MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Aneta Korcová

Výuka geometrické řady metodou CLIL s využitím německého jazyka

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky – Německý jazyk a literatura

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 27. 5. 2020 ....

Podpis autora

Na tomto místě chci poděkovat vedoucí práce, RNDr. Vlastě Moravcové, Ph.D., za odborné vedení, cenné rady a připomínky, které přispěly k vzniku této práce. Dále chci poděkovat Arcibiskupskému gymnáziu v Praze za možnost realizace vyučovacích hodin, zejména pak RNDr. Zdeňku Vavřínovi, CSc., a Mgr. Janě Ginzelové. Děkuji panu Stephanu Beyerovi z *Deutsche Schule Prag* za zapůjčení německé učebnice a své rodině za poskytnutí technického zázemí.

Název práce: Výuka geometrické řady metodou CLIL s využitím německého jazyka

Autor: Bc. Aneta Korcová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt:

Jádrem práce je realizace tří vyučovacích hodin matematiky vedených metodou CLIL, která integruje výuku nejazykového předmětu a cizího jazyka. Tématem vyučovacích hodin byla nekonečná geometrická řada a jako cizí jazyk byl zvolen jazyk německý. První část práce zavádí nejdůležitější definice a věty týkající se posloupností a geometrické řady. Jsou porovnány přístupy České republiky a dvou německy mluvících zemí, Rakouska a Německa, ve vztahu k výuce nekonečné geometrické řady. Dále jsou porovnány dostupné výukové materiály vybraných zemí a analyzovány aplikované vizualizované úlohy, které se v nich objevují. Ve druhé části je představena metoda CLIL a metodologie, podle níž byly vyučovací hodiny připravovány, realizovány a zpětně hodnoceny. Součástí práce je detailní analýza přípravy a průběhu vyučovacích hodin včetně reflexe. V přílohách jsou k dispozici použité výukové materiály a řada řešených úloh.

Klíčová slova: nekonečná geometrická řada, metoda CLIL, německý jazyk, posloupnost, fraktál

Title: Teaching geometric series through CLIL method with using of German language

Author: Bc. Aneta Korcová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The core of the thesis is the realization of three lessons of mathematics conducted in accordance with the CLIL method, which integrates the teaching a non-linguistic subject with foreign language teaching. The topic of the lessons was non-finite geometric series and the chosen foreign language was German. The first part of the thesis introduces key definitions and theorems concerning sequences and geometric series. Comparisons are drawn between approaches of the Czech Republic and two German-speaking countries, Austria and Germany, in relationship to the teaching non-finite geometric series. Furthermore, available teaching materials of the selected countries are compared and applied visualized problems which appear in them are analysed. In the second part, the CLIL teaching method is presented together with the methodology according to which the lessons were prepared, realized and subsequently assessed. To conclude, the thesis presents a detailed analysis of the preparation and progress of the lessons, including the reflection. The appendix comprises of the utilized teaching materials as well as a range of the solved problems.

Keywords: non-finite geometric series, CLIL method, German language, sequence, fractal

Obsah

Úvod

Matematika i cizí jazyky patří na středních školách k předmětům s největší časovou dotací. Jejich význam potvrzuje i to, že si čeští žáci musí povinně vybrat mezi matematikou a cizím jazykem při skládání státní maturitní zkoušky. V posledních letech celosvětově sílí trend posilování mezipředmětových vztahů a jedním ze zástupců těchto snah je i metoda CLIL (*Content language integrated learning*), která propojuje výuku cizího jazyka a nejazykových předmětů.

Tématem předložené diplomové práce je nekonečná geometrická řada. Ta není v České republice většinově vyučována v rámci běžné výuky matematiky na středních školách, ale žáci se s ní mohou setkat ve volitelných seminářích nebo na středních školách s rozšířenou výukou matematiky. Práce nabízí učitelům matematiky teoretický základ pro výuku nekonečné geometrické řady i více než dvě desítky aplikovaných vizualizovaných úloh, z nichž většina je řešena nebo je jejich řešení alespoň naznačeno. Součástí jsou také četné didaktické poznámky a komentáře k výuce nekonečné geometrické řady.

V rámci této práce autorka realizovala tři vyučovací hodiny matematiky vedené metodou CLIL na Arcibiskupském gymnáziu v Praze. Tématem vyučovacích hodin byla právě nekonečná geometrická řada s těžištěm v aplikovaných vizualizovaných úlohách, které jsou pro výuku v cizím jazyce zejména vhodné, neboť žákům rozšiřují slovní zásobu v oblasti geometrie. Jako cizí jazyk byl zvolen jazyk německý. Diplomová práce představuje proces přípravy vyučovacích hodin i jejich reflexi a může sloužit jako inspirace všem učitelům, kteří by metodu CLIL rádi použili ve výuce.

První kapitola obsahuje nejdůležitější definice a věty, které se týkají posloupností a řad. Některé věty jsou v textu dokázány, na ostatní důkazy je odkázáno do příslušné literatury.

Vyučovací hodiny vedené metodou CLIL realizované v rámci této práce integrovaly matematiku a německý jazyk. Proto práce nabízí srovnání přístupu k tématu nekonečná geometrická řada v České republice a dvou největších německy mluvících zemích: Německu a Rakousku. Druhá kapitola podává srovnání postavení tématu nekonečná geometrická řada v kurikulárních dokumentech uvedených zemí. Ve třetí kapitole analyzujeme zpracování tématu nekonečná geometrická řada ve třech vybraných českých učebnicích, v učebnici rakouské a německé. Přístupy výukových materiálů porovnáváme mezi sebou. Ve třetí kapitole nalezne čtenář také analýzu aplikovaných vizualizovaných úloh z vybraných učebnic.

Čtvrtá kapitola seznamuje čtenáře s metodou CLIL a porovnává, jak je tato metoda integrována do vzdělávacích systémů v České republice, Německu a Rakousku. Pátá kapitola představuje metodologii vedení hodin metodou CLIL, kterou jsme použili při přípravě, realizaci a zpětné reflexi realizovaných vyučovacích hodin.

Šestá kapitola je věnována samotné realizaci vyučovacích hodin vedených metodou CLIL. Je popsána příprava na vyučovací hodiny včetně podrobného časového plánu výuky. Dále je zaznamenán průběh vyučovacích hodin, který je následně zreflektován autorkou práce, zapojenými žáky i stálými vyučujícími matematiky a německého jazyka. Součástí této kapitoly jsou také řešené úlohy, které byly ve výuce použity.

V příloze A jsou k dispozici též vlastní výukové pracovní listy, které byly použity během realizace vyučovacích hodin. V příloze B je potom česko-německý slovníček matematických termínů, který měli žáci v hodině k dispozici. V příloze C nalezne čtenář některé řešené úlohy, které byly v práci zmíněny, ale z důvodů struktury a plynulosti textu nebyly ihned kompletně řešeny.

Diplomová práce obsahuje řadu obrázků, z nichž většina byla vytvořena autorkou práce. Primárně byl použit program GeoGebra, drobné úpravy byly provedeny v programu Adobe Photoshop 2020. Některé obrázky u úloh na principu fraktálů byly vygenerovány v programu Online MATH Tools.[1] Úlohy převzaté z německy psaných učebnic byly volně přeloženy autorkou práce.

[1]Tento program je volně dostupný z: https://onlinemathtools.com/

1 Geometrická posloupnost a řada – vlastnosti a související pojmy

V této kapitole zavedeme pojmy související s geometrickou posloupností a řadou. Uvedeme jejich nejdůležitější vlastnosti a dokážeme klíčová tvrzení. Výběr je koncipován jako přehled teoretických znalostí, které žák střední školy potřebuje mít pro řešení úloh na součet geometrické řady. Text je opatřen vlastními didaktickými poznámkami, které mají sloužit vyučujímu jako určité nasměrování. V této kapitole se opíráme o poznatky ze středoškolské učebnice (Odvárko, 2018) a z učebnice matematické analýzy (Brabec, Martan a Rozenský, 1985). Uvedené definice, věty a jejich důkazy jsou buď doslovně převzaty z uvedených zdrojů, většinou jsou však kompilátem obou těchto zdrojů či přeformulovány tak, aby vyhovovaly záměru textu. Díky přistupnějším formulacím středoškolské učebnice bylo čerpáno z větší části z ní. Věty, které nejsou v textu dokázány, jsou opatřeny odkazy na literaturu, kde čtenář tyto důkazy nalezne.

1.1 Posloupnost

Pokud se žáci již setkali s pojmem zobrazení (například v tématu funkcí), lze posloupnost reálných čísel zavést pomocí tohoto pojmu následujícím způsobem, jak je definována například u Brabce, Martana a Rozenského (1985: s. 58):

Definice 1.1.1. *Posloupnost reálných čísel* je zobrazení, jehož definičním oborem je množina všech přirozených čísel a oborem hodnot je podmnožina reálných čísel. Hodnotu, jež je přiřazena přirozenému číslu n označíme obecně a_n a nazveme ji *n-tým členem posloupnosti*. Posloupnost značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Teorie reálných posloupností je v podstatě zvláštním případem teorie reálných fukncí. Pokud tedy žáci pojem zobrazení neznají a nechceme výklad příliš komplikovat, můžeme využít jejich znalosti funkcí. Tak činí při definici pojmu posloupnosti Odvárko (2018: s. 9), který navíc rozlišuje *konečnou* a *nekonečnou* posloupnost:

Definice 1.1.2. Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel, se nazývá *nekonečná posloupnost.* Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $n \leq n_0$, kde n_0 je pevně dané přirozené číslo, se nazývá *konečná posloupnost*.

Rozlišení konečné a nekonečné posloupnosti je vhodné z didaktických důvodů. Žáci se nejprve budou učit vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti, což lze chápat jako součet členů konečné posloupnosti. Od představy konečné posloupnosti přechází poté k představě posloupnosti nekonečné. Tato představa může pomoci k lepšímu chápání symbolu nekončené řady, ke které se dostanou později. Vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti si mohou navíc dát do vztahu s vzorcem na výpočet součtu řady s kvocientem menším než 1. Látka tedy na sebe logicky navazuje a postupně jsou tak budovány představy o jednotlivých abstraktních pojmech a vztazích.

V souvislosti se zavedením pojmu posloupnost je nutné žáky seznámit i se dvěma způsoby jejího vyjádření:

- Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zadána *rekurentně*, jestliže je dáno prvních m členů posloupnosti a dále je k dispozici vzorec, pomocí něhož můžeme pro každé přirozené číslo n vypočítat člen a_{n+m} na základě znalosti předchozích členů.[1]

- Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zadána *vzorcem pro n-tý člen*, jestliže je obecný člen a_n zadán výrazem s proměnnou n.

Oba způsoby vyjádření je vhodné procvičit na příkladech.

1.2 Geometrická posloupnost

Geometrická posloupnost bývá obvykle zařazována do výuky jako druhý typ posloupnosti po posloupnosti aritmetické. Lze ji definovat například takto (Odvárko, 2018: s. 50):

Definice 1.2.1. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *geometrická*, právě když existuje reálné číslo q takové, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Číslo q se nazývá *kvocient* geometrické posloupnosti.

Po zavední pojmu pomocí této definice může vyučující žákům pokládat takové otázky, které mají za cíl objevit další vlastnosti a vztahy tohoto typu posloupnosti. Žáci mohou například odhalit, že pokud je první člen posloupnosti roven nule, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = 0$, nebo že pokud je kvocient roven nule, musí být každý člen posloupnosti s výjimkou prvního roven nule.

Z rekurentního vyjádření geometrické posloupnosti lze snadno vyjádřit kvocient

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Je třeba dovést žáky k tomu, aby si uvědomili, že takové vyjádření je korektní jen tehdy, jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí, že $a_n \neq 0$. Z toho plyne, že jestliže $q = 0$, pak nelze q tímto způsobem vyjádřit a toto vyjádření lze použít pouze pro nenulové q.

Vyjádření geometrické posloupnosti vzorcem pro n-tý člen může vyučující nechat žáky odvodit samostatně nebo ve skupinách a poté zkontrolovat v rámci společné diskuze. Odhalí-li správné vyjádření

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

[1] Nejčastěji je ve středoškolské matematice k dispozici první člen posloupnosti a vzorec pro člen a_{n+1}, setkáme se ale i s Fibonacciho posloupností, kde jsou dány první dva členy.

pro každé přirozené číslo n, nesmí žáci opomenout, že takové vyjádření je opět korektní pouze pro nenulové q.

Dalším důležitým vztahem souvisejícím s geometrickou posloupností je součet prvních n členů geometrické posloupnosti, který značíme s_n. Rozlišujeme dva případy, a sice když je kvocient roven jedné a když kvocient není roven jedné.

Většina žáků pravděpodobně dokáže samostatně odvodit vzorec pro výpočet s_n za předpokladu, že $q = 1$. Pak

$$s_n = na_1.$$

Vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti pro $q \neq 1$ odvodí učitel. Není ale nutné seznámit žáky s odvozením pouze formou výkladu. Je možné zvolit metodu řízené diskuze. S některými kroky – zejména úpravou výrazů – mohou žáci učiteli „pomoci“, jsou-li jím vedeni dobrým směrem. Uvedeme nyní tvrzení včetně důkazu:

Věta 1.2.1. Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem $q \neq 1$ platí:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Důkaz. Platí

$$s_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1}. \tag{1}$$

Rovnici (1) vynásobíme q a dostaneme

$$q \cdot s_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n. \tag{2}$$

Odečtením (1) od (2) získáváme

$$s_n \cdot (q - 1) = a_1 q^n - a_1. \tag{3}$$

Jelikož $q \neq 1$, můžeme rovnici (3) vydělit výrazem $q - 1$ a dostáváme

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

□

Pokud žáci znají důkaz matematickou indukcí, je možné jako další cvičení použít důkaz vztahu z věty 1.2.1 pomocí matematické indukce, což při dostatečném zopakování matematické indukce mohou žáci provést samostatně.

V souvislosti s geometrickou posloupností jsou do výuky obvykle zařazovány příklady z oblasti finanční matematiky jako například složené úročení. Zmínit lze i souvislost geometrické posloupnosti s exponenciální funkcí a na základě toho uvést některé vlastnosti geometrické posloupnosti, které shrneme v následujících tvrzeních. Podmínky pro jednotlivé vlastnosti mohou žáci objevit sami. Znění následujích vět je převzato od Odvárka (2018: s. 71–72), důkaz je vlastní.

Věta 1.2.2. Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q je *rostoucí* právě tehdy, když $a_1 > 0$, $q > 1$ nebo $a_1 < 0$, $0 < q < 1$.

Důkaz. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, jestliže pro všechna $n, m \in \mathbb{N}$ platí, že $n < m$ právě tehdy, když $a_n < a_m$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí, že $a_k = q^{k-1}a_1$. Nechť pro přirozená čísla n, m platí $n < m$. Pak platí $a_n < a_m$ právě tehdy, jestliže

$$q^{n-1}a_1 < q^{m-1}a_1. \tag{1}$$

Pokud $a_1 = 0$, pak nerovnost (1) neplatí. Pokud $a_1 > 0$, pak po vydělení nerovnosti členem a_1 musí platit

$$q^{n-1} < q^{m-1}. \tag{2}$$

Jelikož $n - 1 < m - 1$, musí být $q > 1$, aby nerovnost (2) platila. Pokud $a_1 < 0$, pak po vydělení nerovnosti členem a_1 musí platit

$$q^{n-1} > q^{m-1}. \tag{3}$$

Jelikož $n - 1 < m - 1$, musí být $0 < q < 1$, aby nerovnost (3) platila.

□

Věta 1.2.3. Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q je *klesající* právě tehdy, když $a_1 > 0$, $0 < q < 1$ nebo $a_1 < 0$, $q > 1$.

Věta 1.2.4. Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q je *konstantní* právě tehdy, když $q = 1$ nebo $a_1 = 0$, $q = 0$.

Věta 1.2.5. Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q je *omezená* právě tehdy, když $|q| \leq 1$ nebo $a_1 = 0$.

Věta 1.2.6. Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q je *zdola omezená* právě tehdy, když $a_1 > 0$, $q > 1$.

Věta 1.2.7. Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q je *shora omezená* právě tehdy, když $a_1 < 0$, $q > 1$.

Věta 1.2.8. Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q *není shora ani zdola omezená* právě tehdy, když $a_1 \neq 0$, $q < -1$.

Důkaz vět 1.2.3 až 1.2.8 bychom provedli analogicky důkazu věty 1.2.2.

1.3 Limita posloupnosti

Limitu posloupnosti obvykle definujeme následujícím způsobem (Brabec, Martan a Rozenský, 1985: s. 61).

Definice 1.3.1. Říkáme, že reálná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má *limitu* $a \in \mathbb{R}^*$, a píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, jestliže k libovolnému okolí $U(a)$ bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n \in U(a)$.[2]

Tato definice obvykle pokračuje tím, že je definováno, kdy daná posloupnost konverguje (jestliže $a \in \mathbb{R}$), diverguje (jestliže $a = \pm\infty$) a osciluje (jestliže limita posloupnosti neexistuje). Pro žáky střední školy by ovšem takto podaná definice mohla být nesrozumitelná, zejména pro neznalost pojmu okolí. Odvárko (2018: s. 79) proto tento pojem zavádí z jiné perspektivy. Nejprve definuje konvergentní posloupnost následujícím způsobem a číslo, ke kterému konverguje, nazve limitou posloupnosti.

Definice 1.3.2. Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je *konvergentní*, právě když existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Číslo a se nazývá *limita posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Divergentní posloupnost dále zjedonodušeně definuje jako takovou posloupnost, která není konvergentní, čímž zcela opomíjí možnost, že posloupnost žádnou limitu nemá a tedy *osciluje*. Odvárko (2018) tuto definici neuvádí hned v úvodu kapitoly o limitě posloupnosti. Nejprve buduje pomocí jednoduchého cvičení představu o pojmu limita (Odvárko, 2018: s. 75-78). Z této představy pak vychází i zmíněná definice, která po tomto cvičení již není pouze abstraktním výrokem, ale získává v představách žáků konkrétní obrysy. Uvedeme nyní ideu tohoto cvičení, které je vhodné zařadit jako motivační úlohu před zavedením pojmu limita posloupnosti.

Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{(-1)^n+n}{2n}$. Úkolem žáků je najít prvních šest členů posloupnosti a ty vyznačit jak v rovině v souřadnicové soustavě, tak na číselné ose. Z obou obrázků je patrné, že každý další člen posloupnosti je hodnotě $\frac{1}{2}$ blíže než ten předchozí. Tuto hodnotu žáci pravděpodobně sami z obrázku neodhalí, musí být sdělena učitelem. Dalším úkolem žáků je vypočítat absolutní hodnotu rozdílu každého z prvních šesti členů posloupnosti a jedné poloviny. Jelikož $a_6 = \frac{7}{12}$, $|a_6 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{12}$. Můžeme prohlásit, že rozdíl každého dalšího členu posloupnosti a jedné poloviny bude ještě menší než $\frac{1}{12}$? Intuitivně se to zdá pravděpodobné, ale je třeba to dokázat. Necháme tedy žáky vyjádřit absolutní hodnotu rozdílu obecného a_n a jedné poloviny. Dostanou výsledek $\frac{1}{2n}$. Nyní určí, pro jaká n je $\frac{1}{2n} < \frac{1}{12}$. Získají výsledek $n > 6$. Je tedy pravda, že každý následující člen posloupnosti po a_6 bude jedné polovině blíže než tento člen. Vybídneme žáky, aby místo jedné dvanáctiny zvolili jiné menší číslo a zjistili, pro jaká n bude rozdíl členu posloupnosti a_n a jedné poloviny menší než toto číslo. Žáci takovou hodnotu najdou. Můžeme jim zadat ještě menší číslo a opět hledat, pro jaká n bude rozdíl členu posloupnosti a_n a jedné poloviny menší než

[2] $\mathbb{R}^*$ značí sjednocení množiny všech reálnách čísel s ∞ a $-\infty$.

toto číslo. Tyto úvahy vedou k domněnce, že pro libovolně malé číslo ε vždy najdeme takové přirozené číslo n_0, že pro každé $n \geq n_0$ je $|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$. Vyřešením této nerovnice s neznámou n domněnku dokážeme:

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon$$

$$2n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Za n_0 pak zvolíme horní celou část čísla $\frac{1}{2\varepsilon}$. Po tomto úvodu je vhodné přejít k definici 1.3.2.

V souvislosti s limitou můžeme žáky seznámit i s následujícími větami, které možná nestihneme v rámci běžné výuky na gymnáziu z časových důvodů dokázat.

Věta 1.3.1. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.[3]

Věta 1.3.2. Každá konvergentní posloupnost je omezená.[4]

Věta 1.3.3. Má-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu, pak každá vybraná posloupnost $(a_{kn})_{n=1}^{\infty}$ má tutéž limitu.[5]

Dále v hodině pracujeme s větami o aritmetice limit, které je třeba procvičit na příkladech.[6] Zde se zastavíme u vět, které souvisí s geometrickou posloupností.

Při vyšetřování konvergence geometrických posloupností můžeme rozlišit několik případů podle hodnoty kvocientu q. Jednotlivé případy uvedeme v následujících větách a tvrzení dokážeme. Znění vět a jejich důkazy jsou kompilátem z Odvárka (2018: s. 91-92) a Brabce, Martana a Rozenského (1985: s. 67) a částečně vlastním dílem autorky práce.

Věta 1.3.4. Geometrická posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, kde $q > 1$, je divergentní.

Důkaz. Platí, že každá konvergentní posloupnost je omezená, viz věta 1.3.2. Jelikož $q > 1$ a $a_1 = q \neq 0$, z věty 1.2.5 víme, že posloupnost není omezená. Proto nemůže být konvergentní. Dále platí, že posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí. Nyní ukážeme, že je divergentní s využitím definice 1.3.1. Chceme dokázat, že limita posloupnosti $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ existuje a je rovna ∞. Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$, tedy pro libovolné okolí $U(\infty) = (K, \infty)$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí, že $q^n > K$, tedy $q^n \in (K, \infty)$, neboť posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ není omezená a je rostoucí. Podle definice 1.2.5 má tedy posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ limitu ∞ a je tedy divergentní.

□

[3] Důkaz viz Brabec, Martan a Rozenský (1985: s. 62).
[4] Důkaz viz Brabec, Martan a Rozenský (1985: s. 63).
[5] Důkaz viz Brabec, Martan a Rozenský (1985: s. 62).
[6] Jejich znění i s důkazy viz Brabec, Martan a Rozenský (1985: s. 63–64).

Věta 1.3.5. Geometrická posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, kde $q = 1$, je konvergentní a její limita je rovna 1.

Důkaz. Geometrická posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, kde $q = 1$, je konstantní, pro všechna přirozená čísla n má q^n hodnotu 1. Proto konverguje k číslu 1.

□

Věta 1.3.6. Geometrická posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, kde $q \leq -1$, není ani konvergentní, ani divergentní (osciluje).

Důkaz. Lze vybrat posloupnost se sudými indexy. Dostáváme posloupnost $(q^{2n})_{n=1}^{\infty}$. Z vlastnosti druhé mocniny plyne, že $q^{2n} = |q|^{2n}$. Dále lze vybrat posloupnost $(q^{2n-1})_{n=1}^{\infty}$, což je posloupnost s lichými indexy. Jelikož každý lichý člen posloupnosti je záporné číslo, platí $q^{2n-1} = -|q|^{2n-1}$. Obě tyto vybrané posloupnosti mají různé limity. To vede ke sporu s větou 1.3.3, a proto posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu, a tedy osciluje.

□

Věta 1.3.7. Geometrická posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, kde $|q| < 1$, je konvergentní a její limita je 0.

Důkaz. Chceme dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla n, kde $n \geq n_0$, je $|q^n - 0| < \varepsilon$, což odpovídá $|q|^n < \varepsilon$. Jestliže $q = 0$, pak uvedené platí. Abychom dokázali, že to platí i pro $q \neq 0$, využijeme logaritmování obou stran nerovnice. Dostaneme

$$\log |q|^n < \log \varepsilon.$$

Obě strany nerovnice byly kladné, proto tyto logaritmy existují. Jelikož dekadický logaritmus je rostoucí funkce, znaménko nerovnosti se nezmění. Z věty o logaritmu mocniny dále dostáváme

$$n \cdot \log |q| < \log \varepsilon.$$

Odtud vyjádříme n. Jelikož $|q| < 1$, proto $\log |q| < 0$. Dostáváme

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|}.$$

Za n_0 pak zvolíme horní celou část výrazu $\frac{\log \varepsilon}{\log |q|}$.

□

Z věty 1.3.7 plyne obecnější věta:

Věta 1.3.8. Každá geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro jejíž kvocient platí $|q| < 1$, je konvergentní a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. Jestliže $q = 0$, pak pro všechna $n \geq 2$ je $a_n = 0$ a tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Nyní vyšetříme případ pro $q \neq 0$. Víme, že a_n můžeme vyjádřit jako $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, tedy i jako $a_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n$. Z vět o aritmetice limit a věty 1.20. plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1}{q} \cdot q^n \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{q} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a_1}{q} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a_1}{q} \cdot 0 = 0.$$

□

Není pravděpodobné, že v rámci běžné výuky na střední škole budeme uvedená tvrzení dokazovat tímto způsobem. Je však důležité žáky s obsahem těchto tvrzení seznámit. Nejlépe lze využívat obrázků, ze kterých je lze vyvodit i intuitivně.

Nyní ukážeme, jak by bylo možné intuitivně seznámit s žáky s obsahem vět 1.3.4 až 1.3.8. Přestože se nejedná o důkazy těchto vět, tento přístup může žákům pomoci získat představu o chování posloupností s různými kvocienty.

Zadáme žákům obecnou geometrickou posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ a budeme se ptát, jak se tato posloupnost bude chovat pro hodně vysoká q, například v řádu stovek nebo tisíců. K jednotlivým návrhům můžeme kreslit grafy těchto posloupností na tabuli. Žáci dojdou k tomu, že se zvětšujícím se q roste posloupnost rychleji. Se zmenšujícím se q bude naopak růst pomaleji. Můžeme se zeptat žáků na posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, kde $q = 100$. Z obrázku na tabuli vidí žáci, že tato posloupnost je divergentní. Vyučující požádá žáky, aby zmešovali kvocient q dokud posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ bude divergentní. Žáci se zřejmě zastaví u $q = 1$. Z grafu vidí, že taková posloupnost bude konstantní a konvergující k 1. Učitel může na část tabule nakreslit tabulku, do které zapisuje to, co žáci již odhalili. Do levého sloupečku píše hodnoty q, do druhého sloupce uvádí, zda pro tato q je posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, divergentní, nebo osciluje. Žáci zatím zjistili, že posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ pro $q > 1$ diverguje a pro $q = 1$ posloupnost konverguje k 1. Žáci zkoumají posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ pro q z intervalu $(0, 1)$ a kreslí si grafy takových posloupností. Z obrázků zjišťují, že taková posloupnost konverguje k 0. Jestliže $q = 0$, posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje také k 0. Dále žáci ověří, že i pro q z intervalu $(-1, 0)$ konverguje posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ k 0. Z toho plyne závěr, že pro všechna reálná $|q| < 1$ konverguje posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ k 0. Tuto skutečnost zanese učitel do tabulky. Nakonec žáci zkoumají posloupnosti $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ pro $q = -1$ a $q < -1$. Z obrázků, které si nakreslí, je zřejmé, že tyto posloupnosti ani nekonvergují, ani nedivergují, tedy oscilují. Na závěr stačí ukázat, že i pokud první člen posloupnosti a_1 není roven q, konverguje geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro jejíž kvocient platí $|q| < 1$, k 0.

Dalším probíraným tématem potom může být nevlastní limita posloupnosti. V souvislosti s tématem limit bývá do výuky zařazováno jejich praktické užití, například pro aproximaci iracionálních čísel. Zajímavá je aproximace čísla π, kdy obvod jednotkového kruhu 2π omezíme zhora obvodem opsaného n-úhelníku a zdola obsahem vepsaného n-úhelníku. Limita pro n jdoucí do nekonečna obsahů těchto n úhelníků je rovna obvodu jednotkového kruhu 2π.

1.4 Nekončená geometrická řada

Uvažujeme geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Označíme s_n součet prvních n členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tedy $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, a nazveme ho jako *částečný součet*. Můžeme vytvořit posloupnost těchto částečných součtů $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. Vyslovíme a dokážeme následující větu (Odvárko, 2018: s. 107–108).

Věta 1.4.1. Je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost, pro jejíž kvocient platí $|q| < 1$, pak posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, je konvergentní a platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Důkaz. Jelikož kvocient geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ není roven číslu 1, platí že

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, neboť $|q| < 1$. Nyní vypočítáme limitu posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{q-1} \cdot \lim_{n\to\infty} (q^n - 1) =$$

$$= \frac{a_1}{q-1} \cdot \left(\lim_{n\to\infty} q^n - \lim_{n\to\infty} 1 \right) = \frac{a_1}{q-1} \cdot (0 - 1) = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

□

Pro lepší představu žáků začíná Odvárko (2018, s. 106–107) motivační úlohou ve formě geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Žáci nejprve najdou prvních několik členů posloupnosti součtů prvních n členů s_n. Poté dokáží, zda $\lim_{n\to\infty} s_n = 2$. K důkazu si vyjádří obecně s_n a poté využijí věty o aritmetice limit. K procvičení je dobré nechat žáky vyřešit i několik dalších podobných příkladů. Po sérii těchto příkladů můžeme zavést pojem nekonečná řada a nekonečná geometrická řada. Nekonečnou řadu definujeme podle Brabce, Martana a Rozenského (1985: s. 366).

Definice 1.4.1. Je-li dána posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pak *nekonečnou řadou*, utvořenou z této posloupnosti, rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

který zapisujeme též ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Čísla a_n pro všechna přirozená čísla n nazýváme *členy řady*, a_n je *n-tý člen.*

Pro žáky bude pravděpodobně přirozené vnímat řadu jako součet nekonečně mnoha členů, kterému lze přiřadit nějakou konkrétní konečnou či nekonečnou hodnotu. Zjednodušené chápání pojmu řada jakožto součtu, pro který platí tytéž zákony, jako pro sčítání konečného počtu čísel, však může vést k paradoxům, jako je například tento. Řada

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

by při aplikaci asociativního zákona mohla být zapsána jako

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0,$$

ale také jako

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

Bylo by k ní tedy možné přiřadit dvě různé hodnoty, což odporuje vlastnostem součtu konečného počtu čísel. Proto je důležité, aby žáci chápali nekonečnou řadu jako symbol, který reprezentuje limitu posloupnosti částečných součtů tak, jak se s ní seznámili v motivační úloze a ve větě 1.4.1. Nyní můžeme uvést další vlastnosti řad volně převzaté z Odvárka (2018: s. 111).

Definice 1.4.2. Říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *konvergentní* právě tehdy, pokud je konvergentní posloupnost částečných součtů $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. Příslušnou limitu nazýváme *součet nekonečné řady.*

Definice 1.4.3. Říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *divergentní* právě tehdy, pokud je divergentní posloupnost částečných součtů $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definice 1.4.4. Je-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická a její kvocient je q, nazýváme nekonečnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nekonečná geometrická řada* s kvocientem q.

Věta 1.4.2. Nekonečná geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ve které $a_1 \neq 0$, je konvergentní, právě když pro její kvocient q platí $|q| < 1$. Pro součet s konvergentní nekonečné geometrické řady platí

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Důkaz. Důkaz je přímým důsledkem věty 1.4.1.

□

Vzorec z věty 1.4.2 je klíčovým poznatkem pro řešení úloh, které jsou jádrem připravených vyučovacích hodin.

1.5 Achilles a želva

Pro řadu žáků může být těžko představitelné, že součet nekonečně mnoha čísel může být roven konečnému číslu. Proto je vhodné jako motivaci zařadit něco, co probudí jejich zájem a zvědavost. Jednou z možností je začít příběhem o Achillovi a želvě podobně, jak to uvádí

Malle a kol. (2014: s. 138). Jedná se o paradox řeckého filozofa Zénóna z Eleje: Hrdina Achilles a želva uspořádají závody. Achilles dá želvě určitý náskok. Ve chvíli, kdy Achilles doběhne do místa, kde želva startovala, je již želva o určitou vzdálenost dále. Achilles i želva běží dál. Když Achilles doběhne do místa, kde želva byla, když doběhl do místa jejího startu, je želva už zase o kus dál. A takto do nekonečna. Dožene Achilles želvu?

Někteří žáci budou mít možná pocit, že Achilles želvu nedožene. Jiní budou argumentovat zkušeností, že ji dohat musí, protože běží rychleji. Můžeme žákům ukázat, že se vlastně jedná o stále se zmenšující časové intervaly mezi Achillem a želvou a přejít k obecnější otázce, zda je možné, aby součet nekonečně mnoha čísel byl za určitých okolností konečný.

Paradox s Achillem a želvou se dá modifikovat do různých jiných variant. Učitel například může vybrat žáka, postavit ho do určité vzdálenost od nějakého předmětu a požádat ho, aby svou vzdálenost od tohoto předmětu změnšil na polovinu. Když tak učiní, dostane žák stejný pokyn znovu. Žáci pak mohou diskutovat, jestli tímto způsobem dospěje k předmětu, nebo ne. Podobný princip může učitel ukázat i na příkladu tleskání, kdy se ruce k sobě přibližují tím způsbem, že vždy zkrátí svou vzdálenost na polovinu. Setkají se ruce někdy?

2 Srovnání postavení tématu geometrické řady v kurikulárních dokumentech České republiky, Rakouska a Německa

V této kapitole nejprve uvádíme specifika kurikulí vybraných zemí, jejichž struktura ovlivňuje pojetí konkrétních témat. Dále rozebereme tři různé přístupy k tématu geometrická řada v kurikulárních dokumentech daných zemí. V poslední podkapitole tato pojetí porovnáváme.

2.1 Česká republika

Klíčovými kurikulárními dokumenty, které určují obsah vzdělávání v České republice, jsou *Rámcové vzdělávací programy* (RVP). Jejich účelem je stanovit konkrétní cíle, délku a povinný obsah vzdělávání. Dále se zaměřují i na další podmínky, které musí být pro průběh vzdělávání splněny, například co se týče materiálního či personálního zajištění vzdělávacího zařízení či podmínek pro znevýhodněné žáky. Existuje více Rámcových vzdělávacích programů podle typu vzdělávání – RVP pro základní vzdělávání, gymnázia, střední odborné i speciální vzdělávání a další. Na základě tohoto rámce si každá škola vytváří vlastní *Školní vzdělávací program* (ŠVP), který musí být v souladu s RVP odpovídajícím danému typu školy. Tento dokument, za který zodpovídá ředitel školy, podrobněji určuje, jakým způsobem budou na dané škole cíle stanovené RVP naplňovány. Všechny aktuální RVP jsou zveřejněné na webové stránce Národního ústavu pro vzdělávání [1], odkud také čerpáme v této podkapitole.

Dále se zaměříme na středoškolské všeobecné vzdělávání, které je v České republice realizováno gymnázii. V RVP pro gymnázia není termín řada ani geometrická řada uveden. Nejedná se tedy o povinné učivo a v klasické výuce matematiky na českých gymnáziích se s ním nutně nesetkáme. Může být ale součástí školních vzdělávacích programů na některých gymnáziích, zejména na gymnáziích s matematickým zaměřením. Žáci českých gymnázií se s ním také mohou setkat ve volitelných seminářích, které jsou určeny zájemcům o matematiku či maturujícím z matematiky v profilové části státní maturitní zkoušky. K povinnému učivu nicméně patří téma posloupností včetně posloupnosti geometrické a aritmetické. Rámcový vzdělávací program je ovšem v tomto tématu velmi stručný. Vyžaduje pouze schopnost tyto posloupnosti určit a znát jejich vlastnosti, které ale dále nespecifikuje (VÚP, 2007).

Jelikož vyučovací hodiny realizované v rámci této práce se odehrály na Arcibiskupském gymnáziu v Praze, uvedeme nyní, jak je téma geometrické řady pojednáno v ŠVP této školy.[2] Téma posloupností a řad se probírá v maturitním ročníku, tedy v posledním ročníku osmileté docházky. Žáci mají umět posloupnost definovat, zapsat a rozlišit její

[1] http://www.nuv.cz/t/rvp

[2] Dostupné z: http://www.arcig.cz/sites/default/files/2019-osnovy-komplet.pdf

typ (s důrazem na aritmetickou a geometrickou posloupnost a jejich vlastnosti). Dále mají umět definovat geometrickou řadu a určit její součet. Dalším tématem je limita posloupnosti, kterou by žáci měli umět definovat a určit a měli by rozlišovat posloupnost konvergentní a divergentní. Žáci mají zvládnout na konkrétním příkladu popsat souvislost posloupnosti a řady a využít ji v úlohách.

2.2 Rakousko

Obsah vzdělávání v Rakousku je řízen výukovými plány (*Lehrpläne*), které jsou dostupné na stránkách Ministerstva vzdělávání, vědy a výzkumu (*Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung*)[3]. Výukové plány jsou rozdělené podle typu školy. Vzhledem k tématu geometrické řady nás zajímá především výukový plán pro vyšší všeobecně zaměřený typ střední školy (*Allgemeinbildende höhere Schulen*)[4].

Geometrická řada patří v Rakousku na vyšší všeobecně vzdělávací škole k povinnému učivu. Toto téma má být podle výukového plánu vyučováno v šestém ročníku, tedy dva roky před maturitou. Na konci prvního pololetí šestého ročníku je probíráno téma reálných posloupností, které by mělo být propojeno s lineární funkcí u aritmetické posloupnosti a s exponenciální funkcí u geometrické posloupnosti. Posloupnosti by měli žáci umět vyjádřit jak rekurentně, tak vzorcem pro n-tý člen. Zavedeny mají být také vlastnosti posloupností, které jsou ve výukovém plánu přímo určeny – monotonie, omezenost a limita.

Hned na začátku druhého pololetí se po krátkém opakování navazuje zavedením termínu řada. Začíná se výpočtem hodnoty konečné aritmetické a geometrické řady. Dále je definována nekonečná řada a žáci by měli být schopni spočítat součet konvergentních geometrických řad (BMBWF, 2019).

2.3 Německo

Vzdělávání ve Spolkové republice Německo není řízeno centrálně pro celou republiku. Každá z šestnácti spolkových zemí řídí vzdělávání skrze odpovídající ministerstvo (*Kultusministerium*) zcela nezávisle na ostatních spolkových zemích. To vede k rozdílům v kurikulích v jednotlivých částech Německa. Přehledné informace o vzdělávání v Německu nalezneme na Německém vzdělávacím serveru (*Deutscher Bildungsserver*)[5]. Web vznikl ve spolupráci s významnými vzdělávacími instituacemi Německa včetně Ministerstva pro vzdělávání a výzkum (*Ministerum für Bildung und Forschung*), jehož pravomoce spočívají nejvíce

[3]https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp.html

[4]Po absolvování čtyř ročníků lidové školy (*Volksschule*) volí žáci mezi praktičtěji orientovanou čtyřletou novou střední školou (*Neue Mittelschule*), ze které obvykle pokračují do odborných typů škol, a vyšší všeobecně vzdělávací školou (*Allgemeinbildende höhere Schule*). Tento typ vzdělávání se dělí na nižší stupeň (4 roky) a vyšší stupeň (4 roky) a je zakončen maturitou. Konkrétně se jedná o různé typy gymnázií. Navštěvuje-li žák vyšší všeobecně vzdělávací školu celých osm let, jsou ročníky počítané od prvního do osmého. Tuto terminologii dále v souvislosti s rakouským školstvím využíváme.

[5]https://www.bildungsserver.de

v podpoře výzkumu, mezinárodní spolupráci na poli vzdělávání či vzdělávání dospělých. Na tomto webu nalezneme i výukové plány jednotlivých spolkových zemí. Využíváme ho v této práci jako zdroj informací ohledně německého vzdělávacího systému.

Jelikož se učební plány jednotlivých spolkových zemí liší, používají tyto země také odlišné výukové materiály přizpůsobené daným požadavkům. Některá nakladatelství vydávají například učebnice matematiky pro dané ročníky v několika verzích, kde každá je určena konkrétní spolkové zemi. V této práci používáme pro analýzu učebnici pro gymnázia od nakladatelství Klett (Freudigmann a kol., 2009), která je určena pro výuku v Bádensku-Württembersku. Proto se zaměříme především na tuto spolkovou zemi.

V rozsáhle vypracovaném učebním plánu předmětu matematika pro gymnázia ve spolkové zemi Bádensko-Württembersko[6] slovo posloupnost najdeme pouze jednou a sice již v šestém ročníku (počítáno od započetí školní docházky) v souvislosti s uvědomováním si funkčních závislostí. Zde by žáci měli být schopni rozpoznat posloupnost a umět v ní pokračovat. Pojem posloupnost, jak ho známe z výuky u nás, zde ale není přímo zaveden. Totéž platí pro pojem řada, který v učebním plánu není uveden ani jednou. To ovšem neznamená, že tyto vztahy či vztahy související jsou ve výuce zcela opomenuty. O tom svědčí i způsob zpracování tématu ve vybrané učebnici, kde je téma částečně integrováno do kapitoly věnující se růstu. Více je rozebráno v podkapitole 3.3.

Učivo matematiky na gymnáziích v Bádensku-Württembersku je uspořádáno periodicky v dvouletých cyklech od pátého do dvanáctého ročníku v tomto pořadí – číslo; proměnná a operace; míry, prostor a formy; funkční závislosti; data a náhoda. Každé dvouleté období obohatí jednotlivá témata o nové poznatky. V tématu funkčních souvislostí se například v pátém ročníku pracuje s jednoduchými vztahy mezi čísly a veličinami a s jednoduchou soustavou souřadnic. Ve dvanáctném ročníku se končí integrály. Na jednotlivá témata se tedy nahlíží pomocí pěti zmíněných kategorií. Je evidentní, že některé učivo, jako je například posloupnost, je rozmělněno do více ročníků a příklady i definice se objevují vždy v souvislosti s obecnějším jevem (jako je například téma růst v použité učebnici, kde je posloupnost definována). Součet řady se zase objevuje v souvislosti s tématem limita, nikoli jako samostatné téma, ale pouze jako jedna z reprezentací použití limity (BPBW-M, 2019).

Nahlédneme-li namátkou do kurikulí několika dalších spolkových zemí (Bavorsko, Sasko, Severní-Porýnní Vestfálsko, Berlín), zjistíme, že i zde téma posloupnosti a řady není standardně obsaženo v povinném obsahu učiva. V Sasku je zmíněno pouze téma číselných posloupností jako speciální případ funkčního vztahu, který je vyjádřitelný explicitně nebo rekurzivně. V Berlíně je téma posloupnosti a řady (zde již ale v širším slova smyslu – například Taylorova řada) uvedeno jako téma doporučené pro volitelné semináře.

Přesto z rozhovoru s vyučujícím z německého gymnázia *Deutsche Schule Prag* v Praze vyplývá, že úlohy na posloupnosti či řady, včetně těch využívajících vizualici, kterým se v této práci dále věnujeme, nejsou v německé výuce ničím neobvyklým. Způsob, jakým jsou tato témata integrována do obecnějších okruhů je jistě zajímavý předmět analýzy, kterou čtenář nalezne v podkapitole 3.3.

[6] http://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M

2.4 Srovnání

Výše uvedené přístupy nabízí zajímavé srovnání. Český RVP pro gymnázia uvádí pouze téma posloupností, nikoli téma řad. Pokud se výuka řídí zcela podle RVP, tématu řad se v hodinách nedotkne. Nedotkne se ani tématu limit či diferenciálního počtu. Český RVP je charakteristický tím, že obsahuje celkově mnohem méně učiva než německé či rakouské kurikulum.

V německém kurikulu sice posloupnosti ani řady nenajdeme, nelze ale tvrdit, že je to z důvodu celkového menšího objemu učiva. Ve srovnání s Českem je probráno mnohem více včetně témat, která jsou u nás obvykle až součástí vysokoškolského studia. Konkrétně v případě Bádenska-Württemberska pozorujeme zcela odlišný přístup k uspořádání učiva, v jehož důsledku patrně dochází k tomu, že některá témata nejsou probrána v rámci jednoho celku. Bádensko-Württemberský přístup sleduje učivo z výrazně většího odstupu a více akcentuje souvislosti mezi jednotlivými tématy.

Rakouské kurikulum je přibližně stejně objemné jako kurikulum německé. I zde se žáci povinně setkají s diferenciálním počtem či složitějšími partiemi z pravděpodobnosti již na gymnáziu. Co se týče uspořádání látky, je více podobné českému přístupu. Postupuje se po jasně ohraničených tématech, která je sice žádoucí propojovat s jiným učivem, ale pouze formou odkazů uvnitř uzavřeného tématu. Rakouské kurikulum určuje také ze srovnávaných kurikulí obsah výuky nejvíce pevně. Každé pololetí má přesně stanovený harmonogram. V Bádensku-Württembersku jsou pouze stanoveny znalosti a kompetence, kterých má být dosaženo v jednotlivých oblastech v daném dvouletém období. V České republice je uspořádání látky výsadou konkrétních škol. RVP pro gymnázia uvádí požadované výstupy pouze na konci čtyřletého studia.

3 Analýza výukových materiálů k tématu nekonečná geometrická řada

V této kapitole představujeme učebnice, které jsme zvolili jako vzorové pro jednotlivé země. Postupně popíšeme, jak je téma nekonečná geometrická řada v těchto učebnicích zpracováno. Následně tato pojetí navzájem porovnáváme. V samostatné podkapitole potom analyzujeme některé vybrané aplikované vizualizované úlohy, které jsou v učebnicích představeny.

3.1 Česká republika

Z českých učebnic jsme zvolili dvě, které jsou věnované posloupnostem a řadám (Odvárko, 2018; Zemek a kol., 2017a), a jednu sbírku středoškolských úloh (Polák, 1999). Vybrané zdroje jsou schválené MŠMT ČR k zařazení do seznamu učebnic pro střední školy.

3.1.1 Oldřich Odvárko: Posloupnosti a řady

Učebnice z řady *Matematika pro gymnázia* s názvem *Posloupnosti a řady* autora Oldřicha Odvárka byla poprvé vydána v roce 1995. Vydání z roku 2018, se kterým pracujeme v této práci, je již třetím v pořadí. K učebnici existuje i sbírka úloh (Odvárko, 2000).

V první části se učebnice zabývá posloupnostmi a jejich vlastnostmi. V rámci jedné podkapitoly se věnuje i matematické indukci. V další kapitole se zabývá aritmetickou a geometrickou posloupností, jejich užitím a vlastnostmi. Ve třetí části nalezneme témata limita posloupnosti a nekonečná řada. Kromě pojmu limita posloupnosti, souvisejícími větami a užitím těchto poznatků se žáci seznámí i s nevlastní limitou posloupnosti. Nekonečná geometrická řada je tématem poslední podkapitoly.

Nekonečná geometrická řada je představena pomocí konkrétního příkladu geometrické posloupnosti. Je vytvořena posloupnost částečných součtů této posloupnosti a zkoumá se její konvergence. Dále je vyjádřen součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q \neq 1$ a hledá se jeho limita pro n jdoucí k nekonečnu. Poté následuje tvrzení, které udává, že posloupnost částečných součtů geometrické posloupnosti s kvocientem $|q| < 1$ je konvergentní a připojuje výraz, ke kterému konverguje. Toto tvrzení je vzápětí dokázáno.

Po několika příkladech na určování konvergence posloupnosti částečných součtů určité posloupnosti a hledání její limity je definována nekonečná řada jako symbol

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

je uveden i zápis pomocí sumy. Dále je definováno, kdy nazýváme nekonečnou geometrickou řadu konvergentní a kdy divergentní. Zdůrazněna je skutečnost, že pomocí sumy označujeme jak nekonečnou posloupnost samu, tak její součet, pokud existuje. Nakonec je definována nekonečná geometrická řada. Věta udává vzorec pro součet nekonečné geometrické řady s kvocientem $|q| < 1$. Tato věta není dokázána, je pouze odkázáno na větu o konvergenci posloupnosti částečných součtů geometrické posloupnosti s kvocientem $|q| < 1$ a na další dílčí výsledky uvedené v dané kapitole.

Následuje část s příklady na procvičení. Objevují se různé typy příkladů – příklady na určení konvergence nekonečné geometrické řady a jejího součtu, příklady na vyjádření periodického čísla formou zlomku pomocí součtu nekonečné geometrické řady i vizualizované úlohy, které jsou podrobněji pojednány v podkapitole 3.5.

Ve sbírce úloh (Odvárko, 2000) nalezneme v kapitole o nekonečné geometrické řadě úlohy, ve kterých mají žáci rozhodnout o konvergenci dané řady a určit její součet. Dále se zde vyskytují úlohy s řadami, v nichž je zadána nekonečná geometrická řada s proměnnou x. Žáci mají rozhodnout, pro jaká x řada konverguje. Ve sbírce se nachází také několik rovnic s nekonečnou geometrickou řadou, jejíž součet je třeba k vyřešení rovnice nalézt. Z vizualizovaných úloh zde najdeme jednu s posloupností vepsaných útvarů v rovině a jednu v prostoru. Varianty těchto úloh byly použity během vyučovacích hodin realizovaných v rámci této práce a čtenář je nalezne v podkapitolách 6.4.1 a 6.4.4 této práce. Stejně jako v učebnici, i ve sbírce nalezneme úlohy, v nichž je využit vzorec pro součet nekonečné geometrické řady pro zápis periodického čísla formou zlomku.

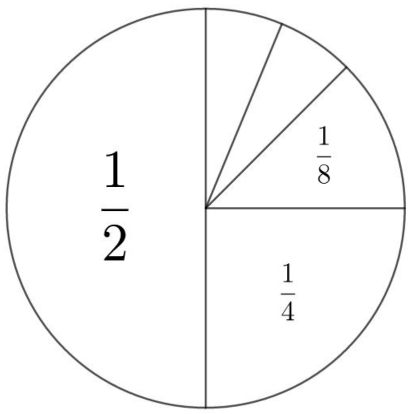
3.1.2 Václav Zemek: Posloupnosti, řady, finanční matematika

Devátý díl řady učebnic *Matematika pro střední školy* od nakladatelství Didaktis autora Václava Zemka a kol. se jmenuje *Posloupnosti, řady, finanční matematika.* Ve skutečnosti však řadí učivo jinak, než jak je uvedeno v názvu. Jako první skutečně uvádí téma posloupnosti – základní poznatky o posloupnostech, aritmetická posloupnost a její užití a geometrická posloupnost a její užití. Dalším tématem je potom finanční matematika a to konkrétně základní pojmy a vztahy úrokového počtu. Poslední kapitola nese název limita posloupnosti a řady. Po zavedení pojmu limita posloupnosti a seznámení se základními větami o limitách je poslední podkapitolou téma nekončená geometrická řada.

Kapitola, která je v obsahu uvedena pod názvem „Nekonečná geometrická řada“ je však na příslušné straně opatřena nadpisem nesoucím název „Návrat ke sčítání“. V úvodu se autoři zamýšlí nad možností sčítání nekonečně mnoha čísel. Dále uvadí jako motivační příklad posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy zakreslují do kruhu jako kruhové výseče. Každý další člen je polovinou dosud nevyužité výseče, je tedy zřejmé, že součet nekonečně mnoha členů této posloupnosti bude shora omezen číslem 1 (viz obr. 3.1).

Dále jsou zavedeny pojmy konečná řada a nekonečná řada a jejich symbolický zápis pomocí součtu i sumy. Obvyklým způsobem je definována posloupnost částečných součtů a z ní konvergentní nekonečná řada, součet nekonečné řady, divergentní nekonečná řada a nekonečná geometrická řada. Všechny pojmy jsou opatřeny příklady. Poté je uveden vzorec pro výpočet součtu nekonečné geometrické řady pro kvocient $|q| \leq 1$, který je i odvozen. V učebnici je dále zmíněno i to, kdy je nekonečná geometrická řada divergentní.

Z praktických příkladů na procvičení dominují příklady, v nichž žáci o konkrétní nekonečné geometrické řadě rozhodují, zda konverguje či diverguje. Nalezneme zde ovšem také vizualizované úlohy, které jsou podrobněji pojednány v podkapitole 3.5.



Obr. 3.1: Kruh a jeho rozdělení

K této učebnici je k dispozici i pracovní sešit. Zde se kromě obdobných příkladů jako v učebnici objevují i další typy příkladů – například zápis posloupnosti či řady pomocí sumy či zápis zlomku pomocí sumy jako součet nekonečné geometrické řady. Vybrané vizualizované úlohy jsou opět pojednány v podkapitole 3.5.

3.1.3 Josef Polák: Středoškolská matematika v úlohách II

Publikace s názvem *Středoškolská matematika v úlohách II* autora Josefa Poláka od nakladatelství Prometheus je sbírkou příkladů ze středoškolské matematiky. Jedná se o druhý díl v řadě a najdeme v něm kapitolu s názvem „Posloupnosti a řady". Jelikož se jedná primárně o sbírku úloh, jsou teoretické poznatky k jednotlivým tématům prezentovány na začátku každé kapitoly formou otázek, na které autor v zápětí odpovídá. Z těchto odpovědí se v první části dozvíme potřebné informace o posloupnostech, jejich vlastnostech, způsobu zadání i grafickém znázornění. Ve sbírce najdeme řadu příkladů k tématu aritmetické i geometrické posloupnosti, i příklady, které tyto posloupnosti kombinují. Druhá podkapitola se věnuje limitě posloupnosti, třetí nese název „Nekonečná řada a její součet, nekonečná geometrická řada".

První úloha tématu nekonečná řada je formulována jako otázka. Autor se ptá na definici pojmů nekonečná řada, součet nekonečné řady, konvergentní a divergentní nekonečná řada. Tato úloha je v učebnici přímo vyřešena tím, že je otázka zodpovězena a tyto pojmy jsou definovány. Nekonečná řada je chápána jako symbol součtu nekonečně mnoha členů, který lze zapsat i pomocí sumy. Je definována posloupnost částečných součtů a její limita, pokud existuje, jako součet nekonečné řady. Pomocí konvergence, resp. divergence posloupnosti částečných součtů je definována i konvergentní, resp. divergentní nekonečná řada. Po sérii úloh na určení posloupností částečných součtů dané posloupnosti a určení konvergence či divergence dané posloupnosti je opět formou otázky a odpovědi definována i nekonečná geometrická řada a uveden její součet pro $|q| < 1$ včetně stručného naznačení jeho odvození.

Z úloh se objevují například příklady na součet nekonečných geometrických řad, a to i s parametrem. Dále si žáci vyzkouší řešení rovnic, ve kterých se objevuje suma, právě pomocí vzorce na součet nekonečné geometrické řady. V rámci samostatné podkapitoly najdeme příklady na převod periodického čísla na zlomek pomocí vzorce na součet nekonečné geometrické řady. Ve sbírce se nachází také řada vizualizovaných úloh na aplikace součtu geometrické řady, které jsou podrobněji pojednány v podkapitole 3.5.

3.2 Rakousko

Jako zástupce rakouských výukových zdrojů jsem zvolila šestý díl publikace *Mathematik verstehen* [Porozumnět matematice] od nakladatelství *Österreichischer Bundesverlag* napsané kolektivem autorů v čele s Güntherem Malle (Malle a kol., 2014). Jedná se o díl určený pro šestý ročník vyšší všeobecně vzdělávací školy, používá se tedy dva roky před maturitou. Řada je v této učebnici osmým tématem a navazuje na kapitolu o posloupnostech, ve které se kromě obecných vlastností posloupností, rekurentního zápisu posloupností a aritmetické a geometrické posloupnosti žáci seznámí i s pojmem limita posloupnosti.

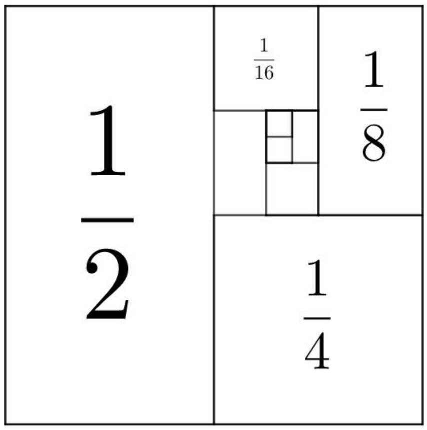
Kapitola „Řady“ je rozdělena do podkapitol „Konečné řady“, „Nekonečné řady“ a „Složené úročení a Eulerovo číslo“.[1] V podkapitole „Konečné řady“ nalezneme odvození vzorců pro součet prvních n členů aritmetické i geometrické posloupnosti. Tyto poznatky jsou potom procvičeny formou příkladů. Podkapitola „Nekonečné řady“ si v úvodu klade otázku, zda lze nekonečné řadě, kterou definuje jako symbol součtu nekonečně mnoha členů, přiřadit nějaký konečný součet. Poté uvádí příklad řady po sobě jedoucích přirozených čísel a řady, jejíž první člen i kvocient jsou rovny jedné polovině, tedy řady

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots . \tag{1}$$

Dále je vytvořena posloupnost částečných součtů obecné řady a její limita nazvána součet řady. O řadě, jejíž členy tvoří po sobě jdoucí přirozená čísla, autoři intuitivně tvrdí, že jí žádný konečný součet přiřadit nelze. Konečnost součtu řady (1) je prezentována na obrázku se čtvercem o straně 1, kde je vybarvena jeho polovina, poté jeho čtvrtina, osmina a tak dále tak, že vybarvené části se nepřekrývají (viz obr. 3.2). Obsahy postupně vybarvovaných částí tedy tvoří geometrickou posloupnost, jejíž první člen i kvocient jsou rovny jedné polovině a součet těchto obsahů nikdy nepřesáhne obsah daného čtverce, který je roven 1. V podkapitole je dále definována konvergentní a divergentní řada.

Učebnice se poté soustředí pouze na nekonečnou geometrickou řadu. Je zde uvedena věta vyjadřující součet nekonečné geometrické řady pro kvocinet $|q| < 1$ včetně důkazu. Následuje řada úloh na procvičení, které jsou většinou vizualizovány s obrázky a jsou blíže pojednány v podkapitole 3.5.

[1] V originále: „Endliche Reihen“, „Unendliche Reihen“ a „Stetige Verzinsung und die Eulerische Zahl e“.



Obr. 3.2: Čtverec o straně 1 a jeho rozdělení

3.3 Německo

Zástupcem německých učebnic je učebnice z řady *Lambacher Schweizer – Mathematik für Gymnasien* [Lambacher Schweizer – Matematika pro gymnázia] kolektivu autorů v čele s Hansem Freudigmannem od nakladatelství Klett (Freudigmann a kol., 2009). Jak již bylo zmíněno, vydávají mnohá německá nakladatelství více učebnic pro jednotlivé spolkové země. Učebnice, kterou zde srovnáváme, je určena pro spolkovou zemi Bádensko-Württembersko. V této zemi není nekonečná geometrická řada zmíněna mezi povinným učivem, je ale částečně integrována do obecnějšího tématického celku, kterým je růst.[2]

Kapitola „Růst“[3] je rozdělena do devíti podkapitol a sice „Popis změny pomocí posloupnosti“, „Monotonie a omezenost posloupností“, „Limity posloupností“, „Modelování exponencionálního růstu“, „Omezený růst“, „Diferenciální rovnice u růstu“, „Logistický růst“ a „Modelování dat“.[4] S tématem nekončená řada souvisí první tři podkapitoly.

V podkapitole „Popis změny pomocí posloupnosti“ se žáci seznámí s obecnou posloupností zavedenou rekurentně i vzorcem pro n-tý člen. Na příkladech si vyzkouší zapsat uvednou posloupnost oběma způsoby. Dále se učí kreslit grafy posloupností a zkoumat jejich chování. Učebnice také klade důraz na práci s vědeckou kalkulačkou a seznamuje žáky s jejími funkcemi vhodnými pro práci s posloupnostmi.

V souvislosti s nekonečnou řadou, která v této kapitole není ani jednou přímo zmíněna, je zajímavý motivační příklad uvedený na začátku podkapitoly „Popis změny pomocí posloupností“. Jedná se o úlohu s tzv. *Dradratem*, „zvířátkem“, které je vytvořeno z čtverců a pravoúhlých trojúhelníků (viz obr. 3.3).[5] Učebnice se ptá, zda existuje *Dradrat* s libovolně

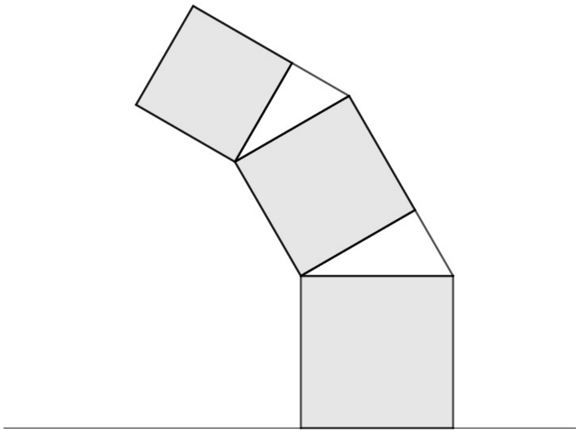
[2] Více k organizaci učiva v Bádensku-Würtemmbersku v podkapitole 2.3.

[3] V originále: „Wachstum“.

[4] V originále: „Veränderung mit Folgen beschreiben“, „Monotonie und Beschränktheit von Folgen“, „Grenzwerte von Folgen“, „Exponentielles Wachstum modellieren“, „Beschränktes Wachstum“, „Differenzialgleichungen bei Wachstum“, „Logistisches Wachstum“ a „Datensätze modellieren“.

[5] *Dradrat* je neologismus vytvořený z německého „Dreieck“ [trojúhelník] a „Quadrat“ [čtverec].

velkým obsahem a zda existuje *Dradrat*, který se svou "hlavou"(tj. nejmenším čtvercem, ze kterého se skládá) dotkne země (Freudigmann a kol., 2009: s. 172).



Obr. 3.3: *Dradrat* složený ze tří čtverců a dvou trojúhelníků

Obsahy jednotlivých částí (tj. čtverců a trojúhelníků) *Dradratu* tvoří geometrické posloupnosti s kvocienty menšími než 1. Otázka ohledně libovolně velké plochy *Dradratu* míří k součtu těchto obsahů pro libovolně velký *Dradrat*, tedy v terminologii využívané v České republice k součtu nekonečné geometrické řady. Učebnice ale nechce řešit tuto úlohu početně či pomocí vzorce, úloha slouží spíš k zamyšlení. Její řešení nalezne čtenář v příloze C.1.

V podkapitole „Popis změny pomocí posloupností“ najdeme mimo jiné úlohu, v níž žáci hledají součet obsahů prvních n čtverců, jejichž délky stran se zmenšují s kvocientem $q = \frac{1}{3}$. Mají také najít rekurentní vyjádření tohoto součtu. Vyjádřit ovšem mají pouze součty obsahů šesti a méně čtverců (Freudigamann a kol., 2009: 174). Tuto úlohu lze ovšem chápat jako jistou přípravu pro podobnou úlohu, která se objeví v podkapitole „Limity posloupností“. Zde hledají žáci též součet obsahů čtverců, jejichž délky stran se zmenšují s kvocientem menším než 1. Otázky jsou tu ale položeny jinak. Úkolem je ukázat, zda posloupnost těchto obsahů má limitu 0. Druhá otázka už míří k nekonečné řadě, neboť se ptá, zda součet obsahů všech čtverců má limitu. Žáci zde tedy zkoumají konvergenci nekonečné geometrické řady. Neřeší už ovšem, k jaké hodnotě tato řada konverguje (Freudigmann a kol., 2009: s. 180).

Propojení učiva s nekonečnou geometrickou řadou najdeme také v podkapitole „Monotonie a omezenost posloupností“. V úvodu této podkapitoly najdeme opět obrázek s motivační otázkou. Na obrázku je blecha a kousek od ní stojí pes. Šipkami je znározněna trajektorie skoku blechy, která skáče směrem k psovi. První skok je dlouhý 1 m, druhý skok je dlouhý $\frac{1}{2}$ m, třetí skok je dlouhý $\frac{1}{4}$ m, čtvrtý $\frac{1}{8}$ m atd. Délky skoků tedy tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Otázka zní, jestli blecha doskáče k psovi. Tato otázka je spíše řečnická, neboť nevíme, jak daleko od místa, kde blecha své skoky začala, se pes nachází. Jelikož je ale na obrázku vyznačen jeden metr, lze pohledem či měřením pravítkem zjistit, že to budou přibližně dva metry. Přímo to ale učebnice neuvádí. Otázka opět slouží spíše k zamyšlení než k početnímu řešení, ke kterému žáci v tuto chvíli nemají žádný aparát.[6] Učebnice klade k danému obrázku ještě jednu otázku, a sice zda by blecha doskákala k psovi, pokud by délka jejích skoků byla 1 m, $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{3}$ m, $\frac{1}{4}$ m, $\frac{1}{5}$ m atd. Tato otázka také není v učebnici zodpovězena a má sloužit pouze jako motivace pro zkoumání monotonie a omezenosti posloupností (Freudigmann a kol., 20069: s. 175).[7] V téže kapitole nalezneme také úlohu na principu fraktálů, kterou podrobněji popíšeme v podkapitole 3.5.4 této práce.

3.4 Srovnání uvedených výukových materiálů

Vybrané výukové materiály lze vzhledem k jejich charakteru rozdělit na dvě části – české zdroje a rakouský zdroj jsou koncipovány podobným způsobem, německý výukový zdroj stojí stranou a není s ostatními komparabilní. Proto nejprve srovnáme české zdroje a rakouský zdroj mezi sebou, jelikož v podobném přístupu lze najít zajímavé rozdíly, a poté proti tomuto přístupu postavíme učebnici německou.

V následujících odstavcích se věnujeme vybraným českým zdrojům a zdroji rakouskému a nejprve se zaměříme na kontext, ve kterém se téma nekonečná řada v jednotlivých učebnicích nachází. Všechny učebnice respektují stejné schéma – nejprve žáky seznámí s posloupností v obecném slova smyslu, poté se samostatně zabývají dvěma nejběžnějšími případy: posloupností aritmetickou a geometrickou. Následně je zavedena limita posloupnosti a poté přichází téma nekonečná řada. Toto řazení vyplývá z logické návaznosti témat, je systematické a struktura je přehledná.

Samotné téma nekonečná řada může být v učebnici zavedeno různě. Česká učebnice (Zemek a kol., 2017a) i rakouská publikace (Malle a kol., 2014) využívají motivačního příkladu s vyplňováním plochy. V prvním případě se jedná o kruh, v druhém o čtverec o straně délky 1, v obou případech jde ale o grafické znázornění geometrické posloupnosti, kde první člen posloupnosti i kvocient jsou rovny jedné polovině. Součet obsahů jednotlivých částí kruhu či čtverce potom znázorňuje součet nekonečné geometrické řady. Žáci si na těchto příkladech snadno uvědomí, že součtem nekonečně mnoha čísel může být konečné číslo. Takový příklad může být srozumitelný i slabším žákům. Odvárko (2018) volí abstraktnější motivační příklad, když uvádí konkrétní posloupnost a pak vytváří částečné součty a hledá jejich limitu. Toto zavedení vyžaduje od žáků větší míru abstraktního myšlení a může být pro méně nadané žáky obtížněji srozumitelné, zvláště pokud dobře neovládají předchozí témata jako je součet prvních n členů posloupnosti a limita posloupnosti. Vzhledem k charakteru Polákovy sbírky (Polák, 1999), která má sloužit spíše jako doplňkový materiál s příklady, je téma nekonečné řady zavedeno pouze pomocí definic a vět bez motivačních příkladů.

[6] Pokud bychom přijali hypotézu, že pes se od místa prvního skoku nachází přesně 2 m, pak blecha k psovi doskáče, neboť součet nekonečné gemeotrické řady, kde $a_1 = 1$ a $q = \frac{1}{2}$ je 2.

[7] Pokud je pes vzdálen od místa prvního skoku blechy 2 m, tak sečtením délek prvních čtyř skoků zjistíme, že blecha k psovi doskáče. Délky skoků však netvoří geometrickou posloupnost a nelze zde tedy aplikovat vzorec na součet nekonečné geometrické řady.

V českých učebnicích i v té rakouské jsou dále zavedeny pojmy jako nekonečná řada, nekonečná geometrická řada a související věty velmi podobným způsobem včetně důkazů. Nekonečná řada je zavedena jako symbol

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

je uveden i zápis pomocí sumy. Konvergentní a divergentní řada je definována pomocí konvergence či divergence posloupnosti částečných součtů. Na závěr je definována nekonečná geometrická řada a je vyslovena věta o konvergenci nekonečné geometrické řady s kvocientem $|q| < 1$ včetně jejího součtu a tato věta je dokázána. Odvárko (2018) odvozuje vzorec pro součet nekonečné geometrické řady s kvocientem $|q| < 1$ ve dvou větách, které uvádíme v kapitole 1 pod čísly 1.4.1 a 1.4.2. Větu 1.4.2 nedokazuje přímo, ale odkazuje se na důkaz věty 1.4.1 a další tvrzení uvedená v učebnici. Ostatní zkoumané české učebnice i učebnice rakouská tyto dvě věty slučují v jednu a důkaz je pak založen na principu důkazu věty 1.4.1. Učebnice jsou v tomto velice konzistentní, k teorii přistupují tradičně a nevykazují výrazné rozdíly v přístupu.

Co se týče příkladů na procvičení, můžeme si povšimnout rozdílu mezi učebnicí rakouskou a těmi českými. Rakouská učebnice se s výjimkou jednoho cvičení soustředí výhradně na aplikované vizualizované úlohy na výpočty součtů obsahů, obvodů či délek v různých geometrických obrazcích. V českých učebnicích najdeme i další typy úloh – například takové, kde mají žáci rozhodnout o konvergenci řady a eventuálně najít její součet (taková úloha je v rakouské učebnici jen jedna), příklady na převod periodického čísla na zlomek či řešení rovnic se sumami. Výhodou rakouské učebnice ve srovnání s učebnicemi (Odvárko, 2018) a (Zemek a kol., 2017a) je, že díky vynechání ostatních typů úloh nabízí výrazně pestřejší škálu úloh vizualizovaných. V tomto jí může ze zkoumaných prací konkurovat jedině sbírka (Polák, 1999). Rakouská učebnice je v tomto smyslu také nejlépe graficky zpracovaná – obrázky jsou barevné, přehledně popsané a nachází se vždy hned vedle zadání úlohy. Nakladatelství Prometheus (Odvárko, 2018; Polák, 1999) ve svých učebnicích uvádí obrázky jen k některým úlohám, obrázky jsou černobílé a dochází k tomu, že příslušný obrázek je na jiné straně než zadání úlohy. České učebnice na druhou stranu obsahují klíč ke všem cvičením, někdy i se stručným komentářem k postupu. K rakouské učebnici musí čtenář klíč dokoupit v samostatné publikaci.

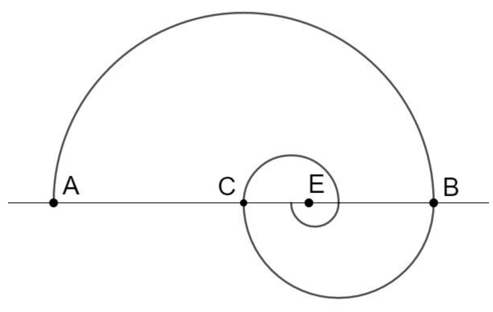
S českými učebnicemi a učebnicí rakouskou nyní srovnáme přístup učebnice (Freudigmann a kol., 2009) ze spolkové země Bádensko-Württembersko. V České Republice a Rakousku jsme pozorovali jasně strukturovaný přístup k předání učiva nekonečné geometrické řady: Učivo bylo uvedeno motivačním příkladem, poté byly zavedeny klíčové pojmy a dokázána příslušná tvrzení. Získané poznatky žáci následně aplikovali v úlohách. Podobná struktura byla použita i u dalších témat v učebnicích. Tato témata od sebe byla jasně oddělena a ke starší látce bylo vždy pouze odkázano v textu, k většímu propojování témat ale nedocházelo. Německá učebnice (Freudigmann a kol., 2009) zdánlivě využívá podobnou strukturu v tom smyslu, že na začátku každé podkapitoly uvádí motivační příklad, poté se věnuje teorii a následně uvádí řadu příkladů k procvičení. Zcela odlišně však pracuje s uspořádáním učiva. Zatímco nakladatelství Didaktis i Prometheus publikovala k tématu posloupnosti a řady samostatné učebnice, v bádensko-württemberské učebnici se v jedné kapitole „Růst“ objevují témata jako posloupnosti, limity, exponenciální funkce, aproximace čísla π, diferenciální rovnice či práce s daty. Najdeme zde i cvičení, která pracují se součtem nekonečné geometrické řady, i když ta není nikde explicitně definována. Vidíme zde tedy zcela odlišnou perspektivu, která nahlíží na probírané učivo skrze určitý pojem (v tomto případě růst) a zkoumá ho z mnoha různých pohledů. Výhodou tohoto přístupu může být to, že žáci vnímají učivo ve větších souvislostech a díky řadě zmíněných aplikací více vnímají jeho využitelnost v praxi. Nevýhodou může naopak být, že v rámci jedné kapitoly se žáci setkají s poměrně velkým množstvím matematických jevů (posloupnosti, limity, funkce, grafy, diferenciální počet atd.) a slabší žáci mohou mít problém si učivo nějakým způsobem utřídit a pochopit podstatu jednotlivých jevů.

3.5 Analýza vybraných příkladů

V této podkapitole rozebereme jednotlivé typy aplikovaných vizualizovaných úloh, které jsme nalezli ve vybraných učebnicích. Úlohy jsou rozděleny podle jejich charakteristik a podobné úlohy jsou rozebírány v jedné podkapitole společně. Pro každý typ úloh byl zvolen souhrnný název, který sice vždy zcela nevystihuje jejich charakter, slouží ale k tomu, aby se o úlohách tohto typu dalo v textu dále psát pod jednotným označením. Každá podkapitola nejprve formuluje jedno vzorové zadání úlohy, dále rozebereme možné odlišnosti v zadání, navrhneme možná řešení a zdůrazníme podstatné didaktické aspekty úloh.

3.5.1 Úlohy o délce spirály

Zadání úlohy:[8] Určete délku křivky spirálového tvaru (obr. 3.4), která je složena z nekonečně mnoha polokružnic takových, že poloměr první (největší) polokružnice je r ($|AB| = r$) a poloměr každé následující polokružnice je dvakrát menší než poloměr předcházející polokružnice ($|BC| = \frac{r}{2}$, $|CD| = \frac{r}{4}$, $\cdots$).



Obr. 3.4: Křivka spirálového tvaru tvořená polokružnicemi

[8]Převzato z (Polák, 1999: s. 70).

Řešení: Máme posloupnost poloměrů polokružnic $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $r_1 = r$ a $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Jedná se tedy o geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Dále máme posloupnost délek polokružnic $(l_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $l_1 = \pi r$ a $l_{n+1} = \frac{1}{2}l_n = \frac{1}{2}\pi r_n$, což je také geometrická posloupnost s kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Délka křivky je tedy rovna součtu nekonečné geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} \pi r \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\pi r}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi r.$$

Spirálová křivka má tedy tutéž délku jako kružnice o poloměru r.

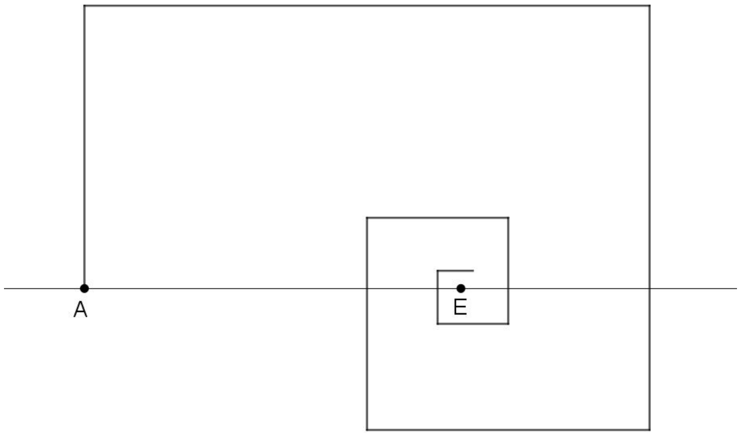
Varianty úlohy

Ve vybraných učebnicích nalezneme řadu úloh, které vychází z podobného principu. V podstatě identické zadání této úlohy najdeme v učebnici *Posloupnosti a řady* z nakladatelství Prometheus (Odvárko, 2018). Místo obecného zadání poloměru první polokružnice proměnnou r je zde ovšem stanoven poloměr o délce pěti délkových jednotek (Odvárko, 2018: s. 119).

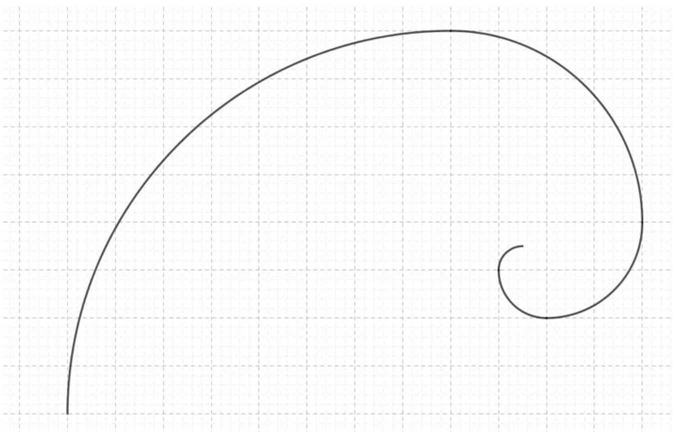
V učebnici *Posloupnosti, řady, finanční matematika* od nakladatelství Didaktis nalezneme podobnou úlohu s křivkou spirálového tvaru (Zemek a kol., 2017: s. 57a). Poloměr polokružnice je ovšem v tomto případě vždy roven třem čtvrtinám poloměru kružnice předešlé. První polokružnice má průměr 1 cm. Kvocient posloupnosti délek těchto polokružnic je tedy roven třem čtvrtinám. Jelikož je takový kvocient menší než 1, je tato posloupnost konvergentní a spirála má konečnou délku. I zde dojdeme k řešení, že spirálová křivka má tutéž délku, jako kružnice o poloměru 1, tedy 2π.

Nejbohatší nabídku úloh typu spirála nabízí učebnice rakouská (Malle a kol., 2014). Uvádí podobnou úlohu o délce spirály, jaké byly zmíněny výše (Malle a kol., 2014: s. 137). Poloměry polokružnic, ze kterých se křivka skládá, se zde zmenšují s kvocientem čtyři pětiny a první polokružnice má poloměr 10 cm. Úkolem žáků však v této úloze není jen vypočítat délku křivky. K úloze patří obrázek, na kterém je podobně jako na obrázku 3.4 označem písmenem A levý konec spirály. Písmeno E značí místo, ke kterému se blíží druhý konec spirály. Úkolem žáků je určit vzdálenost bodů A a E. Řešení této úlohy uvádíme v příloze C.2.

Na podobném principu je založena úloha, v níž žák hledá délku „spirály", která je místo z polokružnic zmenšujících se v určitém poměru složena z polovin obvodů čtverců (viz obr. 3.5) tak, že každý další čtverec má poloviční délku strany než ten předchozí (Malle a kol., 2014: s. 137). Jedná se tedy o podobnou úlohu jakou je ta, která zde byla použita jako vzor. Kvocient posloupnosti polovičních obvodů čtverců je zde také roven jedné polovině, délka strany prvního čtverce je stanovena 5 cm. Součet polovin obvodů čtverců, ze kterých se křivka skládá, je tedy roven obvodu kompletního prvního čtverce, tedy 20 cm. Podobně jako úloha se spirálou slouženou z polokružnic v této učebnici, i zde je levý koncový bod křivky označen písmenem A a pravý koncový bod písmenem E. Druhým úkolem je najít vzdálenost bodů A a E. Postup je obdobný jako v předchozí úloze. Křivku spirálového tvaru lze vytvořit též z čtvrtkružnic (Polák, 1999: s 71) jako na obrázku 3.6.



Obr. 3.5: Křivka spirálového tvaru tvořená polovinami obvodů čtverců



Obr. 3.6: Křivka spirálového tvaru tvořená čtvrtkružnicemi

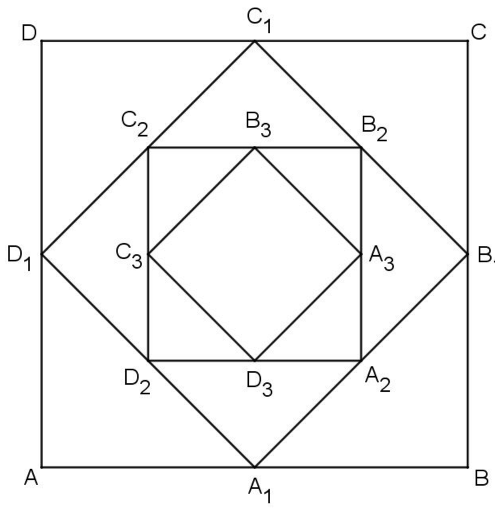
Rakouská učebnice kromě zmíněných úloh představuje ještě dvě, které lze k výše uvedeným jejich charakterem též zařadit, přestože se nejedná o křivku spirálového tvaru. Tyto úlohy pracují také s posloupností polokružnic, resp. posloupností polovin obvodů čtverců, které se zmenšují v určitém poměru (Malle a kol., 2014: s. 136–137). Úlohy se liší pouze uspořádáním těchto polokružnic, resp. polovin obvodů čtverců. Ty nejsou uspořádány do tvaru spirály, ale tvoří křivku připomínající vlnu. Tento typ úlohy včetně řešení uvádíme v příloze C.3.

Komentář

Zdá se, že úloha o délce spirály patří k tradičním aplikovaným úlohám na téma nekonečná geometrická řada, jelikož je v různých variacích přítomna v českých učebnicích i v učebnici rakouské. Kvocient zvolené posloupnosti délek polokružnic, resp. polovin obvodů čtverců se může lišit, můžeme tedy vymyslet mnoho dalších analogických úloh. Nejprve seznámíme žáky pravděpodobně s úlohou, kde je spirála tvořena polokružnicemi. Poté můžeme přidávat další podobné úlohy s polovinami čtverců či odlišným uspořádáním útvarů. Žáci tím procvičují stejný princip na zdánlivě různých úlohách. Na závěr je možné vést s žáky diskuzi o tom, zda se tyto úlohy v něčem liší.

3.5.2 Úlohy s posloupností vepsaných útvarů

Zadání úlohy:[9] Do čtverce $ABCD$ o délce strany 1 je vepsán čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tak, že A_1, B_1, C_1, D_1 jsou postupně středy stran AB, BC, CD, DA; obdobně vepíšeme čtverec $A_2B_2C_2D_2$ do čtverce $A_1B_1C_1D_1$ atd. (viz obr. 3.7). Vypočtěte součet obvodů a součet obsahů všech takových čtverců.



Obr. 3.7: Posloupnost vzájemně vepsaných čtverců

Řešení:[10] Obvod o čtverce $ABCD$ je roven 4. Obsah S čtverce $ABCD$ je roven 1. Délka strany a_1 čtverce $A_1B_1C_1D_1$ lze vypočítat z Pýthagorovy věty:

$$a_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

[9]Převzato z (Odvárko, 2018: s. 117).

[10]Žáci mohou kvocient posloupnost obvodů a obsahů najít i bez počítání pouze za pomoci obrázku 3.7. Z něj vidíme, že obsah čtverce $A_1B_1C_1D_1$ je polovinou obsahu čtverce $ABCD$. Kvocient posloupnosti obsahů je tedy roven $\frac{1}{2}$. Z obsahů lze pak snadno odvodit délku strany čtverců a tedy i kvocient posloupnosti obvodů.

Obvod o_1 čtverce $A_1B_1C_1D_1$ je tedy roven $2\sqrt{2}$. Obsah S_1 čtverce $A_1B_1C_1D_1$ je roven $\frac{1}{2}$. Kvocient q posloupnosti obvodů vepsaných čtverců je roven podílu obvodů o_1 a o, tedy $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pro součet s obvodů vepsaných čtverců pak platí:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} o_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8}{2-\sqrt{2}} = \frac{16+8\sqrt{2}}{2} = 8+4\sqrt{2}.$$

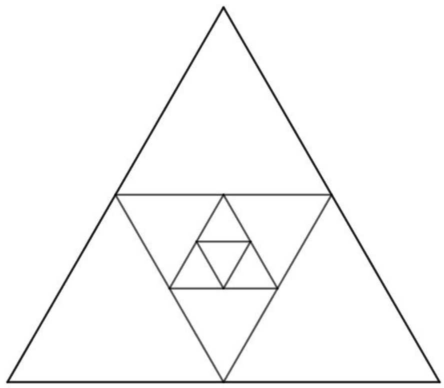
Dále určíme kvocient q' posloupnosti obsahů vepsaných čtverců jako podíl S_2 a S_1. Dostaneme $q' = \frac{1}{2}$. Pro součet s' obvodů vepsaných čtverců pak platí:

$$s' = \sum_{n=1}^{\infty} S_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Varianty úlohy

Úlohy s posloupností vepsaných útvarů jsou úlohy, ve kterých je cílem najít součet obvodů, obsahů či objemů geometrických útvarů, které jsou do sebe postupně vepisovány. Může se jednat o stále stejný geometrický útvar či o střídání dvou různých geometrických obrazců. Úlohy lze rozdělit na dvě skupiny podle toho, zda se jedná o útvary v rovině či tělesa v prostoru.

Výše zvolená vzorová úloha představuje případ, v němž jsou do sebe vepisovány stále stejné geometrické útvary. Podobnou úlohou je například úloha s vzájemně vepisovanými rovnostrannými trojúhelníky (viz obr. 3.8), v níž žáci hledají součet jejich obvodů a obsahů. Tuto úlohu nalezne čtenář včetně podrobného řešení v Odvárkovi (2018: s. 114).



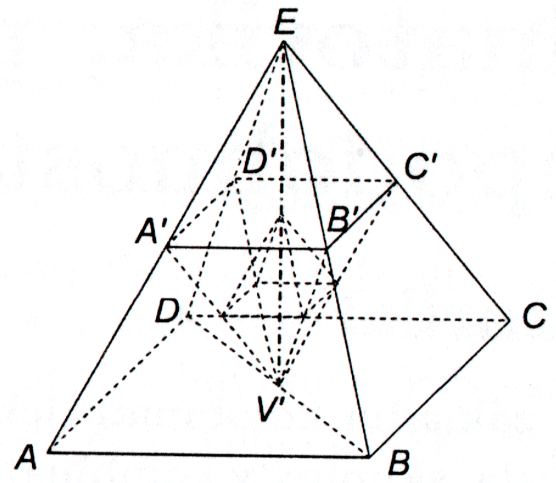
Obr. 3.8: Posloupnost vzájemně vepsaných rovnostranných trojúhelníků

Z úloh v rovině můžeme zmínit ještě ty, které byly součástí našich vyučovacích hodin vedených metodou CLIL. Jednalo se o úlohu, v níž bylo cílem najít součet obvodů a obsahů střídavě vepisovaného kruhu a čtverce (viz podkapitola 6.4.1), střídavě vepisovaného kruhu a pravidelného šestiúhelníku (viz podkapitola 6.4.2) a kruhu a rovnostranného trojúhelníku (viz podkapitola 6.4.3).

Postup řešení výše zmíněných úloh spočívá v nalezení kvocientu geometrické posloupnosti obvodů či obsahů, například jako poměr druhého ku prvnímu členu této posloupnosti. Máme-li první člen posloupnosti i kvocient, můžeme pomocí vzorce nalézt součet nekonečné geometrické řady, jejíž členy odpovídají členům dané geometrické posloupnosti. K výpočtu prvních dvou členů používáme planimetrické výpočty jako například Pýthagorova věta či vztahy k výpočtu obvodů a obsahů rovinných útvarů.

Trochu náročnější je úloha v rovině z rakouské učebnice, která je též založena na vepisování rovinných útvarů avšak trochu jiným způsobem, než výše zmíněné úlohy. Je dán rovnoramenný trojúhelník, kterému je vepsán čtverec stojící na základně. Další čtverec je vepsán do trojúhelníku, který vznikl nad horní stranou vepsaného čtverce. Tento proces pokračuje do nekonečna (Malle a kol. 2014: s. 137). K řešení této úlohy je třeba využít podobnost trojúhelníků (kompletní řešení nalezne čtenář v příloze C.4).

Druhou skupinu úloh tvoří úlohy v prostoru. Mezi ně patří například úloha na součet povrchů či objemů všech střídavě vepisovaných koulí a krychlí (viz podkapitola 6.4.4) či do sebe vepisovaných jehlanů (Polák, 1999: s. 72) jako na obrázku 3.9. Postup řešení těchto úloh je velmi podobný jako u úloh v rovině. Je třeba najít kvocient gemeotrické posloupnosti povrchů či objemů daných těles a poté použít vzorec na výpočet součtu nekonečné geometrické řady.



Obr. 3.9: Posloupnost vzájemně vepsaných jehlanů, převzato z (Polák, 1999: s. 72)

Za zmínku stojí i úloha z rakouské učebnice, v níž jsou do jehlanu se čtvercovou podstavou postupně vepisovány krychle tak, že první z nich stojí na podstavě a každá další je vepsána do jehlanu, který vznikne nad předchozí vepsanou krychlí. Cílem je najít součet povrchů a objemů všech vepsaných krychlí (Malle a kol., 2014: s. 138). K řešení úlohy je třeba najít kvocient posloupnosti povrchů a objemů vepsaných krychlí a poté použít vzorec na výpočet součtu nekonečné geometrické řady. K zjištění délky hrany první a druhé krychle můžeme použít řez jehlanem vedený vrcholem jehlanu kolmo k podstavě tak, že řez prochází středy dvou protilehlých stran podstavy. Poté postupujeme stejně jako ve výše zmíněné rovinné úloze o vepisování čtverců do rovnoramenného trojúhelníku, která je podrobněji rozebrána v příloze C.4.

Komentář

Úlohy s posloupností vepsaných útvarů vyžadují od žáků kromě znalosti učiva týkajícího se posloupností a řad také dobrou znalost planimetrie a stereometrie. Žáci pro řešení těchto úloh využívají zejména Pýthagorovu větu, musí též prokázat znalost vztahů pro výpočet obvodů, obsahů či objemů. Neznalosti v této oblasti mohou komplikovat řešení úloh a je tedy vhodné předem tyto partie zopakovat.

Z didaktických důvodů byla u výše zmíněných úloh volena metoda řešení, v níž hledáme kvocient posloupnosti obvodů, obsahů, povrchů či objemů jako poměr druhého ku prvnímu členu této posloupnosti. Žáci si dovedou představit, že každý vepsaný útvar má svůj obvod, obsah, povrch či objem a že tyto hodnoty tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem menším než 1. Jelikož již umí pracovat s geometrickou posloupností, umí snadno najít i kvocient. S jeho znalostí již mohou aplikovat vzorec na výpočet součtu nekonečné geometrické řady.

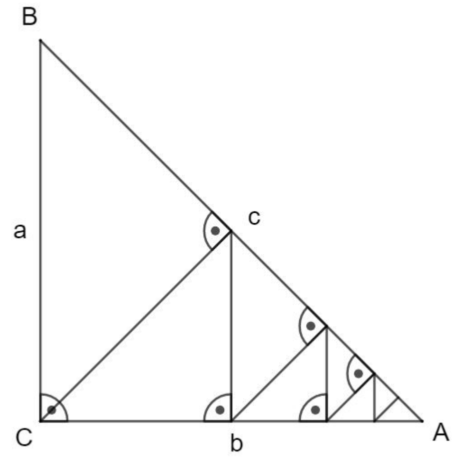
Toto řešení má nevýhodu v tom, že je nutné vypočítat i druhý člen dané geometrické posloupnosti, což může znamenat několik dalších dílčích výpočtů navíc, v nichž lze snadno udělat chybu. Proto se nabízí druhý způsob řešení, který již vyžaduje hlubší vhled. Jestliže známe kvocient posloupnosti délek v obrazcích, bude kvocient posloupnosti obvodů roven tomuto kvocientu, jelikož ve vzorcích na výpočet obvodu se délky vyskytují vždy ve formě lineárního členu. Budeme-li hledat kvocient posloupnosti obsahů, je třeba si uvědomit, že ve vzorcích na výpočet obsahu se délky vyskytují ve formě kvadratického členu a kvocient posloupnosti obsahů bude tedy roven druhé mocnině kvocientu posloupnosti délek. Totéž platí pro výpočet kvocientu posloupnosti povrchů. Hledáme-li kvocient posloupnosti objemů, v něm se vyskytují délky ve formě kubického členu. Kvocient posloupnosti objemů bude tedy roven třetí mocnině kvocientu posloupnosti délek. Tímto způsobem lze najít kvocient rychle, aniž bychom museli hledat hodnotu druhého členu posloupnosti obvodů, obsahů, povrchů či objemů. V případě úlohy, jejíž zadání nalezneme v úvodu této podkapitoly, by tedy stačilo najít kvocient posloupnosti stran vepsaných čtverců, což je $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Stejný kvocient by potom měla posloupnost obvodů čtverců v obrazci. Kvocient posloupnosti obsahů čtverců v obrazci by byl roven $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Jelikož úlohy s posloupností vepsaných útvarů byly součástí vyučovacích hodin realizovaných v rámci této práce, můžeme se při porovnání těchto dvou způsobů řešení opřít o zkušenost z praxe. Stálý vyučující matematiky žákům v hodinách ukazoval pouze způsob řešení, kdy žáci našli kvocient posloupnosti délek v obrazci a kvocient posloupností obvodů, obsahů, povrchů či objemů potom vyjadřovali pouze na základě tohoto zjištění. V písemných pracích však poté registroval více případů, když si žáci neuvědomili, že v případě posloupnosti obsahů, povrchů či objemů není kvocinent roven kvocientu posloupnosti délek v obrazci. Vyučující uvedl, že chyby tohoto typu se objevovaly i poté, co se k tomu s žáky vrátil podruhé.

Během konzultace se stálým vyučujícím matematiky o plánovaných hodinách nebyla tato záležitost příliš detailně diskutována. V hodinách jsem pak zcela nezávisle žákům ve vzorovém příkladu ukázala způsob, kdy kvocient hledáme jako podíl druhého a prvního členu dané geometrické posloupnosti. Teprve po samotné realizaci vyučovacích hodin vedených metodou CLIL jsme si s vyučujícím matematiky uvědomili naši zcela odlišnou prezentaci možného řešení. V prezentacích výsledků skupinové práce žáků se všechny tři skupiny držely způsobu řešení, které jsem jim předvedla. Z debaty, kterou jsme s vyučujícím matematiky vedli těsně po realizaci vyučovacích hodin vyplynulo, že řešení s hledáním prvních dvou členů geometrické posloupnosti je sice početně, a tedy i časově náročnější, v řešeních žáků se však neobjevovaly chyby, které byly časté v písemné práci, při níž žáci hledali kvocient pouze pro posloupnost délek. Z následných rozhovorů vyučujícího s žáky se také ukázalo, že žáci jsou si sami při řešení s hledáním prvních dvou členů geometrické posloupnosti jistější. Pravděpodobně je tomu tak proto, že toto řešení je založeno více na algoritmickém postupu. Představit si, jak se kvocient bude měnit, budeme-li počítat obsah či objem, může být pro řadu žáků příliš abstraktní, i když i zde lze zavést jasné pravidlo. Žáci také mohou v písemné práci opomenout, že kvocient se pro obvod a obsah liší.

3.5.3 Úlohy o délce lomené čáry

Zadání úlohy:[11] Určete délku lomené čáry od vrcholu C do vrcholu A, která je tvořena z nekonečného počtu úseček kolmých ke stranám rovnoramenného trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C a odvěsnou 4 cm (viz obr. 3.10).



Obr. 3.10: Lomená čára tvořená výškami v posloupnosti pravoúhlých trojúhelníků

[11]Převzato z (Zemek a kol., 2017b: s. 62), podobná úloha je i v (Malle a kol., 2014: s. 138) a v (Polák, 1999: s. 71).

Řešení: Úsečky, ze kterých je složena lomená čára, jsou vlastně výšky na přepony v posloupnosti pravoúhlých trojúhelníků. První výšku v_1 lze použitím Pýthagorovy věty vyjádřit jako $v_1 = 2\sqrt{2}$ cm. Délku výšky v_2 vyjádříme opět použitím Pýthagorovy věty[12] jako $v_2 = 2$ cm. Kvocient posloupnosti výšek potom najdeme jako podíl výšky v_2 a výšky v_1, tedy $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nyní můžeme vypočítat součet délek všech výšek a tím i délku lomené čáry:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} v_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = (4\sqrt{2} + 4) \text{ cm}.$$

Varianty úlohy

V dostupných učebnicích najdeme více úloh, ve kterých mají žáci vypočítat délku lomené čáry, jejíž úsečky tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem menším než 1. V rakouské učebnici najdeme kromě výše uvedené úlohy i úlohu s nekonečně mnoha schody, které jsou vytvořené z do řady vyrovnaných čtverců, jejichž strana se zmenšuje vždy o jednu čtvrtinu (Malle a kol., 2014: s. 137). Úkolem je najít nejen součet délek všech stupnic[13], ale i součet délek všech stupnic a podstupnic[14] dohromady. Jedná se tedy o určení délky lomené čáry ve tvaru nekonečného schodiště.
Zajímavá úloha na výpočet délky lomené čáry je úloha z rakouské učebnice, v níž má lomená čára tvar spirály (Malle a kol., 2014: s. 137). Úloha je zajímavá především tím, že žáci musí při řešení úlohy prokázat znalost goniometrických vztahů v pravoúhlém trojúhelníku. Kompletní řešení této úlohy nalezne čtenář v příloze C.6.

Komentář

Úlohy s délkou lomené čáry jsou velmi rozmanité. Nelze u nich najít společnou metodu řešení. Úlohy sice spojuje jejich cíl, sice vypočítat délku lomené čáry složené z geometrické posloupnosti délek úseček s kvocientem menším než 1, lomené čáry jsou však součástí různých obrazců a hledání délek daných úseček se liší. Tyto úlohy tedy mohou nabídnout právě pestrou paletu různých způsobů řešení, žáci musí každou úlohu znovu promýšlet a výpočet té předchozí jim zcela neodhalí řešení těch dalších. Žáci se díky těmto úlohám také seznámí s pojmem lomená čára.

[12] Velikost výšky v_2 lze také určit z toho, že se jedná o střední příčku trojúhelníku ABC rovnoběžnou se stranou BC. Má tedy z vlastnosti středních příček poloviční délku oproti straně BC, tedy $v_2 = 2\,\text{cm}$.

[13] Stupnice je část schodu, na kterou uživatelé schodiště našlapují.

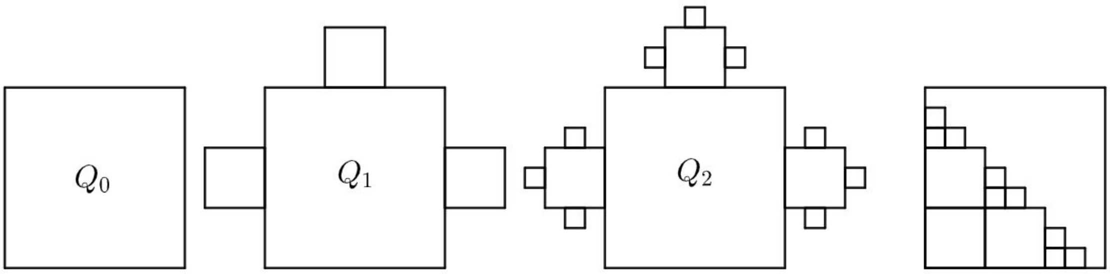
[14] Podstupnice je část schodu, která se nachází mezi jednotlivými schodišťovými stupni.

3.5.4 Úlohy na principu fraktálů

Zadání úlohy:[15] Z čtvercové rostliny[16] Q_0 o straně délky 1 vyroste v první generaci rostlina Q_1, v další generaci rostlina Q_2 atd. (obr. 3.11). Rostlina Q_n má pro všechna $n \in \mathbb{N}$ obvod o_n a obsah S_n. Pro $n = 0; 1; 2; 3$ ověřte, že platí

$$o_n = 4 + 2n,$$
$$S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Vyšetřete posloupnosti o_n a S_n s ohledem na monotonii a omezenost. Využijte čtvrtého modelu z obr. 3.11.



Obr. 3.11: Nultá, první a druhá generace čtvercové rostliny a znázornění jiného možného uspořádání „lístečků" rostliny druhé generace

Řešení úlohy: Ověřit, že vyjádření obvodu o_n a obsahu S_n platí pro první čtyři generace je triviální. Nadanější žáci by možná dokázali odvodit vyjádření pro obvod samostatně. Vyjádření pro obsah je dobře demonstrovatelné na čtvrtém modelu na obrázku 3.11. Tento model přeuspořádává „lístečky" rostliny druhé generace tak, že jimi systematicky vyplňuje polovinu čtverce o straně délky 1. Obrázek může nejen pomoci pochopit vyjádření obsahu S_n, pomůže ale i při zodpovězení otázky na monotonii a omezenost. Učebnice zde zřejmě nemíří jen k početnímu řešení, ale vyžaduje od žáků úvahu a argumentaci pomocí obrázku. Zejména u posloupnosti obsahů S_n lze na obrázku ukázat, že „lístečky", které přibudou s každou další generací, lze naskládat do prostoru pod diagonálou čtverce o straně délky 1. Posloupnost S_n je tedy rostoucí a omezená třemi polovinami. Posloupnost o_n je též rostoucí, ale není omezená. Omezenost těchto posloupností lze ověřit, najdeme-li limitu posloupností o_n a S_n v nekonečnu:

$$\lim_{n\to\infty} o_n = \lim_{n\to\infty} 4 + 2n = \infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}.$$

[15]Převzato z (Freudigmann a kol., 2009: s. 177).

[16]V originále „Quadratpflanze".

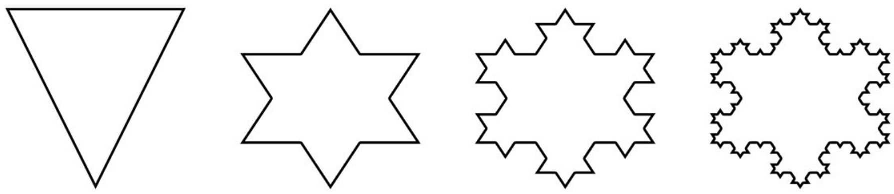
Varianty úlohy

Obrazec z výše uvedené úlohy je fraktál. Než uvedeme, jakým dalším způsobem lze téma fraktálů zařadit do výuky posloupností či nekonečné geometrické řady, stručně shrneme, co fraktály jsou. Jako zdroj informací o fraktálech jsme využili publikaci *Atlas geometrie* (Voráčová a kol., 2014).

Fraktál má více možných definic. Jelikož zde prezentujeme úlohy pro střední školy, vystačíme si s definicí vizuální, která říká, že fraktál se sám sobě podobá v libovolném měřítku. Tuto vlastnost označujeme jako soběpodobnost. V případě čtvercové rostliny můžeme pozorovat soběpodobnost na jednotlivých „lístečcích“, které jsou vždy podobné celé rostlině. Uvedeme nyní několik příkladů fraktálů, které je možné zmínit i při výuce na střední škole.

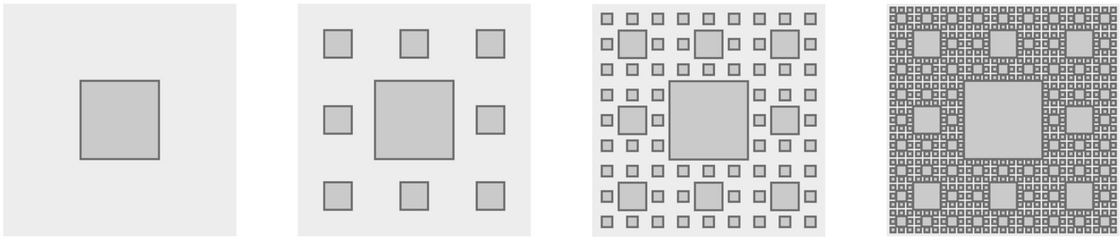
Jedním ze známých fraktálů, který se objevuje i v jedné ze zkoumaných středoškolských učebnic, je Sierpińského trojúhelník, pojmenovaný podle polského matematika Wacława Sierpińského (1882–1969). Jedná se o rovnostranný trojúhelník, který rozdělíme pomocí středních příček na čtyři shodné trojúhelníky a prostřední trojúhelník vyjmeme. Stejný proces opakujeme do nekonečna pro všechny menší nově vzniklé trojúhelníky. Obvod Sierpińského trojúhelníku je nekonečně velký, obsah se blíží 0. Trojrozměrná analogie Sierpińského trojúhelníku se nazývá Sierpińského pyramida. V příloze C.7 uvádíme úlohu s Sierpińského trojúhelníkem z rakouské učebnice (Malle a kol., 2014) včetně řešení.

Dalším zajímavým fraktálem je Kochova vločka, pojmenovaná po švédském matematiku Helge von Kochovi (1870–1924). Jedná se o rovnostranný trojúhelník, nad jehož stranami zkonstruujeme Kochovu křivku, která vznikne následujícím způsobem: V úsečce o délce 1 nahradíme prostřední třetinu dvěma úsečkami o délce $\frac{1}{3}$. Vznikne lomená čára složená ze čtyř úseček. V každé z úseček opět nahradíme její prostřední třetinu dvěma úsečkami, jejichž délka je rovna jedné třetině těchto úseček. Tento proces opakujeme do nekonečna pro každou úsečku. První čtyři iterace procesu vzniku Kochovy vločky vidíme na obrázku 3.12. Kochova křivka má nekonečnou délku. Z toho plyne, že Kochova vločka má nekonečný obvod. Obsah Kochovy vločky je konečný.



Obr. 3.12: První čtyři iterace procesu vzniku Kochovy vločky, obrázek vygenerován z online programu Online MATH Tools

Zmíníme ještě několik dalších příkladů fraktálů. Na podobném principu jako Sierpińského trojúhelník funguje i Sierpińského koberec. Jedná se o čtverec rozdělený na 9 shodných čtverců, z nichž vyjmeme ten prostřední. Tento proces opakujeme pro všechny nově vzniklé čtverce (viz obr.3.13). Trojrozměrná analogie Sierpińského koberce se nazývá Mengerova houba.



Obr. 3.13: První čtyři iterace procesu vzniku Sierpińského koberce, obrázek vygenerován z online programu Online MATH Tools

Za zmínku stojí ještě Cantorova množina. Jedná se o úsečku o délce 1, z níž vyjmeme prostřední třetinu. Z každé další nově vzniklé úsečky vyjmeme též prostřední třetinu a tento proces opakujeme do nekonečna. Posledním příkladem fraktálu, který zde uvedeme, je fraktálový strom – větvení stromu je pro ukázku fraktálu velmi názorné.

Tyto a další zajímavé fraktály je možné s žáky vymodelovat v online programu Online MATH Tools,[17] který je zdarma dostupný na internetu.

Komentář

Úlohy na principu fraktálů nelze zařadit mezi typické úlohy na nekonečnou geometrickou řadu, neboť se v nich geometrická řada přímo neobjevuje. Přesto však rakouská učebnice řadí úlohu se Sierpińského trojúhelníkem do kapitoly „Řady“. Podobně jako vizualizované úlohy na součet nekonečné geometrické řady se jedná o úlohy, kdy hledáme součet obvodů či obsahů daných obrazců, které se skládají z posloupnosti stále se zmenšujících dílčích obrazců. Kvocient zmenšení je menší než 1, počty dílčích obrazců dané velikosti se však liší, a proto obvykle nelze použít vzorec na součet nekonečné geometrické řady. To může být důvod toho, proč se výše zmíněné úlohy objevily pouze v zahraničních zdrojích. České učebnice jsou tematicky ucelenější a v rámci daných publikací či dílčích kapitol obvykle uvádí pouze úlohy vztahující se přímo k probíranému tématu. Pokud bychom chtěli téma fraktálů zařadit do výuky na českých středních školách, poskytuje k tomu právě kapitola o posloupnostech, limitách a řadách nejvhodnější prostor. U obou uvedených úloh je třeba znalost posloupností a limit. Jistá zkušenost se součtem nekonečné geometrické řady může být při řešení také nápomocná.

[17] https://onlinemathtools.com/

4 CLIL

Content and Language Integrated Learning (CLIL) je výukový přístup s dvojím zaměřením. Cizí jazyk je zde použit nejen jako prostředek k předání vyučovaného obsahu, ale je cílem sám o sobě a jeho použítí má sloužit k rozšíření jazykových kompetencí žáků (Coyle, Hood a Marsh, 2010). Pod zkratku CLIL spadá v širším pojetí celá řada výukových systémů, v nichž se pracuje kromě klasického obsahu vzděválání i se zapojením cizího jazyka. Může se jednat o programy v zemích s větším počtem oficiálních jazyků či v zemích s velkým podílem národnostních menšin nebo o bilingvní školy. Spolupráce se zahraničními školami formou projektů či výměnných pobytů může být taky někdy chápána jako forma CLILu.

V této práci budeme pracovat s užší definicí CLILu, podle které se jedná o přístup, kdy je nejazykový předmět vyučován častečně nebo zcela prostřednictvím cizího jazyka. Cílem takové výuky je předat nejenom znalosti a dovednosti v nejazykovém předmětu, nýbrž i zvýšit znalost cizího jazyka (Benešová a Vallin, 2015). V tomto pojetí existují tři možné varianty podle poměru důrazu na vzdělávací obsah nejazykového předmětu a jazykové kompetence (Benešová a Vallin, 2015). Tyto tři varianty se od sebe liší na základě toho, v jakém jazyce je předáván vzdělávací obsah (například v jakém jazyce jsou použité materiály či klíčová slovní zásoba k tématu), v jakém jazyce probíhá osvojování učiva a v jakém jazyce učitel udílí v hodině pokyny.

První varinata je ze všech tří nejvíce orientovaná na obsah nejazykového předmětu. V cizím jazyce je prezentována pouze slovní zásoba k probíranému tématu, nikoliv celé materiály. Osvojování učiva probíhá v mateřském jazyce, stejně tak jako většina pokynů. Některé pokyny v hodině mohou být však v cizím jazyce.

Druhá varianta již prezentuje celý vzdělávací obsah v cizím jazyce. Nejen slovní zásoba, nýbrž i všechny materiály jsou v cizím jazyce. Osvojování učiva včetně formulování úkolů či vysvětlení problémových jevů probíhá v jazyce mateřském. To samé se týká otázek pokládaných učitelem i odpovědí žáků. Veškeré pokyny potom udílí učitel v jazyce cizím.

Třetí varianta používá cizí jazyk nejvíce. Pokyny v hodině i osvojování učiva probíhá v cizím jazyce. Rozhovor učitele s žákem je veden oboustranně také v cizím jazyce. Totéž se týká veškerých materiálů. V mateřském jazyce může probíhat jen případné vysvětlení složitějších gramatických jevů, kterým by žáci jinak neporozuměli.

Způsob integrace cizího jazyka do výukových hodin, které jsou jádrem této práce, se nejvíce blíží druhé variantě. V jazykové oblasti se soustředíme zejména na slovní zásobu a jednoduchou kominikaci v hodině. Výklad složitější gramatiky a osvojování nových dovedností v oblasti matematiky probíhá v češtině. V cizím jazyce probíhá pouze ta část výuky, kde je předpoklad dobré znalosti obsahu – opakování či prezentace již dosažených výsledků. Všechny použité materiály jsou v cizím jazyce.

4.1 CLIL v České republice, Německu a Rakousku

V této podkapitole nejprve představíme, jakým způsobem je metoda CLIL součástí vzdělávacích systémů sledovaných zemí. Na závěr situace v jednotlivých zemích porovnáme.

4.1.1 Česká republika

Výuka metodou CLIL přichází do České republiky dvojím způsobem. Buď se jedná o iniciativu konkrétních učitelů či ředitelů škol, kteří se rozhodnou CLIL do výuky zapojit, nebo CLIL do škol přichází formou nejrůznějších projektů Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy či zahraničních organizací. Za všechny je vhodné jmenovat zejména rozsáhlý projekt *Národního institutu pro další vzdělávání* (NIDV), který probíhal mezi lety 2010 a 2011 a byl spolufinancován *Evropským sociálním fondem* a státním rozpočtem České republiky. Projekt s názvem *Obsahově a jazykově integrované vyučování na 2. stupni základních škol a nižším stupni víceletých gymnázií* se soustředil na většinu v České republice vyučovaných předmětů a pracoval se třemi cizími jazyky – angličtinou, němčinou a francouzštinou. V rámci tohoto projektu vznikla celá řada metodických listů, které jsou volně dostupné na webu institutu.[1] Kromě této iniciativy stojí NIDV i za vznikem sborníku *Nebojte se CLIL*[2], ve kterém jsou také k dispozici materiály pro výuku různých předmětů metodou CLIL. V posledních letech proběhla v České republice řada dalších projektů organizovaných například přislušnými katedrami českých vysokých škol či *Národním ústavem pro vzdělávání*. Metoda CLIL je v rámci nepovinných předmětů vyučována na pedagogických fakultách. Plošné zavedení metody CLIL na všechny základní a střední školy je ovšem problematické zejména z důvodu nedostatku kvalifikovaných pedagogů (MŠMT, 2009). K výuce metodou CLIL škola v současnosti nepotřebuje svolení MŠMT a jazyková úroveň vyučujícího není nijak oficiálně stanovena.

4.1.2 Německo

Německo se od zbývajících zkoumaných zemí liší tím, že v jedné ze spolkových zemí výuka metodou CLIL kurikulárně řízena je. Jedná se o Severní Porýní-Vestfálsko, kde existují osnovy[3] pro výuku metodou CLIL pro některé předměty. V dalších spolkových zemích není tato výuka kurikulárně řízena včetně spolkové země Bádensko-Württembersko, jejíž učebnice byla k dispozici pro potřeby této práce. Setkáme-li se v Německu s metodou CLIL, převládá důraz na obsahovou složku nejazykového předmětu a jazyk je vnímán spíše jako prostředek. Nejčastěji se CLIL v Německu používá pro výuku humanitně orientovaných předmětů, zeměpisu a biologie. Využíván je také tzv. modulový CLIL, kdy zejména historická témata související s různými zeměmi (Anglie, Francie) jsou vyučována v jazyce příslušného národa, o kterém se žáci zrovna učí. Vzhledem k velkému množství jazykových

[1] `http://clil.nidv.cz/index.html`

[2] `http://www.nidv.cz/images/npublications/publications/files/12NebojteseCLIL.pdf`

[3] https://www.schulentwicklung.nrw.de/cms/bilingualer-unterricht/angebot-home/bilingualer-unterricht.html

menšin na území Německa jsou často integrovány také jazyky jako turečtina, ruština či španělština (Benešová a Vallin, 2015).

4.1.3 Rakousko

V Rakouském učebním plánu pro vyšší stupeň všeobecných škol (BMBWF, 2019) se dočteme, že v zájmu zlepšení kompetencí v cizím jazyce může být metoda CLIL použita, je ale třeba dbát na to, aby odborné termíny byly ve výuce správně používány. Pokud se škola rozhodne metodu CLIL použít, musí pevně určit počet hodin i daný cizí jazyk. V Rakousku je také používaná metoda tzv. jazykových sprch. Jedná se o krátké aktivity v cizím jazyce, které jsou zařazené do tradičních předmětů (Benešová a Vallin, 2015).

4.1.4 Srovnání

Oficiální postoj státu k metodě CLIL je nejméně jednoznačný v České republice. Metoda není nijak centrálně řízena, není součástí Rámcového vzdělávacího programu a je implementována pouze formou projektů různých vzdělávacích institucí. Chybí tedy jasné podmínky pro její realizaci například co se týče kvalifikace vyučujícího. Naopak Rakousko určuje podmínky pro výuku metodou CLIL jasněji, jelikož metoda je konkrétně zmíněna v dokumentu určujícím obsah učiva v rakouských školách. To koresponduje s celkovou vyšší mírou centralizovanosti rakouského školství. Jelikož jsou jednotlivé spolkové země Německa v oblasti školství autonomní, nelze srovnávat přístup Německa jako celek. Severní Porýní-Vestfálsko však ve srovnání s Českou republikou a Rakouskem disponuje osnovami pro výuku metodou CLIL. Lze tedy říci, že tato spolková země přistupuje k metodě CLIL nejvíce koncepčním způsobem ze srovnávaných zemí.

5 Metodologie

V přípravě vyučovacích hodin, které jsou jádrem této práce, vycházíme z metodologie přípravy a realizace CLILové hodiny, kterou uvádí Coyle, Hood a Marsh (2010). Jedná se o šest následujících kroků, které provází vyučujícího od začátku plánovaní hodiny až do její reflexe.

5.1 Krok první: Vize

Pod pojmem vize zde rozumíme dlouhodobý cíl, který si vyučující stanoví pro svou výuku metodou CLIL. Proč vůbec CLIL do své výuky zavádím a čeho tím chci dosáhnout? Odpověď je pro každého vyučujícího individuální. Může se například jednat o snahu motivovat žáky k aktivnějšímu používání cizího jazyka i mimo umělé situace tradičních hodin či zlepšit jejich komunikační dovednosti. Součástí vize je i zodpovězení praktických otázek: Jaký cizí jazyk je nejvhodnější pro tuto látku? Jaké podmínky je třeba ve třídě nastavit, aby bylo možné dosáhnout cíle? Čeho konkrétně bychom měli dosáhnout na konci probírané látky, potažmo školního roku? Teprve definuje-li vyučující konkrétní vizi, může přejít k dalšímu kroku přípravy vyučování.

5.2 Krok druhý: Kontext

Od obecnější vize přechází vyučující ke konkrétní situaci na škole či ve třídě, ve které chce CLIL využít. Je důležité se ptát, zda mám pro svou aktivitu ve škole podporu jak od vedení, tak od ostatních kolegů. V rámci této přípravy je dále vhodné informovat o metodě rodiče, pokud je zde předpoklad, že metodu neznají a mohli by k ní mít nedůvěru. Jaké žáky budu vyučovat? Jaká je jejich jazyková úroveň? Jaká je skladba třídy? Jsou ve třídě výrazně slabší žáci? Jak k nim budu přistupovat? Vyučující by měl důkladně analyzovat kontext, ve kterém se bude výuka odehrávat, aby předcházel komplikacím, které by mu mohly zamezit realizovat svůj cíl. Do toho spadá i prostředí, ve kterém výuka bude probíhat. Materiální vybavení učebny (například možnost využít počítač či projektor) je rozhodující pro pozdější přípravu materiálů.

5.3 Krok třetí: Plánování učební jednotky

Samotné plánování učební jednotky (například jedné vyučovací hodiny) je asi nejobsáhlejší částí přípravy. Coyle, Hood a Marsh (2010) využívají v tomto kroku strukturu, kterou nazývá *4C* podle anglických slov *content, cognition, communication* a *culture* (obsah, poznávání, komunikace, kultura). Tato struktura předkládá čtyři body, které musí učitel ve své přípravě zohlednit.

5.3.1 Obsah

Pokud je CLILová hodina zařazena do běžného vyučování tradičního předmětu, je obsah této hodiny většinou určen výukovým plánem dané školy. Jedná-li se o projektové vyučování zařazené mimo rámec klasické výuky, má učitel možnost zamyslet se nad tím, jaký obsah je pro výuku metodou CLIL vhodný a na základě požadavků této metody obsah upravit.

Ve chvíli, kdy je známo téma hodiny, určí si vyučující konkrétněji specifikovaný výstup, který od žáků na konci učební jednotky očekává (například samostatné řešení libovolné kvadratické rovnice). Obsah hodiny by měl zpracovat velmi pečlivě, například vypsáním všech témat, kterých se v hodině hodlá dotknout.

Samozřejmostí při tomto postupu přípravy vyučování je neustálé vracení se k předchozím krokům. Při přípravě obsahu se učitel opakovaně táže sám sebe, zda obsah koresponduje s vizí, kterou si stanovil na počátku, a zda jeho rozsah a obtížnost odpovídá kontextu, ve kterém bude vyučován.

5.3.2 Poznávání

Cílem každé výuky by nemělo být pouze předání faktů a vědomostí, nýbrž i podpora a rozvoj vyšších úrovní vědomí jako je porozumění, řešení problémů a jejich pozdější reflexe. Proto se v druhé fázi plánování učební jednotky vyučující zaměří na propojení připraveného obsahu s výše uvedenými dovednostmi. Formulace cílů v tomto bodě využívá slovních spojení jako *dovede vysvětlit*, *uvádí vlastní příklady*, *vytváří hypotézy* nebo *navrhuje kreativní řešení úloh*. Stejně jako u předchozích kroků je nutné se ptát, zda je vytyčený cíl přiměřený a je v souladu s danou vizí.

5.3.3 Komunikace

Jelikož hodina vedená metodou CLIL je charakterizována svou dualitou cílů, kdy se kromě obsahu zaměřuje i na dovednosti v cizím jazyce, je třeba dopředu určit, jakým způsobem se s cizím jazykem bude v hodině nakládat. Právě kvůli tomuto propojení definují Coyle, Hood a Marsh (2010) jazykové cíle skrze vyučovaný obsah. Gramatiku nechávají stranou s poznámkou, že je možné odbočit k výkladu gramatiky, je-li to pro besprostřední komunikaci v předmětu potřeba. Při přípravě je možné využít tzv. *jazykový triptych*, který představuje tři náladující perspektivy.

Jazyk učení (*Language of learning*)
Je třeba si uvědomit, jaké jazykové jevy mohou žáky potkat během hodiny, ať už v materiálech nebo v ústním projevu učitele. Učitel sepíše klíčovou slovní zásobu k tématu stejně jako gramatické jevy, které se v tématu často vyskytují a žáci je nemusí znát. Každá vědní disciplína, která je touto metodou předávána, využívá typických frází a slovních obratů či pracuje s konkrétní slovní zásobou (např. matematické termíny). I ty by měly být součástí této fáze přípravy.

Jazyk k učení (*Language for learning*)
Dalším jazykovým aspektem je jazyk, který bude používán ve třídě při běžné komunikaci. Mezi to patří například pokyny učitele či jazykové prostředky, které žáci budou používat pro prezentaci svých výstupů, při práci ve skupinách či argumentaci při zpracovávání úkolů. Zvláště využívá-li se ve výuce třetí varianta CLILu s vysokou mírou užití cizího jazyka, měl by učitel i toto zahrnout do přípravy. Je dobré si rozmyslet, jakým způsobem podpoří to, aby žáci v hodině komunikovali plynule a aby tyto aktivity vedly k jejich dalšímu jazykovému rozvoji.

Jazyk skrze učení (*Language through learning*)
K zlepšování dovedností v cizím jazyce dochází v CLILových hodinách i mimoděk bez aktivního zásahu učitele už tím, že se žáci pohybují v prostředí, kde je tento jazyk užíván. Žáci v hodinách vedených metodou CLIL používají cizí jazyk zcela jiným způsobem než v klasických hodinách cizího jazyka. Učitel by měl žáky podpořit v tom, aby co nejvíce používali cizí jazyk k diskuzi, k vyjadřování vlastních postojů či prezentaci. Propojení jazyka a myšlení vede k hlubší úrovni učení.

5.3.4 Kultura

Jako poslední fázi při plánování učební jednotky uvádí Coyle, Hood a Marsh (2010) krok, který se zaměřuje na zvýšení kulturního povědomí žáků. Metoda CLIL je z principu integrativní – integruje cizí jazyk do klasické výuky v mateřštině, integruje dva vyučovací předměty, díky této metodě je možné integrovat i žáky různých národností či národnostních menšin do jedné třídy. Kromě cílů v cizím jazyce a konkrétním předmětu je tu tedy ještě vyšší cíl – žák by si měl uvědomovat svoji roli ve společnosti a ve světě. Díky přítomnosti cizího jazyka by měl získat mezikulturní porozumění, které by v delším horizontu mělo vést k větší míře tolerance mezi lidmi a kulturami. Toto téma je vhodné zařadit do výuky individuálně podle charakteru daného předmětu, přičemž je zřejmé, že některé předměty (zeměpis, společenské vědy, dějepis) toto umožňují ve větší míře, než jiné.

5.4 Krok čtvrtý: Příprava učební jednotky

Poté, co jsme naplánovali obsah a další cíle učební jednotky, transformujeme tyto abstraktní představy do konkrétních materiálů a aktivit. Učitel může převzít již existující materiály z dostupných zdrojů, pokud odpovídají jeho požadavkům. Některé materiály může upravit dle konkrétní potřeby. Stále by měl mít na paměti, aby výukové cíle odpovídaly i požadovaným výstupům, které od žáků očekává.

V připravených výukových hodinách tento krok doplníme ještě o časový harmonogram hodin, který dá vyučujícímu rámec, jež mu pomůže během výuky lépe hlídat její časový průběh.

5.5 Krok pátý: Sledování průběhu CLILové hodiny a hodnocení

Pro sledování průběhu hodiny a její zpětnou evaluaci je třeba stanovit způsob, jakým budeme pokrok žáků zkoumat. Součástí tohoto kroku je také určení hodnocení žáků, které by mělo být jak sumativní (zpětné zhodnocení žákovy práce) i formativní (průběžná zpětná vazba). Dobrou zpětnou vazbou pro učitele i žáka je individuální rozhovor s žákem o proběhlém vyučování.

5.6 Krok šestý: Reflexe

Po realizaci výukové jednotky přichází poslední krok a sice její reflexe. Coyle, Hood a Marsh (2010) uvádí, že velmi nápomocné mohou být komunity pedagogů, se kterými může učitel sdílet svou zkušenost a konzultovat případné problémy.

V této práci se v rámci reflexe odučených hodin ptáme především na to, zda bylo dosaženo cílů stanovených v předchozích krocích. Co fungovalo podle původních představ? Co se naopak ukázalo jako nefunkční? Bylo nutné se v průběhu vyučovací hodiny odchýlit od původního plánu, protože se situace vyvíjela neočekávaným způsobem? Co by bylo lépe udělat jinak? Analýza odučených hodin se odvíjí od záznamu jejich průběhu, který byl vytvořen bezprostředně po jejich realizaci.

Součástí reflexe připravených vyučovacích hodin jsou kromě posouzení dosažení stanovených cílů i výsledky dotazníku mezi žáky, kteří hodinu absolvovali a jejich stálých vyučujících.

6 Realizace vyučovacích hodin metodou CLIL

V rámci této diplomové práce byly realizovány tři vyučovací hodiny. Obsahem hodin bylo téma geometrická řada a cizím jazykem byl jazyk německý. V této kapitole je nejprve popsána příprava na tyto vyučovací hodiny. Kapitola dále obsahuje popis samotného průběhu vyučovacích hodin a jejich zpětnou analýzu. Materiály použité v rámci výuky nalezne čtenář v příloze. Úlohy řešené v rámci skupinové práce jsou k dispozici v podkapitole 6.4 včetně řešení.

6.1 Příprava vyučovacích hodin

Metodologie přípravy hodiny vedené metodou CLIL vycházející z (Coyle, Hood a Marsh, 2010) se skládá z šesti kroků, které jsou teoreticky popsány v kapitole 5. V této podkapitole za zabýváme prvními čtyřmi kroky, které se týkají přípravy vyučování. Uvádíme konkrétní přípravu tří vyučovacích hodin realizovaných na Arcibiskupském gymnáziu v Praze.

6.1.1 Krok první: Vize

Cíle lze rozdělit na ty zaměřené na matematiku a ty zaměřené na německý jazyk. V matematice je cílem procvičení učiva geometrické řady na složitějších příkladech. Žáci by měli nejen ovládat vzorec na výpočet součtu geometrické řady, ale umět ho aplikovat v úlohách, které zároveň vyžadují znalost dalších oblastí matematiky (výpočet obsahů či obvodů rovinných útvarů, výpočet objemů těles apod.). Žáci by měli být schopni nejen úlohy samostatně vyřešit, ale i argumentovat v rámci skupiny či třídy a dokázat obhájit svoje stanovisko. Svá řešení a postup by měli zvládnout vyjádřit jednoznačně jak písemně, tak ústně.

Cílem v oblasti německého jazyka jsou tři okruhy – slovní zásoba, gramatika a komunikace. Žáci by měli obohatit svůj slovník o termíny označující geometrické útvary, zlomky a další základní slovní zásobu z oblasti matematiky. Novým jevem v gramatice pro žáky pravděpodobně bude práce s předponou *um-*, která může ale nemusí být odlučitelná. Srovnáním tří podobných slov se žáci seznámí s tím, že i drobné gramatické nuance zásadně ovlivňují význam daných slov. Nově nabyté znalosti z oblasti slovní zásoby i gramatiky žáci zužitkují v prezentaci. Vrcholem jejich práce by měla být schopnost vyjádřit řešení úlohy, případně i klíčové kroky v postupu, německy.

6.1.2 Krok druhý: Kontext

Vyučovací hodiny byly realizovány v německé skupině třídy 8. B, což je maturitní ročník. Nyní se podíváme na situaci třídy z hlediska matematiky a německého jazyka.

Nekonečná geometrická řada je na Arcibiskupském gymnáziu v Praze, kde výuka matematiky probíhá v češtině, povinnou součástí školního vzdělávacího programu v posledním ročníku studia. Ve třídě 8. B bylo toto téma probíráno v druhé polovině prosince 2019 a na začátku ledna 2020 a bylo součástí pololetní písemné práce. Vyučující matematiky se zaměřoval i na aplikované úlohy – objevil se příklad na součet obvodů do sebe vepsaných čtverců, výpočet délky lomené čáry vytvořené z výšek pravoúhlého trojúhelníku apod. Dále žáci počítali v hodině rovnice, v nichž byla jedna strana tvořena geometrickou řadou. Žáci jsou tedy s tématem geometrické řady a výpočtem jejího součtu seznámeni.

Německý jazyk se na Arcibiskupském gymnáziu v Praze vyučuje již od prvního ročníku osmiletého studia. V osmém ročníku mají tedy žáci za sebou minimálně osm let školní výuky německého jazyka. Vrcholem školní výuky je v osmém ročníku možnost získání *Německého jazykového diplomu II. stupně*, díky němuž mohou být přijati na všech typech vysokých škol v Německu. Jazyková úroveň zaručená tímto diplomem je dle Evropského referenčního rámce buď B2 nebo C1 podle počtu získaných bodů. Žáci z 8. B absolvovali tuto zkoušku již v prosinci 2019.

Výuka metodou CLIL se uskutečnila ve třídě 8. B v německé jazykové skupině, kterou navštěvuje 12 žáků, místo tří vyučovacích hodin německého jazyka. Jak bylo řečeno, třída již absolvovala zkoušku k získání *Německého jazykového diplomu II. stupně* a jejich motivace v hodinách německého jazyka tím výrazně klesla. Na škole je totiž zavedeno pravidlo, že žáci, kteří získají *Německý jazykový diplom II. stupně* jsou osvobozeni od klasifikace pro dané pololetí. V průběhu týdne, v němž byly výukové hodiny realizovány, se žáci dozvěděli výsledky zkoušky a s výjimkou jednoho se tedy jednalo o jejich poslední hodiny německého jazyka vůbec. Zde sehrála klíčovou roli podpora tohoto typu výuky jejich vyučující německého jazyka, která motivovala žáky k aktivní účasti v mých hodinách navzdory tomu, že předmět měli již uznaný.

Z informací, které jsem obržela před realizací výuky vím, že řada žáků má problémy zejména v matematice. Je to dáno i tím, že v posledním ročníku gymnázia má již většina z nich rozhodnuto, jaký obor budou studovat po ukončení střední školy. Pokud se jejich budoucí cesta netýká matematiky, často se ani nesnaží problémům porozumět. Bylo tedy pravděpodobné, že problémy by mohly nastat právě na straně matematiky. Z výsledků jejich testů z poslední doby bylo zřejmé, že jsou úspěšnější u úloh vyžadujících aplikaci nějakého algoritmického postupu. Úlohy, v nichž je třeba kombinovat více poznatků z různých oblastí matematiky, dělaly větší problémy. Naším cílem je však právě rozvinout schopnost použít teoretické poznatky z více oblastí na řešení aplikovaných úloh. Bylo tedy nutné zvolit takový formát, aby se i slabší žáci mohli do aktivity plnohodnotně zapojit a byla pro ně prospěšná.

Všechny třídy na Arcibiskupském gymnáziu v Praze jsou vybaveny křídovou či fixovou tabulí, počítačem a projektorem, který jsme v rámci výuky využili pro prezentaci.

6.1.3 Krok třetí: Plánování učební jednotky

V rámci tohoto kroku se budeme držet schématu *4C* podle anglických slov *content, cognition, communication* a *culture* (obsah, poznávání, komunikace, kultura), které je teoreticky popsáno v podkapitole 5.3.

Obsah matematické části výuky bude mít těžiště v tématu nekonečná geometrická řada. Žáci by měli znát definici nekonečné geometrické řady včetně souvisejících termínů jako například kvocient, definici součtu nekonečné geometrické řady a vzorec pro výpočtet součtu nekonečné geometrické řady pro kvocient menší než absolutní hodnota z 1. Jádrem výuky budou aplikované vizualizované úlohy převzaté ze zdrojů psaných v češtině a němčině. Jedná se zejména o výpočet součtu obvodů a obsahů řady geometricky se zmenšujících rovinných útvarů či objemů řady geometricky se zmenšujících těles. Z oblasti německé gramatiky je klíčové téma odlučitelnosti resp. neodlučitelnosti předpony *um-*. Žáci budou seznámeni s rozdíly ve významu německých slov *abschreiben* (opsat ve smyslu opsat text na papír), *umschreiben* s neodlučitelnou předponou *um-* (opsat ve smyslu opsat kružnici trojúhelníku nebo ve smyslu říci něco jinými slovy) a *umschreiben* s odlučitelnou předponou *um-* (přepsat). Naučí se správně tvořit základní formy těchto sloves (časování v přítomném čase, perfektum, préteritum) a dokážou správně rozhodnout o jejich použití ve větě.

Nyní se zaměříme na oblast poznávání neboli na rozvoj kognitivních schopností žáků. Cílem vyučovacích hodin není pouze to, aby žáci dokázali spočítat výsledek určité úlohy. Žáci by měli svým výpočtům rozumět a umět je vysvětlit. Měli by také být schopni propojovat jednotlivé znalosti při řešení aplikačních úloh a uvědomovat si souvislosti. Ke splnění tohoto cíle se hodí metoda skupinové práce. V rámci tří až čtyřčlených skupin budou žáci řešit složitější aplikovanou úlohu. Při řešení ve skupině musí diskutovat, jeden druhému vysvětlovat svoje kroky a obhajovat svoje řešení. V diskuzi ve skupině mohou občas zaznívat nepřesné termíny či tvrzení. Proto budou muset žáci své řešení zformulovat i písemně a následně odprezentovat, čímž se zároveň dostojí komunikačnímu cíli. V písemném projevu už je nutné volit konkrétní termíny a vyjadřovat se jasně. Aby se žáci vpravili do tématu, budou nejprve pracovat s německy psaným motivačním příběhem a odpovídat na sadu otázek (viz příloha A). Připomenou si tím význam součtu nekonečné geometrické řady i potřebný vzorec. Jedna úloha bude řešena společně na tabuli, viz podkapitola 6.4.1.

Důležitým aspektem v realizovaných hodinách je komunikace. Nyní využijeme jazykového triptichu, který je teoreticky popsán v podkapitole 5.3.3. Cizí jazyk, který v hodině vedené metodou CLIL použijeme, je jazyk německý. Jazyk učení (*Language of learning*) se skládá z celé řady termínů a označení, které žáci obdrží formou slovníčku (viz příloha B). Znalost této slovní zásoby je nutná k řešení úloh, neboť všechna jejich jsou v němčině. V rámci motivačního příběhu na začátku hodiny se žáci naučí tvořit označení pro základní zlomky. K formulaci vlastních argumentů mohou použít slovník. Jazykem k učení (*Language for learning*), tedy jazykem používaným ve třídě ke komunikaci mezi žáky a učitelem či mezi žáky navzájem, byl zvolen jazyk český. V německém jazyce bude probíhat komunikace v první části hodiny při práci s motivačním příběhem. Hodina bude uvedena německy a diskuze k příběhu i odpovědi na otázky budou v německém jazyce. V části, kde se přejde ke gramatickým jevům a společnému příkladu na tabuli, bude výuka probíhat v českém jazyce. Vyučující česky vysvětlí gramatická pravidla, česky bude klást otázky a žáci budou česky odpovídat. Příklad (viz podkapitola 6.4.1), jehož zadání je v německém jazyce, bude též řešen česky vyučující za diskuze s žáky, kteří také navrhnou svá řešení česky.

Během skupinové práce budou žáci diskutovat mezi sebou česky. Závěrečná prezentace řešení úloh ale bude probíhat německy. Díky tomu, že žáci přečtou v první části hodiny německý příběh, všechny úlohy budou mít v německém jazyce a na závěr budou prezentovat německy před celou třídou, zlepší svůj jazyk skrze učení (*Language through learning*) a získají obecné jazykové kompetence použitelné i v jiných komunikačních situacích.

Poslední součástí schématu *4C* je zaměření na zvýšení kulturního povědomí žáků. To je do jisté míry již zajištěno použitím cizího jazyka ve výuce a prací s příklady převzatými z cizojazyčné učebnice. Jedním z cílů zavedení metody CLIL by mělo být větší porozumění mezi kulturami. Je zřejmé, že v hodině matematiky to nelze zavést explicitně, i když teoreticky je u některých témat možné volit úlohy s touto tématikou. Proto zůstává kulturní povědomí nejméně naplněným cílem realizovaných hodin.

6.1.4 Krok čtvrtý: Příprava učební jednotky

V rámci čtvrtého kroku přecházíme od abstraktních cílů k přípravě konkrétních materiálů a aktivit, které vedou k jejich naplnění. Naše učební jednotka se skládá ze tří vyučovacích hodin, které jsou rozděleny do jednoho dvouhodinového bloku a jedné samostatné vyučovací hodiny, jenž je realizována o tři dny později. S ohledem na to vypracováváme přesný plán výuky, jehož přehled vidíme v tabulkách 6.1, 6.2 a 6.3. Na použité materiály je v tabulkách odkázano.

6.2 Hodnocení žáků

V této podkapitole, která odpovídá pátému kroku z metodologie vedení hodin metodou CLIL podle Coyle, Hood a Marsh (2010) popsané teoreticky v kapitole 5, se zaměříme na možné hodnocení žáků v proběhlých hodinách. Jak bylo uvedeno výše, během realizace výuky obdrželi žáci výsledky zkoušky *Německého jazykového diplomu* a předmět německý jazyk, v rámci nějž byly hodiny realizovány, byl s výjimkou jednoho žáka uznán celé třídě. Z toho důvodu se nakonec hodiny vedené metodou CLIL nepromítly do závěrečného hodnocení. Zpětná vazba byla žákům z časových důvodů poskytnuta jen ústní formou po proběhlých prezentacích. Navrhneme nyní možnosti, jak by v podobně koncipovaném vyučování mohli být žáci hodnoceni, pokud by se výuka odehrávala v jiném kontextu.

Abychom mohli zkoumat pokrok žáků, stanovíme způsob, jakým ho budeme sledovat. Realizované hodiny měly cíl v oblasti matematiky a v oblasti německého jazyka. Pokrok v obou disciplínách by bylo možné sledovat například krátkým písemným testem na začátku či na konci každé vyučovací hodiny. Test by mohl obsahovat teoretické otázky či nějakou jednoduchou úlohu. Z jazykového hlediska by mohl test ověřovat tvoření výrazů označujících zlomky. Na konci každé hodiny by mohlo také proběhnout ústní opakování získaných znalostí a kompetencí takovým způsobem, aby se v odpovědích na učitelovy otázky vystřídalo všech 12 žáků. Učitel i žáci získají takto poměrně rychlou zpětnou vazbu o tom, jak žáci téma pochopili. Tento způsob získání zpětné vazby lze zařadit pod formativní hodnocení. Hodnocení žáků může být i sumativní formou písemného testu po proběhlých hodinách.

Čas	**Činnost učitele**	**Činnost žáka**	**Jazyk**	**Pomůcky**
1. vyučovací hodina				
00:00–05:00	Příchod do třídy, představení, seznámení žáků s programem a způsobem hodnocení.	Představení žáků – jméno, vztah k němčině a matematice, očekávání.	němčina	-
05:00–10:00	Rozdání pracovního listu s příběhem a otázkami. Příprava prezentace během samostatné práce žáků.	Samostatná práce – čtení příběhu a písemné zodpovídání otázek.	němčina	Pracovní list s příběhem a otázkami (viz příloha A).
10:00–20:00	Diskuze s žáky o příběhu, který četli. Společná kontrola odpovědí na otázky, vysvětlení způsobu tvoření zlomků v němčině.	Žáci se hlásí, jsou vyvoláváni a odpovídají na otázky z pracovního listu.	němčina	Tabule pro zápis odpovědí.
20:00–32:00	Vyučující promítne obrázek ke společnému příkladu (viz podkapitola 6.4.1) s opsanými kružnicemi. Diskuze nad německými slovy *umschreiben* (s odlučitelnou i neodlučitelnou předponou) a *abschreiben*.	Žáci jsou dotázáni na formy jednotlivých sloves, které sami tvoří a tím se seznamují s gramatickými rozdíly jednotlivých sloves.	čeština	Počítač s projektorem, tabule.
32:00–45:00	Vyučující promítne zadání společného příkladu. Příklad řeší na tabuli tím způsobem, že se žáků ptá na jednotlivé kroky postupu a jejich návrhy přiměřeně koriguje. Společně dojdou k řešení úlohy.	Žáci si přečtou zadání příkladu, doptají se na případné nejasnosti. Navrhují řešení příkladu, sami počítají dílčí výpočty do sešitu.	čeština	Počítač s projektorem, tabule.

Tabulka 6.1: Časový plán první vyučovací hodiny

Čas	**Činnost učitele**	**Činnost žáka**	**Jazyk**	**Pomůcky**
		2. vyučovací hodina		
00:00–05:00	Seznámení s programem druhé vyuč. hodiny. Pokyny ke skupinové práci. Rozdělení žáků do skupin.	Žáci se rozdělí do čtyř skupin po třech až čtyřech dle vlastních preferencí. Každá skupina obdrží jinou úlohu.	němčina	Pracovní listy s úlohami (viz podkapitoly 6.4.2, 6.4.3 a 6.4.4). Počítač s projektorem.
5:00–45:00	Vyučující obchází jednotlivé skupiny a individuálně pomáhá žákům s úlohami či přípravou na prezentaci.	Žáci nejprve společně vyřeší úlohu z pracovního listu. Po jejím vyřešení si připravují prezentaci svého řešení v němčině (mohou i na vlastním počítači jako počítačovou prezentaci). Řešení příkladu připraví i v písemné podobě s německým komentářem. Co nestihnou připravit v hodině, připraví za domácí úkol.	čeština/ němčina	Pracovní listy s úlohami (viz podkapitoly 6.4.2, 6.4.3 a 6.4.4). Volitelně vlastní počítače žáků. Žáci smí používat slovníček (viz příloha B), ale i vlastní či v elektronické formě.

Tabulka 6.2: Časový plán druhé vyučovací hodiny

Čas	**Činnost učitele**	**Činnost žáka**	**Jazyk**	**Pomůcky**
3. vyučovací hodina				
00:00–03:00	Přivítání se s žáky. Krátká reflexe toho, jak se jim na prezentacích pracovalo. Seznámení s průběhem hodiny.	Žáci mohou sdílet to, jak probíhala jejich příprava, co jim dělalo obtíže a co se naopak dařilo.	němčina	-
3:00–33:00	Vyučující sleduje prezentace, do kterých vstupuje až v závěru s případnými otázkami. Pomáhá žákům s technickou přípravou prezentace, je-li to potřeba. Pokud žáci prezentují řešení pouze na tabuli, promítne vyučující zadání úlohy pro ostatní.	Skupiny postupně prezentují řešení svých úloh. Ostatní sledují a po skončení prezentace mají prostor pro otázky.	němčina	Počítač s projektorem.
33:00–45:00	Vyučující rozdá žákům krátký dotazník s reflexí hodin vedených metodou CLIL. V závěru hodiny poděkuje za spolupráci a rozloučí se.	Žáci vyplňují dotazník, ve kterém reflektují jak svoji práci v proběhlých hodinách, tak práci vyučujícího i celý koncept CLILu.	čeština	Papír s dotazníkovými otázkami, viz podkapitola 6.3.3.

Tabulka 6.3: Časový plán třetí vyučovací hodiny

Pokud by prezentace žáků byly známkovány, bylo by vhodné přesně stanovit kritéria hodnocení těchto výstupů. Hodnotit by se dalo například dodržení časového limitu (10 minut), plynulost vyjadřování a gramatická správnost, faktická správnost výpočtů, jejich strukturovanost a přehlednost a skutečnost, zda se v rámci prezentace rovnoměrně střídali všichni žáci. Tato kritéria je nutné stanovit před samotnou přípravou a realizací prezentací a je vhodné je žákům sepsat a vytisknout.

6.3 Průběh vyučovacích hodin a reflexe

V této podkapitole stručně popíšeme průběh realizovaných vyučovacích hodin a zhodnotíme jej z hlediska dosažení stanovených cílů. Reflexe vyučovacích hodin byla provedena také formou dotazníku na konci poslední vyučovací hodiny. Jeho výsledky jsou popsány v této podkapitole, stejně jako reflexe vyučující německého jazyka, která byla všem realizovaným hodinám přítomna. Tato podkapitola odpovídá šestému kroku z metodologie vedení hodin metodou CLIL podle publikace (Coyle, Hood a Marsh, 2010), viz kapitola 5 této práce.

6.3.1 Průběh vyučovacích hodin

První vyučovací hodina začala podle plánu představením vyučující a společného programu. Každý z žáků německy vyjádřil svoje očekávání od hodin vedených metodou CLIL i svůj vztah k matematice. Z dvanácti přítomných žáků se přibližně polovina vyjádřila v tom smyslu, že matematiku má rada, druhá část třídy se přiznala k tomu, že matematika nepatří mezi jejich oblíbené předměty. Obecně panovala shoda na tom, že geometrie patří mezi méně oblíbené oblasti matematiky.

Poté byly žákům rozdány pracovní listy s příběhem a otázkami (viz příloha A). Žáci několik minut samostatně pracovali. Když byla již zhruba třetina třídy hotova, vstoupila jsem do jejich práce a začala diskuzi nad otázkami. Tvoření zlomků v němčině dělalo žákům problémy teprve s jmenovatelem vyšším než dvacet. Zde jsem přešla do českého jazyka, abych důkladněji vysvětlila proces slovotvorby u číslovek vyjádřujících zlomky v němčině. Seznámila jsem žáky s německým označením číslovky základní a řadové a připomněla, jak lze německy různými způsoby vyjádřit číslo jeden a půl. Když jsme v rámci diskuze přešli k tomu, zda součet někonečně mnoha čísel může být roven konečnému číslu, ukázalo se, že žáci nerozumí zcela vlastnostem nekonečné řady. Většina žáků tvrdila, že koláč z příběhu, který Hans jí tím způsobem, že vždy sní polovinu zbylého koláče, nikdy nebude sněden. Připomněla jsem jim příběh o Achillovi a želvě (viz podkapitola 1.5), který většina znala z hodin filozofie. Část žáků ale tvrdila, že Achilles želvu nedohoní, neboť tak to tvrdil Zénón z Eleje, autor paradoxu o Achillovi a želvě. Předpokládala jsem, že žáci budou již tyto paradoxy znát jak z hodin matematiky, tak filozofie a neměla jsem tedy pro toto téma vyhrazeno tolik času. V této části diskuze jsem tedy proti plánu opakovaně přešla do češtiny pro větší srozumitelnost. Z časových důvodů jsem musela diskuzi zkrátit a žákům jsem prozradila, že součet nekončně mnoha čísel může být za určitých předpokladů konečný. Jelikož žáci podle svých slov nebyli vedeni k tomu zapisovat nekonečnou geometrickou řadu formou sumy, seznámila jsem je stručně s tímto zápisem a zopakovala vzorec pro součet geometrické řady s kvocientem menším než 1.

Poté jsem promítla obrázek k prvnímu příkladu a věnovala se části s německou gramatikou. Žáci měli nejprve německy pojmenovat útvary, které viděli na projektoru, a poté popsat jejich vztah. Tato diskuze nás přenesla k výkladu německé gramatiky, která proběhla podle plánu. Na konci výkladu zazvonilo na přestávku. Po celou dobu první vyučovací hodiny žáci věnovali pozornost výkladu a většina z nich se zapojovala do diskuze.

V druhé hodině jsem společně s žáky vypočítala na tabuli první dva body příkladu z podkapitoly 6.4.1. Příklad byl řešen formou řízené diskuze, kterou jsem z časových důvodů usměrňovala tak, abychom se dostali co nejrychleji k výsledku. Chtěla jsem totiž, aby žákům zbylo co nejvíce času na práci ve skupině. Řešení příladu na tabuli zabralo zhruba 10 minut, zbytek hodiny pracovali žáci ve třech skupinách po čtyřech na příkladech z podkapitol 6.4.2 až 6.4.4, každá skupina řešila jednu úlohu. Na tabuli jsem napsala důležité vzorečky pro výpočet obsahů či povrchů útvarů, které musí žáci v úlohách využít. Žáci dostali také vytištěný seznam slovíček s překladem (viz příloha B), které by mohli během prezentace upotřebit.

Do řešení příkladu se v každé skupině všichni zapojili a mezi žáky v rámci skupin probíhala živá diskuze. Bylo zřetelené, že v každé skupině měli vedoucí pozici jeden či dva žáci, kteří byli zřejmě v matematice nadanější. Ti vysvětlovali kroky ostatním. Skupiny si také rozdělovaly jednotlivé dílčí výpočty nebo si je po sobě navzájem kontrolovali. Během obcházení třídy jsem zkontrolovala skupinám již hotové mezivýpočty a upozornila je na případné chyby ve výpočtu. Navzdory poctivé práci však ani jedna ze skupin nedošla do konce hodiny k výsledku. Poprosila jsem tedy vyučujícího matematiky, zda by s žáky nemohl příklady probrat v hodině matematiky, aby byli připraveni na prezentaci, která se konala tři dny poté.

V následujících dvou dnech se žáci vrátili k úlohám ještě v hodině matematiky s jejich stálým vyučujícím, aby doladili detaily svého řešení. Třetí den se konaly prezentace. Hodina začala mým úvodem s dotazem, jak se dařila příprava. Žáci nebyli moc sdílní, ale dali najevo, že jsou připraveni. Postupně tedy každá skupina prezentovala na tabuli řešení svého příkladu. Bylo zřetelné, že v každé skupině měl jeden žák vůdčí pozici. V prezentaci se projevoval nejvýrazněji a případně korigoval chyby svých spolužáků. Došlo také k tomu, že se někteří jednotlivci prezentace skoro neučastnili a pouze stáli před tabulí. Konkrétně se jednalo o dva žáky z různých skupin. Úroveň projevu byla velmi různá u jednotlivých žáků. Některým činila problémy zejména jazyková bariéra a jejich projev v němčině nebyl plynulý. U některých bylo vidět, že patrně nerozumí prezentovanému obsahu příliš do hloubky. Celkově byl z důvodů používání německého jazyka projev velmi pomalý a žáci v přibližně 10 minut dlouhých výstupech odprezentovali jen klíčové výsledky. Svůj postup nerozepisovali celý, u dílčích výpočtů se vždy pouze odkázali na Pýthagorovu větu. V prezentaci nerozebírali ani celkovou ideu součtu nekonečné geometrické řady a rovnou aplikovali vzorec. V posledních deseti minutách se k realizované výuce vyjádřili v dotazníku, jehož výsledky jsou zpracované v podkapitole 6.3.3.

6.3.2 Reflexe vyučující

První vyučovací hodina proběhla v příjemné atmosféře. Na žácích byl vidět zájem způsobený netradiční metodou výuky. Hodina měla svoji dynamiku a obsahově se držela připraveného plánu. Hodina bohužel nedodržela časový plán. Důvodem byly zejména velké mezery v oblasti matematiky, na něž mělo jistě vliv i to, že žáci byli ve škole první den zhruba po měsíci (projektový týden, příprava na maturitní ples, pololetní prádniny, celotýdenní soustředění a jarní prázdniny). Jelikož jsem předpokládala, že téma geometrické řady je již probráno, nenaplánovala jsem na opakování tématu mnoho času. Příběh, který jsem použila jako motivaci, byl variací na podobný příběh, jenž žáci již slyšeli v hodině matematiky. V průběhu první vyučovací hodiny jsem si uvědomila, že téma geometrické řady by bylo nutné zopakovat mnohem důkladněji, než na kolik byl v hodině prostor. Původně jsem očekávala, že žáci zopakují téma samostatně jen formou odpovědí na moje otázky. Neměla jsem tedy připravený podrobný výklad k tomuto tématu. Jelikož žáci nebyli schopni na většinu mých otázek odpovědět (jak zapíšeme nekonečnou geometrickou řadu, jaký je vzorec pro součet řady atd.), musela jsem téma odvykládat sama. Uvědomuji si, že výklad z tohoto důvodu nebyl příliš sturkturovaný. Jsem si vědoma toho, že část žáků v momentě, kdy jsme přešli k dalšímu tématu, stále neměla správnou představu o nekonečné geometrické řadě, v zájmu dodržení obsahového plánu jsem však musela opakování opustit. Při výkladu gramatiky žáci projevovali výrazně větší zájem i porozumění v porovnání s matematickou částí. Téma z gramatiky bylo pro většinu nové.

Program druhé vyučovací hodiny byl obohacen o společné řešení příkladu 6.4.1 na tabuli, které mělo být původně realizováno v hodině první. Přesto měli žáci více než půl hodiny na práci ve skupinách. Do práce byli velmi hluboce zabraní, takže mnohdy ani příliš nevnímali své okolí. Jejich skupinová práce se mi velmi líbila. Bylo vidět, že na všechno chtějí přijít sami, nestáli například o moji pomoc, když jsem jim ji nabízela. Svolili jen ke kontrole mezivýpočtů. Teprve těsně před koncem hodiny jsem si všimla, že dva žáci z jedné skupiny se už společné práci nevěnují. Jinak pracovali všichni intenzivně. Bylo zřejmé, že mají velmi dobře zažité početní stereotypy – jak si příklad přehledně zapsat na papír, vhodná volba neznámých, velice dobře uměli napodobit postup řešení příkladu z tabule, který byl k řešení jejich úloh analogický. Uměli dobře použít vzorce z tabule, ale sami přiznali, že z hlavy si těžko vzpomenou i na vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku. Moje role v této vyučovací hodině byla s výjimkou prvních deseti minut spíše upozaděná a hlavní roli sehráli žáci, jejich práce a diskuze, což naplnilo cíl této vyučovací hodiny.

Třetí vyučovací hodina ukázala výsledky skupinové práce žáků. Žáci se na prezentace připravili, ne však zcela důkladně. Bylo vidět, že mají připravené to, co bude který z nich říkat, ale že si svůj projev předem nevyzkoušeli. Proto mnozí často dlouho hledali správná slova a dopouštěli se zbytečných gramatických chyb.

Poslední hodina potvrdila můj dojem z prvních dvou hodin, že na důkladné zvládnutí připraveného obsahu by bylo potřeba mnohem více času. Matematika i německý jazyk patří mezi nejnáročnější předměty. Jen samotné jazykové prostředky využívané v oblasti matematiky by zasloužily důkladnější procvičení. Žáci si během tak krátkého času nestihli zafixovat výrazy používané pro označení zlomků, mocnin či odmocnin a geometrických útvarů. Tyto věci by mohly být opakovány například formou rozcviček na začátku hodiny, her určených k procvičování slovní zásoby, formou německých matematických výukových videí či četbou souvisejících textů. Samotné upevnění tohoto učiva včetně ověření pomocí zkoušení či testu by mohlo zabrat i tři vyučovací hodiny. Pokud bychom používali metodu CLIL v běžné výuce a nejazykovým předmětem by byla matematika, bylo by jistě vhodnější začít s výrazně jednoduššími příklady, než jaké byly použity v rámci realizovaných hodin. U jednoduchých příkladů by byl hlavní důraz kladen spíše na jazykovou stránku, která by se tímto upevnila a teprve tehdy by mohl být vyžadován složitější výstup z matematiky.

Co se týká matematické části výuky, i zde by bylo vhodné věnovat větší míru času procvičení tématu nekonečná geometrická řada. Z prezentací, reflexe vyučujícího matematiky i z mého pozorování vyplynulo, že v každé skupině byl jeden či dva žáci, kteří se v příkladu příliš neorientovali a měli ve skupině spíš pasivní roli. To by se v běžné výuce dalo zlepšit větším důrazem na samostatné procvičování s následnou kontrolou vyučujícím.

6.3.3 Reflexe žáků

Na konci poslední vyučovací hodiny dostali žáci dotazník s dvěma otázkami, z nichž první se zaměřovala na hodnocení propojení cizího jazyka a nejazykového předmětu obecně, druhá se vztahovala na hodnocení konkrétních proběhlých hodin. Otázky byly formulovány následovně:

- Jak hodnotíte myšlenku spojení cizího jazyka a nejazykového předmětu v jedné vyučovací hodině? V čem vidíte přínos? V čem nedostatky?
- Jak hodnotíte průběh hodin, které jste absolvovali (obtížnost, srozumitelnost, přínos atd.)?

Nejprve shrhneme odpovědi na první otázku. Přínos metody viděli žáci především v rozšíření slovní zásoby a zlepšení komunikace v cizím jazyce. Několik žáků uvedlo, že použití cizího jazyka jim umožnilo jiný úhel pohledu na vyučovaný předmět. Objevily se názory, že tato metoda je vhodná spíše pro školy se zaměřením na jazyky, nikoli pro všeobecné gymnázium. Většina žáků se shodla na tom, že jako jednorázová zkušenost je to zajímavé. Kriticky bylo hodnoceno především konkrétní spojení německého jazyka s matematikou. Žáci uváděli, že oba předměty jsou na škole považovány za obtížné, či že přímo jim konkrétně jeden z nich dělá problém. Jejich spojení proto hodnotila část žáků jako příliš náročné. Někteří psali, že by pro tento typ výuky preferovali angličtinu, ve které se cítí jistěji.

Odpovědi na druhou otázku byly rozmanité. Většina žaků hodnotila výuku pozitivně jako dobrou a zajímavou zkušenost. Dva žáci uvedli, že mají velmi negativní vztah k matematice a proto pro sebe konkrétně přínos nevnímají. Obecně se objevovaly komentáře ohledně ne příliš vhodného načasování, jelikož hodiny byly realizovány méně než tři měsíce před maturitní zkouškou. Žáci považovali za obtížné soustředit se na zcela jiné téma než jsou ta, která očekávají v maturitní zkoušce. Zmíněna byla i vysoká obtížnost připravené výuky, která měla být zvládnuta v poměrně krátkém čase. Dva žáci vyjádřili názor, že by byli radši, pokud by se výuka obešla bez prezentací. Zde je obtížné interpretovat, jak tyto komentáře byly zamýšleny. Jeví se pravděpodobné, že žáci měli na mysli prezentace svých řešení úloh. Počítačové prezentace, které jsem používala v hodinách, sloužily spíš k promítnutí zadání úloh či jevů v gramatice, které by bylo časově náročné psát na tabuli, na což jsou žáci zvyklí z jiných hodin a méně pravděpodobně to vnímají negativně.

6.3.4 Reflexe stálých vyučujících německého jazyka a matematiky

Proběhlé výuce metodou CLIL byla přítomna i stálá vyučující německého jazyka v 8. B, Mgr. Jana Ginzelová. Závěrečným prezentacím byl přítomen stálý vyučující matematiky v 8. B, RNDr. Zdeněk Vavřín, CSc., který navíc pomáhal žákům během týdne s řešením zadaných úloh. Oba vyučující byli po skončení výuky dotázáni na zpětnou vazbu, kterou shrneme v této podkapitole.

Vyučující německého jazyka, Mgr. Jana Ginzelová, vnímá podle svých slov proběhlou výuku jako zajímavé zpestření a považuje za pozitivní, že se výuky účastnila aktivně většina žáků. Sama má zkušenost s použitím této metody v kombinaci dějepis a neměcký jazyk a metodu podporuje. Všímá si toho, že obsahově byla výuka poměrně obsáhlá co do množství nového učiva v němčině (slovní zásoba i gramatika), tak z hlediska matematiky, což hodnotí jako možná až příliš náročné. Ve svém hodnocení zmiňuje i lehkou nervozitu na začátku výuky a problémy s technikou, jelikož výuka probíhala v učebně německého jazyka, kde byla k dispozici pouze velmi malá fixová tabule a špatně fungující interaktivní tabule.

Vyučující matematiky, RNDr. Zdeněk Vavřín ,CSc., hodnotí pozitivně zejména volbu úloh. Ve své zpětné vazbě k proběhlému vyučování píše: „Úlohy byly voleny vhodným způsobem jak z hlediska časové zvládnutelnosti, tak i z hlediska potřebných termínů, s nimiž se studenti v rámci řešení a závěrečného (cizojazyčného) předvedení zadaných úkolů mohli důkladně seznámit. Prostorová úloha (střídavé vepisování koule do krychle a krychle do koule) přinesla několik důležitých termínů ze stereometrie a z matematického hlediska byla pro studenty i posluchače užitečným cvičením prostorové představivosti.“

6.3.5 Shrnutí

Výuka byla zajímavým zpestřením běžné výuky, což odráží i reflexe žáků. Jistě přinesla nové podněty a nový pohled na možnosti výuky dvou obvykle oddělených předmětů. Žáci si vyzkoušeli pro ně nezvyklou prezentaci řešení matematické úlohy v německém jazyce, čímž byl jejich slovník obohacen o některá nová slova. Měli možnost spolupracovat a společně diskutovat nad řešením úloh, což rozvíjelo jejich argumentační schopnosti. V tomto smyslu byl naplněn cíl vyučování.

Zpětně se ukazuje, že pokud bychom metodu CLIL chtěli zařadit do běžné výuky, byla by nutná mnohem větší časová dotace. Obsah výuky v matematice i německém jazyce byl pro žáky velmi náročný a neměli příliš mnoho času si jej zafixovat. Ve výuce bohužel nezbyl prostor ani na detailnější zpětnou vazbu žákům ať už formou testu či obsáhlejšího slovního hodnocení. Kombinaci matematiky a německého jazyka v jednom předmětu považujeme tedy za přínosnou, pokud probíhá dlouhodobě s možností častějšího procvičování klíčových jazykových prostředků i matematických dovedností a jejich upevněním. Jako krátký ohraničený vstup do běžné výuky přináší zajímavé zpestření, ale získané kompetence nejsou příliš hluboké.

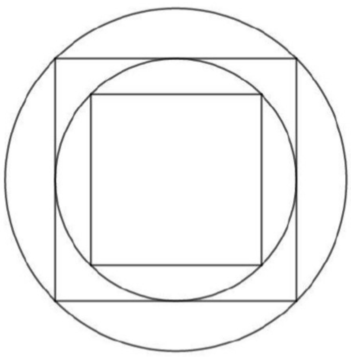
6.4 Úlohy řešené v hodinách a v rámci skupinové práce

Tato podkapitola obsahuje přehled úloh, které byly použity ve výuce realizované jako součást této práce. Každá podkapitola obsahuje kromě zadání úlohy, obrázku a překladu zadání do německého jazyka i podrobné řešení úlohy.

6.4.1 Úloha řešená na tabuli

Zadání úlohy:[1] Do kruhu o poloměru r je vepsán čtverec, do něho kruh, do toho opět čterec atd. do nekonečna (viz obr. 6.1). Určete a) součet obsahů všech kruhů, b) součet obsahů všech čtverců, c) součet obvodů všech kruhů, d) součet obvodů všech čtverců.

Německé znění úlohy: Einem Kreis vom Radius r wird ein Quadrat eingeschrieben, diesem wieder ein Kreis, diesem wieder ein Quadrat, usw. ohne Ende. Berechne a) die Summe der Flächeninhalte aller Kreise, b) die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate, c) die Summe der Umfänge aller Kreise, d) die Summe der Umfänge aller Quadrate.



Obr. 6.1: Posloupnost střídavě vepisovených čtverců a kruhů

[1] Převzato z (Malle a kol., 2014: s. 138).

Řešení úlohy: Polovina úhlopříčky u_1 čtverce A_1, který je vepsán kruhu K_1, je rovna poloměru r tohoto kruhu. Z Pýthagorovy věty vyjádříme stranu a_1 čtverce A_1:

$$a_1 = \sqrt{\frac{u_1^2}{2}} = \sqrt{\frac{(2r)^2}{2}} = r\sqrt{2}.$$

Polovina strany čtverce A_1 je rovna poloměru r_2 jemu vepsaného kruhu K_2, tedy $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}r$. Poloměr r_2 je roven polovině úhlopříčky u_2 čtverce A_2, který je vepsán kruhu K_2. Z Pýthagorovy věty vyjádříme délku strany a_2 čtverce A_2:

$$a_2 = \sqrt{\frac{u_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}r\right)^2}{2}} = r.$$

Nyní vyjádříme obsah S_1 kruhu K_1 a obsah S_2 kruhu K_2:

$$S_1 = \pi r^2,$$

$$S_2 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2 = \frac{\pi r^2}{2}.$$

Určíme kvocient q posloupnoti S_n jako podíl S_2 a S_1. Dostaneme $q = \frac{1}{2}$. Součet obsahů všech kruhů je pak roven

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} S_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \pi r^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi r^2.$$

Dále vyjádříme obsah S_1' čtverce A_1 a obsah S_2' čtverce A_2:

$$S_1' = a_1^2 = 2r^2,$$

$$S_2' = a_2^2 = r^2.$$

Určíme kvocient q' posloupnosti S_n' jako podíl S_2' a S_1'. Dostaneme $q' = \frac{1}{2}$. Součet obsahů všech čtverců A_n je pak roven

$$s' = \sum_{n=1}^{\infty} S_1' \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2r^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4r^2.$$

Nyní vyjádříme obvod o_1 kruhu K_1 a obvod o_2 kruhu K_2:

$$o_1 = 2\pi r,$$

$$o_2 = 2\pi\frac{\sqrt{2}}{2}r = \pi r\sqrt{2}.$$

Určíme kvocient q'' posloupnosti o_n jako podíl o_2 a o_1. Dostaneme $q'' = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Součet obvodů všech kruhů K_n je pak roven

$$s'' = \sum_{n=1}^{\infty} o_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = 2\pi r \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\pi r}{2-\sqrt{2}} = 2\pi r(2+\sqrt{2}).$$

Dále vyjádříme obvod o'_1 čtverce A_1 a obvod o'_2 čtverce A_2:

$$o'_1 = 4a_1 = 4r\sqrt{2},$$

$$o'_2 = 4a_2 = 4r.$$

Určíme kvocient q''' posloupnosti o'_n jako podíl o'_2 a o'_1. Dostaneme $q''' = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Součet obvodů všech čtverců A_n je pak roven

$$s''' = \sum_{n=1}^{\infty} o'_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = 4r\sqrt{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8r\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 4\left(2+\sqrt{2}\right) r\sqrt{2}.$$

6.4.2 Úloha ze skupinové práce 1

Zadání úlohy:[2] Do rovnostranného trojúhelníku $A_1B_1C_1$ o straně délky a je vepsán kruh K_1, do něho rovnostranný trojúhelník $A_2B_2C_2$, do toho opět kruh K_2 atd. do nekonečna (viz obr. 6.2). Určete a) součet obsahů všech těchto trojúhelníků, b) součet obsahů všech těchto kruhů.

Německé znění úlohy: Einem gleichseitigen Dreieck $A_1B_1C_1$ mit der Seitenlänge a wird ein Kreis K_1 eingeschrieben, dem Kreis dann ein gleichseitiges Dreieck $A_2B_2C_2$, dem Dreieck ein Kreis K_2 usw. Wir denken uns diesen Prozess unendlich oft fortgesetzt. Berechne a) die Summe der Flächeninhalte aller Dreiecke, b) die Summe der Flächeninhalte aller Kreise.

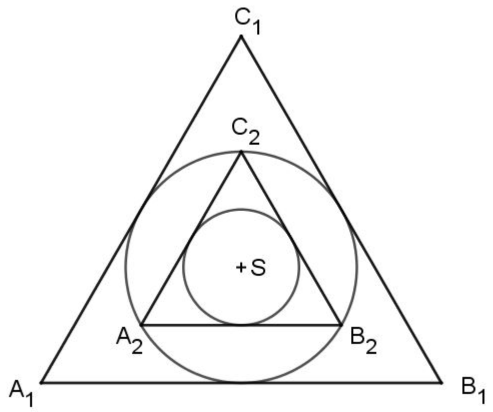
Řešení úlohy: Poloměr vepsaného kruhu je roven třetině délky těžnice, neboť těžiště splývá se středem vepsaného kruhu. V rovnostranném trojúhelníku splývá také výška s těžnicí. Stačí tedy vypočítat výšku v_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Z Pýthagorovy věty víme, že platí

$$v_1 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = a\sqrt{1-\frac{1}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Poloměr kruhu K_1 je tedy $r_1 = a\frac{\sqrt{3}}{6}$. Poloměr kruhu K_1 je zároveň roven dvěma třetinám těžnice, resp. výšky rovnostranného trojúhelníku $A_2B_2C_2$, tedy $v_2 = a\frac{\sqrt{3}}{4}$. Z vlastnosti středních příček umíme vyjádřit velikost strany trojúhlníku $A_2B_2C_2$:

$$a_2 = \frac{1}{2}a.$$

[2] Převzato z (Polák, 1999: s. 72).



Obr. 6.2: Posloupnost střídavě vepisovaných kruhů a rovnostranných trojúhelníků

Poloměr kruhu K_2 je roven jedné třetině délky těžnice, resp. výšky trojúhelníku $A_2B_2C_2$, tedy $r_2 = a\frac{\sqrt{3}}{12}$. Nyní vypočítáme obsah S_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ a obsah S_2 trojúhelníku $A_2B_2C_2$:

$$S_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

$$S_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a \cdot \frac{1}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2.$$

Určíme kvocient q posloupnoti S_n jako podíl S_2 a S_1. Dostaneme $q = \frac{1}{4}$. Součet obsahů všech trojúhelníků $A_nB_nC_n$ je pak roven

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} S_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

Nyní vyjádříme obsah S_1' kruhu K_1 a obsah S_2' kruhu K_2:

$$S_1' = \frac{\pi a^2}{12},$$

$$S_2' = \frac{\pi a^2}{48}.$$

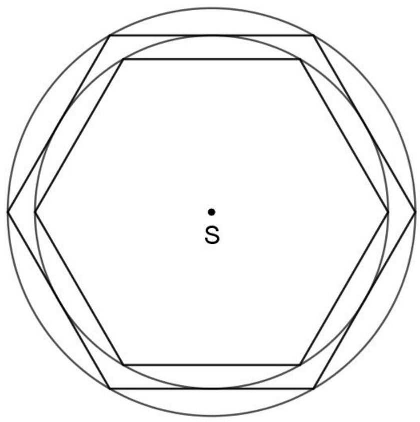
Určíme kvocient q' posloupnosti S_n' jako podíl S_2' a S_1'. Dostaneme $q' = \frac{1}{4}$. Součet obsahů všech kruhů K_n je pak roven

$$s' = \sum_{n=1}^{\infty} S_1' \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{\pi a^2}{12} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi a^2}{9}.$$

6.4.3 Úloha ze skupinové práce 2

Zadání úlohy:[3] Do kruhu o poloměru r je vepsán pravidelný šestiúhelník, do něho kruh, do toho opět pravidelný šestiúhelník atd. do nekonečna (viz obr. 6.3). Určete a) součet obsahů všech těchto kruhů, b) součet obsahů všech těchto šestiúhelníků.

Německé znění úlohy: Einem Kreis vom Radius r wird ein gleichseitiges Sechseck eingeschrieben, dem Sechseck dann ein Kreis, dem Kreis wieder ein gleichseitiges Sechseck usw. Wir denken uns diesen Prozess unendlich oft fortgesetzt. Berechne a) die Summe der Flächeninhalte aller Sechsecke, b) die Summe der Flächeninhalte aller Kreise.



Obr. 6.3: Posloupnost střídavě vepisovených šestiúhelníků a kruhů

Řešení úlohy: Pravidelný šestiúhelník je složen z šesti rovnostranných trojúhelníků. Je-li pravidelný šestiúhelník A_1 vepsán do kruhu K_1 o poloměru r, je délka strany jednoho z těchto rovnostranných trojúhelníků rovna r. Výšku v_1 jednoho z těchto rovnostranných trojúhelníků vyjádříme z Pýthagorovy věty:

$$v_1 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}r\right)^2} = r\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = r\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tato výška je zároveň rovna poloměru r_2 kruhu K_2 vepsaného pravidelnému šestiúhelníku A_1. Poloměr r_2 je potom roven délce strany pravidelného šestiúhelníku A_2, který je vepsán kruhu K_2. Nyní vypočítáme obsah S_1 kruhu K_1 a obsah S_2 kruhu K_2:

$$S_1 = \pi r^2,$$

$$S_2 = \frac{3\pi r^2}{4}.$$

[3]Převzato z (Polák, 1999: s. 72).

Určíme kvocient q posloupnosti S_n jako podíl S_2 a S_1. Dostaneme $q = \frac{3}{4}$. Součet obsahů všech kruhů K_n je pak roven

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} S_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \pi r^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4\pi r^2.$$

Obsah S_1' pravidelného šestiúhelníku A_1 vyjádříme podle vzorce pro výpočet obsahu pravidelného šestiúhelníku:

$$S_1' = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}.$$

Obsah S_2' pravidelného šestiúhelníku A_2 je podle téhož vztahu roven:

$$S_2' = \frac{9r^2\sqrt{3}}{8}.$$

Určíme kvocient q' posloupnoti S_n' jako podíl S_2' a S_1'. Dostaneme $q' = \frac{3}{4}$. Součet obsahů všech pravidelných šestiúhelníků A_n je pak roven

$$s' = \sum_{n=1}^{\infty} S_1' \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 6r^2\sqrt{3}.$$

6.4.4 Úloha ze skupinové práce 3

Zadání úlohy:[4] Do krychle o hraně délky a je vepsána koule, do ní krychle, do té opět koule atd. do nekonečna. Vypočítejte a) součet povrchů všech těchto koulí, b) součet povrchů všech těchto krychlí.

Německé znění úlohy: Einem Würfel mit der Kantenlänge a wird eine Kugel eingeschrieben, der Kugel dann ein Würfel, dem Würfel eine Kugel usw. Wir denken uns diesen Prozess unendlich oft fortgesetzt. Berechne a) die Summe der Oberflächeninhalte aller Kugeln b) die Summe der Oberflächeninhalte aller Würfel.

Řešení úlohy: Polovina délky hrany první krychle A_1 je rovna poloměru r_1 jí vepsané koule K_1, tedy $r_1 = \frac{1}{2}a$. Poloměr r_1 je potom roven polovině tělesové úhlopříčky u_2 jí vepsané krychle A_2, tedy $u_2 = a$. Tělesovou úlohlopříčku délky a krychle o hraně a_2 můžeme pomocí dvojité aplikace Pýthagorovy věty vyjádřit jako

$$a = a_2\sqrt{3},$$

tedy hrana a_2 krychle A_2 je rovna

$$a_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

[4] Převzato z (Polák, 1999: s. 72).

Koule K_2 vepsaná krychli A_2 má poloměr r_2 roven polovině hrany této krychle, tedy $r_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}a$. Nyní vyjádříme povrch S_1 koule K_1 a povrch S_2 koule K_2 :

$$S_1 = 4\pi \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \pi a^2,$$

$$S_2 = 4\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 = \frac{1}{3}\pi a^2.$$

Určíme kvocient q posloupnosti S_n jako podíl S_2 a S_1. Dostaneme $q = \frac{1}{3}$. Součet povrchů všech koulí K_n je pak roven

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} S_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \pi a^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Nyní vyjádříme povrch S_1' krychle A_1 a povrch S_2' krychle A_2:

$$S_1' = 6a^2,$$

$$S_2' = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = 2a^2.$$

Určíme kvocient q' posloupnoti S_n' jako podíl S_2' a S_1'. Dostaneme $q' = \frac{1}{3}$. Součet povrchů všech krychlí A_n je pak roven

$$s' = \sum_{n=1}^{\infty} S_1' \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 6a^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 9a^2.$$

Závěr

Diplomová práce poskytla náhled na výuku tématu nekonečné geometrické řady z pohledu tří různých evropských zemí – České republiky, Rakouska a Německa. V České republice, která dává školám největší volnost co se týká obsahu a struktury výuky, není nekonečná řada součástí povinného učiva na středních školách. Naopak v Rakousku, kde jsou výukové plány velmi pevně centrálně stanoveny, je nekonečná geometrická řada učivem povinným a to již dva rok před závěrečnou maturitní zkouškou. Německý přístup, který v této práci reprezentuje spolková země Bádensko-Württembersko, se od výše uvedených liší tím, že učivo neuspořádává podle matematických témat, ale podle různých obecnějších pojmů, jako je například růst. To se projevuje i v učebnicích, které byly pro jednotlivé země vybrané. Zatímco v České republice a Rakousku je nekonečná geometrická řada vyučována jako samostatné téma následující po posloupnostech a limitách posloupnosti, Německo tento pojem přímo nezavádí, ale pracuje s různorodými úlohami, které kombinují více různých témat. Přesto jsme i v německé učebnici nalezli úlohy, ve kterých se nekonečná řada objevuje.

Práce se soustředila zejména na aplikované vizualizované úlohy, které jsou pro svou zajímavou slovní zásobu z oblasti geometrie pro výuku metodou CLIL vhodné. Úlohy z vybraných učebnic byly roztříděny do čtyř skupin podle jejich charakteristik. Vždy byla zvolena jedna reprezentativní úloha, která byla vyřešena. Dále byly uvedeny možné varianty této úlohy, z nichž některé jsou vyřešeny v příloze C. Ke každému typu úloh byl podán také didaktický komentář..

V práci dále byla podrobněji představena metoda CLIL a metodologie, podle níž byly realizovány tři vyučovací hodiny. Byla popsána příprava na vyučovací hodiny a jejich průběh. Výuka byla reflektována autorkou práce, stálými vyučujícími matematiky a německého jazyka i žáky, kteří hodiny absolvovali.

Výuka metodou CLIL proběhla podle očekávání, žáci v hodině spolupracovali a všechny naplánované aktivity se podařilo stihnout. Ukázalo se ale, že metoda CLIL má přínos v oblasti slovní zásoby a komunikačních schopností v cizím jazyce i v odborných znalostech v nejazykovém předmětu jedině tehdy, je-li oběma těmto cílům věnován ve výuce dostatečný čas na procvičení a zopakování učiva. Z reflexí vyplývá, že výuka metodou CLIL byla pro žáky velmi náročná. Důvodem bylo zejména to, že byla propojena pro žáky obtížná oblast matematiky s cizím jazykem, který byl žáky též vnímán jako obtížný. Je zřejmé, že stanovené cíle by bylo lepší rozdělit do více vyučovacích hodin, než jsme měli k dispozici. Žáci ovšem uváděli, že výuka matematiky v cizím jazyce jim umožnila nový pohled na předmět a že díky cizímu jazyku o matematice přemýšleli jinak. Většina hodnotila hodiny vedené metodou CLIL jako zajímavou zkušenost.

Na tuto práci by bylo možné navázat dlouhodobějším projektem, který by propojoval výuku matematiky a cizího jazyka. Výuka touto metodou realizovaná například celé pololetí by mohla rozšířit již existující poznatky o této metodě. Žáci by si prohloubili slovní zásobu v oblasti matematiky, takže by se komunikace v cizím jazyce stávala snažší. Byla by též možnost klást větší důraz na opakování učiva v matematice.

Seznam použité literatury

BENEŠOVÁ, B. a VALLIN, P. (2015). *CLIL – inovativní přístup nejen k výuce cizích jazyků.* Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Praha. ISBN 978-80-7290-821-9.

BMBWF. (2019). *Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung*, 2019 [online]. [cit. 4. 8. 2019]. Dostupné z: `https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/unterricht/lp/index.html`

BPBW-M. (2019). *Bildungspläne Baden-Württemberg-Gymnasium-Mathematik.* [online]. BPBW-M. [cit. 20. 9. 2019]. Dostupné z: `http://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M`

BRABEC, J., MARTAN, F. a ROZENSKÝ, Z. (1985). *Matematická analýza I.* SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha.

COYLE, D., HOOD, P. a MARSH, D. (2010). *CLIL: content and languages integrated learning.* Cambridge University Press, Cambrige. ISBN 978-0-521-11298-7.

FREUDIGMANN, H. a kol. (2009). *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien. Kurstufe Baden-Württemberg.* Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart. ISBN 978-3-12-735301-3.

MALLE, G. a kol. (2014). *Mathematik verstehen 6.* Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Vídeň. ISBN 978-3-209-07044-9.

MŠMT. (2009). *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy*, 2009 [online]. MŠMT. [cit. 29. 7. 2019]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/content-and-language-integrated-learning-v-cr

ODVÁRKO, O. (2018). *Matematika pro gymnázia: Posloupnosti a řady.* Prometheus, Praha. ISBN 978-80-7196-391-2.

ODVÁRKO, O. (2000). *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia: Posloupnosti a řady.* Prometheus, Praha. ISBN 80-7196-054-3.

POLÁK, J. (1999). *Středoškolská matematika v úlohách II.* Prometheus, Praha. ISBN 80-7196-166-3.

VORÁČOVÁ, Š. a kol. (2012). *Atlas geometrie: Geometrie krásná a užitečná.* Academia, Praha. ISBN 978-80-200-1575-4.

VÚP. (2007). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia.* Výzkumný ústav pedagogický v Praze, Praha. ISBN 978-80-87000-11-3. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/159

ZEMEK, V. a kol. (2017a). *Matematika pro střední školy. 9. díl, Posloupnosti, řady, finanční matematika.* Didaktis, Praha. 978-80-7358-267-8.

ZEMEK. V. a kol. (2017b). *Matematika pro střední školy. 9. díl, Posloupnosti, řady, finanční matematika. Pracovní sešit.* Didaktis, Praha. ISBN 978-80-7358-324-8.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Přílohy

Na následujících stranách jsou uvedeny přílohy A, B a C. První dvě souvisí s realizací výuky metodou CLIL, jejíž průběh a refelexe jsou popsány v kapitole 6, třetí příloha obsahuje řešené aplikované vizualizované úlohy na součet nekonečné geometrické řady.

Příloha A obsahuje přetisk pracovního listu použitého ve výuce realizované v rámci této práce. Pracovní list se skládá ze dvou stránek. Jedná se o motivační úlohu s německy psaným příběhem a otázkami k příběhu. Ty směřují k tomu, aby si žáci připomněli, že součet nekonečně mnoha členů může být v některých případech konečný. Na závěr si žáci zopakují vzorec pro součet nekonečné geometrické řady. Pracovní list byl vytvořen autorkou práce. V příloze B je slovníček pojmů, s nimiž bylo ve výuce pracováno a žáci jej měli k dispozici.

V příloze C je k dispozici zadání a řešení včetně postupu těch vizualizovaných úloh tématu nekonečná geometrická řada, které nám připadaly zajímavé, avšak pro plynulost textu jsme jejich podrobné řešení nezařadili do vlastního textu práce. Úlohy mohou posloužit jako inspirace učitelům matematiky.

A Pracovní listy

Einführung in das Thema unendliche Reihe Blatt 1A

HANS, HELGA UND KUCHEN

LESEN SIE DEN TEXT UND BEANTWORTEN SIE DIE FRAGEN 1 BIS 5.

Die Geschwister **Hans** und **Helga** haben heute einen Kuchen zum Abendessen. Helga ist aber noch nicht nach Hause gekommen und Hans wartet auf sie. Weil er schon sehr hungrig ist, beschließt er nach einer Weile, eine Hälfte vom Kuchen zu essen. Es ist doch gerecht! Es bleibt die andere Hälfte für seine Schwester übrig.

Eine Stunde später ist Helga immer noch nicht da. Der Kuchen steht die ganze Zeit auf dem Tisch und sieht so lecker aus! Hans isst also noch eine Hälfte von dem Rest des Kuchens.

Frage 1: Schreiben Sie, wie viel vom Kuchen jetzt auf dem Teller übrigbleibt. Schreiben Sie die Antwort nicht mit Zahlen, sondern **in Worten**.

Es ist schon halb neun und Helga scheint die Zeit vergessen zu haben. Hoffentlich ärgert sie sich nicht, wenn ich noch eine Hälfte von dem Rest esse, denkt Hans.

Frage 2: Wie viel vom Kuchen bleibt auf dem Teller übrig, wenn Hans wieder eine Hälfte von dem Rest isst? Schreiben Sie die Antwort nicht mit Zahlen, sondern **in Worten**.

Helga hat die Zeit nicht vergessen. Sie wollte heute nur bei ihrer Freundin übernachten und sie hat vergessen, es zu Hause zu sagen. Weil Hans keine Ahnung davon hat, isst er jede halbe Stunde eine Hälfte von dem Rest des Kuchens.

Frage 3: Schreiben Sie **in Worten** mindestens vier weitere Bruchzahlen, die ausdrücken, wie viel von Kuchen auf dem Teller übriggeblieben ist, nachdem Hans eine Hälfte von dem Rest gegessen hat.

Frage 4: Stellen Sie sich vor, dass Hans so weiter macht und zwar unendlich oft. Kommt es irgendwann dazu, dass er den ganzen Kuchen aufisst?

Einführung in das Thema unendliche Reihe | Blatt 1B

Frage 5: Schreiben Sie alles, war er gegessen hat, als eine unendliche geometrische Reihe. Bestimmen Sie den Wert des Quotienten. Ist diese Reihe konvergent? Was ist die Summe der Reihe? Führen Sie die richtige Formel an, die zu dieser Berechnung dient.

B Slovníček

Wortschatz

Blatt 2

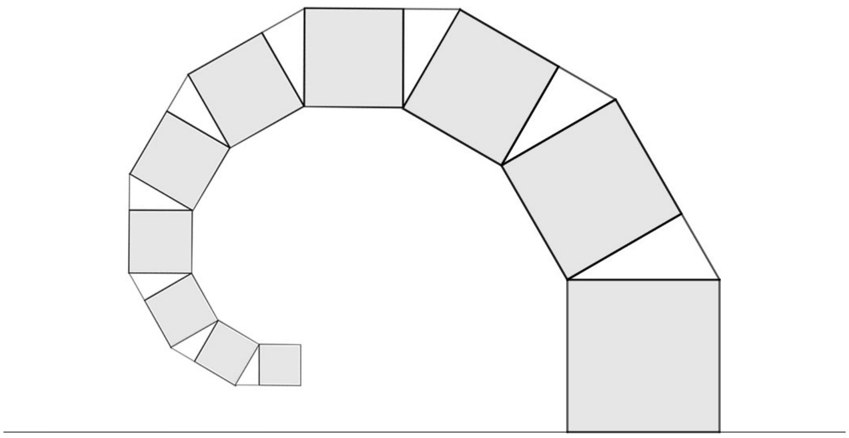
abschreiben	opsat (text)
die Bruchzahl (-en)	zlomek
das Dreieck (-e)	trojúhelník
*ein*schreiben	vepsat
der Flächeninhalt (-e)	obsah
die Formel (-n)	vzorec
gleichseitig	rovnostranný
hoch zwei	na druhou
die Höhe (-n)	výška
die Kante (-n)	hrana
der Kreis (-e)	kruh
die Kugel (-n)	koule
die Kreislinie (-n)	kružnice
die Länge (-n)	délka
die Linie (-n)	přímka
der Mittelpunkt (-e)	střed
der Oberflächeninhalt (-e)	povrch
das Quadrat (-e)	čtverec
die Quadratwurzel aus	druhá odmocnina z
der Quotient (-en)	kvocient
die Reihe (-n)	řada
der Satz des Pythagoras	Pythagorova věta
der Schwerpunkt (-e)	těžiště
die Seite (-n)	strana
die Seitenfläche (-n)	stěna tělesa
die Seitenhalbierende (-n)	těžnice
die Strecke (-n)	úsečka
die Summe (-n)	součet
der Umfang (¨ , -e)	obvod
*um*schreiben	přepsat (text)
umschreiben	opsat (kružnici, svými slovy)
unendlich	nekonečný
der Würfel (-)	krychle

Bemerkung: Bei Substantiven finden Sie in Klammern die Information über die Pluralbildung – eventuelle Verwendung von Umlaut und die Pluralendung. Bei Verben mit dem trennbaren Präfix wird das Präfix kursiv geschrieben.

C Řešené úlohy

C.1 Úloha s Dradratem

Zadání úlohy:[1] *Dradrat*[2] je „zvířátko“, které je vytvořeno z čtverců a pravoúhlých trojúhelníků (viz obr. C.1). První čtverec stojí „na zemi“, nad ním je sestrojen pravoúhlý trojúhelník s menším z ostrých úhlů o velikosti 30°. Nad jeho delší odvěsnou je sestrojen další čtverec. Nad stranou tohoto nového čtverce, která je protilehlá straně společné s trojúhelníkem, je sestrojen další trojúhelník podobný prvnímu. Nad delší z jeho odvěsen sestrojíme další čtverec a tak dále. První čtverec má délku strany 1. Existuje *Dradrat* s libovolně velkým obsahem? Existuje *Dradrat*, který se svou "hlavou"(tj. nejmenším čtvercem, ze kterého se skládá) dotkne země?



Obr. C.1: *Dradrat* vytvořený z deseti čtverců a devíti trojúhelníků

Řešení úlohy: Součet obsahů všech čtverců a trojúhelníků v nekonečném *Dradratu* konverguje, neboť obsahy čtverců i trojúhelníků se zmenšují s kvocientem menším než 1. Konkrétně se jedná kvocient $q = \frac{3}{4}$. Tento kvocient můžeme najít, najdeme-li nejprve podíl délek stran druhého a prvního čtverce *Dradratu*, resp. délek přepon druhého a prvního trojúhelníku *Dradratu*, které se stranami čtverců splývají. Strana prvního čtverce je podle zadání rovna 1. Strana druhého čtverce je rovna délce delší odvěsny prvního trojúhleníku *Dradratu*, která je rovna $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Kvocient zmenšování délek jednotlivých částí *Dradratu* je tedy roven $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kvocient zmenšování obsahů jednotlivých částí *Dradratu* je pak roven $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$. Neexistuje tedy *Dradrat* s libovolně velkou plochou.

Z obrázku C.1 vyplývá, že orientace čtverců vůči prvnímu čtverci se změní o 90° každý další třetí čtverec. Sedmý čtverec tedy bude opět orientovaný rovnoběžně se „zemí“, nebude

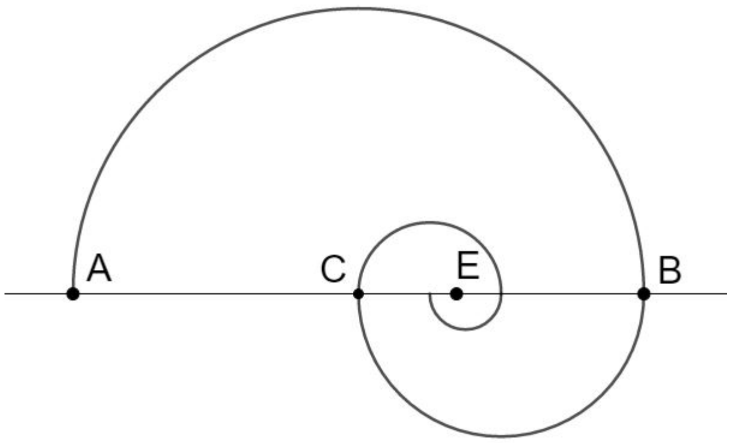
[1] Převzato z (Freudigmann a kol., 2009: s. 172).

[2] *Dradrat* je neologismus vytvořený z německého „Dreieck“ [trojúhelník] a „Quadrat“ [čtverec].

se jí ale dotýkat, neboť čtverce i trojúhelníky se stále zmenšují. Ani desátý čtverec, který bude vůči sedmému níže, nedosáhne kvůli zmenšování s kvocientem menším než 1 „země“. Dále bude *Dradrat* stoupat a další čtverce již úrovně desátého čtverce nedosáhnou ze stejného důvodu.

C.2 Úloha o vzdálenosti konců spirály

Zadání úlohy:[3] Spirála na obrázku C.2 se skládá z nekonečně mnoha polokružnic a platí, že každý další průměr počínaje průměren druhé polokružnice je roven čtyřem pětinám průměru předchozí polokružnice. Průměr první polokružnice je roven 10 cm. Pravý koncový bod spirály se blíží bodu E. Jak daleko jsou od sebe vzdáleny body A a E?



Obr. C.2: Křivka spirálového tvaru tvořená polokružnicemi

Řešení úlohy: Průměr d_1 první polokružnice je roven 10 cm, průměr každé další polokružnice je roven čtyřem pětinám průměru předchozí polokružnice. Průměry polokružnic d_n tedy tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{4}{5}$. Vzdálenost mezi body A a E můžeme vyjádřit jako:

$$|AE| = d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + \cdots + (-1)^{n-1} d_n + \cdots .$$

Vzdálenost $|AE|$ je tedy rovna součtu nekonečné geometrické řady

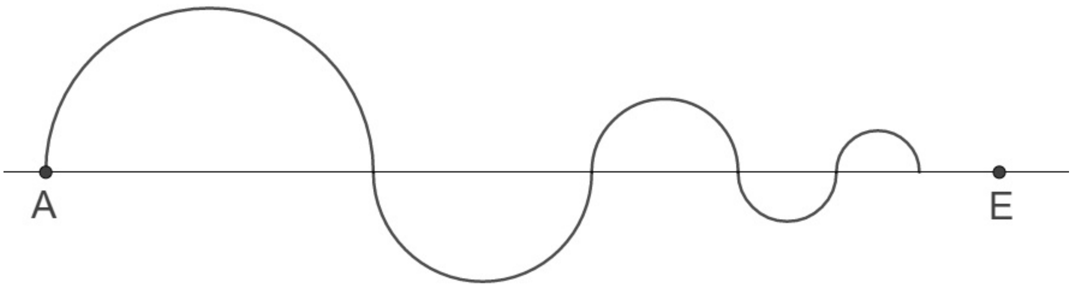
$$\sum_{n=1}^{\infty} d_1 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1} = d_1 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)} = 10 \cdot \frac{5}{9} = \frac{50}{9}.$$

Body A a E jsou vzdáleny $\frac{50}{9}$ cm.

[3] Převzato z (Malle a kol., 2014: s. 137).

C.3 Úloha o vzdálenosti konců vlny

Zadání úlohy:[4] Křivka ve tvaru vlny se skládá z nekonečně mnoha polokružnic, kde průměr každé další polokružnice počínaje druhou polokružnicí je roven dvěma třetinám průměru polokružnice přechozí (viz obr. C.3). Jak daleko jsou od sebe vzdáleny koncové body křivky A a E, jestliže první polokružnice má průměr 6 mm?



Obr. C.3: Křivka tvořená polokružnicemi zmenšujícími se v daném poměru

Řešení úlohy: Průměr d_1 první polokružnice je roven 6 mm, průměr každé další polokružnice je roven dvěma třetinám průměru předchozí polokružnice. Průměry polokružnic d_n tedy tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{2}{3}$. Vzdálenost mezi body A a E můžeme vyjádřit jako:

$$|AE| = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \cdots + d_n + \cdots .$$

Vzdálenost $|AE|$ je tedy rovna součtu nekonečné geometrické řady

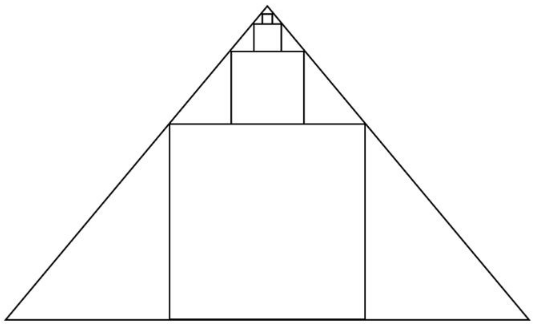
$$\sum_{n=1}^{\infty} d_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = d_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 6 \cdot 3 = 18.$$

Body A a E jsou vzdáleny 18 mm.

[4]Převzato z (Malle a kol., 2014: s. 136).

C.4 Úloha s vepsanými čtverci do trojúhelníku

Zadání úlohy:[5] Rovnoramennému trojúhelníku o základně dlouhé 10 cm a výšce 6 cm je vepsán čtverec, jehož strana leží na základně trojúhelníku (obr. C.4). Do rovnoramenného trojúhelníku, který vznikl nad vepsaným čtvercem, je vepsán další čtverec, který stojí na základně tohoto trojúhelníku. Podobně jsou vepsány další čtverce a proces pokračuje do nekonečna. Vypočítejte a) součet obsahů vepsaných čtverců, b) součet obvodů vepsaných čtverců.



Obr. C.4: Rovnoramenný trojúhelník s vepsanými čtverci

Řešení úlohy: Nejprve vypočteme délku strany a_1 prvního vepsaného čtverce. Využijeme podobnosti trojúhelníků. Původní rovnoramenný trojúhelník a trojúhelník, který vznikne nad prvním vepsaným čtvercem, jsou podobné podle věty *uu*. Z toho plyne, že se rovnají poměry délek jejich základem a výšek, tedy

$$\frac{6-a_1}{6}=\frac{a_1}{10}.$$

Odtud lze vyjádřit $a_1=\frac{15}{4}$ cm. Jelikož známe délky základen obou podobných trojúhelníků, lze vyjádřit koeficient podobnosti k jako jejich poměr:

$$k=\frac{a_1}{10}=\frac{\frac{15}{4}}{10}=\frac{3}{8}.$$

Z tohoto vztahu můžeme rekuretně vyjádřit délku a_n strany n-tého vepsaného čtverce jako

$$a_n=\frac{3}{8}\cdot a_{n-1}.$$

Délky stran vepsaných čtverců tvoří tedy geometrickou posloupnost s kvocientem $q=\frac{3}{8}$. Pro obsah S_1 prvního čtverce platí:

$$S_1=a_1^2=\left(\frac{15}{4}\right)^2=\frac{225}{16}\ \mathrm{cm}^2.$$

[5] Převzato z (Malle a kol., 2014: s. 137).

Pro obsah S_2 druhého vepsaného čtverce platí:

$$S_2 = a_2^2 = \left(a_1 \cdot \frac{3}{8}\right)^2 = \left(\frac{15}{4} \cdot \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{2\,025}{1\,024}\ \mathrm{cm}^2.$$

Kvocient q' posloupnosti obsahů vepsaných čtverců lze vyjádřit jako podíl S_2 a S_1, tedy $q' = \frac{9}{64}$. Pro součet obsahů všech vepsaných čtverců platí:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} S_1 \cdot \left(\frac{9}{64}\right)^{n-1} = \frac{225}{16} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{64}} = \frac{225}{16} \cdot \frac{64}{55} = \frac{180}{11}\ \mathrm{cm}^2.$$

Součet obsahů všech vepsaných čtverců je $\frac{180}{11}$ cm^2.

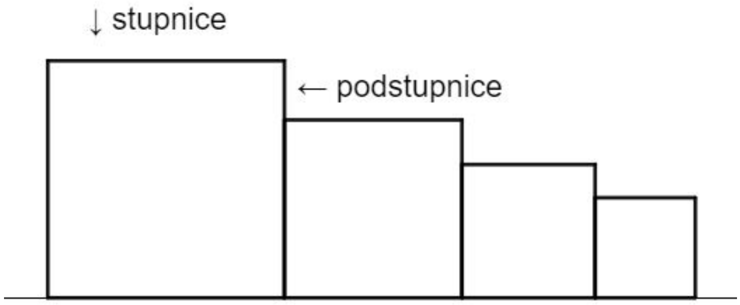
Obvod o_1 prvního vepsaného čtverce je roven $4 \cdot a_1 = 15$ cm. Obvod o_2 druhého vepsaného čtverce je roven $4 \cdot a_2 = 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot a_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{15}{4} = \frac{45}{8}$ cm. Kvocient q'' posloupnosti obvodů vepsaných čtverců je roven podílu obvodů o_2 a o_1, tedy $q'' = \frac{3}{8}$. Pro součet obvodů vepsaných čtverců platí:

$$s' = \sum_{n=1}^{\infty} o_1 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} = 15 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{8}} = 15 \cdot \frac{8}{5} = 24\,\mathrm{cm}.$$

Součet obvodů všech vepsaných čtverců je 24 cm.

C.5 Úloha se schodištěm

Zadání úlohy:[6] Seřazením nekonečně mnoha čtverců vedle sebe (viz obr. C.5) vznikne schodiště s nekonečně mnoha stupni. Délky stran čtverců se zmenšují vždy o jednu čtvtinu. Velikost strany prvního čtverce je 0,5 m. Vypočítejte a) součet délek všech stupnic,[7] b) součet délek všech stupnic a podstupnic[8] dohromady.



Obr. C.5: Schodiště tvořené čtverci zmenšujícími se vždy o jednu čtvrtinu

Řešení úlohy: Posloupnost délek stran čtverců má kvocient $q = \frac{3}{4}$. Součet délek všech stupnic je tedy roven součtu délek stran všech čtverců. První čtverec má délku strany 0,5 m, proto součet všech stupnic je roven:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} 0{,}5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0{,}5 \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 2.$$

Součet délek všech stupnic je tedy roven 2 m.

Nyní vypočítáme součet délek všech podstupnic. Kvocient q' posloupnosti délek podstupnic je také roven $\frac{3}{4}$. Délka první podstupnice p_1 je rovna jedné čtvrtině délky strany prvního čtverce, tedy $p_1 = 0{,}5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Součet délek všech podstupnic je tedy roven:

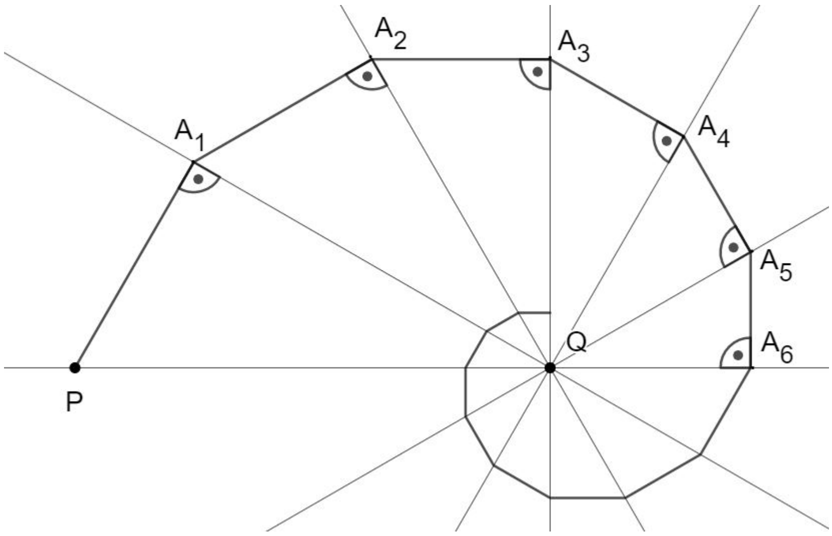
$$s' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Součet délek všech stupnic a postupnic je tedy roven $2\frac{1}{2}$ m.

[6]Převzato z (Malle a kol., 2014: s. 137).
[7]Stupnice je část schodu, na kterou uživatelé schodiště našlapují.
[8]Podstupnice je část schodu, která se nachází mezi jednotlivými schodišťovými stupni.

C.6 Úloha s lomenou čárou ve tvaru spirály

Zadání úlohy:[9] Bodem Q prochází šest přímek tak, že dvojice sousedních přímek svírají navzájem shodný úhel. Bod P leží na jedné z těchto přímek a je vzdálen 6 cm od bodu Q. V bodě P začíná taková nekonečná lomená čára, že její jednotlivé úsečky jsou vždy kolmé na následující přímku po směru hodinových ručiček (viz obr. C.6). Vypočítejte délku lomené čáry.



Obr. C.6: Lomená čára ve tvaru spirály

Řešení úlohy: Sousední přímky procházející bodem Q mají odchylku 30°. Délku odvěsny pravoúhlého trojúhelníku PQA_1, který vznikl nad přeponou PQ, lze vypočítat pomocí funkce $\sin 30° = \frac{|PA_1|}{6}$, odtud $|PA_1| = 3$ cm. Délka odvěsny PA_1 ležící proti bodu Q je tedy rovna polovině délky přepony PQ. Druhá odvěsna QA_1 má délku $3\sqrt{3}$ cm. Tato odvěsna je zároveň přeponou dalšího pravoúhleho trojúhelníku A_1QA_2, který je podle věty *uu* trojúhelníku PQA_1 podobný. Koeficient podobnosti k těchto trojúhelníků je roven:

$$k = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Koeficient podobnosti k je roven kvocientu geometrické posloupnosti, jejíž členy jsou délky úseček, z nichž je tvořena lomená čára. Jelikož známe délku první úsečky lomené čáry a hodnotu kvocientu, pro délku celé lomené čáry platí:

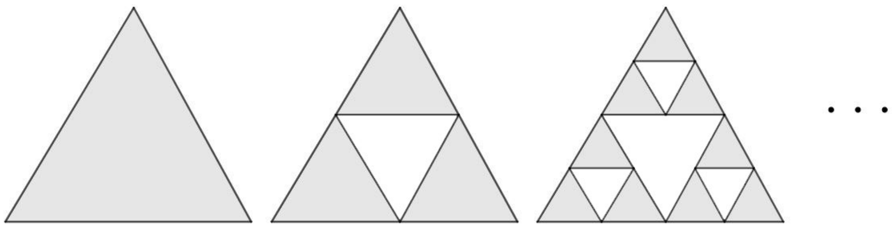
$$s = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{2 - \sqrt{3}} = \frac{6}{2 - \sqrt{3}} = (12 + 6\sqrt{3})\,\text{cm}.$$

Lomená čára je dlouhá $(12 + 6\sqrt{3})$ cm.

[9] Převzato z (Malle a kol., 2014: s. 137).

C.7 Úloha se Sierpińského trojúhelníkem

Zadání úlohy:[10] Z rovnostranného trojúhelníku jsou postupně vystřihovány bílé trojúhelníky jako na obrázku C.7. Ukažte, že součet obsahů všech bílých trojúhelníků je roven obsahu původního šedého trojúhelníku.



Obr. C.7: Proces konstrukce Sierpińského trojúhelníku

Řešení úlohy: Pokud by součet obsahů všech bílých trojúhelníků byl roven obsahu prvního šedého trojúhelníku, znamenalo by to, že by obsah Sierpińského trojúhelníku, který odpovídá součtu obsahů všech šedých trojúhelníků, byl roven 0. Označme obsah prvního trojúhelníku z obrázku C.7 jako S. Druhý trojúhelník v pořadí chápeme jako první iteraci konstrukce fraktálu Sierpińského trojúhelníku, obsah šedých ploch označíme S_1. Třetí obrázek odpovídá druhé iteraci atd. Vyjádříme obsah S_n všech šedých trojúhelníků pro n-tou iteraci:

$$S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot S,$$

neboť obsah šedých trojúhelníků je pro danou iteraci roven vždy třem čtvrtinám obsahu šedých trojúhelníků v iteraci předchozí. Proces konstrukce fraktálu je nekonečný, hledáme tedy hodnotu S_n v nekonečnu. Platí, že

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot S = 0.$$

Obsah Sierpińského trojúhelníku je tedy nekonečně malý a obsah „vystřižených“ trojúhelníků je roven obsahu původního rovnostranného trojúhelníku.

[10]Převzato z (Malle a kol., 2014: s. 137).