$, a tedy i v X. Nechť $n \in \omega$ je pevné a položme $B_n = \bigcup_{U\in\mathcal{U}_n} \overline{U}$. Protože jednotlivé množiny $\overline{U}$ jsou typu FG v X, je i množina B_n podle Lemmatu 21 typu FG. Dále je zřejmě lokálně P. Systém $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ zřejmě pokrývá $F_\beta(X)$. Nyní položme $W = X \setminus F_\beta(X)$. Podle Pozorování (i) platí $F_\beta(W) = W \cap F_\beta(X) = \emptyset$, tudíž podle indukčního přepokladu existuje spočetný systém $\mathcal{C}$ pokrývající W, jehož množiny jsou typu FG a každá je lokálně P. Volbou $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ je důkaz pro speciální případ dokončen.

V obecném případě položme $Y = X \setminus F(P, X)$. Poté je Y otevřená množina, a podle Pozorování (ii) platí $F(P, Y) = \emptyset$. Poté podle speciálního případu existuje spočetný systém $\mathcal{A}$ pokrývající $Y = X \setminus F(P, X)$, jehož množiny jsou typu FG (v Y, a tedy i v X) a každá je lokálně P. Čímž je důkaz hotov.

□

Věta 23. *Nechť P je dědičná třída a X je prostor. Poté lze $X \setminus F(P,X)$ vyjádřit jako sjednocení systému $\mathcal{A}$, který splňuje*

(i) systém $\mathcal{A}$ je σ-diskrétní,

(ii) množiny $A \in \mathcal{A}$ jsou uzavřené a platí $A \in P$.

Důkaz. Nechť $\{B_n : n \in \omega\}$ je systém z Lemmatu 22 pokrývající $X \setminus F(P,X)$ tvořený množinami typu FG, které jsou lokálně P. Zvolme $n \in \omega$ pevné. Můžeme tedy nalézt uzavřenou množinu C_n a a otevřenou G_n splňující $B_n = C_n \cap G_n$. Protože X je metrizovatelný, můžeme psát $G_n = \bigcup_{m\in\omega} F_{n,m}$, kde $(F_{n,m})$ je rostoucí posloupnost uzavřených množin vzhledem k inkluzi. Zvolme $m \in \omega$ pevné. Množina $C_n \cap F_{n,m}$ je uzavřená a lokálně P. Můžeme tedy pro každý bod $x \in C_n \cap F_{n,m}$ nalézt jeho otevřené okolí U_x v $C_n \cap F_{n,m}$, jehož uzávěr patří do P. Poté systém $\{U_x : x \in C_n \cap F_{n,m}\}$ tvoří otevřené pokrytí $C_n \cap F_{n,m}$ a můžeme podle Věty 8 nalézt jeho otevřené σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{U}_{n,m} = \bigcup_{p\in\omega} \mathcal{U}_{n,m,p}$, kde $\mathcal{U}_{n,m,p}$ jsou diskrétní systémy v $C_n \cap F_{n,m}$, a tedy i v X. Označme $\mathcal{A}_{n,m,p} = \{\overline{U} : U \in \mathcal{U}_{n,m,p}\}$. Poté je $\mathcal{A} = \bigcup_{n,m,p\in\omega} \mathcal{A}_{n,m,p}$ hledaný systém.

□

Věta 24. *Nechť X je úplný prostor, $\mathcal{A}$ je bodově spočetný F_σ-aditivní systém a $\bigcup \mathcal{A} = X$. Poté platí alespoň jedna z následujících podmínek*

(*i*) *$\mathcal{A}$ má σ-diskrétní zjemnění,*

(*ii*) *prostor X obsahuje kompaktní podmnožinu, která není pokryta žádným spočetným podsystémem $\mathcal{A}$.*

Důkaz. Zadefinujme

$$P = \{Y \subseteq X : \text{existuje spočetný podsystém } \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \text{ splňující } Y \subseteq \bigcup \mathcal{A}'\}.$$

Systém prostorů P zřejmě tvoří úplnou dědičnou třídu, a tedy nalezneme uzavřenou množinu F z Věty 20 (F je největší uzavřená podmnožina X, že každá neprázdná otevřená podmnožina F není pokryta spočetným podsystémem $\mathcal{A}$).

Pokud je $F = \emptyset$, ukážeme, že systém $\mathcal{A}$ má σ-diskrétní zjemnění. Podle Věty 23 můžeme napsat X jako sjednocení systému $\mathcal{R} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{R}_n$, kde $\mathcal{R}_n$ jsou diskrétní systémy a každá množina $R \in \mathcal{R}$ je prvkem P. Označme $B_n = \bigcup \mathcal{R}_n$. Zvolme $n \in \omega$ pevné. Podle Věty 7 stačí ukázat, že $\mathcal{A} \restriction_{B_n}$ má σ-diskrétní zjemnění. Protože každá množina $R \in \mathcal{R}_n$ je prvek P, existuje spočetný podsystém systému $\mathcal{A}$, který jí pokrývá. Můžeme tedy psát

$$R = \bigcup_{k\in\omega} (A_R^k \cap R), \text{ kde } A_R^k \in \mathcal{A}.$$

Označme

$$\begin{aligned} B_R^k &= A_R^k \cap R, \\ \mathcal{B}^k &= \{B_R^k : R \in \mathcal{R}_n\}. \end{aligned}$$

Není těžké ukázat, že $\bigcup_{k\in\omega} \mathcal{B}^k$ je σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{A} \restriction_{B_n}$.

Pokud $F \neq \emptyset$, zkonstruujeme kompaktní podmnožinu X, která není pokryta žádným spočetným podsystémem $\mathcal{A}$. Zafixujme na X úplnou kompatibilní metriku ρ splňující $\operatorname{diam}(X) < 1$. Pro $s \in \omega^{<\omega}$ zkonstruujeme indukcí podle délky posloupnosti body $x_s \in F$ a množiny $A_s \in \mathcal{A}$ splňující

(i) $x_s \in A_s$,

(ii) pokud $|r| < |s|$ a $x_r \in A \in \mathcal{A}$, poté $x_s \notin A$,

(iii) pokud $s = t\hat{\ }n$ pro nějaké $t \in \omega^{<\omega}$, $n \in \omega$, poté $\operatorname{dist}(x_t, x_s) < 1/2^{\|s\|}$.

Zvolme $x_\emptyset \in F$ libovolně a $A_\emptyset \in \mathcal{A}$, aby $x_\emptyset \in A_\emptyset$. Nechť $m \in \omega$ a požadované objekty výše jsou zadefinovány pro každou $s \in \omega^{<\omega}$ splňující $|s| \leq m$. Nechť $s = t\hat{\ }n$ je délky $m+1$ a B je otevřená koule se středem v x_t o poloměru $1/2^{\|s\|}$. Položme

$$\mathcal{A}_s = \{A \in \mathcal{A} : x_r \in A \text{ pro nějakou } r \in \omega^{<\omega} \text{ splňující } |r| < |s| \}.$$

Protože je systém $\mathcal{A}$ bodově spočetný, je $\mathcal{A}_s$ spočetný systém. Tedy $B \cap (F \setminus \bigcup \mathcal{A}_s) \neq \emptyset$. Existuje tedy $A_s \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_s$ a bod $x_s \in B \cap F \cap A_s$. Vlastnosti (i) až (iii) jsou zřejmě splněny.

Nyní zadefinujme $Q = \{x_s : s \in \omega^{<\omega}\}$. Vlastnost (iii) nám dává totální omezenost množiny Q, a tedy $K = \overline{Q}^X$ je kompaktní množina. Dále pro všechny $A \in \mathcal{A}$, vnitřek množiny $A \cap K$ vzhledem ke K musí být prázdný. V opačném případě nalezneme díky hustotě Q bod x_s ležící v otevřené množině $U \subseteq A \cap K$. Protože $(x_{s\hat{\ }n})$ konverguje k x_s pro n jdoucí do nekonečna, existuje $k \in \omega$, že $x_{s\hat{\ }k} \in U$, a tedy v $A \cap K$. Což je spor s vlastností (ii). Protože $A \cap K$ je typu F_σ v K, obdržíme, že $A \cap K$ je první kategorie v K pro všechny $A \in \mathcal{A}$. Jelikož prostor K je úplný, tedy druhé kategorie, nemůže být pokryt spočetně mnoha prvky z $\mathcal{A}$. Zkonstruovali jsme tedy kompaktní podmnožinu K, která není pokryta žádným spočetným podsystémem $\mathcal{A}$. Čímž je důkaz hotov.

□

Definice 25. Nechť X je prostor a $B \subset X$. Poté řekneme, že

(i) B je diskrétní množina, pokud pro každé $x \in B$ existuje otevřené okolí U splňující $B \cap U = \{x\}$,

(ii) B je σ-diskrétní množina, pokud jí můžeme zapsat jako spočetné sjednocení diskrétních množin.

Definice 26. Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin v prostoru X. Poté řekneme, že $B \subset X$ je $\mathcal{A}$-*diskrétní*, pokud pro každé $b \in B$ existuje $A_b \in \mathcal{A}$ splňující $A_b \cap B = \{b\}$.

Definice 27. Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin v prostoru X. Poté řekneme, že systém $\mathcal{A}$ je *slabě diskrétní*, pokud každá $\mathcal{A}$-diskrétní množina je σ-diskrétní.

Definice 28. Nechť X je topologický prostor. Poté řekneme, že X je *Lindelöfův*, pokud z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí.

Poznámka. Pokud Lindelöfův prostor obsahuje diskrétní množinu, tak musí být spočetná.

Věta 29. *Nechť $\mathcal{A}$ je bodově spočetný slabě diskrétní systém množin v topologickém prostoru X a L je Lindelöfův podprostor X. Poté $L \cap (\bigcup \mathcal{A})$ je pokryta spočetným podsystémem $\mathcal{A}$.*

Důkaz. Budeme postupovat sporem. Nechť tedy $L \cap (\bigcup \mathcal{A})$ není pokryt žádným spočetným podsystémem $\mathcal{A}$. Pomocí transfinitní indukce zkonstruujeme pro každé $\alpha < \omega_1$ bod $x_\alpha \in L \cap (\bigcup \mathcal{A})$, že platí

$$\forall \beta < \alpha \; \forall A \in \mathcal{A} : x_\beta \in A \Rightarrow x_\alpha \notin A.$$

$\underline{\alpha = 0}$
Protože $L \cap (\bigcup \mathcal{A}) \neq \emptyset$, volíme $x_0 \in L \cap (\bigcup \mathcal{A})$ libovolně.

<u>Indukční krok</u>
Nechť je požadovaný objekt zadefinovaný pro všechny $\beta < \alpha$. Označme si $\mathcal{A}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \{A \in \mathcal{A} : x_\beta \in A\}$. Protože je systém $\mathcal{A}_\alpha$ spočetný, můžeme nalézt bod $x_\alpha \in L \cap (\bigcup \mathcal{A} \setminus \bigcup \mathcal{A}_\alpha)$.

Označme $B = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Mějme $x_\alpha \in B$ pevné. Nalezneme $A \in \mathcal{A}$, která obsahuje bod x_α. Poté platí $A \cap B = \{x_\alpha\}$, a tedy množina B je $\mathcal{A}$-diskrétní. Protože systém $\mathcal{A}$ je slabě diskrétní, je zároveň množina B σ-diskrétní. Můžeme jí tedy napsat jako spočetné sjednocení diskrétních množin. Podprostor L tedy obsahuje nespočetnou diskrétní množinu, a tedy nemůže být Lindelöfův.

□

Definice 30. Řekneme, že Hausdorffův topologický prostor X je *analytický*, pokud existuje úplný prostor Z a spojité zobrazení $f\colon Z \to X$ splňující

(i) $f(Z) = X$,

(ii) pro každý diskrétní systém $\mathcal{A}$ v Z existuje σ-diskrétní systém $\mathcal{B}$ v X takový, že pro každé $A \in \mathcal{A}$ existuje podsystém $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ splňující $f(A) = \bigcup \mathcal{C}$.

Poznámka. Platí, že libovolná analytická podmnožina úplného prostoru je analytický prostor.

Definice 31. Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin v prostoru X. Poté řekneme, že je $\mathcal{A}$ *uzavřen na operaci diskrétní sjednocení*, pokud pro každý diskrétní podsystém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ platí $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$.

Definice 32. *Rozšířenými borelovskými množinami* v prostoru X myslíme nejmenší σ-algebru obsahující otevřené množiny, která je uzavřena na operaci diskrétní sjednocení.

Poznámka. Pro analytický prostor X lze ukázat, že systém rozšířeně borelovských množin splývá se se systémem množin $\{A \subseteq X : A, X \setminus A \in S\mathcal{F}(X)\}$.

Věta 33. *Nechť A je analytická množina v úplném prostoru X. Poté je buď σ-diskrétní anebo obsahuje nespočetnou kompaktní množinu.*

Důsledek 34. *Pokud A je množina v úplném prostoru X, pro kterou platí, že každá její podmnožina je suslinovská, poté je už σ-diskrétní.*

Věta 35 (Bing)**.** *Topologický prostor X je metrizovatelný právě tehdy, když je regulární a existuje σ-diskrétní báze otevřených množin.*

Důkaz věty lze najít v [2, Theorem 4.4.8].

Věta 36. *Nechť $\mathcal{A}$ je rozšířeně borelovsky-aditivní systém podmnožin prostoru X. Poté je $\mathcal{A}$ slabě diskrétní.*

Důkaz. Mějme množinu $C \subseteq X$ takovou, že pro každé $c \in C$ existuje množina $A_c \in \mathcal{A}$, které splňuje $C \cap A_c = \{c\}$. Pro libovolnou neprázdnou množinu $D \subseteq C$ platí

$$D = C \cap \bigcup_{d \in D} A_d,$$

a tedy D je Suslinovská podmnožina vzhledem k C. Ukážeme, že C je Suslinovská množina v X. Poté C bude množina, jejíž všechny podmnožiny jsou analytické, a C bude σ-diskrétní množina podle Důsledku 34. Protože

$$C = (\bigcup_{c \in C} A_c) \setminus (\bigcup_{c \in C} A_c \cap (X \setminus \{c\})),$$

stačí nám ukázat, že množina $E = \bigcup_{c \in C} A_c \cap (X \setminus \{c\})$ je rozšířeně borelovská v X. Protože X je metrizovatelný, můžeme podle Věty 35 nalézt otevřenou bázi $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{B}_n$, kde $\mathcal{B}_n$ jsou diskrétní systémy. Pro každou $B \in \mathcal{B}$ zadefinujme

$$A_B = \bigcup \{A_c : c \in C \text{ a } B \subseteq (X \setminus \{c\})\}.$$

Nyní zřejmě platí

$$E = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{B \in \mathcal{B}_n} A_B \cap B.$$

Protože je $\{A_B \cap B : B \in \mathcal{B}_n\}$ diskrétní systém rozšířeně borelovských množin pro každé $n \in \omega$, je i množina E rozšířeně borelovská, čímž je důkaz dokončen.

□

Věta 37. *Nechť X je úplný prostor. Poté každý bodově spočetný F_σ-aditivní systém množin má σ-diskrétní zjemnění.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je bodově spočetný F_σ-aditivní systém množin v úplném prostoru X. Označme $Y = \bigcup \mathcal{A}$. Poté můžeme Y napsat jako $\bigcup_{n \in \omega} Y_n$, kde Y_n je neklesající posloupnost uzavřených množin vzhledem k inkluzi. Zvolme $n \in \omega$ pevné. Podle Věty 7 stačí ukázat, že $\mathcal{A} \restriction_{Y_n}$ má σ-diskrétní zjemnění. Prostor Y_n je úplný a podle Věty 36 je systém $\mathcal{A} \restriction_{Y_n}$ slabě diskrétní. Kombinací Vět 24 a 29 obdržíme, že $\mathcal{A} \restriction_{Y_n}$ má σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{R}_n$ vzhledem k Y_n. Protože Y_n je uzavřená podmnožina X, snadno nahlédneme, že $\mathcal{R}_n$ je σ-diskrétní zjemnění systému $\mathcal{A} \restriction_{Y_n}$ i vzhledem k X. Tím je důkaz dokončen.

□

Věta 38. *Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin v prostoru X. Označme $F = X \setminus G$, kde*

$$G = \bigcup\{U : U \text{ je otevřená podmnožina } X,\ \mathcal{A} \restriction_U \text{ má } \sigma\text{-diskrétní zjemnění}\}.$$

Poté jsou následující výroky ekvivalentní

(i) $\mathcal{A}$ nemá σ-diskrétní zjemnění v prostoru X,

(ii) $\mathcal{A} \restriction_F$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný v prostoru F.

Důkaz.
$(i) \Rightarrow (ii)$
Podle Věty 10 je systém $\mathcal{A} \restriction_F$ nikde σ-diskrétně zjemnitelý v prostoru X. Nechť pro spor existuje neprázdná otevřená množina V v prostoru F, která protíná $\cup\mathcal{A} \restriction_F$ a platí, že $\mathcal{A} \restriction_V$ má σ-diskrétní zjemnění v prostoru F, a tedy i v X. Poté můžeme nalézt otevřenou množinu U v prostoru X, že $V = U \cap F$. Protože $U = V \cup (U \cap G)$, má podle Věty 7 $\mathcal{A} \restriction_U$ σ-diskrétní zjemnění v prostoru X. Tudíž $U \subseteq G$ a zároveň $U \cap F \neq \emptyset$. Čímž dostáváme spor.

$(ii) \Rightarrow (i)$
Podle předpokladu $\mathcal{A} \restriction_F$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný v prostoru F, a tedy můžeme nalézt neprázdnou otevřenou množinu V v prostoru F, že $\mathcal{A} \restriction_V$ nemá σ-diskrétní zjemnění. Z Věty 6 plyne, $\mathcal{A}$ nemá σ-diskrétní zjemnění v prostoru X.

□

Nyní uvedeme alternativní důkaz Věty 37.

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je bodově spočetný F_σ-aditivní systém množin v úplném prostoru X. Nejdříve dokážeme speciální případ, když $\bigcup \mathcal{A} = X$.

Budeme postupovat sporem. Nechť $\mathcal{A}$ nemá σ-diskrétní zjemnění. Podle Věty 38 můžeme předpokládat, že $\mathcal{A}$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný. Zafixujme na X kompatibilní úplnou metriku. Pro libovolný bod $x \in X$ označme

$$\mathcal{A}(x) = \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}.$$

Pro každou $s \in 2^{<\omega}$ nalezneme neprázdnou otevřenou $U_s \subseteq X$ a bod $x_s \in U_s$, že jsou splněny následující podmínky

(i) $\overline{U}_{s^\frown 0} \cap \overline{U}_{s^\frown 1} = \emptyset$, $\overline{U}_{s^\frown 0} \cup \overline{U}_{s^\frown 1} \subseteq U_s$, $\operatorname{diam} U_s < 2^{-|s|}$,

(ii) $x_{s^\frown 0} = x_s$,

(iii) $x_{s^\frown 1} \notin \bigcup \mathcal{A}(x_{s^\frown 0})$.

Tyto objekty zkonstruujeme pomocí matematické indukce podle délky s. Zřejmě platí $\bigcup \mathcal{A} \neq \emptyset$. Zvolme $x_\emptyset \in \bigcup \mathcal{A}$. Nalezneme neprázdnou otevřenou $U_\emptyset$, která obsahuje bod $x_\emptyset$. Protože je $\mathcal{A}$ bodově spočetný a nikde σ-diskrétně zjemnitelný, platí $U_\emptyset \nsubseteq \bigcup \mathcal{A}(x_\emptyset)$.

Nechť $n \in \omega$ a požadované objekty výše jsou zadefinovány pro každou $s \in 2^{<\omega}$ splňující $|s| \leq n$. Zvolme pevně $s \in 2^{<\omega}$ splňující $|s| = n$. Položme $x_{s\frown 0} = x_s$. Nalezneme neprázdné otevřené množiny $U_{s\frown 0}, U_{s\frown 1}$ splňující podmínku (i) takové, že $x_{s\frown 0} \in U_{s\frown 0}$. (Poznamenejme, že $\mathcal{A} \restriction_{U_s}$ nemá σ-diskrétní zjemnění, speciálně $x_{s\frown 0}$ není izolovaný bod. Tudíž $U_{s\frown 1}$ může být zvolena způsobem požadovaným v (i).) Protože $\mathcal{A} \restriction_{U_{s\frown 1}}$ nemá σ-diskrétní zjemnění, platí, že $U_{s\frown 1} \setminus \bigcup \mathcal{A}(x_{s\frown 0}) \neq \emptyset$ a můžeme tedy zvolit bod $x_{s\frown 1} \in U_{s\frown 1} \setminus \bigcup \mathcal{A}(x_{s\frown 0})$. Tímto je indukční krok dokončen.

Zadefinujme zobrazení $\phi\colon 2^\omega \to X$ jako $\phi(\alpha) = \bigcap_{n\in\omega} U_{\alpha\restriction_n}$. Poněvadž prostor X je úplný, zobrazení ϕ je díky podmínce (i) dobře definované a množina

$$\phi(2^\omega) = C = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{|s|=n} U_s$$

je homeomorfní kopie Cantorovy množiny 2^ω.

Nyní zadefinujeme na prostoru X relaci vztahem

$$xRy \Leftrightarrow \left(x \notin \bigcup \mathcal{A}(y) \wedge y \notin \bigcup \mathcal{A}(x)\right).$$

Z konstrukce výše zřejmě platí

(I) $x_{s\frown 0} R x_{s\frown 1}$,

(II) $\phi^{-1}(x_{s\frown 0}), \phi^{-1}(x_{s\frown 1}) \in \mathcal{N}(s)$ (přesněji $\phi(s\frown 0\frown\overline{0}) = x_{s\frown 0}$, $\phi(s\frown 1\frown\overline{0}) = x_{s\frown 1}$).

Protože prostor C je úplný separabilní, obdržíme kombinací Vět 29 a 36 spočetný podsystém $\mathcal{A}$, který ho pokrývá. Platí tudíž

$$C = \bigcup_{n\in\omega} A_n \cap C, A_n \in \mathcal{A}.$$

Protože C je úplný prostor, není to tedy množina první kategorie, a množiny $A_n \cap C$ jsou typu F_σ, existuje $k \in \omega$ a neprázdná otevřená množina V v C taková, že

$$V \subseteq A_k \cap C.$$

Zobrazení ϕ je homeomorfismus, a můžeme tedy najít $t \in 2^{<\omega}$ splňující $\mathcal{N}(t) \subseteq \phi^{-1}(A_k \cap C)$. Pak ale platí $x_{t\frown 0}, x_{t\frown 1} \in A_k$ a zároveň $x_{t\frown 0} R x_{t\frown 1}$, což je spor.

V obecném případě označme $Y = \bigcup \mathcal{A}$. Poté můžeme Y napsat jako $\bigcup_{n\in\omega} Y_n$, kde Y_n je neklesající posloupnost uzavřených množin vzhledem k inkluzi. Zvolme

$n \in \omega$ pevné. Podle Věty 7 stačí ukázat, že $\mathcal{A} \restriction_{Y_n}$ má σ-diskrétní zjemnění. Prostor Y_n je úplný a podle speciálního případu obdržíme, že $\mathcal{A} \restriction_{Y_n}$ má σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{R}_n$ vzhledem k Y_n. Protože Y_n je uzavřená podmnožina X, snadno nahlédneme, že $\mathcal{R}_n$ je σ-diskrétní zjemnění systému $\mathcal{A} \restriction_{Y_n}$ i vzhledem k X. Tím je důkaz dokončen.

$\square$

3. Π_3^0-aditivní systémy

V této kapitole se zaměříme na $\mathbf{\Pi}_3^0$-aditivní systémy množin a ukážeme, že při bodové spočetnosti nebo určité vlastnosti parciálních selektorových množin tohoto systému obdržíme jeho σ-diskrétní zjemnitelnost. Důkaz tohoto výsledku a pomocných vět či lemmat bude vycházet ze článků [7] a [8].

Definice 39. Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Poté řekneme, že $\mathcal{S} = (\{x_A\})_{A\in\mathcal{B}}$ je *parciální selektor* systému $\mathcal{A}$, pokud $x_A \in A$ pro každou $A \in \mathcal{B}$. Množinu $\{x_A : A \in \mathcal{B}\}$ nazýváme *množina parciálního selektoru* $\mathcal{S}$ a takové množiny nazýváme *parciální selektorové množiny* systému $\mathcal{A}$.

Poznámka. Mějme disjunktní systém $\mathcal{A}$ v prostoru X. Poté platí

(i) slabá diskrétnost systému $\mathcal{A}$ přesně odpovídá tomu, že každá parciální selektorová množina je σ-diskrétní,

(ii) pokud $\mathcal{A}$ je slabě diskrétní systém složený ze σ-diskrétních množin, poté $\bigcup\mathcal{A}$ je také σ-diskrétní množina.

Věta 40. *Nechť X je separabilní prostor a $\mathcal{A}$ je systém množin, který pokrývá X. Pokud každá parciální selektorová množina systému $\mathcal{A}$ je σ-diskrétní, poté existuje spočetný podsystém $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, který pokrývá X.*

Důkaz. Budeme postupovat sporem. Tudíž můžeme pro každé $\alpha \in [0, \omega_1)$ nalézt bod x_α a množinu $A_\alpha \in \mathcal{A}$, že platí

(i) $A_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta \neq \emptyset$,

(ii) $x_\alpha \in A \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$.

Poté $S = \{x_\alpha : \alpha \in [0, \omega_1)\}$ je nespočetná parciální selektorová množina systému $\mathcal{A}$. Podle předpokladu je množina S σ-diskrétní, což je ale ve sporu se separabilitou X.

□

Definice 41. Nechť A je množina a $\leq$ je binární relace na ní. Poté řekneme, že $B \subseteq A$ je *kofinální*, pokud pro každé $a \in A$ existuje $b \in B$, které splňuje $a \leq b$.

Definice 42. Nechť A je částečně uspořádaná množina. Poté její *kofinalitou* $\mathrm{cf}(A)$ rozumíme nejmenší kardinalitu její kofinální podmnožiny.

Věta 43. *Nechť X je prostor a $\mathcal{A}$ je slabě diskrétní bodově spočetný systém množin, které mají váhu menší než ω_1 a pokrývají X. Poté má $\mathcal{A}$ σ-diskrétní zjemnění.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je systém splňující předpoklady a $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in [0, \kappa)\}$ je jeho očíslování. Položme

$$B_\alpha = A_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta, \tag{3.1}$$

$$K = \{\alpha < \kappa : B_\alpha \neq \emptyset\}. \tag{3.2}$$

Systém $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha \in K\}$ je zjemnění systému $\mathcal{A}$. Ukážeme, že $\mathcal{B}$ má σ-diskrétní zjemnění. Za tímto účelem stačí podle [8, Remark 2] ověřit, že každá parciální selektorová množina je σ-diskrétní. Uvažujme pro spor existenci parciální selektorové množiny

$$S = \{x_\alpha \in B_\alpha : \alpha \in K\},$$

která není σ-diskrétní. Pro každé $\alpha \leq \kappa$ položme $S(\alpha) = \{x_\beta : \beta \in K \cap W(\alpha)\}$ a

$$\tau = \min\{\alpha : S(\alpha) \text{ není } \sigma\text{-diskrétní }\}. \tag{3.3}$$

Nechť $\lambda = \omega_{\mathrm{cf}(\tau)}$ (z definice τ máme $\mathrm{cf}(\tau) > 0$ a tedy λ je regulární ordinál).

Ukážeme, že pokud zobrazení $\phi\colon L \to K$, kde $L \subseteq W(\lambda)$, je ryze rostoucí funkce splňující $\lim_{\beta\in L} \phi(\beta) = \tau$, poté

$$\text{je množina } T = \{x_\alpha : \alpha \in \phi(L)\} \ \sigma\text{-diskrétní.} \tag{3.4}$$

Pro $\alpha \in K$ položme

$$K(\alpha) = \{\xi < \tau : x_\alpha \in A_\xi\}. \tag{3.5}$$

Množina $K(\alpha)$ je spočetná, protože systém $\mathcal{A}$ je bodově spočetný. Díky regularitě λ a vlastnostem funkce ϕ můžeme zadefinovat ryze rostoucí spojitou funkci $u\colon W(\lambda) \to W(\tau)$ splňující podmínky

$$u(0) = 0, \lim_{\beta<\lambda} u(\beta) = \tau, \tag{3.6}$$

$$\sup[\bigcup\{K(\alpha) : \alpha \in \phi(L) \cap W(u(\beta))\}] < u(\beta + 1). \tag{3.7}$$

Funkce u rozděluje množinu T na σ-diskrétní podmnožiny

$$T_\beta = \{x_\alpha : \alpha \in \phi(L) \cap [u(\beta), u(\beta + 1))\} \subseteq S(u(\beta + 1)).$$

K dokončení důkazu (3.4) stačí podle Poznámky ukázat, že každá parciální selektorová množina pro $\{T_\beta : \beta < \lambda\}$ je σ-diskrétní. Pro každou neprázdnou T_β vybereme její bod a označme W příslušnou parciální selektorovou množinu obdrženou tímto způsobem. Nechť $W_0 = \{x_{\phi(\gamma)} \in W : \gamma \text{ je lichá}\}$ a $W_1 = \{x_{\phi(\gamma)} \in W : \gamma \text{ je sudá}\}$. Ukážeme, že každá z množin W_0 a W_1 je $\mathcal{A}$-diskrétní, a tedy podle předpokladu i σ-diskrétní. Za tímto účelem mějme $x_{\phi(\gamma)}$ a $x_{\phi(\delta)}$ prvky W_i splňující $\phi(\gamma) < \phi(\delta)$ (ekvivalentně $\gamma < \delta$). Podle (3.1) máme $x_{\phi(\gamma)} \in A_{\phi(\gamma)}$ a $x_{\phi(\delta)} \in A_{\phi(\delta)} \setminus A_{\phi(\gamma)}$. Existuje $\xi \in W(\lambda)$ splňující $u(\xi) \leq \phi(\gamma) < u(\xi + 1)$. Dále navíc platí $\phi(\gamma) < u(\xi + 1) < u(\xi + 2) \leq u(\delta) \leq \phi(\delta)$ a podle (3.7) obdržíme

$\phi(\delta) > \sup K(\phi(\gamma))$, čímž dostáváme díky (3.5) vztah $x_{\phi(\gamma)} \notin A_{\phi(\delta)}$. Tudíž, volbou pro každý $x_{\phi(\gamma)} \in W_i$ množinu $A_{\phi(\gamma)}$ obdržíme $W_i \cap A_{\phi(\gamma)} = \{x_{\phi(\gamma)}\}$. Tím je důkaz (3.4) hotov.

Nyní, zvolme ryze rostoucí spojitou funkci $v\colon W(\lambda) \to W(\tau)$ splňující $v(0) = 0$ a $\lim_{\beta<\lambda} v(\beta) = \tau$. Uvažme rozklad množiny $S(\tau)$ na σ-diskrétní podmnožiny

$$S_\beta = \{x_\alpha : \alpha \in K \cap [v(\beta), v(\beta+1))\} \subseteq S(v(\beta+1)).$$

Nechť T je parciální selektorová množina pro systém $\{S_\beta : \beta < \lambda\}$. Položme $L = \{\beta : S_\beta \neq \emptyset\}$ a zvolme pro každé $\beta \in L$ ordinál $\phi(\beta) \in K \cap [v(\beta), v(\beta+1))$ splňující $S_\beta \cap T = \{x_{\phi(\beta)}\}$. Funkce $\phi\colon L \to K$ je ryze rostoucí a $\lim_{\beta\in L} \phi(\beta) = \tau$. Podle (3.4) dostáváme, že množina $T = \{x_\beta : \beta \in \phi(L)\}$ je σ-diskrétní. Díky Poznámce obdržíme, že $S(\tau)$ je σ-diskrétní množina, což je ale ve sporu s (3.3). Tudíž jsme dokázali že $S = \{x_\alpha \in B_\alpha : \alpha \in K\}$ je σ-diskrétní a je tím důkaz hotov.

□

Věta 44. *Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin v prostoru X, že každá jeho parcialní selektorová množina je σ-diskrétní. Poté je $\mathcal{A}$ slabě diskrétní.*

Důkaz. Budeme postupovat sporem. Nechť existuje množina C, která je $\mathcal{A}$-diskrétní, ale není σ-diskrétní. Můžeme tedy nalézt pro každé $c \in C$ množinu $A_c \in \mathcal{A}$ splňující $C \cap A_c = \{c\}$. Zadefinujme

- $\mathcal{B} = \{A_c : c \in C\}$,
- $\{x_A\} = A \cap C, A \in \mathcal{B}$.

Poté $\{x_A : A \in \mathcal{B}\}$ je parciální selektorová množina systému $\mathcal{A}$, a je tedy σ-diskrétní. Zároveň platí $C = \{x_A : A \in \mathcal{B}\}$, a tedy $\{x_A : A \in \mathcal{B}\}$ není σ-diskrétní. Což je spor.

□

Věta 45. *Nechť X je prostor, který splňuje $\omega(X) \leq \omega_1$. Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin pokrývající X, že každá parciální selektorová množina $\mathcal{A}$ je σ-diskrétní. Poté $\mathcal{A}$ má σ-diskrétní zjemnění.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je systém splňující předpoklady a $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in [0, \kappa)\}$ je jeho očíslování. Zadefinujme

- $B_0 = A_0$,
- $B_\alpha = A_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$, $\alpha \in (0, \kappa)$.

Poté systém $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha \in [0, \kappa)\}$ tvoří disjunktní pokrytí prostoru X a každá jeho parciální selektorová množina je σ-diskrétní. Kombinací Vět 43 a 44 dostáváme, že systém $\mathcal{B}$ má σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{C}$. Poté je $\mathcal{C}$ σ-diskrétní zjemnění i systému $\mathcal{A}$, čímž jsme hotovi.

$\square$

Lemma 46. *Nechť X je prostor a $\mathcal{A}$ σ-diskrétní systém množin první kategorie. Poté je $\bigcup \mathcal{A}$ také první kategorie.*

Důkaz. Protože je $\mathcal{A}$ σ-diskrétní systém, můžeme psát $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{A}_n$, kde $\mathcal{A}_n$ jsou diskrétní systémy. Dále můžeme pro každé $A \in \mathcal{A}$ nalézt řídké množiny H_n^A, že platí $A = \bigcup_{n \in \omega} H_n^A$. Zřejmě platí

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{k \in \omega} (\bigcup_{A \in \mathcal{A}_n} H_k^A).$$

Není těžké ověřit, že pro každé $n, k \in \omega$ je $\bigcup_{A \in \mathcal{A}_n} H_k^A$ řídká množina, čímž je důkaz hotov.

$\square$

Věta 47. *Nechť systém $\mathcal{A}$ pokrývá úplný prostor X a každá parciální selektorová množina systému $\mathcal{A}$ je σ-diskrétní. Poté $\mathcal{A}$ obsahuje množinu druhé kategorie.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je jako v předpokladech a neobsahuje množinu druhé kategorie. Pro každé $A \in \mathcal{A}$ tedy můžeme nalézt množiny uzavřené řídké množiny $F(A, n)$, $n \in \omega$, že platí $A \subseteq \bigcup_{n \in \omega} F(A, n)$. Pro každý bod $x \in X$, $A \in \mathcal{A}$ a $n \in \omega$ nalezneme posloupnost $(y(x, A, n, k))_{k \in \omega}$, která konverguje k x a jejíž prvky neleží v $F(A, n)$.

Dále pro každé $\alpha \in [0, \omega_1)$ sestrojíme pomocí transfinitní indukce spočetné množiny $X_\alpha \subseteq X$ a spočetné systémy $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ následovně.

$\underline{\alpha = 0}$
Volme $X_0 = \{z\}$, kde z je libovolný bod X a $\mathcal{A}_0 = \emptyset$.

<u>Indukční krok</u>
Nechť $\alpha \in [1, \omega_1)$ a požadované objekty jsou zkonstruovány pro všechny ordinály menší než α.
Pokud α není limitní ordinál, tedy $\alpha = \beta + 1$, poté položme

$$X_\alpha = X_\beta \cup \{y(x, A, n, k) : x \in X_\beta, A \in \mathcal{A}_\beta, k, n \in \omega\}.$$

Navíc systém $\{A \cap \overline{X_\beta} : A \in \mathcal{A}\}$ tvoří pokrytí separabilního protoru $\overline{X_\beta}$, a tudíž podle Věty 40 můžeme nalézt spočetný podsystém $\mathcal{A}'_\beta$, který pokrývá $\overline{X_\beta}$. Položme $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_\beta \cup \mathcal{A}'_\beta$. Tím je konstrukce pro nelimitní ordinál dokončena.
Pokud je $\alpha < \omega_1$ limitní ordinál, položme

$$X_\alpha = \bigcup_{\eta < \alpha} X_\eta \text{ a } \mathcal{A}_\alpha = \bigcup_{\eta < \alpha} \mathcal{A}_\eta,$$

čímž je konstrukce dokončena.

Nyní zadefinujme

$$Y = \overline{\bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha} \text{ a } \mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha.$$

Poté

$$Y = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \overline{X_\alpha},$$

protože

$$\bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} \overline{X_\alpha}$$

a jedná se o rostoucí sjednocení ω_1 uzavřených množin, tedy uzavřenou množinu. Dále Y je úplný prostor s vahou nepřesahující ω_1 a $\mathcal{B} \restriction_Y$ je jeho pokrytí, že každá parciální selektorová množina je σ-diskrétní.

Navíc se $\mathcal{B} \restriction_Y$ skládá z množin první kategorie v Y. Stačí ověřit, že $F(A,n) \cap Y$ je řídká množina v Y pro každou $A \in \mathcal{B}$, $n \in \omega$. Zafixujme si $A \in \mathcal{B}$, $n \in \omega$ a zvolme pevně $x \in F(A,n) \cap Y$. Nalezneme $\alpha < \omega_1$, že platí $x \in \overline{X_\alpha}$ a $A \in \mathcal{A}_\alpha$. Vybereme posloupnost prvků (x_j) množiny X_α splňující $x_j \to x$ pro j jdoucí do nekonečna.

Máme

$$\{y(x_j, A, n, k) : j, k \in \omega\} \subseteq Y \setminus F(A,n) \text{ a } x \in \overline{\{y(x_j, A, n, k) : j, k \in \omega\}}.$$

Tudíž x nemůže být ve vnitřku (vzhledem k Y) množiny $F(A,n) \cap Y$.

Podle 45 má tedy systém $\mathcal{B} \restriction_Y$ σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{R}$. Poté $\bigcup \mathcal{R}$ je podle Lemmatu 46 množina první kategorie v Y. Na druhou stranu $Y = \bigcup \mathcal{R}$ jako úplný prostor je druhé kategorie sám v sobě. Čímž dostáváme spor.

□

Definice 48. Nechť X je topologický prostor. Poté řekneme, že $A \subseteq X$ má *Baireovu vlastnost*, pokud jí můžeme napsat jako $A = U \triangle M$, kde $U \subseteq X$ je otevřená množina a $M \subseteq X$ je množina první kategorie.

Věta 49. *Nechť $\mathcal{A}$ je systém množin pokrývající úplný prostor X. Nechť platí jedna z následujících podmínek*

(*i*) *$\mathcal{A}$ je bodově spočetný $Borel(X)$-aditivní systém,*

(*ii*) *$\mathcal{A}$ je tvořen množinami s Baireovou vlastností a každá parciální selektorová množina systému $\mathcal{A}$ je σ-diskrétní.*

Poté existuje $A \in \mathcal{A}$, která je reziduální v nějaké neprázdné otevřené $V \subseteq X$.

Důkaz. Nejdříve předpokládejme, že $\mathcal{A}$ splňuje (i). Poté podle [6, Proposition 8A] existuje množina $A \in \mathcal{A}$, která není první kategorie. Protože je A borelovská množina, má Baierovu vlastnost a můžeme jí tedy napsat jako $A = U \triangle M$, kde U je otevřená množina a M je množina první kategorie. Volbou $V = U$ jsme hotovi.

Pokud předpokládáme (ii), můžeme podle Věty 47 nalézt $A \in \mathcal{A}$, která není první kategorie. Podle předpokladu má Baierovu vlastnost a důkaz se dokončí stejně jako v případu výše.

□

Definice 50. Nechť X je prostor. Pro každé ordinální číslo $1 \leq \xi < \omega_1$ definujeme systémy množin $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$ a $\mathbf{\Pi}^0_\xi(X)$ induktivně takto

- $\mathbf{\Sigma}^0_1(X) = \{U \subseteq X : U \text{ je otevřená množina}\}$,
- $\mathbf{\Pi}^0_\xi(X) = \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)\}$,
- $\mathbf{\Sigma}^0_\xi(X) = \{\bigcup_{n\in\omega} A_n : A_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\xi_n}(X), \xi_n < \xi \text{ pro } n \in \omega\}$, $\xi > 1$.

Poznámka. Pokud bude zřejmé, v jakém prostoru pracujeme, budeme psát jenom $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ a $\mathbf{\Pi}^0_\xi$.

Věta 51. *Nechť $\mathcal{A}$ je $\mathbf{\Pi}^0_3$-aditivní systém množin pokrývající úplný prostor X. Nechť platí jedna z následujících podmínek*

(*i*) *$\mathcal{A}$ je bodově spočetný,*

(*ii*) *každá parciální selektorová množina systému $\mathcal{A}$ je σ-diskrétní.*

Nechť $H \subseteq X$ je $\mathbf{\Pi}^0_2$-množina taková, že $\mathcal{A} \restriction_H$ nemá σ-diskrétní zjemnění a $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ je konečná. Poté existuje neprázdná $\mathbf{\Pi}^0_2$-množina $G \subseteq H \setminus \bigcup \mathcal{A}_0$ a $A \in \mathcal{A}$, že $\mathcal{A} \restriction_G$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný a $A \cap G$ je reziduální v G.

Důkaz. Nechť H je jako v předpokladech. Protože je systém $\mathcal{A}$ je $\mathbf{\Pi}^0_3$-aditivní, můžeme psát

$$H \setminus \bigcup \mathcal{A}_0 = \bigcup_{n\in\omega} G_n,$$

kde $G_n \subseteq H, n \in \omega$ jsou $\mathbf{\Pi}^0_2$ podmnožiny X. Víme, že $\mathcal{A} \restriction_H$ nemá σ-diskrétní zjemnění, a můžeme tedy podle Věty 7 nalézt $j \in \omega$, že $\mathcal{A} \restriction_{G_j}$ nemá σ-diskrétní zjemnění.

Podle Věty 10 nalezneme relativně uzavřenou množinu D vzhledem ke G_j (D je tedy typu $\mathbf{\Pi}^0_2$ v X), že $\mathcal{A} \restriction_D$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný v podprostoru G_j, a tedy i v X. Použijeme Větu 49 na prostor D, který je metrizovatelný úplnou metrikou, a systém $\mathcal{A} \restriction_D$ k nalezení otevřené množiny $V \subseteq X$ protínající D a $A \in \mathcal{A}$ splňující, že $A \cap V \cap D$ je reziduální v $V \cap D$. Volbou $G = V \cap D$ je důkaz hotov.

□

Definice 52. Nechť $s \in 2^\omega$. Poté řekneme, že s je *nakonec nula*, pokud existuje $n \in \omega$, že pro všechny $k \geq n$ platí $s_k = 0$.

Definice 53. Nechť X je prostor, $A \subseteq X$ a ordinál ξ splňuje $1 < \xi < \omega_1$. Poté řekneme, že A je *pravá* $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ *podmnožina* X, pokud $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi(X)$, ale $A \notin \mathbf{\Pi}^0_\xi(X)$.

Úmluva. Nechť $k, n \in \omega$, $n \geq k$. Poté $\langle n, k\rangle$ bude reprezentovat přirozené číslo $\frac{1}{2}n(n+1) + k + 1$. Poznamenejme, že pro $p \in \omega$ jsou čísla $n, k \in \omega$ splňující $\langle n, k\rangle - 1 = p$ určena jednoznačně.

Lemma 54. *Množina*

$$\mathbb{P} = \{v \in 2^\omega : \exists k \in \omega, (v_{\langle n,k\rangle})_{n \geq k} \text{ není nakonec nula}\}$$

je pravá $\mathbf{\Sigma}^0_3$ *množina.*

Důkaz. Položme $Q = \{\alpha \in 2^\omega : (\alpha_n) \text{ je nakonec nula}\}$. Je dobře známo (viz [12, Exercise 23.1]), že Q^ω je pravá $\mathbf{\Sigma}^0_3$ podmnožina $(2^\omega)^\omega$. Zadefinujme zobrazení $\phi\colon 2^\omega \to (2^\omega)^\omega$ následujícím předpisem

$$\phi(v)(k) = (v_{\langle n+k,k\rangle - 1})_{n \geq 0}.$$

Protože každé $l \in \omega$ lze jednoznačně vyjádřit jako $\langle n+k, k\rangle - 1$, $n, k \in \omega$, můžeme standartním postupem ověřit, že ϕ je homeomorfismus 2^ω a $(2^\omega)^\omega$. Poté je již snadné ověřit platnost vztahu $\phi(2^\omega \setminus P) = Q^\omega$, čímž je důkaz dokončen.
∎

Věta 55. *Nechť $\mathcal{A}$ je $\mathbf{\Pi}^0_3$-aditivní systém množin pokrývající úplný prostor X. Nechť platí jedna z následujících podmínek*

(i) *$\mathcal{A}$ je bodově spočetný,*

(ii) *každá parciální selektorová množina $\mathcal{A}$ je σ-diskrétní.*

Poté má systém $\mathcal{A}$ σ-diskrétní zjemnění.

Důkaz. Zafixujme na X kompatibilní úplnou metriku ρ. Předpokládejme pro spor, že $\mathcal{A}$ nemá σ-diskrétní zjemnění. Pro každé $s \in 2^{<\omega}$ sestrojíme

- otevřenou kouli $B(s) \subseteq X$,
- $A(s) \in \mathcal{A}$,
- $\mathbf{\Sigma}^0_2$ množiny $F^j(s) \subseteq X$, $j \in \omega$, že $(F^j(s))_{j\in\omega}$ je nerostoucí posloupnost vzhledem k inkluzi a $A(s) = \bigcap_{j\in\omega} F^j(s)$,
- $\mathbf{\Pi}^0_2$ množinu $G(s) \subseteq X$,
- úplnou metriku $\rho(s)$ na $G(s)$, která je ekvivalentní s původní metrikou ρ na $G(s)$.

Pro $s \in 2^{<\omega}$ požadujeme

(i) $\overline{B(s\hat{\ }0)} \cup \overline{B(s\hat{\ }1)} \subseteq B(s)$, $\overline{B(s\hat{\ }0)} \cap \overline{B(s\hat{\ }1)} = \emptyset$,

(ii) $B(s) \cap G(s) \neq \emptyset$,

(iii) $\operatorname{diam}_{\rho(s)}(\overline{B(s)} \cap G(s)) < 2^{-|s|}$, $\operatorname{diam}_{\rho}(\overline{B(s)}) < 2^{-|s|}$,

(iv) $A(s) \cap G(s)$ je reziduální v $G(s)$,

(v) $G(s) \cap \bigcup\{A(t) : t \in 2^{<\langle k,k\rangle}\} = \emptyset$, kdykoli $|s| = \langle n, k\rangle$ pro nějaká $n, k \in \omega$, $k \leq n$,

(vi) $G(s\hat{\ }i) \subseteq G(s)$, kdykoli $|s| = \langle n, k\rangle$, $k < n$ a $i \in \{0, 1\}$,

(vii) pokud $|s| = \langle n, k\rangle$, $k < n$ a $s_{\langle n,l\rangle} = 0$ pro všechna $l < k$, poté

$$A(s) = A(s \restriction_{\langle n-1,k\rangle}),\ F^j(s) = F^j(s \restriction_{\langle n-1,k\rangle}),\ j \in \omega$$
$$G(s) = G(s \restriction_{\langle n-1,k\rangle}),\ \rho(s) = \rho(s \restriction_{\langle n-1,k\rangle}),$$

(viii) $G(s\hat{\ }1) \cap B(s\hat{\ }1) \subseteq F^{|s|+1}(s\hat{\ }1)$, kdykoli $|s| = \langle n, k\rangle$, kde $k < n$,

(ix) $\mathcal{A} \restriction_{G(s)}$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný,

(x) pokud $|s| = \langle n, k\rangle$, $k < n$ a $s_{\langle n,l\rangle} = 0$ pro všechna $l \leq k$, poté

$$B(s) \cap G(s \restriction_{\langle n-1,n-1\rangle}) \neq \emptyset.$$

Poznamenejme, že podmínka (vii) také platí pro $s \in 2^{<\omega}$ splňující $|s| = \langle n, 0\rangle$, $n \geq 1$.

Použijeme Větu 51 pro $H = X$ a $\mathcal{A}_0 = \emptyset$, čímž obdržíme neprázdnou $\mathbf{\Pi}^0_2$ množinu $G(\emptyset) \subseteq X$ a $A(\emptyset) \in \mathcal{A}$, že platí $\mathcal{A} \restriction_{G(\emptyset)}$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný a $A(\emptyset) \cap G(\emptyset)$ je reziduální v $G(\emptyset)$. Protože $A(\emptyset) \in \mathcal{A}$, můžeme nalézt nerostoucí posloupnost $(F^j(\emptyset))_{j\in\omega}$ množin typu $\mathbf{\Sigma}^0_2$ splňující $A(\emptyset) = \bigcap_{j\in\omega} F^j(\emptyset)$. Zvolme úplnou metriku $\rho(\emptyset)$ na $G(\emptyset)$, která je ekvivalentní s ρ na $G(\emptyset)$. Nechť $B(\emptyset)$ je otevřená koule v X se středem v nějakém bodě $G(\emptyset)$, která splňuje

- $\operatorname{diam}_{\rho(\emptyset)}(\overline{B(\emptyset)} \cap G(\emptyset)) < 1$,
- $\operatorname{diam}_{\rho}(\overline{B(\emptyset)}) < 1$.

Tím je první krok naší konstrukce dokončen, protože podmínky (i) - (x) jsou buď zřejmě splněny, nebo prázdné.

Nechť $s \in 2^{<\omega}$ a požadované objekty výše jsou zkonstruovány pro všechna $t \in 2^{<\omega}$, pro která platí $|t| \leq |s|$. Nechť n, k jsou jednoznačně určená přirozená čísla splňující $|s| + 1 = \langle n, k\rangle$. K zadefinování požadovaných objektů pro $s\hat{\ }0$ a $s\hat{\ }1$ rozlišíme následující případy.

Případ 1. Nechť $k = n$ nebo existuje $l < k$ takové, že platí $s_{\langle n,l\rangle} = 1$.
Podle předpokladů (ii) a (ix) máme, že $\mathcal{A} \restriction_{B(s)\cap G(s)}$ nemá σ-diskrétní zjemnění. Aplikací Věty 51 na

$$H = B(s) \cap G(s),\ \mathcal{A}_0 = \{A(t) : t \in 2^{\leq |s|}\},$$

nalezneme neprázdnou $\mathbf{\Pi}^0_2$ množinu $G \subseteq H \setminus \bigcup \mathcal{A}_0$ a $A \in \mathcal{A}$ splňující $\mathcal{A} \restriction_G$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelný a $A \cap G$ je reziduální v G. Poněvadž $A \in \mathcal{A}$, můžeme najít nerostoucí posloupnost množin $(F^j)_{j\in\omega}$ typu $\mathbf{\Sigma}^0_2$, že platí $A = \bigcap_{j\in\omega} F^j$. Volbou $F^0 = \ldots = F^{|s|+1} = X$ dosáhneme toho, že $G \subseteq F^{|s|+1}$. Dále nalezneme úplnou metriku τ na G, která je s ρ na G ekvivalentní. Pro $i \in \{0, 1\}$ položme

$$A(s\hat{\ }i) = A,\ F^j(s\hat{\ }i) = F^j, j \in \omega,\ G(s\hat{\ }i) = G,\ \rho(s\hat{\ }i) = \tau.$$

Nakonec není težké nalézt $B(s\hat{\ }0)$ a $B(s\hat{\ }1)$, aby byly podmínky (i)-(iii) splněny. Volbou $F^{|s|+1}$ je (viii) splněna. Podmínky (iv)-(vi) a (ix) je snadné ověřit a (vii) a (x) jsou prázdné.

Případ 2. Nechť $k < n$ a $s_{\langle n,l\rangle} = 0$ pro všechna $l < k$.
Položme $v = s \restriction_{\langle n-1,k\rangle}$. Zadefinujeme požadované objekty pro $s\hat{\ }i, i \in \{0, 1\}$ následovně

$$A(s\hat{\ }i) = A(v),\ F^j(s\hat{\ }i) = F^j(v), j \in \omega,\ G(s\hat{\ }i) = G(v),\ \rho(s\hat{\ }i) = \rho(v).$$

Tím okamžitě dostáváme platnost podmínek (iv), (v) a (ix), pokud v nich nahradíme s za $s\hat{\ }0$ a $s\hat{\ }1$.

Tvrzení 56. *Platí, že* $B(s) \cap G(s \restriction_{\langle n-1,n-1\rangle}) \neq \emptyset$ *a* $G(s \restriction_{\langle n-1,n-1\rangle}) \subseteq G(s)$.

Důkaz. Pokud $k = 0$, poté $|s| = \langle n-1, n-1\rangle$, a tedy $s \restriction_{\langle n-1,n-1\rangle} = s$. Tudíž

$$B(s) \cap G(s \restriction_{\langle n-1,n-1\rangle}) = B(s) \cap G(s) \neq \emptyset$$

podle předpokladu (ii). Inkluze $G(s \restriction_{\langle n-1,n-1\rangle}) \subseteq G(s)$ je zřejmá.

Pokud $k > 0$, poté $|s| = \langle n, k-1\rangle$ a podle (x) znova obdržíme, že $B(s) \cap G(s \restriction_{\langle n-1,n-1\rangle}) \neq \emptyset$. Díky podmínkám (vi) a (vii) dostáváme

$$G(s \restriction_{\langle n-1,n-1\rangle}) \subseteq G(s \restriction_{\langle n-1,k-1\rangle}) = G(s \restriction_{\langle n,k-1\rangle}) = G(s),$$

čímž je důkaz hotov.

□

Množina $A(s\hat{\ }1) \cap G(s\hat{\ }1)$ je reziduální v $G(s\hat{\ }1)$, protože jsme již ověřily podmínku (iv) pro $s\hat{\ }1$. Množina $F^{|s|+1}(s\hat{\ }1)$ je typu $\mathbf{\Sigma}^0_2$ a z definice obsahuje $A(s\hat{\ }1)$. Poněvadž $G(s\hat{\ }1) = G(v) \supseteq G(s \restriction_{\langle n-1,n-1\rangle})$ (podle (vi)), dostáváme z Tvrzení 56 vztah $B(s) \cap G(s\hat{\ }1) \neq \emptyset$. Podle Baireovy věty o kategoriích existuje otevřená množina $V \subseteq B(s)$ splňující $\emptyset \neq V \cap G(s\hat{\ }1) \subseteq F^{|s|+1}(s\hat{\ }1)$.

Díky Tvrzení 56 máme $B(s) \cap G(s \restriction_{\langle n-1,n-1\rangle}) \neq \emptyset$. Podle podmínky (ix), restrikce systému $\mathcal{A}$ na $B(s) \cap G(s \restriction_{\langle n-1,n-1\rangle})$ a $V \cap G(s\hat{\ }1)$ je nikde σ-diskrétně zjemnitelná. Tudíž můžeme zvolit různé středy pro $B(s\hat{\ }0)$ v $B(s) \cap G(s \restriction_{\langle n-1,n-1\rangle})$ a $B(s\hat{\ }1)$ v $V \cap G(s\hat{\ }1)$. Poloměry koulí volíme dostatečně malé, aby $B(s\hat{\ }1) \subseteq V$ a podmínky (i) a (iii) byly splněny.

Platnost podmínek (vii), (viii) a (x) pro $s\hat{\ }0$ a $s\hat{\ }1$ ihned plyne z konstrukce. Zbývá ověřit (ii) a (iv). Protože $G(s\hat{\ }0) = G(v) \supseteq G(s \restriction_{\langle n-1,n-1\rangle})$, platí $G(s\hat{\ }0) \cap B(s\hat{\ }0) \neq \emptyset$. Dále zřejmě platí $G(s\hat{\ }1) \cap B(s\hat{\ }1) \neq \emptyset$, čímž jsme ověřili (ii).

Nyní k podmínce (vi). Pokud $k = 0$, není co dokazovat. Pokud $k > 0$, použijeme indukční předpoklad (vii) pro $\langle n-1, k-1\rangle$, abychom dostali

$$G(s\hat{\ }i) = G(v) \subseteq G(s \restriction_{\langle n-1,k-1\rangle}) = G(s),$$

což dokončuje konstrukci požadovaných objektů.

Teď zadefinujeme spojité zobrazení $\phi \colon 2^\omega \to X$ předpisem

$$\phi(v) = \bigcap_{p\in\omega} B(v \restriction_p).$$

Poněvadž prostor X je úplný, zobrazení ϕ je díky podmínkám (i) a (iii) dobře definované a není těžké ověřit, že i spojité. Položme

$$\mathbb{P} = \{v \in 2^\omega : \exists k \in \omega, (v_{\langle n,k\rangle})_{n\geq k} \text{ není nakonec nula}\}$$

Tvrzení 57. $\mathbb{P} = \phi^{-1}(\bigcup\{A(s) : s \in 2^{<\omega}\})$.

Důkazem tohoto Tvrzení dokončíme důkaz původní věty, neboť obdržíme spor. Vskutku, množina $\bigcup\{A(s) : s \in 2^{<\omega}\}$ je typu $\mathbf{\Pi}^0_3$ kvůli $\mathbf{\Pi}^0_3$-aditivitě systému $\mathcal{A}$, a tedy $\phi^{-1}(\bigcup\{A(s) : s \in 2^{<\omega}\})$ je typu $\mathbf{\Pi}^0_3$. Ale na druhou stranu, podle Lemmatu 54 je $\mathbb{P}$ pravá $\mathbf{\Sigma}^0_3$ množina, čímž dostáváme spor.

Důkaz. Zvolme pevné $v \in \mathbb{P}$. Nalezneme nejmenší $k \in \omega$ takové, že $(v_{\langle n,k\rangle})_{n\geq k}$ není nakonec nula. Poté existuje $q \in \omega$ splňující $v_{\langle n,j\rangle} = 0$ pro všechna $n \geq q$ a $j < k$. Podle předpokladu (vii) máme množinu $A \in \mathcal{A}$, nerostoucí posloupnost $(F^j)_{j\in\omega}$, množinu G typu $\mathbf{\Sigma}^0_2$ a metriku d na G splňující

$$A(v \restriction_{\langle n,k\rangle}) = A,\ F^j(v \restriction_{\langle n,k\rangle}) = F^j,\ G(v \restriction_{\langle n,k\rangle}) = G,\ \rho(v \restriction_{\langle n,k\rangle}) = d$$

pro všechna $n \geq q$. Posloupnost $(\overline{B(v \restriction_{\langle n,k\rangle})} \cap G)_{n\geq q}$ je nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin v G splňující

$$\operatorname{diam}_d(\overline{B(v \restriction_{\langle n,k\rangle})} \cap G) \to 0$$

pro $n \to \infty$, což nám společně s úplností metriky d dává $\phi(v) \in G$. Protože posloupnost $(v_{\langle n,k\rangle})_{n\geq q}$ obsahuje 1 nekonečně krát, platí

$$\phi(v) \in G \cap B(v \restriction_{\langle n,k\rangle}) \subseteq F^{\langle n,k\rangle}$$

pro nekonečně mnoho n podle (viii). Čímž dostáváme $\phi(v) \in A \subseteq \bigcup\{A(s) : s \in 2^{<\omega}\}$.

Nyní předpokládejme, že $v \in 2^\omega \setminus \mathbb{P}$. Vezměme si libovolné $t \in 2^\omega \setminus \emptyset$. Nalezneme $k, n \in \omega$, $k \leq n$ splňující $|t| = \langle n, k\rangle$. Znova existuje $q \in \omega$, $q > n$, že platí $v \restriction_{\langle m,j\rangle} = 0$ pro všechna $m \geq q$ a $j \leq n+1$. Jako v předešlém případě dostaneme vztah $\phi(v) \in G(v \restriction_{\langle q,n+1\rangle})$. Podle předpokladu (v) poté platí

$$G(v \restriction_{\langle q,n+1\rangle}) \cap \{A(u) : u \in 2^{<\langle n+1,n+1\rangle}\} = \emptyset,$$

čímž obdržíme $\phi(v) \notin A(t)$, protože $\langle n, k\rangle < \langle n+1, n+1\rangle$. Z rovnosti výše také plyne, že $\phi(v) \notin A(\emptyset)$. Tudíž jsme dokázali

$$\phi(v) \notin \bigcup\{A(s) : s \in 2^{<\omega}\},$$

což byl obsah Tvrzení 57.

□

□

Definice 58. Nechť X je prostor. Poté řekneme, že je *absolutně suslinovský*, jestliže X je homeomorfní suslinovské podmnožině úplného metrického prostoru.

Definice 59. Řekneme, že systém množin $\mathcal{A}$ je *σ-diskrétně rozložitelný*, pokud pro každou $A \in \mathcal{A}$ existují množiny $A_n, n \in \omega$, že platí $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ a systém $\{A_n : A \in \mathcal{A}\}$ je diskrétní pro každé $n \in \omega$.

Věta 60. *Nechť X je prostor. Poté jsou následující výroky ekvivalentní*

(i) *prostor X je absolutně suslinovský,*

(ii) *existuje úplný metrický prostor Y a spojité zobrazení $f : Y \to X$, které je na a zachovává σ-diskrétně rozložitelné systémy.*

Důkaz věty plyne z [10, Theorem 1.1] a [11, Theorem 4.1].

Věta 61. *Nechť $\mathcal{A}$ je $\mathbf{\Pi}^0_3$-aditivní systém množin v absolutně suslinovském prostoru X. Nechť platí jedna z následujících podmínek*

(i) *$\mathcal{A}$ je bodově spočetný,*

(ii) *každá parciální selektorová množina $\mathcal{A}$ je σ-diskrétní.*

Poté má systém $\mathcal{A}$ σ-diskrétní zjemnění.

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je $\mathbf{\Pi}^0_3$-aditivní systém množin v absolutně suslinovském prostoru X. Nahrazením X za $\bigcup \mathcal{A}$ můžeme předpokládat, že $\mathcal{A}$ pokrývá X. Podle Věty 60 existuje úplný metrický prostor Y a spojité zobrazení $f\colon Y \to X$, které je na a zachovává σ-diskrétně rozložitelné systémy. Poté $\mathcal{B} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ je $\mathbf{\Pi}^0_3$-aditivní systém pokrývající Y, který dědí vlastnost (i) nebo (ii) z Věty 61 od $\mathcal{A}$.

Vskutku, bodová spočetnost je zřejmě zděděna z $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$. V případě druhé vlastnosti, nechť B je parciální selektorová množina $\mathcal{B}$. Poté je $f(B)$ parciální selektorová množina $\mathcal{A}$, a je tedy σ-diskrétní. Protože $B \subseteq f^{-1}(f(B))$, snadno z toho plyne, že B je také σ-diskrétní.

Podle Věty 55, systém $\mathcal{B}$ má σ-diskrétní zjemnění. Jelikož f zachovává σ-diskrétně rozložitelné systémy, $\mathcal{A}$ má σ-diskrétní zjemnění taky. Čímž je důkaz hotov.

$\square$

4. Prostory s ω_1-vahou

V předchozích kapitolách jsme se soustředili na bodově spočetné F_σ-aditivní, G_δ-aditivní a $F_{\sigma\delta}$-aditivní systémy v obecných úplných prostorech. Nyní se podíváme na případ, kdy máme $Borel(X)$-aditivní systém, ale na váhu prostoru klademe omezující podmínku. I v tomto případě ukážeme, že takový systém má σ-diskrétní zjemnění. Důkaz tohoto výsledku a pomocných vět či lemmat bude vycházet ze článku [6].

Definice 62. Nechť $C \subseteq \omega_1$. Poté řekneme, že

(i) množina C je *neomezená*, pokud pro libovolné $\alpha < \omega_1$ existuje $\beta \in C$ splňující $\alpha < \beta$,

(ii) množina C je *uzavřená*, jestliže pro libovolné $\alpha < \omega_1$ platí, že pokud $\sup(C \cap \alpha) = \alpha \neq 0$, poté $\alpha \in C$.

Definice 63. Nechť $S \subseteq \omega_1$. Poté řekneme, že množina S je *stacionární*, pokud pro každou neomezenou uzavřenou podmnožinu $C \subseteq \omega_1$ platí $S \cap C \neq \emptyset$.

Poznámka. Není těžké si rozmyslet, že stacionární nebo neomezené množiny musí být nespočetné. Dále pokud $S \subseteq \omega_1$ je stacionární a $C \subseteq \omega_1$ je uzavřená neomezená, poté $S \cap C$ je stacionární.

Lemma 64 (Pressing down lemma)**.** *Nechť S je stacionární podmnožina ω_1 a zobrazení $f\colon S \to \omega_1$ je regresivní (což znamená, $f(\alpha) < \alpha$ pro každé $\alpha \in S$, $\alpha \neq 0$). Poté existuje γ a stacionární množina $S_0 \subseteq S$ splňující $f(\alpha) = \gamma$ pro každé $\alpha \in S_0$.*

Poznámka. Předchozí věta a definice se dají zavést i pro jiné kardinály, ale pro účely této kapitoly zde uvádíme pouze verzi s ω_1, kterou budeme potřebovat.

Věta 65. *Nechť X je množina a $\mathcal{B}$ je σ-algebra podmnožin X. Nechť $\{A_\xi\}_{\xi\in I}$ je $\mathcal{B}$-aditivní systém podmnožin X, kde $|I| \leq c$. Poté platí*

$$\bigcup_{\xi\in I}(A_\xi \setminus \bigcup_{\eta\neq\xi} A_\eta) \in \mathcal{B}$$

a systém $\{A_\xi \setminus \bigcup_{\eta\neq\xi} A_\eta\}_{\xi\in I}$ je $\mathcal{B}$-aditivní.

Důkaz. Označme $H = \bigcup_{\xi\in I}(A_\xi \setminus \bigcup_{\eta\neq\xi} A_\eta)$. Podle předpokladů $|I| \leq c$, a můžeme tedy sestrojit prosté zobrazení $\phi\colon I \to \mathcal{P}(\omega)$. Zadefinujme

$$G = (\bigcup_{\xi\in I} A_\xi) \setminus \bigcup_{n\in\omega}(\bigcup\{A_\xi : n \in \phi(\xi)\} \cap \bigcup\{A_\xi : n \notin \phi(\xi)\}).$$

Protože je $\mathcal{B}$ σ-algebra a systém $\{A_\xi\}_{\xi\in I}$ je $\mathcal{B}$-aditivní, zřejmě $G \in \mathcal{B}$. K dokončení důkazu první části nám stačí ukázat, že $H = G$.

<u>$H \subseteq G$</u>
Nechť $x \in H$. Poté existuje $\alpha \in I$ splňující $x \in A_\alpha \setminus \bigcup_{\xi\neq\alpha} A_\xi$. Poté zřejmě $x \in$

$\bigcup_{\xi \in I} A_\xi$. Stačí nám ukázat, že $x \notin \bigcup_{n \in \omega}(\bigcup\{A_\xi : n \in \phi(\xi)\} \cap \bigcup\{A_\xi : n \notin \phi(\xi)\})$. Nechť tam pro spor leží. Existuje tedy $\beta, \gamma \in I$ a $k \in \omega$, že $x \in A_\beta \cap A_\gamma$, $k \in \phi(\beta)$ a $k \notin \phi(\gamma)$. Poté z prostoty zobrazení ϕ platí $\phi(\beta) \neq \phi(\gamma)$ a zároveň má platit $x \in A_\alpha \setminus \bigcup_{\xi \neq \alpha} A_\xi$. Čímž dostáváme spor.

$\underline{G \subseteq H}$
Nechť $x \in G$. Poté existuje $\alpha \in I$ splňující $x \in A_\alpha$. Zřejmě stačí ukázat, že $x \notin \bigcup_{\xi \neq \alpha} A_\xi$. Budeme postupovat sporem. Nechť $x \in A_\beta$ pro nějaké $\beta \neq \alpha$. Poté z prostoty zobrazení ϕ existuje $k \in \omega$ splňující $k \in \phi(\alpha)$ a $k \notin \phi(\beta)$. Poté ale $x \notin G$, čímž dostáváme spor.

Pro důkaz druhé části si vezměme libovolnou $J \subseteq I$. Dostáváme

$$\bigcup_{\xi \in J}(A_\xi \setminus \bigcup_{\eta \neq \xi} A_\eta) = H \cap \bigcup_{\xi \in J} A_\xi \in \mathcal{B}.$$

Čímž je důkaz dokončen.

□

Věta 66. *Nechť X je množina a $\mathcal{B}$ je σ-algebra podmnožin X. Předpokládejme, že každý disjunktní $\mathcal{B}$-aditivní systém má mohutnost menší než κ, kde $\omega < \kappa \leq c$. Nechť $\mathcal{A}$ je bodově spočetný $\mathcal{B}$-aditivní systém. Poté platí*

(i) *existuje $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, pro který platí $|\mathcal{A}_0| < \kappa$ a $\bigcup \mathcal{A}_0 = \bigcup \mathcal{A}$,*

(ii) *$|\mathcal{A}| \leq \kappa$ a pokud $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega_1$, poté $|\mathcal{A}| < \kappa$.*

Důkaz.
<u>(i)</u>
Budeme postupovat sporem. Pomocí transfinitní matematické indukce zkontruujeme pro každé $\alpha < \kappa$ bod $x_\alpha \in X$ a podsystém $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ splňující

(A) $x_\alpha \notin \bigcup(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta)$,

(B) $|\mathcal{A}_\alpha| \leq \omega$.

$\underline{\alpha = 0}$
Volíme $x_0 \in X$ libovolné a $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} : x_0 \in A\}$.

<u>Indukční krok</u>
Nechť jsou požadované objekty zadefinovány pro všechny $\beta < \alpha$. Protože

$$\left|\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta\right| < \kappa,$$

můžeme zvolit $x_\alpha \in \bigcup(\mathcal{A}) \setminus \bigcup(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta)$. Nyní položme $\mathcal{A}_\alpha = \{A \in \mathcal{A} : x_\alpha \in A\}$. Tím je konstrukce dokončena.

Nyní vezměme pro každé $\alpha < \kappa$ množinu $A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ a uvědomme si, že systém

$$\{A_\alpha \setminus \bigcup_{\beta\neq\alpha} A_\beta : \alpha < \kappa\}$$

je disjunktní, sestává se z neprázdných množin a má mohutnost κ. Ale podle Věty 65 je $\mathcal{B}$-aditivní, což je spor s předpokladem.

(ii)
Důkaz provedeme opět sporem. Položme $\lambda = \kappa$, pokud $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega_1$, nebo $\lambda = \kappa^+$, pokud $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \omega_1$. Předpokládejme, že $|\mathcal{A}| \geq \lambda$. Pomocí transfinitní matematické indukce zkonstruujeme pro každé $\alpha < \omega_1$ podsystémy $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ splňující

(A) $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta$,

(B) $\bigcup \mathcal{A}_\alpha = \bigcup(\mathcal{A} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta)$,

(C) $|\mathcal{A}_\alpha| < \kappa$.

$\alpha = 0$
Podle (i) můžeme zvolit systém $\mathcal{A}_0$, který splňuje $|\mathcal{A}_0| < \kappa$ a pokrývá $\bigcup \mathcal{A}$.

Indukční krok
Nechť je požadovaný objekt zadefinován pro všechny $\beta < \alpha$. Použijeme (i) na systém $\mathcal{A} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta$. Obdržíme systém $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta$ splňující

$$\bigcup \mathcal{A}_\alpha = \bigcup(\mathcal{A} \setminus \textstyle\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{A}_\beta),$$
$$|\mathcal{A}_\alpha| < \kappa.$$

Tím je konstrukce dokončena.

Nyní $|\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha| < \lambda$, tudíž existuje neprázdná množina $B \in \mathcal{A} \setminus \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{A}_\alpha$. Zvolme $x \in B$ libovolně. Poté $\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ protne každý systém $\mathcal{A}_\alpha$, a je tedy nespočetný. Což je ale spor s bodovou spočetností $\mathcal{A}$.

□

Definice 67. Nechť X je topologický prostor. Poté řekneme, že je *polský*, pokud je separabilní a existuje na něm kompatibilní úplná metrika.

Definice 68. Nechť X je polský prostor. Pro každé ordinální číslo $1 \leq \xi < \omega$ definujeme systémy množin $\mathbf{\Sigma}^1_\xi(X)$, $\mathbf{\Pi}^1_\xi(X)$ a $\mathbf{\Delta}^1_\xi(X)$ induktivně takto

- $\mathbf{\Sigma}^1_1(X) = \{A \subseteq X : A \text{ je analytická v } X\}$,
- $\mathbf{\Sigma}^1_{\xi+1}(X) = \{A \subseteq X : \text{existuje polský prostor Y a množina } C \in \mathbf{\Pi}^1_\xi(X \times Y)$ splňující $A = \{x \in X : \exists y \in Y, (x, y) \in C\}\}$,
- $\mathbf{\Pi}^1_\xi(X) = \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathbf{\Sigma}^1_\xi(X)\}$,
- $\mathbf{\Delta}^1_\xi(X) = \mathbf{\Sigma}^1_\xi(X) \cap \mathbf{\Pi}^1_\xi(X)$.

Množinu A nazveme *projektivní* v X, pokud $A \in \mathbf{\Sigma}^1_\xi(X)$ pro nějaké ξ.

Poznámka. Pokud bude zřejmé, v jakém prostoru pracujeme, budeme psát jenom $\mathbf{\Sigma}^1_\xi$, $\mathbf{\Pi}^1_\xi$ a $\mathbf{\Delta}^1_\xi$.

Věta 69. *Nechť X je polský prostor a $\mathcal{A}$ je bodově spočetný $S\mathcal{F}(X)$-aditivní systém podmnožin X. Poté platí*

(*A*) $|\mathcal{A}| \leq \omega_1$,

(*B*) *alespoň jeden z výroků (i) nebo (ii) je pravdivý*

- (*i*) *existuje spočetný podsystém $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ splňující $\bigcup \mathcal{A}_0 = \bigcup \mathcal{A}$,*
- (*ii*) *existuje $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, že $\bigcup \mathcal{B}$ není borelovská množina.*

Důkaz.
(A)
Systém $\mathcal{A}$ je zřejmě $\mathbf{\Sigma}$-aditivní, kde $\mathbf{\Sigma}$ je σ-algebra množin typu $\mathbf{\Delta}^1_2(X)$. Ukážeme, že každý disjunktní $\mathbf{\Sigma}$-aditivní systém má mohutnost menší než ω_2. Poté aplikací Věty 66 s $\kappa = \omega_2$ dostaneme, že $|\mathcal{A}| \leq \omega_1$.

Budeme postupovat sporem. Nechť $\mathcal{B}$ je disjunktní $\mathbf{\Sigma}$-aditivní systém kardinality ω_2. Poté každá funkce $g\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ odpovídá $\mathbf{\Sigma}$-měřitelné funkci $f\colon \bigcup \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = g(B)$ kdykoli $x \in B \in \mathcal{B}$. Nyní, graf funkce f je množina typu $\mathbf{\Sigma}^1_2(X \times \mathbb{R})$, a tedy $f(\bigcup \mathcal{B})$ je množina typu $\mathbf{\Sigma}^1_2(\mathbb{R})$, a tedy i $g(\mathcal{B})$. Tím dostáváme, že každá podmnožina $\mathbb{R}$, jejíž mohutnost je menší nebo rovna ω_2, je typu $\mathbf{\Sigma}^1_2(\mathbb{R})$. Což ale není možné, protože pokud $c \leq \omega_2$, poté existuje množina kardinality $c \leq \omega_2$, která není projektivní, anebo pokud $c > \omega_2$, poté žádná množina kardinality ω_2 nemůže být typu $\mathbf{\Sigma}^1_2$, protože množiny tohoto typu mohou být vyjádřeny jako sjednocení ω_1 borelovských množin, a žádná borelovská množina není kardinality ω_2, pokud $\omega_2 < c$.

(B)
Nechť $\bigcup \mathcal{A}_0 \neq \bigcup \mathcal{A}$ pro každý spočetný podsystém $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$. Předpokládejme, že systém $\mathcal{A}$ je $Borel(X)$-aditivní. Můžeme tedy aplikovat Větu 66 s $\kappa = \omega_1$ k obdržení nespočetného disjunktního $Borel(X)$-aditivního systému. Ale pomocí stejné metody jako v (A) bychom dostali, že každá podmnožina $\mathbb{R}$ kardinality ω_1 je analytická, což zřejmě není pravda. Tudíž $\mathcal{A}$ není $Borel(X)$-aditivní.

□

Věta 70. *Nechť X je prostor a $\mathcal{A}$ je systém podmnožin X. Poté je σ-diskrétně rozložitelný právě tehdy, když existuje bodově spočetný systém otevřených množin $\{G_A : A \in \mathcal{A}\}$ splňujíci $A \subseteq G_A$ pro každou $A \in \mathcal{A}$.*

Důkaz.
$\Rightarrow$
Nechť $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\omega}\{A_n : A \in \mathcal{A}\}$ je systém množin, že platí

$$A = \bigcup_{n\in\omega} A_n \text{ pro každou } A \in \mathcal{A}$$

a $\mathcal{B}_n = \{A_n : A \in \mathcal{A}\}$ je diskrétní pro každé $n \in \omega$. Poté můžeme pro každé $n \in \omega$ nalézt disjunktní systém otevřených množin $\mathcal{G}_n = \{G_B : B \in \mathcal{B}_n\}$, že platí $B \subseteq G_B$ pro každou $B \in \mathcal{B}$. Položme

$$G_A = \bigcup_{n\in\omega} G_{A_n} \text{ pro každé } A \in \mathcal{A}.$$

Zřejmě platí, že $A \subseteq G_A$ pro každé $A \in \mathcal{A}$. Stačí tedy ukázat bodovou spočetnost systému $\{G_A : A \in \mathcal{A}\}$. Zvolme $x \in X$ pevné splňující $x \in G_C \cap G_D$ pro nějaké $C \neq D \in \mathcal{A}$. Nalezneme $n, m \in \omega$, že platí $x \in G_{C_n} \cap G_{D_m}$. Protože je systém $\{G_B : B \in \mathcal{B}_k\}$ disjunktní pro každé $k \in \omega$, obdržíme $n \neq m$. Protože je ω spočetná, je tím důkaz hotov.

$\Leftarrow$
Nechť $\mathcal{A}$ je systém a $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in [0,\kappa)\}$ je jeho očíslování. Nechť existuje bodově spočetný systém otevřených množin $\{G_\alpha : \alpha \in [0,\kappa)\}$ splňující $A_\alpha \subseteq G_\alpha$ pro každé $\alpha \in [0,\kappa)$. Podle Věty 35 můžeme najít bázi otevřených množin $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{U}_n$, kde $\mathcal{U}_n$ jsou diskrétní systémy. Můžeme předpokládat, že $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Pro každou množinu $U \in \mathcal{U}$ položme $I(U) = \{\alpha \in [0,\kappa) : U \subseteq G_\alpha\}$. Množina $I(U)$ je nejvýše spočetná, můžeme jí tedy přeznačit jako $(K(U,j))_{j\in J(U)}$, kde $J(U) \subseteq \omega$. Pro $n, j \in \omega$ položme

$$A_\alpha^{n,j} = A_\alpha \cap \bigcup\{U \in \mathcal{U}_n : j \in J(U), K(U,j) = \alpha\}.$$

Poté vidíme, že pro pevné $n, j \in \omega$ každá množina $U \in \mathcal{U}_n$ protne nejvýše jednu množinu $A_\alpha^{n,j}$, a tedy systém $\{A_\alpha^{n,j} : \alpha \in [0,\kappa)\}$ je diskrétní. Protože platí

$$\bigcup_{\alpha\in[0,\kappa)} \left(\bigcup_{n,j\in\omega} A_\alpha^{n,j}\right) = \bigcup_{\alpha\in[0,\kappa)} (A_\alpha \cap G_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in[0,\kappa)} A_\alpha,$$

je $\{A_\alpha^{n,j} : n, j \in \omega, \alpha \in [0,\kappa)\}$ svědkem σ-diskrétní rozložitelnosti systému $\mathcal{A}$.

□

Věta 71. *Nechť X je úplný prostor a $\mathcal{A}$ je bodově konečný $\mathcal{SF}(X)$-aditivní systém podmnožin X. Poté je σ-diskrétně rozložitelný.*

Důkaz věty lze najít v [6, Theorem 3H].

Věta 72. *Nechť X je prostor a $\mathcal{A}$ je systém podmnožin X. Poté má σ-diskrétní zjemnění právě tehdy, když existuje bodově spočetný systém otevřených množin $\{G_A : A \in \mathcal{A}\}$ splňující*

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (A \cap G_A).$$

Důkaz.

$\Rightarrow$

Nechť $\mathcal{A}$ je systém, který má σ-diskrétní zjemnění $\mathcal{R} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{R}_n$, kde systémy $\mathcal{R}_n$ jsou diskrétní pro každé $n \in \omega$. Stačí nám nalézt podsystém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ splňující

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{B}}(A \cap G_A),$$

jinak bychom volili $G_A = \emptyset$ pro $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Pro každé $n \in \omega$ můžeme nalézt disjunktní systém otevřených množin $\mathcal{G}_n = \{G_R : R \in \mathcal{R}_n\}$, že platí $R \subseteq G_R$ pro každou $R \in \mathcal{R}_n$. Dále pro každou $R \in \mathcal{R}$ existuje $A_R \in \mathcal{A}$ splňující $R \subseteq A_R$. Poté zřejmě platí, že

$$R \subseteq G_R \cap A_R \subseteq A_R. \tag{4.1}$$

Označme $\mathcal{B} = \bigcup_{R\in\mathcal{R}}\{A_R\}$. Pro $A \in \mathcal{B}$ zadefinujme

$$G_A = \bigcup G_R, \text{ kde } R \in \mathcal{R} \text{ splňuje } A_R = A.$$

Poté $\{G_A : A \in \mathcal{B}\}$ je hledaný systém. Vztah $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{B}}(A \cap G_A)$ plyne z (4.1). Stačí tedy ukázat bodovou spočetnost. Tu ale snadno nahlédneme ze toho, že pro každé $n \in \omega$ je systém $\mathcal{G}_n$ disjunktní.

$\Leftarrow$

Nechť $\mathcal{A}$ je systém a $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in [0, \kappa)\}$ je jeho očíslování. Nechť existuje bodově spočetný systém otevřených množin $\{G_\alpha : \alpha \in [0, \kappa)\}$ splňující

$$\bigcup_{\alpha\in[0,\kappa)} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in[0,\kappa)} (A_\alpha \cap G_\alpha).$$

Podle Věty 35 můžeme najít bázi otevřených množin $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{U}_n$, kde $\mathcal{U}_n$ jsou diskrétní systémy. Můžeme předpokládat, že $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Pro každou množinu $U \in \mathcal{U}$ položme $I(U) = \{\alpha \in [0, \kappa) : U \subseteq G_\alpha\}$. Množina $I(U)$ je nejvýše spočetná, můžeme jí tedy přeznačit jako $(K(U, j))_{j\in J(U)}$, kde $J(U) \subseteq \omega$. Pro $n, j \in \omega$ položme

$$A^{n,j}_\alpha = A_\alpha \cap \bigcup\{U \in \mathcal{U}_n : j \in J(U), K(U, j) = \alpha\}.$$

Poté vidíme, že pro pevné $n, j \in \omega$ každá množina $U \in \mathcal{U}_n$ protne nejvýše jednu množinu $A^{n,j}_\alpha$, a tedy systém $\{A^{n,j}_\alpha : \alpha \in [0, \kappa)\}$ je diskrétní. Protože platí

$$\bigcup_{\alpha\in[0,\kappa)}(\bigcup_{n,j\in\omega} A^{n,j}_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in[0,\kappa)}(A_\alpha \cap G_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in[0,\kappa)} A_\alpha,$$

je $\{A^{n,j}_\alpha : n, j \in \omega, \alpha \in [0, \kappa)\}$ σ-diskrétní zjemnění systému $\mathcal{A}$.

$\square$

Věta 73. *Nechť X je úplný prostor, který splňuje $\omega(X) \leq \omega_1$, a $\mathcal{A}$ je bodově spočetný Borel(X)-aditivní systém podmnožin X. Poté $\mathcal{A}$ má σ-diskrétní zjemnění.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je systém splňující předpoklady a $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in [0, \kappa)\}$ je jeho očíslování. Označme $\{x_\xi : \xi < \omega_1\}$ hustou podmnožinu X a položme

$$X_\xi = \overline{\{x_\eta : \eta < \xi\}},$$
$$Y_\xi = X_\xi \cap \bigcup_{\alpha \in [0,\kappa)} A_\alpha \text{ pro každé } \xi < \omega_1.$$

Nyní pomocí transfinitní indukce zkonstruujeme pro každé $\xi < \omega_1$ bod $z_\xi \in X$, borelovskou množinu F_ξ a spočetné množiny $I(\xi), J(\xi)$, že platí

(i) pokud $Y_\xi \not\subseteq \bigcup_{\eta<\xi} F_\xi$, poté

$$z_\xi \in Y_\xi \setminus \bigcup_{\eta<\xi} F_\xi,$$

jinak volíme $z_\xi = x_0$,

(ii) $I(\xi) \subseteq [0,\kappa)$, platí $Y_\xi \subseteq \bigcup_{\alpha \in I(\xi)} A_\alpha$ a $\{\alpha \in [0,\kappa) : z_\xi \in A_\alpha\} \subseteq I(\xi)$,

(iii) $J(\xi) = I(\xi) \setminus \bigcup_{\eta<\xi} I(\eta)$,

(iv) $F_\xi = \bigcup_{\alpha \in J(\xi)} A_\alpha$.

$\xi = 0$

Volme $z_0 = x_0$, $I(0) = \{\alpha \in [0,\kappa) : z_0 \in A_\alpha\}$, $J(0) = I(0)$ a $F(0) = \bigcup_{\alpha \in J(0)} A_\alpha$. Poté jsou zřejmě všechny podmínky (i) až (iv) splněny.

Indukční krok

Nechť jsou požadované objekty výše zadefinovány pro všechna $\eta < \xi$. Poté zvolme z_ξ požadovaným způsobem v (i). Protože je prostor X_ξ polský, systém $\{X_\xi \cap A_\alpha : \alpha \in [0,\kappa)\}$ je bodově spočetný, $Borel(X_\xi)$-aditivní a platí $Borel(X_\xi) \subseteq S\mathcal{F}(X_\xi)$, existuje podle Věty 69 spočetná podmnožina $I(\xi) \subseteq [0,\kappa)$ splňující $Y_\xi \subseteq \bigcup_{\alpha \in I(\xi)} A_\alpha$. Protože je množina $\{\alpha \in [0,\kappa) : z_\xi \in A_\alpha\}$ nejvýše spočetná, můžeme předpokládat, že $\{\alpha \in [0,\kappa) : z_\xi \in A_\alpha\} \subseteq I(\xi)$. Množiny $J(\xi)$ a F_ξ poté volíme požadovaným způsobem.

Položme

$$H_\xi = F_\xi \setminus \bigcup_{\eta \neq \xi} F_\eta,$$
$$D = \{\xi < \omega_1 : Y_\xi \not\subseteq \bigcup_{\eta<\xi} F_\eta\}.$$

Poté platí

(I) $\{J(\xi) : \xi < \omega_1\}$ je disjunktní systém spočetných podmnožin $[0,\kappa)$,

(II) $Y_\xi \subseteq \bigcup_{\eta \leq \xi} F_\eta$ pro každé $\xi < \omega_1$,

(III) pokud $\xi \in D$, poté $z_\xi \in H_\xi$.

Vlastnosti (I) a (II) plynou ihned z podmínek (i) až (iv). Pokud $\xi \in D$, poté $z_\xi \notin \bigcup_{\eta<\xi} F_\eta$ z podmínky (i), $z_\xi \in F_\xi$ z (i) až (iv) a $z_\xi \notin \bigcup_{\eta>\xi} F_\eta$ z podmínky (iv).

Systém $\{F_\xi : \xi < \omega_1\}$ je $Borel(X)$-aditivní, a tedy podle Věty 65 je $Borel(X)$-aditivní i disjunktní systém $\{H_\xi : \xi < \omega_1\}$. Podle Věty 71 je tedy σ-diskrétně rozložitelný a díky Větě 70 existuje bodově spočetný systém otevřených množin $\{U_\xi : \xi < \omega_1\}$ splňující $H_\xi \subseteq U_\xi$ pro každé $\xi < \omega_1$. Označme Ω množinu nenulových limitních spočetných ordinálů a zadefinujme zobrazení $\beta\colon D \to \omega_1$ následujícím předpisem

$$\beta(\xi) = \min\{\zeta : U_\xi \cap X_\zeta \neq \emptyset\}.$$

Zřejmě platí $\beta(\xi) \leq \xi$, protože $z_\xi \in H_\xi \cap X_\xi$. Na druhou stranu pro $\zeta \in \Omega$ platí

$$X_\zeta = \overline{\bigcup_{\eta<\zeta} X_\eta},$$

a tedy $\beta(\xi) < \xi$. Protože je systém $\{U_\xi : \xi < \omega_1\}$ bodově spočetný, každá množina X_ζ protne nanejvýš spočetně mnoho U_ξ, a tedy $\{\xi \in D : \beta(\xi) = \zeta\}$ je spočetná pro každé $\zeta < \omega_1$. Podle Lemmatu 64 není množina $D \cap \Omega$ stacionární. Protože je Ω uzavřená a neomezená, není množina D také stacionární.

Mějme tedy $C \subseteq \omega_1 \setminus D$, která je neomezená a uzavřená. Protože $X_0 = \emptyset$, můžeme předpokládat, že $0 \in C$. Zadefinujme si zobrazení $\gamma\colon \omega_1 \to C$ předpisem

$$\gamma(\xi) = \sup(C \cap \xi) \text{ pro každé } \xi < \omega_1.$$

Položme $V_\eta = X \setminus X_{\gamma(\eta)}$ pro $\eta < \omega_1$. Protože je $\gamma(C)$ nespočetná, je systém $\{V_\eta : \eta \in \omega_1\}$ bodově spočetný. Nyní ukážeme platnost vztahu

$$\bigcup_{\alpha\in[0,\kappa)} A_\alpha = \bigcup_{\eta<\omega_1} (V_\eta \cap F_\eta).$$

Inkluze $\supseteq$ je zřejmá. Pro opačnou inkluzi zvolme $x \in \bigcup_{\alpha\in[0,\kappa)} A_\alpha$. Nechť δ je $\min\{\zeta \in C : x \in X_\zeta\}$. Protože $C \cap D = \emptyset$, $Y_\delta \subseteq \bigcup_{\eta<\delta} F_\eta$ a existuje $\eta < \delta$ splňující $x \in F_\eta$. Nyní $\gamma(\eta) \leq \eta < \delta$, tudíž z definice minima $x \notin X_{\gamma(\eta)}$ a $x \in F_\eta \cap V_\eta$.

Nakonec zadefinujme systém otevřených množin $\{G_\alpha : \alpha \in [0,\kappa)\}$ následovně

$$G_\alpha = \begin{cases} V_\eta & \text{pokud } \alpha \in J(\eta),\\ \emptyset & \text{pokud } \alpha \in [0,\kappa) \setminus \bigcup_{\eta<\omega_1} J(\eta). \end{cases}$$

Protože je systém $\{V_\eta : \eta \in \omega_1\}$ bodově spočetný a každá $J(\eta)$ je spočetná, je $\{G_\alpha : \alpha \in [0,\kappa)\}$ také bodově spočetný a platí

$$\bigcup_{\alpha\in[0,\kappa)} (A_\alpha \cap G_\alpha) = \bigcup_{\eta<\omega_1} \bigcup_{\alpha\in J(\eta)} (A_\alpha \cap G_\alpha) = \bigcup_{\eta<\omega_1} (F_\eta \cap V_\eta) = \bigcup_{\alpha\in[0,\kappa)} A_\alpha.$$

Čímž je podle Věty 72 důkaz hotov.

□

5. Dodatečné axiomy

I když je v ZFC otázka, zda každý bodově spočetný $Borel(X)$-aditivní systém má σ-diskrétní zjemnění stále otevřená, za dodatečných axiomů na ní máme kladnou odpověď, a to dokonce i pro $S\mathcal{F}(X)$-aditivní systémy. V této kapitole shrneme ze článků [6], za jakých podmínek lze tyto výsledky obdržet. Budeme potřebovat tři následující axiomy. Pro první dva axiomy uvažujme, že $S \subseteq \omega_1$.

$\underline{\Diamond(\omega_1, S)}$
Existuje systém $\{L_\xi : \xi \in S\}$, že množina $\{\xi \in S : L \cap \xi = L_\xi\}$ je stacionární pro každou $L \subseteq \omega_1$.

$\underline{\forall S \Diamond(\omega_1, S)}$
$\Diamond(\omega_1, S)$ platí pro každou stacionární podmnožinu $S \subseteq \omega_1$.

K napsání třetího axiomu budeme potřebovat následující definici

Definice 74. Nechť C je množina a $\mathcal{A} \subseteq [C]^{\leq\omega}$. Poté nazveme systém $\mathcal{A}$ stacionární v $[C]^{\leq\omega}$, pokud pro každý systém $\mathcal{B} \subseteq [C]^{\leq\omega}$, který splňuje dvě následující podmínky

(i) $\mathcal{B}$ je kofinální s $[C]^{\leq\omega}$,

(ii) sjednocení rostoucí posloupnosti množin v $\mathcal{B}$ je jejím prvkem,

již platí, že $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

Poznámka. Pro kardinál κ uvažujeme na $[C]^{\leq\kappa}$ následující binární relaci

$$X, Y \in [C]^{\leq\kappa} : Y \leq X \iff Y \subseteq X.$$

$\underline{FIR}$
Nechť C je množina a máme systémy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ splňující

(i) $\mathcal{A} \subseteq [C]^{\leq\omega}$ je stacionární,

(ii) $\mathcal{B} \subseteq [C]^{\leq\omega_1}$ je kofinální s $[C]^{\leq\omega_1}$,

(iii) pokud je $\{B_\xi : \xi \in \omega_1\}$ rostoucí systém množin v $\mathcal{B}$ vzhledem k inkluzi, poté $\bigcup_{\xi<\omega_1} B_\xi \in \mathcal{B}$,

poté existuje $B \in \mathcal{B}$, že $\mathcal{A} \cap [B]^{\leq\omega}$ je stacionární systém v $[B]^{\leq\omega}$.

Nyní sepíšeme přehled výsledků.

Věta 75. $[\forall S \Diamond(\omega_1, S)]$
Nechť X je prostor, který splňuje $\omega(X) \leq \omega_1$, a $\mathcal{A}$ je bodově spočetný $S\mathcal{F}(X)$-aditivní systém podmnožin X. Poté $\mathcal{A}$ má σ-diskrétní zjemnění.

Věta 76. $[\forall S \Diamond(\omega_1, S) + FIR]$
Nechť X je prostor a $\mathcal{A}$ je bodově spočetný $S\mathcal{F}(X)$-aditivní systém podmnožin X. Poté $\mathcal{A}$ má σ-diskrétní zjemnnění.

Věta 77. $[\forall S \Diamond(\omega_1, S) + FIR]$
Nechť X je prostor a $\mathcal{A}$ je bodově konečný $S\mathcal{F}(X)$-aditivní systém podmnožin X. Poté je σ-diskrétně rozložitelný.

Důkazy výše napsaných vět lze nalézt v [6].

Seznam použité literatury

[1] J. Kaniewski and R. Pol. Borel-measurable selectors for compact-valued mappings in the non-separable case. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 23(10):1043–1050, 1975.

[2] Ryszard Engelking. *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from the Polish by the author.

[3] Jiří Spurný. G_δ-additive families in absolute Souslin spaces and Borel measurable selectors. *Topology Appl.*, 154(15):2779–2785, 2007.

[4] R. W. Hansell. F_σ-set covers of analytic spaces and first class selectors. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 96(2):365–371, 1986.

[5] A. H. Stone. Kernel constructions and Borel sets. *Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963), 58-70; errata, ibid.*, 107:558, 1963.

[6] D. H. Fremlin. Measure-additive coverings and measurable selectors. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 260:116, 1987.

[7] J. Spurný and M. Zelený. Additive families of low Borel classes and Borel measurable selectors. *Canad. Math. Bull.*, 54(1):180–192, 2011.

[8] R. Pol. Note on decompositions of metrizable spaces. I. *Fund. Math.*, 95(2):95–103, 1977.

[9] Roman Pol. Note on decompositions of metrizable spaces. II. *Fund. Math.*, 100(2):129–143, 1978.

[10] R. W. Hansell. Nonseparable analytic metric spaces and quotient maps. volume 85, pages 143–152. 1998. 8th Prague Topological Symposium on General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra (1996).

[11] R. W. Hansell. On characterizing non-separable analytic and extended Borel sets as types of continuous images. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 28:683–699, 1974.

[12] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.