



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Ing. Martin Malachov

# **Propedeutika diferenciálního a integrálního počtu**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro SŠ M-F

Studijní obor: Učitelství fyziky – Učitelství matematiky

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 28.5.2020

Martin Malachov vl.r.

## **Poděkování**

Děkuji svému vedoucímu, doktoru Halasovi, za jeho vstřícné, obětavé a milé vedení. Děkuji mu za příjemnou spolupráci i cenné rady, jimiž přispěl ke kvalitě této práce. Také děkuji své rodině a přátelům za jejich lásku, podporu a pochopení, které mi nejen během studia poskytovali. Velký dík bych rád vyjádřil i všem mým učitelům, za ochotu, péči i trpělivost, s kterou mě posouvali vpřed.

Název práce: Propedeutika diferenciálního a integrálního počtu

Autor: Ing. Martin Malachov

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Diferenciální a integrální počet jsou zajímavé a krásné partie matematiky s mezioborovými přesahy a význačnými praktickými aplikacemi. Výuka této látky je ovšem náročná a komplikovaná. V rámci této práce ukážeme, že derivace a integrály mají na střední škole co nabídnout, přitom jejich výuku lze usnadnit a zatraktivnit zejména cílenou propedeutikou a znalostí bohatých aplikací. V první části práce přinášíme zamyšlení nad současným stavem výuky a literatury, důraz klademe na námi odhalenou potřebu cílené propedeutiky diferenciálního a integrálního počtu. Na klíčových pojmech, které v práci identifikujeme, lze stavět prekoncepty nejen v průběhu celého středoškolského studia, ale dokonce už i na základní škole. V druhé části práce učiteli nabídneme inovativní texty k látce a bohatou sbírku neotřelých příkladů, které lze využít k motivaci, aplikaci a propedeutice diferenciálního a integrálního počtu. Přidáváme i texty a příklady z pokročilejších partií, které jsou pro kvalitní výuku také potřebné.

Klíčová slova: propedeutika, derivace, Riemannův integrál, aplikace

Title: Propaedeutics of Differential and Integral Calculi

Author: Ing. Martin Malachov

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: Differential and integral calculi both are interesting and beautiful branches of mathematics with many interdisciplinary overlaps and significant and practical applications. Learning as well as teaching of these topics is very difficult and demanding. In this thesis we show that the derivatives and integrals have much to offer in the high school education while the schooling can be eased and made attractive with intentional propaedeutics and knowledge of rich background of applications. First part of the thesis presents short contemplation on the current state of teaching and literature, we focus on the urge for the propaedeutics of the differential and integral calculi revealed by us. We identify key terms that can be used to build useful preconcepts during the whole high school education, even in the elementary education. In the latter part of the thesis we offer teacher innovative texts and a rich set of original exercises that can be used for motivation, application and propaedeutics of the differential and integral calculi. We also present texts and exercises engaging with advanced parts as such are also necessary for quality teaching.

Keywords: propaedeutics, derivative, Riemann integral, applications

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Otázky současné výuky diferenciálního a integrálního počtu</b>	<b>3</b>
2.1	Vyšší matematika na střední škole . . . . .	3
2.2	Propedeutické příležitosti . . . . .	8
2.2.1	Chápání hodnoty veličiny a změny veličiny . . . . .	8
2.2.2	Chyba . . . . .	9
2.2.3	Uchopení nekonečna . . . . .	11
2.2.4	Limita a spojitost . . . . .	12
2.2.5	Derivace a diferenciál . . . . .	15
2.2.6	Integrál . . . . .	16
2.2.7	Využití derivací a integrálů v pokročilých úlohách . . . . .	18
2.3	Revize výukové literatury . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Příklady a texty pro rozvoj a aplikaci infinitesimálního cítění</b>	<b>23</b>
3.1	Změna je život . . . . .	23
3.1.1	Diference a posloupnosti . . . . .	23
3.1.2	Diference ve fyzice . . . . .	30
3.1.3	Praktický význam diference . . . . .	36
3.2	Chyby a aproximace . . . . .	39
3.2.1	Smysl pro preciznost . . . . .	39
3.2.2	Chyba měření . . . . .	41
3.3	Diferenciál . . . . .	44
3.4	Limita . . . . .	51
3.4.1	Propedeutická funkce limity . . . . .	51
3.4.2	Limita ve fyzice . . . . .	52
3.5	Derivace . . . . .	56
3.5.1	Derivace ve fyzice . . . . .	58
3.5.2	Extremální úlohy . . . . .	59
3.5.3	Diferenciální rovnice a další využití derivací . . . . .	68
3.6	Integrál . . . . .	69
3.6.1	Výstavba Riemannova integrálu . . . . .	69
3.6.2	Princip integrace . . . . .	73
3.6.3	Integrál ve výuce fyziky . . . . .	81
3.7	Křivost . . . . .	86
3.8	Taylorův rozvoj . . . . .	88
	<b>Závěr</b>	<b>98</b>
<b>A</b>	<b>Dotazník ke stavu výuky</b>	<b>107</b>
<b>B</b>	<b>Posloupnosti a řady</b>	<b>113</b>
<b>C</b>	<b>Tabulka limit, derivací, integrálů, řad a Taylorových rozvojų</b>	<b>115</b>
<b>D</b>	<b>Zavedení elementárních funkcí</b>	<b>117</b>

# 1. Úvod

Derivace a integrál jsou slova, která často budí ve veřejném prostoru intenzivní emoce a negativní vzpomínky. Přesto si bez nich nelze představit jakékoli pokročilé studium fyziky a matematiky. Ale i v běžném životě lze uplatnit způsob myšlení, který je s infinitesimálním počtem spojen, jak ukazují četné aplikace. Rádi bychom ukázali, že jde o zajímavé a užitečné partie, které přes svou náročnost v sobě skrývají také krásu a eleganci. Že stojí za to se jim naučit.

Naším cílem je podpořit učitele ve výuce derivací a integrálů a nabídnout mu k tomu hodnotné materiály: sérii úvah, otázek a odpovědí, které jsou s výukou spojeny a které by si měl uvědomovat, dále texty, které transformují látku novým způsobem, a sbírku zajímavých příkladů. V diskuzi o současné výuce, kterou stavíme na zkušenostech z praxe, představíme dvě základní myšlenky, které prostupují celou prací. Za prvé, diferenciální a integrální počet je potřeba účinně motivovat a také prakticky aplikovat. Myslíme, že výuka nemá znamenat mechanické aplikování výpočetních postupů jako schémata *per partes* a že motivaci pro dnešního středoškoláka podle nás nestačí hledat v historických konotacích o hledání tečny. Druhou myšlenkou je, že výuka nemá být skokem do neznáma, ale má navazovat na přirozeně vybudované prekoncepty, myšlenky a postupy získané v předchozím studiu, dokonce už na základní škole. Klíčem k snadnější a kvalitnější výuce derivací a integrálů je podle nás cílená a pečlivá propedeutika. Aby byla účinná, musí s ní učitel přijít ve správný čas a na správném místě. Učiteli tyto příležitosti nabízíme prostřednictvím textů a bohaté sbírky řešených příkladů, které se látce věnují novou optikou. Texty může učitel podle své potřeby upravit ve výukové pro konkrétní skupiny žáků. Příklady mají vysoký motivační a aplikační potenciál či propedeutickou funkci, mnohé z příkladů jsou úplně nové.

V první kapitole po zamyšlení nad stavem současné výuky přichází výčet klíčových pojmů, jejichž propedeutická je podle nás opomíjena. Skrz celou kapitolu (si) klademe otázky, které podle nás jsou aktuální pro učitele jako jednotlivce i celou odbornou veřejnost. Na otázky se pokusíme odpovědět, ale mnohdy je jen samotná formulace otázky posunem vpřed. V první kapitole také prostudujeme různorodou literaturu od základoškolských učebnic po vysokoškolské, od velmi starých po nejnovější. Provedeme jejich analýzu z hlediska výstavby látky i její propedeutiky. Druhá kapitola je srdce této práce. V ní prezentujeme inovativní texty a nabízíme velké množství příkladů do různých příležitostí. Učiteli dáváme k dispozici sadu propedeutických cvičení a situací, kde založí koncepty jmenované v první kapitole. Také mu dáváme příklady k samotné výuce a aplikacím. Ty podle nás učitel neméně potřebuje, aby měl nadhled a mohl výuku účinně motivovat. Též se věnujeme didaktickým transformacím specifických témat ve snaze představit je jako nástroj propedeutice či jako motivační nástroj a možnost praktického uplatnění látky. Příklady i texty se snažíme řadit tematicky a chronologicky.

Kvalitní výuka derivací a integrálů se neobejde bez motivace a aplikace ve fyzice, proto úzké propojení matematiky s fyzikou prochází celou prací. V důsledku může být pro jednostranně specializovaného učitele její čtení náročnější. Vzhledem k rozsahu diferenciálního a integrálního počtu nemůžeme v této práci postihnout vše. Doufáme, že rozpoutáme širší diskuzi o propedeutice a didaktice infinitesimálního počtu. A že tato publikace pomůže ke zlepšení výuky.

## 2. Otázky současné výuky diferenciálního a integrálního počtu

Vyšší matematika představuje zajímavé téma, kterému je potřeba věnovat se po didaktické stránce. Soustředěný výzkum bohužel postrádáme, což bychom rádi napravili. Tato práce má být jeho prvním krokem. Nejprve zhodnotíme, jak aktuálně výuka vypadá a poté představíme náměty a nápady, které by jí měly pomoci. Podkladem pro naše zamyšlení nad současnou výukou jsou zejména vlastní zkušenosti autora jako žáka/studenta a jeho zkušenosti z učitelské praxe na nižším a vyšším gymnáziu (Gymnázium Nad Štolou, Praha), zkušenosti z učitelské praxe na vysoké škole (FJFI ČVUT, FIT ČVUT) a praxe doučování. Právě proto, že je autor detailně obeznámen se současným stavem výuky v různých věkových stupních a denně se s níže zmíněnými problémy setkává, považujeme text za hodnotný i přes relativně krátkou praxi – 6 let na univerzitě, od roku 2018/2019 na gymnáziu (plus předchozí praxe při studiu MFF UK). Tím, že velká část následujícího textu čerpá z osobní zkušenosti, a prezentuje tedy osobní názory autora a jeho vnímání současné situace, ji není možno podložit výzkumem. Takové výzkumy nicméně ani neexistují. Sami jsme se pustili do drobného dotazníkového šetření, které naše subjektivní vyjádření podkládá objektivními fakty. Doufáme, že tedy tato práce bude sloužit jako předběžná úvaha a dobrý základ k budoucímu detailnímu výzkumu, který povede ke zkvalitnění výuky na našich školách.

Významným faktem, který se bude do celého textu promítat, je neoddělitelnost matematiky a fyziky. Na základní a střední škole je matematický svět motivován praxí, realitou, životní zkušeností dítěte, primárně tedy jde o teorii vystavěnou na motivaci z praxe. Naopak fyzika je postavena jako matematický popis světa, čili využívá matematických poznatků (teorie) k popisu přírodních dějů (praxe). Jenže toto vymezení nemá pevnou hranici a jak matematika, tak fyzika používá obousměrné uvažování teorie  $\leftrightarrow$  praxe. Celkové vzájemné propojení matematiky s fyzikou je neoddiskutovatelné, což v této práci to respektujeme a uvažujeme chvíli více matematicky, chvíli ryze fyzikálně.

Než začneme s rozbořem současné výuky vyšší matematiky, seznámíme čtenáře se zkratkami a formulacemi, které budeme pro stručnost používat. Věnujeme se diferenciálnímu a integrálnímu počtu, souhrn obou témat zapíšeme zkratkou  $D&I$ , což čtenář může číst jako "derivace a integrály". Pokud bude třeba specifikovat pouze počet diferenciální, budeme psát  $DP$ , v případě integrálního  $IP$ . Budeme používat běžné zkratky ZŠ, SŠ a VŠ pro školy základní, střední a vysoké.

### 2.1 Vyšší matematika na střední škole

"Má smysl věnovat se vyšší matematice na SŠ?" Důvodů, proč by se měly  $D&I$  vyučovat je mnoho. Infinitesimální počet je klíčovým prvkem pro mnoho disciplín, nejde jen o matematickou hříčku. Představuje způsob vnímání světa a dává nástroje, které jsou nepostradatelné pro technickou i jinou praxi. K tomu se vrátíme v dalších odstavcích, ale nyní stručně ukážeme, že  $D&I$  patří

na SŠ. Důvody nacházíme nejen v samotné látce, ale také v rámcových vzdělávacích programech a oporu máme i v zahraničním vzdělávání.

Český vzdělávací systém se dnes opírá o RVP, viz stránky Národního vzdělávacího ústavu: [www.nuv.cz](http://www.nuv.cz). Čtème z plánů gymnaziální výuky matematiky a fyziky. Cíle vzdělávání podle tohoto dokumentu mezi dalšími míří k:

- osvojování základních matematických pojmů a vztahů postupnou abstrakcí a zobecňováním na základě poznávání jejich charakteristických vlastností,
- určování, zařazování a využívání pojmů, k analýze a zobecňování jejich vlastností,
- vytváření zásoby matematických pojmů, vztahů, algoritmů a metod řešení úloh a k využívání osvojeného matematického aparátu,
- rozvíjení zkušeností s matematickým modelováním (k činnostem, kterými se učí poznávat a nalézat situace, v nichž se může orientovat prostřednictvím matematického popisu), k vyhodnocování matematických modelů, k poznávání mezi jejich použití, k vědomí, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro více situací a jedna situace může být vyjádřena různými modely),
- rozvoji logického myšlení a úsudku, vytváření hypotéz na základě zkušenosti nebo pokusu, k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů,
- analyzování problému a vytváření plánu řešení, k volbě správného postupu při řešení úloh a problémů, k vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k zadaným podmínkám,
- rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti,
- práci s matematickými modely, k vědomí, že k výsledku lze dospět různými způsoby,
- rozvíjení dovednosti pracovat s různými reprezentacemi,
- pochopení vzájemných vztahů a vazeb mezi okruhy učiva a k aplikaci matematických poznatků v dalších vzdělávacích oblastech,
- pochopení matematiky jako součásti kulturního dědictví a nezaměnitelného způsobu uchopování světa.
- tvorbě modelu přírodního objektu či procesu umožňujícího pro daný poznávací účel vhodně reprezentovat jejich podstatné rysy či zákonitosti,
- používání adekvátních matematických a grafických prostředků k vyjadřování přírodovědných vztahů a zákonů.

K těmto bodům velkou měrou právě *D&I* přispívají. Proto považujeme za vhodné látku zařadit do SŠ výuky. Přitom ovšem látku v kurikulu RVP (ani) pro gymnázia nenacházíme. Pro úplnost upozorňujeme, že *D&I* chybí i v programech stavařů, elektrotechniků, účetních, zkrátka všude. Za problém to považujeme v oborech, pro které jsou *D&I* důležité. Abychom ale nekřivdili našim školám a učitelům, musíme zdůraznit, že se na většině SŠ žáci s *D&I* setkají navzdory tomu, že RVP je explicitně nejmenují.



Pokud se podíváme do zahraničí, vyšší matematika je zařazena naprosto běžně, i když se někde vyskytuje jen ve vyšší úrovni obtížnosti závěrečných zkoušek – např. A-levels britských GCSE zkoušek. Příjímací zkoušky na Oxford <https://www.maths.ox.ac.uk/system/files/attachments/test19.pdf>, obdoba maturity v Číně <https://www.sinoskop.cz/analyzy-komentare/maturita-z-matematiky-u-nas-strasak-v-cine-povinnost?fbclid=IwAR36sdxeOZLy5VNNCXjmFb2WY2u3eJmW-p0bplVImJ3dCaiWGIYB0t-ciW0> či americké tuteurské stránky [https://www.varsitytutors.com/high\\_school\\_math\\_diagnostic\\_1-problem-21706](https://www.varsitytutors.com/high_school_math_diagnostic_1-problem-21706) demonstrují, že v cizině mají *D&I* na SŠ místo.

Shrnujeme, že: "**Určitá forma infinitesimálního počtu by měla být součástí středoškolského vzdělání,**" ovšem rozhodně nepodporujeme suchopárný výklad doplněný pouze rozsáhlou sadou vzorců pro derivaci a integraci a mechanickým počítáním. Namísto toho je podle nás třeba, aby žák viděl praktické využití, aplikace počtu, fyzikální přesah i geometrický význam a celkovou užitečnost této teorie. K tomu by měla být dostatečně stručná, leč věcně co nejsprávnější. I o to se v této práci budeme snažit.

Zmínili jsme, že se na našich SŠ žáci vyšší matematice učí. Abychom poznali, v jakém stavu současná výuka je, vytvořili jsme dotazník, který jsme předložili studentům nastupujícím do prvního ročníku na FJFI ČVUT v Praze. Zadáni i podrobné vyhodnocení tohoto dotazníku nalezne čtenář v dodatku A. Zde napíšeme pouze stručné shrnutí. Drtivá většina studentů prošla určitou formou vzdělání o *D&I*, ale jejich znalosti jsou značně diskutabilní. Přesto, že šlo o studenty na matematicko-fyzikálně orientované fakultě, asi čtvrtina nemá ani tušení o významu derivace jako směrnice tečny, asi 35% jich není schopno zapsat pravidlo integrace per partes. Jelikož se domníváme, že mechanické poučky o aritmetice *D&I* nejsou to klíčové, tázali jsme se též na využití, aplikace, kde jsme rovněž u velké části studentů zaznamenali smutné výsledky. Téměř čtvrtina jich nepodala jedinou aplikaci *DP*, *IP* neumí nijak aplikovat asi 8% studentů. Mezi aplikace jsme přitom počítali i určení tečny ke grafu funkce či obsahu plochy pod křivkou. Velkou inspiraci pro *D&I* jsou fyzikální problémy, zkoumali jsme, zda u žáků došlo k propojení infinitesimálního počtu s látkou SŠ fyziky. Přesto, že derivace je obvykle vykládána s motivací v pojmu rychlost, dotazník zjišťuje, že *D&I* zůstávají abstraktním matematickým problémem odříznutým od svých hodnotných možností v podobě různých fyzikálních aplikací. Dalším zajímavým zjištěním z dotazníku je, že asi čtvrtina studentů (matematické vysoké školy!) se na SŠ nesešla s pojmem spojitosti. Abychom studentům jenom nekřivdili, konstatujeme, že určité povědomí o látce i aplikacích většina z nich má. Jejich sebehodnocení ovšem přeceňuje jejich objektivně nabyté znalosti a schopnosti.

Příčinu této situace nepřisuzujeme žákům. Z naší zkušenosti bychom totiž s nadsázkou mohli říct, že existují dvě skupiny lidí: ti, kteří *D&I* milují, a ti, kteří jim ještě neporozuměli. Příčinu negativních výsledků v dotazníku tedy přisuzujeme spíše tomu, že se žáci na SŠ nejspíš nesešli s dostatečně kvalitní výukou. K tomu podle nás přispívá několik bodů:

- **(De)motivace.** Po 13 letech povinné matematiky, navíc v období složitého osobnostního vývoje, žák nejspíše ztrácí chuť do látky, o které navíc z veřejného mínění a médií získává převážně negativní předsudky. Je potřeba kvalitní motivace v průběhu celého SŠ studia.

- **Abstrakce a formálnost.** Při výuce *D&I* klademe na žáka nesmírně vysoké nároky. Kromě porozumění samotnému tématu jej nutíme pracovat s formálními abstraktními definicemi, které podkládáme jen minimálně grafickými ilustracemi a praktickými aplikacemi. Žák se tedy musí popasovat s logickými výroky, vnímáním infinitesimálních veličin atd. Tím se nemůže soustředit výhradně na základní nosné myšlenky, které by postupně rozvíjel a až posléze sám korektně formuloval.
- **Absence propedeutiky.** Na předchozí bod bezprostředně navazuje fakt, že pokud bychom v žákovi intuitivně během předchozího studia vystavěli prekoncepty, nebyla by samotná výuka náročnou vědou, ale jen ujasněním již tušeného, setřídění poznatků a vyjasnění vzájemných vztahů načrtnutých dříve. To se ovšem neděje. Na rozdíl od geometrie, jíž se věnuje žák od první třídy, neexistuje žádná cílená propedeutika pro *D&I*. Přesto, že se žák např. o rok dříve věnuje limitě posloupnosti, možná se málo jako učitelé věnujeme tomu, aby toto téma směřovalo k myšlenkám, které za rok přijdou u derivace funkce. Významný propedeutický potenciál má několik sekcí v matematice a také ve fyzice, bylo by tedy vhodné je identifikovat a k propedeutickým účelům cíleně rozvinout. Podle nás je cílená propedeutika *D&I* opomíjená, při tom velmi důležitá součást výuky matematiky a fyziky.
- **Osobnost učitele.** Jsme si vědomi, že učitelé odvádějí svou práci dobře, ovšem obvykle postupují v souladu s učebnicemi a tradiční výukou, která podle nás v předchozích bodech selhává. V osobnosti učitele nalézáme klíčový faktor, který je schopen účinně motivovat, smysluplně a srozumitelně vysvětlovat klíčové myšlenky a také včas a pečlivě připravovat půdu pro budoucí výuku *D&I*.

Tyto body nejsou vše, ale tvoří kostru toho, čemu se budeme ve zbytku práce věnovat. Jimi bychom chtěli dát odpovědi na otázky, které patrně mají učitelé v povědomí, ale nevěnuje se jim žádný ani izolovaný výzkum. Tyto otázky nyní budeme stručně formulovat a pokusíme se na ně odpovědět. „**Jak napravit negativní vnímání D&I u laické veřejnosti?**“ Kromě zlepšení kvality výuky si myslíme, že ve veřejném prostoru chybí názor opačný k názoru lidí, jimž byly *D&I* noční můrou. Nedostatečná mediální prezentace matematiky/fyziky a matematiků/fyziků s důrazem na význam *D&I* se nám zdá převálcována prohlášeními jako "Matematika mi nikdy nešla. Derivace a integrály jsem nenáviděl!" S tímto aspektem ovšem v této práci nemůžeme nic dělat, soustředíme se na jiné otázky. „**Jak účinně motivovat D&I?**“ Odpověď hledáme v bohatých praktických aplikacích. Hledání tečny ke grafu je sice záslužné, ale z našich zkušeností se žákovi jeví spíše jako otázka pro teoretického matematika. Doplnění o historii o Newtonovi a Leibnizovi podle nás nepředstavuje pro dnešního žáka žádnou motivaci. Žákům bychom měli nabídnout zajímavé otázky, jako: Proč je mýdlová bublina kulatá? Proč platí zákon lomu světla? Jak se nejrychleji dostat z místa *A* do místa *B*? Jak nejlevněji postavit bazén? Jak určit dráhu nejdelšího dostřelu děla? Jak najít těžiště tělesa? Určování obsahu plochy či objemu tělesa je sice zajímavá matematická otázka, ale jen pokud ji podáme dobře, může skutečně žáka motivovat. Proč je objem koule  $\frac{4}{3}\pi r^3$ ? I na to umí *D&I* dát odpověď. Z těchto aplikací je mnoho postaveno na fyzikálních myšlenkách. Domníváme se

tedy, že v odpovědi na další otázku „**Co musí učitel o D&I vědět, aby je mohl dobře vyučovat?**“ se skrývá zásadní háček. Ne každý učitel matematiky má vysokoškolské vzdělání ve fyzice a dalších vědách, aby měl široký nadhled a mohl sypat z rukávu četné aplikace. Ryzí matematická teorie v jarníkovském duchu je sice nezbytná, ale pro žáky není vhodná ani dostačující. Jedním z cílů této práce tedy bude učitelům matematiky nabídnout široký pohled do fyzikálních aplikací, které jsou myšlenkově dostupné středoškolákovi. Naopak učitel fyziky v naší práci najde inspiraci, kde může učitelům matematiky pomoci s propedeutikou. Těsné propojení matematiky a fyziky je podle nás aktuálně překážkou, přitom by mělo být využito.

„**Uvědomuje si odborná veřejnost, že je potřeba se věnovat propedeutice a didaktice D&I?**“ Ačkoliv povědomí o problematice vyučování *D&I* zde je, není mu věnována soustavná péče. To podkládáme stručnou rešerší v magazínu *Učitel matematiky*. Prohlédli jsme obsahy jednotlivých časopisů (76 čísel datovaných až k roku 1993), jak lze nahlédnout na <https://ojs.cuni.cz/ucitel/>. Sice na webu nejsou k dispozici všechny články všech čísel, našli jsme ale jen tři články, které se infinitesimálnímu počtu věnovaly: *Který čtyřúhelník má největší obsah?* autora Daga Hrubého (autor gymnaziální učebnice [M29]) ve 4. čísle časopisu v roce 2007, *Planimetrická úloha o extrému* Aleše Kobzy v čísle 2 r. 2007 (motivován seminářem Daga Hrubého) a *O jednom experimentu ve výuce matematiky na gymnáziu* autora Petra Eismanna v čísle 2 z roku 2008. Magazín, který by měl řešit i otázku výuky *D&I* obsahuje v podstatě výhradně geometrii (v mnoha případech i kuželosečky, které jsou ve vzdělávacích plánech na podobné pozici jako *D&I*), doplněnou místy o využití počítačů ve výuce, aritmetiku, kombinatoriku a pravděpodobnost, Fibonacciho posloupnost a další drobná témata, která se ovšem vyskytují jen vzácně. Také se občas vyskytne článek nadstavbový, např. o teorii grafů či vytvářujících funkcích. Přiznáváme, že u některých článků se ze stručné anotace nelze dočíst, zda se náhodou problematiky *D&I* text nedotkne, ale nepředpokládáme to. Všechny zmíněné články, které obsahují téma derivace, jsou přes deset let staré, a navíc se první dva věnují primárně geometrii a využívají diferenciální počet jako nástroj pro extrémální úlohu (článek Aleše Kobzy dokonce ještě nabízí cestu, jak diferenciální počet obejít), třetí článek pak „... popisuje experiment z vyučování matematice na gymnáziu vedoucí k objevení aplikace diferenciálního a integrálního počtu.“ Takových článků potřebujeme více.

Bohužel ani podpůrným tématům, jako např. posloupnosti a řady, kde je propedeutický potenciál, se publikace pro učitele moc nevěnují. V čísle 4 roku 2014 *Učitel matematiky* nalezneme článek *Nekonečné rady a ich vizualizácia* autorem M. Klepancové a D. Smetanové, který jsme v magazínu našli jako jediný s propedeutickou funkcí. Autorky si velmi správně všimají, že je pro pojem nekonečna potřeba žáka kognitivně vyspělého, a účelně se věnují pochopení nekonečna pomocí vizualizací. Mylně se ovšem domnívají, že se žák s nekonečnem explicitně setká až u pojmu posloupnost, pojednáme o tom v sekci 2.2.3. Konstatujeme, že ani výuce podpůrných pojmů se nevěnuje dostatečná péče. Propedeutika *D&I* v současné výuce chybí a ani nad ní nikdo neuvažuje. Věnovat se jí učitel přitom může už na ZŠ. V takové péči shledáváme klíč ke zlepšení jmenovaných problémů.

## 2.2 Propedeutické příležitosti

Jednou z nejdůležitějších otázek je „**Kdy a jak se věnovat propedeutice D&I?**“ V této sekci nabídneme čtenáři soubor pojmů a situací, které se bezprostředně týkají *D&I*, a proto je podle nás vhodné se s nimi potýkat s cílem vybudovat cenné premisy a opřít o ně budoucí výuku *D&I*. Některé z pojmů, jako třeba limita, jsou nabíledni, některé jsou podle nás silně opomíjené. Na ty se soustředíme a zdůrazníme jejich propojení s *D&I*.

### 2.2.1 Chápání hodnoty veličiny a změny veličiny

Pro *D&I* je klíčový pojem funkce. Současná výuka matematiky se soustředí na zavedení pojmu a jednotlivých typů funkcí (kvadratická, exponenciální...), ale přes modernizaci výuky zůstává důraz na vzorce odloučené od vlastností funkce, které jsou podstatné pro praktický život. Známý vzorec  $e^{x'} = e^x$  zůstává vzorcem na zapamatování, bez geometrické interpretace či přesahu např. do vývoje populace. Náznorné geometrické výklady se do výuky zařazují jen k obecnému povídání, ale ne při vyšetřování funkcí. Třeba pojem asymptoty, který charakterizuje funkci lokálně v nekonečnu nebo bodech nespojitosti, se redukuje na vzorce. Žák si neuvědomuje, že se funkce chová "v nekonečnu jako lineární". A který žák správně zodpoví, pod jakým úhlem protíná sinusoida osu  $x$ ?

V definici derivace nalézáme klíčový pojem difference. Tu teď v obecnosti definujeme jako změnu nějaké veličiny, argumentu funkce, atd.:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad (2.1)$$

přičemž diferenci přiřazujeme symbol  $\Delta$  a význam ostatních symbolů může být různý podle kontextu. Například ve fyzice by mohlo  $x_1$ , resp.  $x_2$  označovat polohu hmotného bodu na začátku a konci sledování nějakého pohybu;  $\Delta x$  potom značí *změnu* polohy, část dráhy. Difference je pro nás ústřední pojem proto, že derivace je limitou podílu diferencí.

Slovo změna je zásadní problém výuky, jehož začátky nalézáme na ZŠ. Na základě vlastní i cizí zkušenosti identifikujeme nedostatek ve vnímání a rozumovém uvažování žáků: funkce je vzorec (viz výše), do nějž se nakonec jednou mechanicky dosadí  $x \rightarrow y = f(x)$ , získáme hodnotu veličiny. Cíleně se téměř vůbec neptáme, co by se stalo, kdybychom změnili  $x$ , konkrétně „O kolik se změní  $y$ , když se změní  $x$ ?“ *O kolik*, a *kolikrát* jsou dvě základní otázky, které umožňují hlouběji pochopit některé vlastnosti lineárních a exponenciálních funkcí a přitom zdůraznit odlišnost funkcí jiných. Bez perfektního vnímání diferencí nemůže žák přejít logicky k derivaci. Jenže matematická výchova a první setkání s fyzikou upevní chápání veličin ve smyslu konkrétních hodnot  $x = \dots$ . Dejme dva příklady:

- Těleso má teplotu  $T = 20^\circ C$ .
- Automobil ujel dráhu  $s = 5 \text{ km}$ .

Zmíněné věty jsou fundamentálně odlišné, neboť jedna popisuje hodnotu fyzikální veličiny (stav), druhá změnu souřadnice (změnu stavu). Z druhé věty se vůbec nedozvíme, kde, na jaké pozici se automobil nachází. Změnu polohy ovšem zmatečně neznačíme tvarem např.  $\Delta s$ , ale slovem dráha (jeho pravý význam je

délka trajektorie, ale pojmy trajektorie a délka, zůstávají nedefinované) se značkou  $s$ . Řešení tohoto problému není jednoduché, protože zavedení souřadnicového systému nelze provést na ZŠ, když se žák s dráhou a rychlostí prvně seznamuje. Domníváme se, že ale přesto učitel může hovořit o poloze  $s$  a dráze  $\Delta s$ .

Polohu jako úvodní veličinu jsme vybrali proto, že nejspíše u ní začíná miskoncepce ve značení. Pojem dráha vyznačuje délku trajektorie (změnu), ne souřadnici (hodnotu) polohy, proto u něj má označení  $\Delta s$  dobrý smysl. Rozdíl se ovšem smazává během výuky jistě i z následujícího důvodu. Typicky totiž počátek prostorové i časové osy klademe do počáteční nebo jiné význačné události a odečítaná souřadnice potom souhlasí s proběhlou změnou času/dráhy, tzn. např. pro daný úsek pohybu  $t_0 = 0 \Rightarrow t = t - 0 = t - t_0 = \Delta t$ . Zásadní problém pozorujeme na SŠ, kde žáci nejsou schopni u studia rovnoměrně zrychlených přímočarých pohybů analytickým přístupem odlišit počáteční polohu, uraženou dráhu, počáteční čas atd. Tyto pojmy ve své mnohosti splývají a ztrácejí se v textu. Vzorec

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad (2.2)$$

zůstává nepochopený i neuchopitelný, neboť  $s$  zde nyní značí souřadnici polohy (koncové), zatímco dříve se běžně tímto symbolem označovala uražená dráha, nyní označená  $\Delta s$ , která ve vzorci není opticky přímo vidět. Přitom lze psát:

$$\Delta s = v_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \quad (2.3)$$

s interpretací:  $\Delta s$  je uražená dráha za časový úsek  $\Delta t$ , který trval sledovaný pohyb,  $v_0$  je počáteční rychlost a  $a$  zrychlení pohybu.

Při vyjádření změny, totiž relativní dráhy (mohli bychom mluvit o volném vektoru), neurčujeme souřadnici bodu vůči pevnému počátku (vázané vektory). Změna dráhy ve smyslu  $\Delta$  tedy také koresponduje s tím, že základy vektorového počtu, které se spolu s pojmem okamžité rychlosti vyučují, definují volné vektory. Po žákovi tím pádem bez myšlení vyžadujeme uvažování v kontextu vázaných souřadnic  $\vec{s}$  i volné změny dráhy  $\vec{\Delta s}$ .

Samotné slovo diference žák za své studium pozná jen při práci s posloupnostmi. Není ovšem chyba, že takto klíčový pojem prezentujeme jen jako speciální vlastnost aritmetických posloupností? Závěrem tohoto oddílu tedy konstatujeme, že diference je prekonceptem pro derivaci (jako limita podílu diferencí) a vážou se na ni miskoncepce. „**Je si učitel vědom, významné role diference pro DP?**“ Jistě bychom mohli tento problém rozvíjet víc, ale z prostorových důvodů přejdeme k navazujícímu pojmu.

## 2.2.2 Chyba

Chybami se člověk učí, říká se. My s tím souhlasíme, dokonce nalézáme v chybě jeden z klíčů k infinitesimálnímu počtu. Na stránkách [https://wiki.rvp.cz/Knihovna/1.Pedagogick%C3%BD\\_lexikon/HCH/Chyba](https://wiki.rvp.cz/Knihovna/1.Pedagogick%C3%BD_lexikon/HCH/Chyba) se dozvídáme: *Chyba označuje výkon žáka, který se odlišuje od požadovaného cílového výsledku nebo vzorového průběhu řešení učební situace. Chyba je přirozenou součástí procesu učení a je důležitým zdrojem poznání žáka. Pomáhá určit hranice toho, co je správné a co ne, ukazuje postupy, které není dobré v budoucnu opakovat, odhaluje*

slabá místa žákových kompetencí, poskytuje pravdivý obraz o aktuální dovednostní a znalostní úrovni žáka, může motivovat k vyšším výkonům. Jako problém vnímáme, že toto vnímání chyb ve smyslu omylu je úzkoprsé. „**Rozvíjíme u žáků vnímání chyby v různých smyslech? Učíme žáky pracovat s chybou v běžném životě?**“ Žák by měl znát hranice svých (ne)znalostí, možností, meze svých pravd, přesnost a věrohodnost svých informací. Z fyzikální podstaty studování světa kolem nás známe jen přibližné vztahy mezi různými objekty. Spoléháme na aproximace a i při nejlepší vůli a nejsprávnějším postupu se dopouštíme nepřesných – chybných – závěrů. Chybu je třeba vnímat jako odchylku v aproximaci.

Skrz dvojici slov absolutní/relativní propojujeme diferenci s pojmem chyby. Absolutní chyba relativizuje naměřenou hodnotu jako rozdíl *o kolik* se liší od skutečné hodnoty. Absolutní chyba je tedy diferencí těchto dvou hodnot. Značení  $\Delta x$  pro absolutní chybu veličiny  $x$  je tedy na místě. Význam absolutní chyby se poněkud stírá díky zavedení relativní chyby, která dále relativizuje absolutní chybu k naměřené hodnotě přepočtením na procenta, *jak moc* se měření odchýlilo od skutečnosti. Správné a plné pochopení chyb měření je tedy jedním z faktorů, který podle nás může jednou významně přispět k chápání diferencí a zprostředkovaně derivací atd. Chyba navíc souvisí přímo s *D&I*, protože pravidla pro fyzikální práci s chybou jsou analogií práce s diferenciály. Vzorec pro směrodatnou odchylku složené veličiny je dán derivacemi, ale to už jsme na VŠ. Detailně o chybě pojednává třeba materiál [F80] určený pro experimentální úlohy fyzikální olympiády. Dokument je bohužel pro svou náročnost v běžné SŠ výuce nepoužitelný. Podle naší zkušenosti lze s chybou měření úspěšně pracovat v kvartě osmiletého gymnázia, lépe však v prvním ročníku SŠ, kde můžeme představit absolutní a relativní chybu a vzorce pro chybu součtu/rozdílu a součinu/podílu veličin. Tyto vzorce je potřeba odvodit, aby bylo zřejmé, že nejde o shůry spadlá pravidla. O tuto přípravou můžeme později opřít pojem diferenciálu, jak učiníme v druhé kapitole v sekci 3.3.

Fyzika jako taková je postavená na aproximaci skutečných závislostí přijatelně komplikovanými funkcemi, přitom se obvykle využívají metody infinitesimálního počtu. Klíčovým pojmem je Taylorův rozvoj, který je opodstatněním pro mnohé kanonické fyzikální zákony jako Ohmův zákon, Hookeův zákon, zákon teplotní roztažnosti atp. Všechny tyto zákony se totiž opírají o to, že změna určitého parametru vyvolá jen malou změnu veličiny, kterou je možno se zanedbatelnou chybou nahradit změnou polynomické funkce. Podrobná diskuze se do látky SŠ nedostává, nejspíš protože většina zákonů se omezuje na lineární aproximaci. Výjimkou je anomálie vody. Taylorův rozvoj spojuje pojem aproximace a derivace nejtěsněji, tvoří matematickou oporu pro mnohé fyzikální popisy.

Jak ještě souvisí chyba a *D&I*? Limita označuje mezní hodnotu, od níž se hodnoty členů posloupnosti čím dál méně odchylují. Derivace je motivována hledáním tečny, což je nejlepší lineární aproximace funkce. Určitý integrál nahrazuje plochu pod křivkou soustavou obdélníků, přitom chyba v určení obsahu jde limitně k nule. Při sestavování fyzikálních integrálů se rovněž zanedbávají efekty vyšších řádů. Pro to všechno se domníváme, že žák musí plně před výukou *D&I* dobře porozumět aproximacím, chybám.

Tomu, aby se žák naučil pracovat s chybou podle nás brání standardní hodiny matematiky, kde se dbá na jedno přesné vzorové řešení v souladu s chápáním chyby jako omylu. Snad každý učitel má zkušenost, že žáci na ZŠ po zavedení

desetinných čísel a při práci s kalkulačkou běžně zapisují výsledek na všechna desetinná místa. Neví, že kalkulačka používá aproximaci (Taylorovým rozvojem), navíc některá čísla nelze zapsat konečným desetinným rozvojem. Z učitelské pozice upřesňujeme zápis periodických čísel, ale iracionální čísla se zavádí později, proto nejspíš žák má pocit, že výsledek  $x = 1,414213562$  je přesný a správný. Zaokrouhlování čísel žák vnímá jako berličku z lenosti, ne jako praktický nástroj pro určení číselné hodnoty s přijatelnou chybou. Tímto argumentujeme, že je potřeba vést pečlivě výuku o zaokrouhlování na tři platné cifry s důrazem na jeho praktický význam, totiž že chyba vzniklá zaokrouhlením je  $< 1\%$ . Za klíčové považujeme, abychom zadávali i příklady „Odhadni . . . ,“ či „Kolik asi...?“ namísto „Urči  $x!$ “ Takové příklady v dnešních učebnicích nenajdeme, ale můžeme je vytvořit s pomocí tématu nerovností, které chápeme jako pomocné téma k pojmu chyby. Na VŠ se setkáváme s odhady a sadami nerovností (Schwarzova, Minkovského, Jensenova, Hölderova, aj.), které jsou hrubé, ale mají významné praktické důsledky. Takové příklady jsou ukázkové pro aplikaci aproximací, přitom je můžeme přenést na SŠ, dokonce ZŠ. Např. po seznámení s druhou mocninou lze ukázat  $(1 + x)^2 > 1 + x^2$  pro  $x > 0$ , a tím současně ilustrovat, že druhou mocninu nelze "vetknout" do závorky. Příklady pracující s odhady jsou přirozené v astronomii a fyzice mikrosvětla, kde přesné hodnoty nemohou být k dispozici.

**„Uvědomuje si učitel souvislosti mezi diferenciálním počtem a chybou ve fyzice?“** Veškeré načrtnuté souvislosti chyby/aproximace a *D&I* se propojí až při vysokoškolském studiu, ale považujeme za nezbytné, aby základní souvislosti a práce s chybou přišly již na SŠ, někdy dokonce ZŠ, kde mohou dodat motivaci a především vyjasní žákův vztah k matematicko-fyzikálnímu popisu světa. *D&I* se pak snadněji upevní v již vybudované struktuře aproximací, chyb a mezí.

### 2.2.3 Uchopení nekonečna

**„Jak pracovat s pojmem nekonečno?“** Jde o ožehavý pojem, který se vymyká veškeré naší zkušenosti. Pro dítě je pro svou neuchopitelnost kritickým pojmem, s kterým se ale musí naučit zacházet, podle nás dříve, než přijde pojem limita. Domníváme se, že klíč pro práci s limitou a derivacemi, leží v myšlence, že pro žáka existují dvě fundamentálně rozdílná nekonečna. Jedno pojmenováváme "nekonečně velké" a druhé "nekonečně malé", přitom pro tyto pojmy se inspirujeme v [V81, V85], kde se formálně zavádí nekonečně malé veličiny.

Prvně na pojem nekonečna ve smyslu "nekonečně velkého" narazíme při indukativní tvorbě přirozených čísel. Neustálým přičítáním jedničky nikdy nedojdeme k finálnímu výsledku, existuje nepředstavitelně velké množství, které není žádným číslem postižitelné. Učitel by podle nás měl používat ve výuce frázi „Ať si zvolím libovolně velké číslo, nekonečno je ještě větší,“ tím připravujeme půdu pro limitu. Samozřejmě, žák v tomto věku nemůže kognitivně postoupit do nějaké formy osvětlení, může se ale postupně seznamovat s myšlenkami, formulacemi a frázemi, které jednou zapadnou do celkové mozaiky. Další manifest "nekonečně velkého" žák záhy potká v základech geometrie, kdy přímka na rozdíl od úsečky nikde nekončí a nikde nezačíná, přichází z nekonečna a běží do něj. Toto nové geometrické nekonečno je pro dítě nepochybně kategoricky odlišné od aritmetického. Částečné propojení nalezne až po zavedení záporných čísel a číselné osy,

kdy se setká s mínus nekonečnem, reálná osa (či alespoň celá čísla) stejně jako přímka běží od  $-\infty$  do  $\infty$  (s tímto symbolem se žák také právě setkává). Co se nedozví, je, že obě nekonečna lze chápat jako projev jediného prostorového nekonečna, ke kterému dospěl dávno v geometrii, a které by vzešlo např. z teorie komplexních čísel.

"Nekonečně malé" je základním kamenem infinitesimální počtu, bez něj nemůžeme s výukou *D&I* uspět, o to složitější je ovšem tento pojem vysvětlit. První setkání s myšlenkou "nekonečně malého" opět nalzáme v geometrii jako pojem bodu. Mnohem později se ve fyzice přidávají pojmy hmotného bodu a bodového elektrického náboje, které úspěšně navazují právě na pojem geometrického bodu. Analogicky k přirozeným číslům by zde mohl učitel jistě upozornit, že rozměry bodu jsou menší, než libovolně zvolený nenulový rozměr. Fundament nekonečně velkého čísla a nekonečně malého čísla se pojí s jednou závažnou miskoncepcí: žák automaticky chápe hodnotu nula jako nejmenší množství, a má vlastně pravdu. Ke zmatení dojde po zavedení záporných čísel, a to v pojmu  $-\infty$ , které je "nekonečně velké", přestože je nejmenší. Podle nás může k rozdílu mezi "nekonečně velkým" a "nekonečně malým" přispět myšlenka, že "nekonečně velké" vzniká skládáním, prodlužováním, např. spojováním úseček v přímku, naopak "nekonečně malé" dělením, zkracováním, např. opakovaným půlením úsečky se blížíme bodu.

Shrnujeme, že existují dvě fundamentálně rozdílná nekonečna – to "nekonečně velké" ve formě  $\pm\infty$  a to "nekonečně malé" ve formě 0, či chceme-li  $\varepsilon$ . Přitom "nekonečně malé" je podle našich zkušeností pro žáka kognitivně mnohem náročnější, než "nekonečně velké". Později jsou tyto dva fundamenty zapsány v limitě posloupností  $(\forall K)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n_0 < n \in \mathbb{N})(a_n > K)$  a limitě funkcí  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| = \varepsilon)$ . A ano, je mezi nimi souvislost, kterou formuluje Heineho věta. Jenže to už jsme na univerzitě. **„Jak se poprat s dualitou nekonečně velkého a nekonečně malého? A v jakém věku?“**.

Nekonečno se překvapivě často vyskytuje ve fyzice už na ZŠ. Při zkratu teče obvodem nekonečně velký proud, obraz předmětu umístěný do ohniska tenké spojky se zobrazí do nekonečna... Mnoho fyzikálních veličin se obecně definuje jako derivace, tj. poměr dvou nekonečně malých veličin. **„Kde všude naleznete pojem nekonečno ve fyzice? Jak s ním (vhodně) pracovat?“** Propojení "nekonečně velkého" a "nekonečně malého" také nalzáme ve fraktální geometrii, fraktál může vzniknout nekonečným opakováním procedury zjemňující strukturu. To zmiňujeme jen pro zajímavost, protože fraktální geometrie bohužel není v žádné formě součástí SŠ výuky.

Zakončeme úvahy o nekonečnách tím, že limita a derivace nejsou jejich zlatým hřebem. Třešničkou na dortu je integrace, která znamená složitou představu sloučení nekonečně mnoha nekonečně malých objektů.

## 2.2.4 Limita a spojitost

Konfrontace "nekonečně malého a velkého" by mohla svádět k tomu, že rozdíl měl své kořeny v kontrastu posloupnost - funkce. Uvedeme to nyní na pravou míru, klíčovým pojmem je tzv. lokálnost. Jde o uvažování v rozmezí určitých velmi blízkých hodnot. V případě posloupnosti, jejíž členy studujeme s indexem



rostoucí nade všechny meze, nehraje pro "okolí" nekonečna  $n \rightarrow \infty$  roli první ani druhý člen. Dokonce ani milionty. U funkce definované na okolí nějakého bodu se její vlastnosti v daném bodě nezmění, pokud její hodnotu v jiném bodě předefinujeme. Opačným pojmem k lokálnosti je globálnost, která naopak studuje funkci ve všech bodech naráz, stejně všechny členy posloupnosti. Globálnost tedy spoléhá na popis např. maximální hodnoty (globálních extrémů), počtu kořenů (tj. nulových bodů, průsečíků s osou  $x$ ), celkového charakteru funkce (jako třeba omezenost), nemůže proto poskytnout potřebné informace o konkrétním chování funkce v daném bodě. Z lokálních vlastností jmenujeme charakter monotonie, spojitost, lokální extrémy, ty totiž umožňují snadno popsat funkci na těsném okolí daného bodu.

Takto vágní popis by samozřejmě zasluhoval pořádnou matematickou definici, jenže takovou jsme nikde nenašli. Navíc bychom na řádné definice všech těchto intuitivně známých pojmů potřebovali mnohem více místa. Zjednodušíme tedy situaci a lokalitu dále vnímáme jako chování postižitelné studiem limit, tj. analýzou na bezprostředním okolí. Pozor, do toho tedy zahrnujeme i limitu posloupnosti s  $n \rightarrow \infty$ . Kritickým okamžikem výuky je sama definice limity, která je pro žáka velmi abstraktní i přes názorné zakreslování epsilon-delta okolí. Doporučujeme se limitě věnovat mnohem více před vyslovením definice, ostatně to tak provádí i kniha [V81]. Radíme tedy, aby učitel při výuce limity používal slovní spojení „chovat se jako“, např. posloupnost  $\frac{n-1}{n}$  „se chová v nekonečnu jako konstanta 1,“ funkce  $y = \frac{x^2+1}{x}$  „se chová v nekonečnu jako lineární  $y = x$ ,“ funkce  $\frac{\ln x+1}{x}$  „se chová v nule, jako by měla nabývat hodnoty 1“. Takový přístup nabízí náhled nad skutečným průběhem funkce při rozlišení, že funkce/posloupnost hodnotu ve skutečnosti nenabývá, ale lokálně je jí podobná až na zanedbatelnou chybu.

Limita je podle nás kritickým pojmem proto, že na rozdíl od geometrických či kombinatorických úvah pro ni nemáme dostatečnou praktickou představu. Navíc žák musí kromě náročné představy zvládnout zápis logickými výroky. Učebnice [M29] obsahuje 15 definic limity funkce pro limity jednostranné, vlastní, nevlastní, ve vlastních bodech... Toto množství různých možností s různými logickými výroky nutně žáka mate a ztrácí se v něm klíčová myšlenka lokálnosti. Ta je ve své podstatě jediná, ale vzhledem k dualitě nekonečna ji zapíšeme dvakrát.

**Definice 1.** Řekneme, že posloupnost  $(a_i)_{i=1}^{\infty}$  má nevlastní limitu  $\infty$ , právě když splňuje  $(\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(a_n > K)$ , zapisujeme  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ;

Tato definice je klíčová pro budování vztahu k nekonečnu ("nekonečně velkému"), jehož vlastnost je  $(\forall Z \in \mathbb{N})(\exists K \in \mathbb{N})(Z < K < \infty)$ . Slovy: neexistuje závora, která by oddělila nekonečno od ostatních čísel, přitom nekonečna nelze dosáhnout. S tímto typem limity se pojí slovo nevlastní, jehož smysl vynikne v kontrastu s definicí:

**Definice 2.** Řekneme, že funkce  $f$  má ve vlastním bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$ :

- vlastní levostrannou limitu  $L$  právě tehdy, když  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0))(|f(x) - L| < \varepsilon)$ , zapisujeme  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ ;
- vlastní pravostrannou limitu  $L$  právě tehdy, když  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0; x_0 + \delta))(|f(x) - L| < \varepsilon)$ , zapisujeme  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ .

*Pokud má funkce obě jednostranné limity, pak řekneme prostě, že funkce má ve vlastním bodě  $x_0$  vlastní limitu  $L$ .*

V této definici je ukryta předchozí definice limity posloupnosti, což nepatrně lépe vynikne pro levostrannou limitu. Limita funkce je ale obohacena o ("nekonečně malé") přibližování hodnot  $x \rightarrow x_0$  z obou stran, tím je definice nová. Podobnost definice limity funkce a limity posloupnosti není zřejmá, protože používáme jiné značení, ale žákům bychom měli vysvětlit pravou souvislost. Pro učitele můžeme uvést, že jediná myšlenka limity se spojuje pro posloupnosti a funkce Heineho větou.

**Věta 1** (Heineho). *Bud'  $f$  funkce,  $a \in \mathcal{D}_f$  a  $c$  reálné číslo nebo  $\pm\infty$ . Potom*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c \quad (2.4)$$

*pro libovolnou posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ , kde  $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .*

Domníváme se, že obsah této věty je vhodné žákovi nějak předat, nicméně didaktika limity jde za rámec této práce. Proto stručně říkáme, že po žákovi u limity chceme příliš. Výrokové formule a hyperkorektní odlišování vlastních a nevlastních bodů přebíjí smysl definice. Ten bychom měli podpořit větším počtem příkladů, i numerických, na "hledání  $\delta$ ", tento přístup je běžný ve starší literatuře včetně [V81]. Dnešní počítačové metody mohou pro to být dobrým pomocníkem. Možná by pomohlo i formální zavedení množiny  $R^*$ , kdy nekonečno prohlásíme za specifické reálné číslo. Jeho výjimečné vlastnosti se tím neztratí, ale zmizí tím odlišování vlastních/nevlastních limit ve vlastních/nevlastních bodech. Tím umožníme žákovi soustředit se na myšlenku lokálnosti.

Poslední komentář je, že v pojmu limita zůstává nevysloveno, že limitu provádíme vzhledem k nějakému parametru,  $n \rightarrow \infty, x - x_0 \rightarrow 0$ . Limita vždy porovnává chování jedné veličiny v limitním přechodu jejího parametru (indexu  $n$ , argumentu  $x$ ). Podle nás to zakládá miskoncepci, že limita je výhradně vlastnost funkčního předpisu, přitom jde o chování funkce/posloupnosti v okolí bodu při nepatrné změně parametru. Už samotné  $x \rightarrow x_0$  či  $n \rightarrow \infty$  je myšlenka náročná na představivost, natož pak otázka  $f(x) \rightarrow ?$ , když  $x \rightarrow x_0$ . Abychom vystihli závislost limity na limitujícím parametru, mohli bychom psát označení

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L \quad (2.5)$$

Na závěr se věnujme definici spojitosti. Tu obvykle představujeme v posledním ročníku těsně před zavedením derivace, nejprve intuitivně, později korektní definicí. **"Je tradiční definice spojitosti nezbytná?"** Připomínáme, že na žáka klademe při výuce mnoho požadavků. Nejen, aby pochopil smysl limity, ale aby se dokázal vypořádat s logickými výroky, abstraktními větami atd. Možná to je důvod, proč se podle našeho dotazníkového šetření asi čtvrtina studentů s definicí spojitosti na SŠ nesetkala. Podle našeho názoru je maturitní ročník pozdě na zavádění spojitosti. Dualita spojitého a diskrétního žáka provází od malička, je tedy vhodné se jí věnovat mnohem dříve. Upozornit ho na rozdíl mezi posloupnostmi a funkcemi, rozebrat diskrétní a spojitě fyzikální veličiny (ostatně fyzika minulého století ukázala, že náš vesmír je kvantovaný, např. energie elektronu v atomu může nabývat jen sady diskrétních hodnot). Pokud se žák seznámí se spojitostí dříve,

ostatně intuitivně pochopit kreslení grafů jedním tahem nemusíme nechávat do maturitního ročníku, je pak snazší zapsat myšlenku formální definicí.

K tomu navíc doporučujeme, aby učitel vystavěl řádně pojem limita. Ten je klíčový i pro derivaci aj. Pokud jej žák dobře ovládá, můžeme jej využít k definici spojitosti pomocí věty: „ $f$  je spojitá v  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ “. Limita v definici zastupuje delta-epsilonový formalismus, který kontroluje, zda graf funkce "neuteče" z okolí  $f(x_0)$ . Můžeme se ptát, zda je ale vůbec nutné spojitost definovat? Na rozdíl od limity, její definice není potřebná k zavedení derivace a integrálu. Ale figuruje v mnohých větách, např. že spojitá funkce je integrovatelná či že diferencovatelná funkce je spojitá. Protože žák obvykle na SŠ pracuje s elementárními, ergo spojitými funkcemi, takové věty jsou pro něj automaticky platné. Proto by např. učitel mohl pojem spojitosti vynechat a upozornit, že teorie  $D\&I$  má své meze a ukázat protipříklady, např. nespojitou funkci, kterou tedy nelze integrovat. Přitom by zmínil, že lze zavést matematicky korektně tzv. spojitost, ale to přenechá těm, kteří matematiku skutečně studovat chtějí.

## 2.2.5 Derivace a diferenciál

Matematická opora pro naše úvahy o nekonečně malém je v knihách [V81, V85], kde nalézáme korektní definici *nekonečně malé* veličiny. Ta formuluje lokální vztah mezi různými funkcemi.

**Definice 3.** *Budiž  $x_0 \in \mathbb{R}$  a  $n \in \mathbb{N}$ . Jestliže existuje vlastní limita*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(\Delta x)^n} = A, \quad (2.6)$$

*přítom  $A \neq 0$ , pak říkáme, že funkce je  $x_0$  nekonečně malá řádu právě  $n$ -tého. Je-li  $A = 0$ , řekneme, že je funkce v  $x_0$  nekonečně malá řádu vyššího než  $n$ -tého.*

Řád nekonečné malosti se běžně používal dříve, s dobou z literatury postupně vymizel. Podle nás je to chyba, neboť jde o nástroj, který porovnává lokálně funkci s polynomy. Čtenář si snadno rozmyslí, že funkce může být nejvýše jednoho řádu malosti: pro funkci nekonečně malou řádu  $n$  a  $m < n$  odvodíme

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(\Delta x)^m} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(\Delta x)^n} (\Delta x)^{n-m} = A \cdot 0 = 0. \quad (2.7)$$

Funkce řádu  $n$  nekonečné malosti se lokálně chová jako polynom  $f(x) \doteq A(x - x_0)^n$ . Tento pojem buduje mezi funkcemi "hierarchii růstu" funkcí. Navíc lze z myšlenky řádů nekonečné malosti intuitivně dojít k Taylorovu rozvoji.

Je-li funkce nekonečně malá prvního řádu, pak funkce  $A\Delta x$  z definice není nic jiného, než lineární člen diferenciálu funkce<sup>1</sup>, jak se s ním běžně setkáváme na VŠ. Pro účely SŠ vzdělání ale pojem diferenciálu využijeme dávno před zavedením limity. Proto je potřeba transformovat látku, aby se učitel obešel bez limity. To provedeme v sekci 3.3 fyzikálním přístupem: obecně diferenciálem budeme rozumět nekonečně malou diferencí  $dx$ , diferenciálem funkce rozumíme  $df = f(x_0 + dx) - f(x_0)$ , přitom pro libovolné veličiny  $x, y$  platí  $dx \neq 0 \neq dy \wedge dx \cdot dy = 0^2$ .

<sup>1</sup>Jde o funkci proměnné  $\Delta x$ , funkci potom aproximujeme  $f(x_0 + \Delta x) \doteq f(x_0) + A\Delta x$ .

<sup>2</sup>Vztah vychází z toho, že součin veličin nekonečně malých řádu  $m$  a  $n$  je veličina nekonečně malá řádu  $m + n$ , zanedbání druhého řádu malosti u součinu diferenciálů stvrzujeme použitím znaménka = namísto  $\doteq$ .

Fyzikálně říkáme, že zanedbáváme veličiny vyššího řádu (malosti). Takový přístup fyzikální práce je rozumný, např. je-li diference  $dx = 10^{-15}$  - přesnost čísla, s jakou se obvykle pracuje v počítačích – pak  $(dx)^2 = 10^{-30}$ , což počítač identifikuje jako 0. Všimněme si konfliktu s matematickým faktem  $dx \cdot dy = 0 \Rightarrow (dx = 0 \vee dy = 0)$ , ten platí (je to přece matematika), ale pro praktické potřeby (fyzika) diferenciálu se v něm úmyslně dopouštíme přijatelné nepřesnosti.

Derivace je formálně definována jako limitní poměr diferencí (pokud existuje), je tedy přímo konstantou  $A$  pro  $n = 1$  v definici řádu malosti. Naším záměrem je k výkladu použít dobře připraveného konceptu diferencí a chyby, hlavním motivem takového výkladu je způsob zápisu. Symbolicky:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2.8)$$

Více se k problému zavedení derivace vyjádříme v sekci 3.5, kdy již budeme mít propedeutiku vybudovanou a budeme se na ni moct odkazovat.

Definice derivace se při výuce motivuje a vysvětluje pojmem okamžité rychlosti. Ta je základní a první situací, kde se žák setkává s myšlenkou derivace. Její výuka je ovšem velice ošemetná, na rozdíl od intuitivní průměrné rychlosti je potřeba zmenšit uvažovaný časový úsek pode všechny meze na "nekonečně malý". Tento problém navíc koliduje s mnohými miskoncepce, které se v mechanice objevují, [O105]. Příkladem může být asociace „ten vpředu je rychlejší“, či „ten, kdo zrychluje, je rychlejší“. Výuka derivací prostřednictvím pojmu rychlost by proto mohla být neúspěšná. Na učitelé fyziky tedy leží břemeno, aby pečlivě a přesně okamžitou rychlost vysvětlil. Fyzikální rychlost (při úspěšné výuce) považujeme za vhodnou didaktickou pomůcku pro další vysvětlení derivací ve fyzice, které vyjadřují, s jakou abstraktní "rychlostí" se mění hodnota závislé veličiny při změně vstupní nezávisle proměnné. Např. výkon  $P = \frac{dW}{dt}$  můžeme chápat jako rychlost konání práce. Proměnnou ovšem nemusí být čas, ale teplota, délka atp. V takovou chvíli ovšem běžná intuice o rychlosti může selhávat. Doporučujeme rychlost např. teplotního roztažení materiálu přeformulovat, když převedeme teplotu na čas např. rovnoměrným zahříváním. V této formulaci se pak různé materiály rychleji/pomaleji rozpínají, což je názorné při běžných demonstračních experimentech, a rychlost tak přeci jen dostává známý podtext.

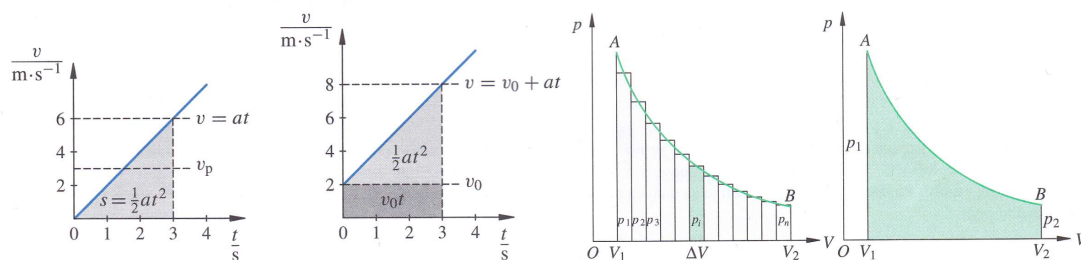
Naši krátkou úvahu bychom mohli rozvádět dále, ale v tuto chvíli ji shrneme: **„Jak nejlépe přistoupit k představení derivace? Jak vybudovat prekoncept? Je vhodné ji interpretovat jako rychlost změny veličiny?“** Říci, že derivace vyjadřuje rychlost změny je podle našeho názoru přívětivější, než formální argumentace limitou podílu diferencí, jak je tomu v učebnicích. Je to vhodné pro vytvoření prekonceptů derivace. Geometrický význam derivace jako směrnice tečny pak připomíná, že rychlost je tečná k trajektorii.

## 2.2.6 Integrál

Východiskem pro zavedení integrálu může být přirozená otázka po operaci opačné k derivování. To logicky vede žáka k definicím primitivní funkce atp., které většinou pouze zavádějí terminologii. Původní motivaci pro zavedení integrálu je nutno hledat v úlohách na určení obsahu nějakých obecných ploch, což vedlo k vytvoření Newtonova integrálu, [V82], který byl později formalizován s využitím integrálních součtů do podoby Riemannova integrálu. Ale ani jeho konstrukce

není jedinečná a můžeme nalézt v literatuře mnoho přístupů, jak integrál v riemannovském duchu vystavět. Kromě Riemannovy definice, kdy se konstruuje pro normální posloupnosti dělení intervalů integrální součty a zkoumá se jejich limita, můžeme také využít Darbouxovu konstrukci, která porovnává suprema dolních integrálních součtů s infimy horních integrálních součtů, [V82, V93]. Podle nás může žák integraci pro její zavedení jako duální operace k derivování přisuzovat podřadnou roli. Riemannova myšlenka je obalena složitou teorií, aby korektně zavedla jednoduchou myšlenku, totiž že integrace je součet nekonečně mnoha nekonečně malých příspěvků. „**Předáváme dostatečně myšlenku, že integrace je jen pokročilý způsob sčítání?**“ Některá literatura [V82, V85] skutečně přistupuje k integrálnímu počtu tak, že představí určitý integrál a poté se vrací k propojení s derivací. Starší knihy detailně zkoumají změnu obsahu plochy pod křivkou  $S(x + \Delta x) - S(x) \doteq f(x)dx$  a dochází k úvaze, že obsah  $S$  je taková funkce, že funkce  $f$  je její derivací. Takový přístup skýtá více příležitostí pro motivaci, práci s informačními technologiemi a celkovému zatraktivnění výuky, než dojde na nudné vypočítávání integrálů. Proto doporučujeme učitelům volit následující postup: motivovat integrál určitým integrálem, odvodit, že klíčovou roli v něm hraje primitivní funkce a v tu chvíli odbočit k neurčitému integrálu, který tak vykládáme s praktickou motivací. Později se můžeme vrátit k diskuzi mezi a dokončit určitý integrál a tím dokončit i otázku určení obsahu plochy pod křivkou.

Pokud bychom žáka chtěli seznámit s Reimannovým integrálem, dojdeme k zásadní krizi, totiž že látka je pro středoškoláka příliš obsáhlá a náročná. Uznáváme proto, že ve vší úplnosti na SŠ neuspějeme, ale domníváme se, že by se žák měl alespoň se základními kroky setkat, i kdybychom teorii ošidili a některé pojmy nechali v intuitivní rovině. Otázkou zůstává: „**Jak nalézt kompromisní zjednodušení Riemannovy teorie?**“ Nástroj, bez něhož se stejně jako v  $DP$  neobejdeme, je limita, ale zbytek definice může být logicky a ilustrativně podán pro vybudování nejprve myšlenkového konceptu, později formální definice. Náš nápad využívající aproximací bude prezentován v druhé kapitole 3.6.1.



Obrázek 2.1: Typově stejné obrázky nalézáme v mnoha pasážích SŠ výuky. Je třeba je cíleně využít pro propedeutiku. Dvojice vlevo z [F49], vpravo z [F50].

**"Kde hledat příležitosti pro propedeutiku pojmu integrál?"** Tři základní elementy zde v úvodu předstříme. Jde podle nás o využití Cavalieriho principu, jednoduché a při tom geniální myšlenky, které se učitel matematiky může věnovat v rámci geometrie. Cavalieriho princip je speciálním případem Fubiniovy věty. Druhou pomůckou na přípravu výuky určitého integrálu jsou hodiny fyziky, kde se žák setkává s určením fyzikální veličiny jako obsahu plochy pod grafem. První takové setkání je opět u pojmu rychlost, kdy se dráha určuje "grafickou integrací". Tento proces zůstává při výuce na vedlejší koleji, i když je

několikrát opakován, a nedojde k propojení s pozdější výukou. Domníváme se, že při výkladu o rychlosti je potřeba grafickou integraci účelně představit jako matematický nástroj a během výuky jiných témat tento koncept budovat např. s použitím počítačové techniky. V hodinách matematiky se při výkladu integrálu tyto již známé metody pouze formulují korektn(ějš)ím jazykem. Za poslední pomůcku považujeme numerickou integraci, ke které můžeme využít dnes snadno dostupnou výpočetní techniku.

### 2.2.7 Využití derivací a integrálů v pokročilých úlohách

**"Proč se na SŠ neřeší diferenciální rovnice?"** Diferenciální rovnice hýbou světem, doslova. "Budiž světlo" matematicky zapíšeme jako diferenciální Maxwellovy rovnice. Harmonický oscilátor je základní řešitelný fyzikální model s bohatými aplikacemi, to vše opřené o jednoduchou diferenciální rovnici. Vedení tepla. Meteorologie. . . Aplikací diferenciálních rovnic je mnoho a podle nás představují nástroj úspěšné motivace. Domníváme se, že žáci by se měli seznámit s tím, že množství zákonů fyziky, biologie, chemie, ekonomie aj. jsou dány diferenciálními rovnicemi. Např. analytická mechanika umožňuje postavit se obecným problémům využitím variačního počtu a analýzy integrálních funkcionalů. Sice neumožňuje spočítat vše, ale zpřístupňuje celou škálu praktických úloh, o které stojí za to se podělit. Podobně třeba statistické metody v matematice – připomeňme distribuce pravděpodobnosti, počítání statistických momentů, entropie atd. Ochutnávkou některých příkladů a situací žáky nenutíme do jejich řešení. Z bohaté série aplikací lze vybrat několik, které jsou zkousnutelné pro středoškoláka. Také ještě jednou zmíníme Taylorův rozvoj, který se jednak promítá do mnoha fyzikálních definic, ale také jej můžeme brát za nástroj pro výpočet limit. **„Zná učitel, jaké pokročilé typy úloh z vyšší matematiky může na SŠ řešit?“** Nejde přeci o to, abychom úlohu vyřešili ve vší matematické formálnosti, ale nastínili postup a využití celé teorie. Žák pak bude jistě mile překvapen, jaký nový svět se mu tím otevře.

## 2.3 Revize výukové literatury

Ze stohů knih o *D&I* jsme prošli pestrou škálu, abychom zjistili, jak různí autoři přistupují k výstavbě látky, jaké metodické přístupy a příklady volí. Za tím účelem jsme studovali zejména různé VŠ materiály a knihy pro samouky. Tyto knihy jsou cíleny pro konkrétní studijní zaměření, proto jsou zdrojem inspirace pro praktické příklady. SŠ a ZŠ učebnice pročítáme proto, abychom našli propedeuticky vhodné situace, zjistili, jestli a jak si jich autoři všímají. Také kontrolujeme samotnou výuku, jak autoři látku vystavují, jak a jaké příklady volí.

Společným prvkem všech textů je výstavba látky, do které žádná z knih nevkládá žádnou inovaci. Podle kontextu se liší jen motivační texty, které jsou typicky velmi stručné, úsporné. I v literatuře vysokoškolské nacházíme chyby a nepřesnosti, např. [V96] tvrdí, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{\frac{1}{n}} = 0$  pro  $p > 0$ . Většinou má zjednodušení příčinu v potřebě redukovat látku a zpřístupnit ji oborům, které nejsou primárně matematické. Ano, je potřeba najít kompromis mezi korektností, atraktivitou a schopností látku smysluplně předat. Přístup k takovému kompromisu není jedinečný a měl by záviset na cíli knihy, a komu je věnována. Přesto všechny

nalezené pokusy o kompromis vyústily v opakování téměř identických příkladů, obrázků i textů, které v dnešní době nejsou aktuální.

Kostrou výstavby látky je opora ve funkcích, poté se představí pojem limita a dále spojitost. Literatura cílená na pojem derivace a integrál ovšem tyto pojmy probírá ve stručnosti a nedostatečně je procvičuje. Derivace se představuje geometricky z motivace nalezení tečny ke grafu a ve fyzikálním kontextu rychlosti jako derivace polohy v čase. Po zavedení se definice typicky procvičí na dvou či třech příkladech a přejde se k aritmetice derivací – pravidlu derivace součinu, složené a inverzní funkce. Procvičovací příklady na tyto věty jsou tvořeny formálním zadáním a testují výhradně aplikaci vzorců. *DP* se uzavírá aplikacemi v podobě vět o střední hodnotě, hledání extrémů a vyšetřování funkce. Tím se procvičují opět mechanická pravidla a postupy pro funkce, které jsou odtržené od praktických aplikací. Definice integrálu obvykle přichází zavedením primitivní funkce jako opačný proces k derivování. Některé knihy ovšem přistupují naopak zavedením určitého integrálu z motivace určení obsahu plochy pod křivkou a později ujasňují vztah určitého integrálu a primitivní funkce. Již jsme řekli, vzhledem k praktické užitnosti je více motivační začít určitým integrálem. Aplikace zůstávají na SŠ primárně u určení ploch, případně určení objemů rotačních těles atp.

Zásadní výhodou literatury pro VŠ a samouky oproti SŠ učebnicím je motivace praxí a tematicky více laděné příklady, podle osobnosti autora. Mnohé knihy se snaží látku redukovat na základní myšlenky, proto lépe využívají inženýrský podtext k motivaci a míří k aplikacím, přitom se ovšem snaží držet korektnosti. Z toho samozřejmě existují výjimky na obě strany. Např. [V90] prezentuje látku co nejintuitivněji bez rozboru předpokladů atp. Skripta matematických fakult [V92, V93, V95] naopak teorii úzkostlivě ve vší formálnosti vystavují na matematických základech. Mnohdy si knihy jako [V90] neuvědomují, že se prezentují jako začátečnické, ale vyžadují velmi pokročilé matematické schopnosti, které jdou za rámec SŠ výuky. Např. [V99] (určeno pro začátečníky!) začíná rozбором kompaktních a souvislých množin. Za rozumný kompromis považujeme [V87], která úspěšně míří na neznalého čtenáře, když pomocí názorného vysvětlení oproštěného od detailního formalismu stručně a jasně předá podstatné myšlenky.

Samostatnou kapitolou je fenomén Jarník, jehož dvě základní knihy [V81, V82] provedou čtenáře logicky veškerou látku, dají mu slušnou sadu procvičovacích příkladů a také nadhled. V předmluvě [V81] autor praví, že je kniha určena těm, kteří se matematikou chtějí zabývat důkladněji. Předmluva nakladatele doplňuje, že čtyřsvazkový soubor [V81, V82, V83, V84] vychoval mnoho generací matematiků, položil základy matematického vzdělání techniků, učitelů aj. Také v ní nacházíme zmínku, že dílo prošlo metodickými úpravami a značným zahuštěním. Přesto má [V81] 392 stran. V těchto informacích vidíme zásadní fakta, z kterých je třeba se poučit. Text od Jarníka je určen matematikům, přes veškeré zahuštění je extrémně rozsáhlý, proto nelze čekat, že učebnici *D&I* lze vytvořit tenkou, stručnou, a přitom snadno srozumitelnou a věcně správnou. Jarníkovy texty prošly dlouhým vývojem, čímž se staly legendární, od té doby ovšem veškeré další materiály tento způsob kopírují. Žádné nalezené české knihy nenabízejí jiný přístup. Stejný styl výkladu (pro VŠ matematického směru!) se prokopíroval do gymnaziálních učebnic [M29, M42] i webových materiálů. Podle nás je nutné hledat nový způsob výkladu reflektující vývoj společnosti a školství, metodiku skutečně určenou pro mladé žáky, kteří nota bene nemusí mít zájem o technické

či matematické vzdělání. Inspiraci můžeme hledat i v cizojazyčné literatuře, z ní nás zaujala [V88].

Základní SŠ učebnicí je [M29], která ovšem pro svou formálnost je dnes pro žáky nestravitelná. Vyžaduje od nich pokročilou orientaci v logice a abstraktní látce sestavené téměř metodou definice – věta – důkaz. V knize lze najít motivační texty i praktické příklady, ale pouze ve velmi omezené míře. Samotné myšlenky *D&I* zapadají ve složitém a suchém textu, který navíc není doplněn grafickým zpracováním. Příložené grafy také nejsou nejvhodnější pro ilustraci daných myšlenek. O mnoho lépe si nevede nová učebnice [M42], která styl práce přebírá právě z [M29]. Volí modernější styl textu, který čtenáři tyká, navíc je graficky zpracován. Autoři používají vhodnější (ale ne nejvhodnější) obrázky, a také je každá kapitola uvozena krátkým motivačním a prakticky zaměřeným textem. Kniha ovšem má zásadní nedostatky. Tím, že se autoři snažili dodržet formální ráz [M29], na který jen roubovali kamarádsky zjednodušený text, se dopustili mnoha přešlapů. A to je problém zejména po věcné stránce, když např. ve shrnutí o asymptotách funkcí se píše, že asymptoty bez směrnice jsou kolmé na osu  $x$ , mají tvar  $x = a$ . Funkce nesmí být v bodě  $a$  definovaná a musí mít alespoň jednu jednostrannou limitu. Podle tohoto popisu by ovšem asymptotu bez směrnice měla i funkce  $\frac{x}{|x|}$  v bodě  $a = 0$ . Lze se ohradit, že důležité slovo „nevlastní“ limitu bylo v předchozím výkladovém textu, ale to podle nás není důvod dopouštět se této nepřesnosti ve shrnutí. Neodpustitelným hříchem je důkaz spojitosti obrázkem.

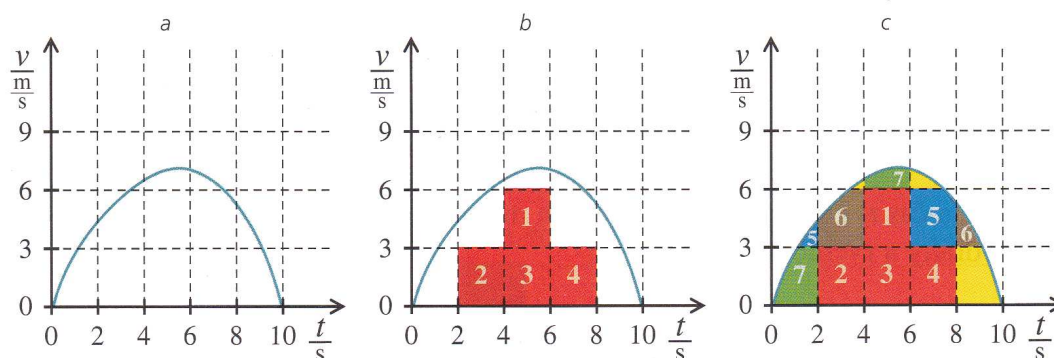
Za nejvhodnější současnou SŠ učebnicí *D&I* považujeme [M43], která je příjemně textově zpracována, doplněna slušnou sadou obrázků a příkladů. Nechybí krátké motivační texty a poznámky o aplikacích, dokonce třeba odkaz na Fourierovu transformaci zvukového signálu. Dalšími krásnými materiály jsou texty k fyzikální olympiádě, které ovšem cílí na talentované studenty. Učitel v nich může najít bohatou inspiraci pro vlastní zlepšování a některými příklady či postupy může obohatit svou výuku. Texty jsou k dispozici na stránkách <http://fyzikalniolympiada.cz/studijni-texty> a věnují se např. práci s chybou, aproximacím a Taylorovu rozvoji ve fyzice, parametrickým funkcím, křivkám... SŠ knihou, která nás nejvíce nadchla, je [F76], která prezentuje sérii obvyklých i náročnějších úloh a cílí na aplikaci *D&I* ve fyzice. Tímto zaměřením ale vůbec netrpí výklad, který je naopak podbarven praktickými ukázkami výpočtů z balistiky, optiky a mnoha dalších. Tato kniha by podle nás měla být v knihovničce každého učitele matematiky či fyziky.

Pokud se chceme věnovat SŠ literatuře z hlediska propedeutiky, v učebnicích matematiky základní gymnaziální řady nakladatelství Prometheus hledáme marně, až na zmínku o Cavalieriho principu v [M37], který je použit právě dvakrát (objem jehlanu a koule), a ne zrovna jednoduše. V geometrii se obvykle, zejména v opakovací literatuře a sbírkách, vzorce pro výpočet obsahů a objemů prezentují jako fakta daná shůry, přitom by se na nich mohl budovat vztah k integrálu. Další části matematiky jako posloupnosti a řady též zůstávají nevyužity a ani pojem limity posloupnosti nemíří ke studiu lokality a nepřipravuje nejvhodnější základ pro budoucí výuku derivací. Výrazně lepší možnosti k propedeutice nalézáme v učebnicích fyziky, které ze své podstaty vyžadují vysvětlení derivace a integrálu dávno před jeho probráním. Konstatujeme, že např. princip integrace se prezentuje žákovi na gymnáziu od prvního ročníku, kdy se setkává s tím, že dráha nerovnoměrného pohybu je určena jako obsah plochy pod křivkou



ve  $v - t$  diagramu. Stejný obrázek nalezneme u počítání práce jako plochy pod křivkou v  $F - s$  diagramu, či ve druhém ročníku kde je analogický obrázek u rozdělení rychlostí molekul plynu a zejména u výpočtu práce ideálního plynu jako obsah plochy v  $p - V$  diagramu, 2.1. Podobně jako s integrací je to s derivací, která se prvně projeví u rychlosti a poté se opakuje u výkonu atd. Učitel fyziky musí vždy a znovu vysvětlovat princip derivace/integrace, aniž by měl k dispozici matematický podklad. Domníváme se, že zde čeká základní příležitost pro propedeutickou práci, neboť učitel může založit celou novou ideu, kterou postupně potkává ve fyzice na různých místech. Ve čtvrtém ročníku pak přijde korektní formulování idey v hodinách matematiky. Žákovi už bude látka ale dobře známa.

Propedeutiku lze zakládat už na ZŠ, přestože se tomu nyní děje jen v minimální míře. Domníváme se, že učebnice by měly v tomto věku dítěte zejména klást důraz na práci s chybou a aproximacemi, rozlišení hodnoty a změny hodnoty veličiny atp. Přitom i riemannovská myšlenka počítání plochy pod křivkou je pro žáka přijatelná, pokud ji před něj postavíme axiomaticky. Tak postupuje [Z18], viz obr. 2.2. Klasická série učebnic fyziky pro ZŠ od nakladatelství Prometheus [Z21, Z22, Z23, Z24] propedeutické příležitosti nabízí pouze jediným příkladem na rozdíly teplot v [Z21]<sup>3</sup>, stejně chudá je i sada učebnic matematiky pro nižší gymnázium od stejného nakladatelství autorů Herman J. a kol. [Z1]-[Z16].



Obrázek 2.2: Dráha tělesa jako obsah plochy pod křivkou v ZŠ učebnici [Z18].

Pro srovnání moderního výkladu s historickým jsme prošli knihy staršího data, nejen cizí [V88, V89, V90], ale i české, např. [M48, V85, V86]. To jsou dobré příklady toho, že knihy staršího data pečlivě dbaly na aplikace, názorný výklad i na bohaté procvičení látky. Hned v úvodu [V85] se po čtenáři žádá určit funkce obvodu průřezu tunelu, hustoty směsi lihu a vody, délky železné tyče v závislosti na teplotě. Takové povědomí o funkcích přesně chceme v žácích budovat i dnes. Proč tedy takový přístup z knih zmizel a zůstala jen formalita logických výroků? Terminologie snad v tu dobu ještě nebyla ustálená, ale čteme o limitě jako mezní hodnotě, o nekonečně malých veličinách různých řádů atp. Konkrétně Vojtěchovy texty považujeme za velice přínosné a nutí nás k otázce „**Šel historický vývoj literatury správným směrem?**“ Podle nás je na čase se zamyslet, nepřebírat nekriticky látku bezprostředně z čerstvých učebnic, ale hledat inspiraci ve staré literatuře, která se k tématům staví tak, jak lidé k  $D&I$  postupně dospívali. Tím je neméně vhodná, aby citlivě poučila čtenáře neznalého  $D&I$  i dnes.

<sup>3</sup>Učebnice je tvořena pro 6. třídu! Fyzika s rozdíly záporných teplot trochu předbíhá matematiku, kde se žák právě učí celá čísla.

Naopak moderní doba, ta nabízí nové možnosti, zejména grafické vizualizace a numerických metod, jimž staré texty nemohou konkurovat. Na webu jsou dostupné mnohé texty a videa, které ale bohužel přebírají látku navzájem od sebe a zbytečně formálně. Bez kvalitní motivace a nabídky praktických aplikací mluví o tečnách, složitých vzorcích, pravidlech derivace atp. Z takto nevhodných materiálů vybíráme např. z youtube kanálu onlineshool.cz: [https://www.youtube.com/watch?v=JKn84tBTv\\_E&list=PLxqPHeBj75191y0UVWLFv\\_vORPLb7eJIq&index=2&t=0s](https://www.youtube.com/watch?v=JKn84tBTv_E&list=PLxqPHeBj75191y0UVWLFv_vORPLb7eJIq&index=2&t=0s), lepší přístup nalézáme např. na kanálu Marka Valáška, příp. webu [www.mathematicor.com](http://www.mathematicor.com) <https://www.youtube.com/watch?v=1XZmgv8xm18> či vzdělávacím kanálu Isibalo <https://www.youtube.com/watch?v=Sbztj0Ve7Eg>. Všechna tato videa, která jsou na youtube na předních místech, sdílí stejné chyby, zejména za motivaci berou touhu určit tvar grafu funkce. K tomu sice využívají lépe či hůře terminologii změn funkce či analogii fyzikální rychlosti, tím se ale neliší od učebnic, které jsme právě z toho důvodu kritizovali. Ani v zahraničních kanálech nenacházíme dobrá videa, např. u Khan Academy <https://www.youtube.com/watch?v=rAof9Ld5s0g>, <https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-1/v/derivative-as-a-concept>, kde navíc strohý nudný výklad bez motivace doplňují tragickými kresbami v nespécifikovaném softwaru. Soustředěním na vzorce pak oplývá video <https://www.youtube.com/watch?v=SfruceeKV54>. Hodnotíme tedy, že většina webových materiálů není kvalitní. Existují ovšem výjimky, např. <https://www.youtube.com/watch?v=WUvTyaaNkzM>, kde se autoři věnují i principu integrace. Kanál 3Blue1Brown se věnuje i pokročilým tématům jako parciální diferenciální rovnice či Fourierova transformace velmi poutavě a názorně s dobrým grafickým zpracováním a věcnou správností. Nevýhodou je, že k anglickému videu nejsou k dispozici české titulky. Snad díky univerzálnímu jazyku matematiky nebude učiteli angličtina vadit a vezme si cenou inspiraci. Kromě výukových videí se učiteli hodí software pro práci s grafy atp. Kromě již známé GeoGebry bychom rádi čtenáři dali odkaz na webový kalkulátor Desmos, který je GeoGebře velmi podobný, nevyžaduje ale žádnou instalaci, protože je k dispozici přímo ve webovém okně [www.desmos.com](http://www.desmos.com). Na této stránce lze také nalézt hotové materiály pro distanční online výuku různých matematických partií. I samostatné webové stránky věnované *D&I* sdílí mnohé chyby učebnic ve snaze zredukovat látku na minimální obsah. Význam takových materiálů se tím ale velmi snižuje, potenciál grafické vizualizace je nevyužit, a proto nejsou o nic vhodnější než papírové učebnice. Uvádíme příklady takových stránek, čtenář sám může posoudit: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/karel.trnka/derivace/?page=12derivacevbode>, <http://math.feld.cvut.cz/mt/txttd/1/txc3da1c.htm>, <https://maths.cz/clanky/200-zaklady-derivace>, <https://matematika.cz/derivace>, z cizojazyčných <https://www.mathsisfun.com/calculus/derivatives-introduction.html>, <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcI/DefnOfDerivative.aspx>. Voláme po tom, aby byly vytvořeny názorné a srozumitelné interaktivní materiály, kde motivací nebude hledání tečny a obsahu plochy, kde derivací nebude míněna sada vzorců pro derivace konkrétních funkcí, kde integrálem nebude míněno používání pravidla per partes. Je potřeba žákům a zájemcům o matematiku ukázat, co všechno zajímavého a užitečného *D&I* mohou skutečně nabídnout.

# 3. Příklady a texty pro rozvoj a aplikaci infinitesimálního cítění

V této kapitole si klademe za cíl dát učiteli matematiky a fyziky do ruky texty a arzenál příkladů, které jsou vhodné pro propedeuci, přitom se soustředíme na klíčová hesla nalezená v předchozí kapitole. Texty může brát učitel jako základ pro vlastní didaktickou transformaci látky, může je snadno a volně zpracovat ve vlastní výukové texty. Některé příklady slouží k upozornění učitele, aby nevynechal ty zdánlivě snadné, které jsou ale z hlediska propedeutiky *D&I* podstatné. Jiné příklady přímo cílí na rozvoj infinitesimálního cítění a velká sada příkladů je aplikačních po výkladu látky. Tyto náročnější příklady bez přímého propedeutického významu jsou podle nás nezbytné, protože učitel je může použít jednak při samotné výuce *D&I*, ale také jako inspiraci a zejména motivaci.

Část příkladů je inspirována nebo přímo převzata z dostupné literatury, mnohé z příkladů jsou ovšem tak elementární, že nemá smysl citovat autorství. U neobvyklých, originálních příkladů zdroj citujeme. Pokud jsme převzali nějaký nápad ke konstrukci nového příkladu, označujeme to citací s poznámkou „Insp.“. Pokud je příklad naší autorskou tvorbou, či prezentujeme zajímavé autorské řešení známého příkladu, budeme takovou situaci značit ©. U neřešených příkladů často pro kontrolu dáváme výsledky do závorky na konec zadání.

## 3.1 Změna je život

Pojem diference se na SŠ objevuje jen jako specifikum aritmetických posloupností, my jej formálně zavedeme u všech posloupností, tím dojdeme až k tématu diferenčních rovnic. Transformací tohoto tématu pro SŠ žáky zamýšlíme mj. seznámit je se stylem práce definice – věta – důkaz dříve, než u *D&I*. U posloupností, kde chybí limitní přechod k "nekonečně malému", je to vhodnější začátek. Hlavně tím připravujeme prekoncept pro derivaci a diferenciální rovnice. Zavádíme k tomu novou terminologii opřenou o diferenciální počet. Samotné posloupnosti a řady nejsou hlavní náplní této práce, proto jsme pro naši didaktickou transformaci jejich formálního zavedení vyhradili dodatek B a následující text míří přímo k pojmu diference. Do dodatku doporučujeme čtenáři nahlédnout, pokud by náhodou neměl jasno ve značení, které v dalším textu budeme používat, navíc se budeme držet stejného stylu textu. Takto podaná látka nemusí být vhodná pro všechny žáky SŠ. Spíše slouží jako inspirace pro učitele, který si ji dále transformuje do výuky posloupností podle situace. Po matematické sekci o diferencii v posloupnostech a řadách rozebereme roli diference ve fyzice, navrhne nové konzistentní značení respektující rozdíl mezi hodnotou a změnou hodnoty veličiny. Nechybí příklady na ujasnění této duality.

### 3.1.1 Diference a posloupnosti

Uvažujme posloupnost  $(a_i)_i$ . Potom se můžeme ptát, jak obecně vypadá vztah mezi sousedními členy. Takový vztah totiž může usnadnit studium některých

posloupností. Např. pro rostoucí posloupnost musí být rozdíl po sobě jdoucích členů kladný.

**Definice 4.** Pro posloupnost  $(a_i)_{i=1}^n$  definujeme  $i$ -tou diferencí jako rozdíl  $a'_i = a_{i+1} - a_i$ . Derivovanou<sup>1</sup> posloupností rozumíme posloupnost diferencí, tj. posloupnost  $(a'_i)_{i=1}^{n-1}$ , jejíž členy jsou  $a'_i = a_{i+1} - a_i$ . Kromě značení  $(a'_i)_i$  použijeme i značení  $(Da_i)_i$ .

*Poznámka.* Derivovaná posloupnost od aritmetické je konstantní. Protože jsou všechny difference stejné, nemá smysl mluvit o  $i$ -té diferencí, ale obvykle udáváme jen termín difference. U ostatních posloupností jsou difference nekonstantní funkcí indexu  $i$ .

*Poznámka.* Různé posloupnosti mohou mít stejnou derivovanou posloupnost, na příklad posloupnost lichých a posloupnost sudých čísel. Posloupnost tedy není jednoznačně určena svojí derivovanou posloupností.

**Tvrzení 2.** Posloupnost je jednoznačně určena svou derivovanou posloupností a jedním svým členem.

*Důkaz.* Známe-li jeden člen, je možné užitím známých diferencí dopočítat libovolný další člen a tento výpočet je jednoznačný. Při  $j > i$  platí

$$a_j = a_i + a'_{i+1} + a'_{i+2} + \cdots + a'_{j-1} = a_i + \sum_{k=i}^{j-1} a'_k. \quad (3.1)$$

*Poznámka.* Motivování terminologií funkcí, budeme pro jednoduchost o posloupnostech, jejichž členy jsou dány polynomem  $a_i = P(i)$ , hovořit jako o polynomických posloupnostech. Případně uijeme termín kvadratická, atp. Pro posloupnosti ve tvaru  $a_i = \alpha i + \beta$  tak máme dvě splývající pojmenování - aritmetická a lineární posloupnost. Z tradice se přidržíme prvního pojmenování, druhý termín by byl namísto při účelném srovnání souvislosti s polynomy.

**Př. 1:** © Pro následující posloupnosti  $(a_i)_i$  nalezněte jejich derivované posloupnosti - napište je vzorci pro  $i$ -tý člen.

- posloupnost lichých čísel  $a_i = 2i - 1$   $(a'_i = 2)$
- $a_i = i^2$   $(a'_i = 2i + 1)$
- $a_i = i^3$   $(a'_i = 3i^2 + 3i + 1)$
- $a_i = 2i^3 - 3i^2 + 1$   $(a'_i = 6i^2 - 1)$

**Př. 2:** © Posloupnost derivovaná od rostoucí posloupnosti má kladné členy. Analogicky pro neklesající či klesající posloupnosti. Ukažte tak, že posloupnost  $(a_i)_i = (i^3 - i^2)_i$  je rostoucí. Od kterého členu je rostoucí posloupnost  $(b_i)_i = (i^3 - 7i^2 + 6i + 5)_i$ ?  $(a'_i = 3i^2 - i > 0$  pro  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $b'_i = 3i^2 - 11i > 0$  pro  $i \geq 4$ )

Uvažovat můžeme i posloupnost derivovanou od derivované posloupnosti. Další derivované budeme značit dalšími čárkami, např. druhou derivovanou posloupnost  $(a''_i)_i$ , indexem v závorce,  $(a_i^{(2)})_i$ , anebo se znakem  $D$ ,  $(D^2 a_i)_i$ .

<sup>1</sup>děřivāre = odvādět vodu, přeneseně: odvozovat

**Př. 3:** Pro posloupnost  $(2^i)_i$  nalezněte první a druhou derivovanou posloupnost. Jak by vypadaly další derivované? Nalezněte předpis pro první člen  $k$ -té derivované posloupnosti od  $((-1)^i)_i$ .  $((D^k 2^i)_i = 2^i, (D^k (-1)^i)_1 = -(-2)^k)$

**Př. 4:** © Má-li posloupnost členy udané jako polynom v indexu  $a_i = P(i)$ , pak zdůvodněte, že derivovaná posloupnost má také členy dané polynomickým předpisem, ale se stupněm o jedna nižším.

**Př. 5:** © Pro posloupnost  $(i^4 - i^2)_i$  určete, kolikátá derivovaná bude (nenulovou) aritmetickou posloupností. (čtvrtá)

Podobný princip funguje i u posloupností, jejichž členy jsou dány jako převrácená hodnota z polynomu, stupeň polynomu ve jmenovateli derivováním roste.

**Př. 6:** © Pro posloupnost  $(\frac{1}{i})_i$  spočítejte první, druhou a třetí derivovanou. Všimněte si, že derivované posloupnosti se střídají v monotonii (klesající, rostoucí, klesající, ...) a ve jmenovateli předpisu se vyskytuje polynom s větším a větším stupněm.

**Př. 7:** © Zavádíme sérii posloupnosti  $(p_i^n)_i$  pro  $n \in \mathbb{N}_0$  takových, že  $p_i^n = \binom{i+n-1}{n}$ .  $n$ -tá posloupnost je tedy tvořena čísly v  $n$ -té diagonále Pascalova trojúhelníku. Odvoďte a v Pascalově trojúhelníku vyznačte derivované  $(D^m p_i^n)_i$ .

**Řeš.:** Řešení spočívá ve vlastnosti kombinačních čísel:  $p_{i+1}^n - p_i^n = \binom{i+n}{n} - \binom{i+n-1}{n} = \binom{i+n-1}{n-1} = p_{i+1}^{n-1}$ . Obecněji  $D^m p_i^n = p_{i+m}^{n-m}$ . Derivované posloupnosti jsou tak postupně další diagonály v Pascalově trojúhelníku, přičemž se derivováním postupuje horizontálně doleva.

Opačný proces, tj. k dané posloupnosti najít takovou, jíž by zadaná byla derivovanou, je složitější. Využijí se v něm znalosti částečných součtů, proto je rozumné nejdřív uvést pojem řady.

**Definice 5.** *Libovolnou posloupnost  $(A_i)_i$  takovou, že posloupnost  $(a_i)_i$  je od ní derivovaná, nazveme primitivní posloupností k posloupnosti  $(a_i)_i$ . Primitivní posloupnost označíme buď velkým písmenem  $(A_i)_i$ , indexem v závorce  $(a_i^{(-1)})_i$  nebo symbolem  $(Sa_i)_i$ . Případné další primitivní posloupnosti pak intuitivně  $(a_i^{(-k)})_i$  či  $(S^k a_i)_i$  podle potřeby a vhodnosti označíme.*

*Poznámka.* Primitivní posloupnost není určena jednoznačně, lze použít symbol  $(Sa_i)_i$  pro označení všech primitivních posloupností k  $(a_i)_i$ . Dvě různé primitivní posloupnosti  $(A_i)_i \neq (B_i)_i$  k dané posloupnosti se liší o konstantu, tj.  $(\forall i, j \in \mathbb{N})(A_i - B_i = A_j - B_j = \text{const})$ . Primitivní posloupnost je jednoznačně určena libovolným jedním svým členem. Známe-li  $A_m$  a  $(a_i)_i$ , pak pro  $n > m$  platí  $A_n = A_m + \sum_{i=m}^{n-1} a_i$ , zatímco pro  $n < m$  platí  $A_n = A_m - \sum_{i=n}^{m-1} a_i$ .

*Poznámka.* Symboly  $D$  a  $S$  používáme jako předzvěst derivace a integrálu. Symbol  $S$  navíc odkazuje na souvislost primitivní posloupnosti a částečných součtů. Předchozí poznámka je analogií Newtonovy formule a záměny mezi integrálem, což vynikne při symbolickém přepsání  $F(n) = F(m) + \int_m^n f(x)dx$ .

**Př. 8:** © Nalezněte primitivní posloupnost  $(D_i)_i$  k posloupnosti přirozených čísel  $(d_i)_i := (i)_i$  s podmínkou  $D_1 = 1$ .

**Řeš.:** Pro  $i > 1$  platí  $D_i = D_1 + \sum_{n=1}^{i-1} d_n = 1 + s_{i-1}$ . Stačí tedy určit  $n$ -tý částečný součet. Gaußovou metodou zapíšeme  $2s_n = [(1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \dots + (k+(n-k+1)) + \dots] = n \cdot (n+1)$ . Závěr příkladu tedy je:

$$D_i = 1 + \frac{i(i-1)}{2} = \frac{i^2 - i + 2}{2} \quad (3.2)$$

Už jsme viděli, že k polynomické posloupnosti je derivovaná posloupnost také polynomická. Všimneme si, že pro polynomickou posloupnost je i primitivní posloupnost polynomická, polynom má ovšem naopak stupeň o jedna vyšší.

**Př. 9:** © Nalezněte takovou posloupnost  $(a_i)_i$ , že geometrická  $(q_i)_i := \left(\frac{1}{4^i}\right)_i$  je její derivovaná, a navíc sama  $(a_i)_i$  je geometrická.

**Řeš.:** Opět je třeba určit  $n$ -tý částečný součet:  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k}$ . Můžeme využít fakt, že jde o geometrickou posloupnost s  $s_1 = q = \frac{1}{4}$ , částečný součet je  $s_n = s_1 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{4} \frac{1-\frac{1}{4^{n+1}}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(1-4^{-n})$ . Posloupnost  $(a_i)_i$  má tedy členy

$$a_i = a_1 + \frac{4}{3}(1-4^{-i+1}) = a_1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1}}{3}. \quad (3.3)$$

Jelikož má jít o geometrickou posloupnost, musíme najít takové  $a_1$ , že  $a_i = a_1 \cdot Q^{i-1}$ . Přepíšme  $a_i = \frac{3a_1+1-4^{1-i}}{3}$  a zapíšme poměr po sobě jdoucích členů, který má být konstantní:

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{3a_1+1-4^{-i}}{3a_1+1-4^{1-i}} = Q = \text{const. pro } \forall i \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

Srovnáme-li  $\frac{3a_1+1-4^{-1}}{3a_1+1-1} = \frac{a_2}{a_1} \stackrel{!}{=} \frac{a_3}{a_2} = \frac{3a_1+1-\frac{1}{16}}{3a_1+1-\frac{1}{4}}$ , dostaneme po úpravě  $(3a_1 + \frac{3}{4})^2 = 3a_1(3a_1 + \frac{15}{16})$  a dále se rovnice redukuje na  $\frac{27}{16}a_1 = -\frac{9}{16}$ , čímž dostaneme kandidáta  $a_1 = -\frac{1}{3}$ . Ověříme, že tento počáteční člen skutečně udává konstantní poměr po sobě jdoucích členů pro všechna  $i$ : kvocient  $Q$  dostaneme srovnáním  $Q = \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{4^{-i}}{4^{-i+1}} = \frac{1}{4} = q$ , což je skutečně nezávislé na  $i$ . Nalezená dvojice  $a_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $Q = \frac{1}{4}$  skutečně umožňuje zapsat  $a_i = a_1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1}}{3} = a_1 Q^{i-1}$ .

Obecná úvaha pro obecnější geometrickou posloupnost  $(q^i)_i$  by se opírala o podobný argument. Dostali bychom

$$a_i = \frac{(1-q)a_1 + q - q^i}{1-q} \stackrel{?}{=} a_1 Q^{i-1} \quad (3.5)$$

a o geometrickou posloupnost půjde, právě když  $a_1 = \frac{q}{q-1}$ ,  $Q = q$ . Je ovšem lepší tento výsledek uhodnout a ověřit, než obecně odvozovat.

Podstatný závěr, který lze z příkladu učinit, je: derivovaná i primitivní posloupnost ke geometrické posloupnosti je geometrická posloupnost se stejným

kvocientem. V případě primitivní posloupnosti je třeba upřesnit, že až na posunutí (nejednoznačnost primitivní posloupnosti). Speciálně, každá primitivní posloupnost ke geometrické posloupnosti  $(q^i)_i$  má členy  $Sq_i = \frac{1}{q-1}q^i + \text{const}$ . Opačně, derivovaná posloupnost má  $Dq_i = (q-1)q^i$ . Jako zajímavost nepochybně postřehneme, že v derivované i primitivní posloupnosti se objevuje faktor  $(q-1)$ , jednou v čitateli, podruhé naopak ve jmenovateli. Tento fakt vynikne pouze pro tyto speciální posloupnosti, kdy  $a_1 = q$ , situace s obecnou geometrickou posloupností  $a_i = a_1q^{i-1}$  by byla zbytečně komplikovaná pro tuto chvíli. Speciální jednoduchý případ je následující:

**Př. 10:** © Od posloupnosti  $(a_i)_i$  se členy  $a_i = 2^{i-1}$  nalezněte všechny posloupnosti  $\left(a_i^{(k)}\right)_i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\left(\left(a_i^{(k)}\right)_i = (a_i)_i\right)$

Geometrické posloupnosti potkáme i při oddechu. Herní systémy jsou postavené na zvyšující se obtížnosti. Základní jednoduchou úvahou je požadovat na postup o další úroveň zhruba tolik zkušeností, kolik hráč nasbíral za celý dosavadní postup. Takovou vlastnost má právě geometrická posloupnost, např. pro předchozí příklad lze ověřit  $a_{i+1} = 1 + \sum_{k=1}^i a_k$ . Pro motivaci hráčů a z důvodů herních mechanismů se v praxi ale používají obvykle složitější vztahy.

**Př. 11:** © Pro libovolnou geometrickou posloupnost  $a_i = a_1q^{i-1}$  ukažte, že  $n$ -tý částečný součet  $s_n$  se dá vyjádřit lineární funkcí  $a_{n+1}$  a naopak. Užijte nalezený vztah k tomu, abyste našli  $n$ -tý částečný součet posloupnosti  $(2^{i-1})_i$ .

**Řeš.:**

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1}, \text{ tj.}$$

$$s_n = \frac{1}{q - 1} a_{n+1} - \frac{a_1}{q - 1}, \quad a_{n+1} = (q - 1)s_n + a_1 \quad (3.6)$$

Zadaná posloupnost  $2^{i-1}$  je geometrická s  $a_1 = 1, q = 2$ , proto  $s_n = a_{n+1} - 1$ .

**Př. 12:** © Hra OldSchool Runescape využívá systém úrovní založený na sbírání zkušeností, jako drtivá většina her. V tomto případě jsou celkové potřebné zkušenosti  $XP$  k získání dané úrovně  $Lvl$  předepsané vzorcem:

$$XP(Lvl) = \left\lfloor \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{Lvl-1} \left(k + 300 \cdot 2^{k/7}\right) \right\rfloor, \quad (3.7)$$

kde závorky  $\lfloor \cdot \rfloor$  značí spodní celou část (desetinné číslo tedy zaokrouhlíme dolů). Numerické hodnoty jsou vypsány v tabulce 3.1 pro prvních dvacet úrovní. Kolik zkušeností  $a_n$  je potřeba k postoupení o jednu úroveň, z  $n$ -té na další? Zkoumejte, jak je to aritmetičností, geometričností posloupnosti  $(XP(Lvl))_{Lvl}$ . V předpisu sumy se vyskytují dva členy:  $k$  a  $300 \cdot 2^{k/7}$ . Jaký je jejich význam pro postup do další úrovně na nízkých a vysokých úrovních hráče?

Pojem derivované funkce lze s úspěchem použít pro studium rekurentních posloupností. V této terminologii studujme Fibonacciho úlohu:  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Leftrightarrow F'_{n+1} = F_n$ . Úloha pro nalezení vzorce pro  $n$ -tý člen tedy spočívá v tom, nalézt takovou posloupnost, která má zadaný vztah vůči své derivované posloupnosti. Tuto úlohu budeme nazývat řešením diferenční rovnice, [V94]. Takovou rovnicí je

Tabulka 3.1: Tabulka celkových (tj. kumulativních) zkušeností  $XP$  potřebných pro postoupení na danou úroveň  $Lvl$ . Výpis pouze do úrovně 20, maximální dosažitelná úroveň ve hře je 99.

$Lvl$	$XP$	$Lvl$	$XP$	$Lvl$	$XP$	$Lvl$	$XP$
1	0	6	512	11	1358	16	2746
2	83	7	650	12	1584	17	3115
3	174	8	801	13	1833	18	3523
4	276	9	969	14	2107	19	3973
5	388	10	1154	15	2411	20	4470

libovolná rovnice svazující členy posloupnosti a členy posloupností od ní derivovaných. Vyřešit diferenční rovnici ovšem může být velmi složité.

Studujme speciální případ  $a'_i = const.$ , která není nic jiného, než hledání primitivní posloupnosti ke konstantní posloupnosti. A my již víme, že řešením bude aritmetická posloupnost. Fakt, že primitivní funkce není jednoznačná, vede k tomu, že diferenční rovnice doplňujeme tzv. "počátečními podmínkami", které vyselektují jedinečné řešení. Taková podmínka je např.  $a_1 = 1$  či  $3a_2 = 2a_3$ .

Podívejme se na Fibonacciho posloupnost danou rovnicí  $\frac{F'_{n+1}}{F_n} = 1$ . Tato rovnost znamená, že derivovaná posloupnost roste stejně tak, jako původní posloupnost. Tuto vlastnost jsme viděli u geometrické posloupnosti:  $\frac{q'_{i+1}}{q_i} = (q - 1)$ . Dostáváme podezření, že členy  $F_n$  budou mocninou funkcí  $n$ . Toto podezření zesílí, pokud zkontrolujeme částečné součty  $s_n = \sum_{i=1}^n F_i$  následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
 F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\
 F_{n-1} &= F_{n-2} + F_{n-3} \\
 F_{n-2} &= F_{n-3} + F_{n-4} \\
 &\vdots \\
 F_3 &= F_2 + F_1 \\
 \hline
 s_n - F_2 - F_1 &= s_n - F_n - F_1 + s_n - F_n + F_{n-1}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

z čehož vidíme, že  $s_n = 2F_n + F_{n-1} - F_2 = F_{n+2} - F_2$ . Jelikož  $F_2 = F_1 = 1$ , je zde obzvláště nápadné, že  $F_{n+2} = F_1 + s_n$ , což je podobné jako u geometrické posloupnosti, která je sama sobě primitivní  $q_{n+1} = q_1 + s_n$ . Přes drobné odlišnosti zkusme hledat předpis pro  $n$ -tý člen ve tvaru  $F_n = \alpha^n$ . Derivovaná posloupnost má tvar  $F'_n = (\alpha - 1)\alpha^n$  a dosazením do diferenční rovnice dostáváme:

$$\frac{F'_{n+1}}{F_n} = \frac{(\alpha - 1)\alpha^{n+1}}{\alpha^n} \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \tag{3.9}$$

Takto získanou rovnici nazýváme charakteristickou rovnicí a právě jejím prostřednictvím se snadno studují i složitější diferenční rovnice. Nebudeme se detailně zabývat matematickou teorií, ale stručně představíme závěry, které dává. Řešení charakteristické rovnice jsou dvě, a to:

$$\alpha_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \tag{3.10}$$

Které řešení ale vystihne Fibonacciho posloupnost? Teorie diferenčních rovnic potvrzuje intuitivní myšlenku, že oba kořeny se na řešení podílí a Fibonacciho číslo



je určeno nějakou kombinací geometrických posloupností s nalezenými kvocienty (touto kombinací nyní zpřesňuje původní naivní odhad geometrické posloupnosti).

$$F_n = \lambda_+ \alpha_+^n + \lambda_- \alpha_-^n, \quad (3.11)$$

kde koeficienty  $\lambda_{\pm}$  určíme z počátečních podmínek:  $F_1 = \lambda_+ \alpha_+^1 + \lambda_- \alpha_-^1 = \frac{\lambda_+ + \lambda_- + \sqrt{5}(\lambda_+ - \lambda_-)}{2} \stackrel{!}{=} 1$ ,  $F_2 = \lambda_+ \alpha_+^2 + \lambda_- \alpha_-^2 = \frac{6(\lambda_+ + \lambda_-) + 2\sqrt{5}(\lambda_+ - \lambda_-)}{4} \stackrel{!}{=} 1$ . Po substituci  $u = \lambda_+ + \lambda_-$ ,  $v = \sqrt{5}(\lambda_+ - \lambda_-)$  dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 6u + 2v &= 4 \\ u + v &= 2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

a odtud plyne  $\lambda_+ = -\lambda_- \wedge \lambda_+ - (-\lambda_-) = \frac{2}{\sqrt{5}}$  a konečně  $\lambda_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Shrňme získané výsledky do závěru:

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} \quad (3.13)$$

Ačkoliv se toto řešení může zdát vizuálně komplikované, je třeba si uvědomit, že jsme k němu dospěli na základě intuice a jednoduchých úvah. Za rozebrání stojí následující dva fakty: Posloupnost daná kořenem  $\alpha_- \doteq -0,618$  přispívá ve vyšších mocninách k hodnotě  $F_n$  naprosto zanedbatelně. Rychle klesá a už pro  $n = 2$  je  $\frac{\alpha_-^2}{\sqrt{5}} \doteq 0,17$  a  $\frac{\alpha_+^2}{\sqrt{5}} \doteq 1,17$ , takže stačí psát

$$F_n = \left[ \frac{(1 + \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} \right], \quad (3.14)$$

kde hranaté závorky označují zaokrouhlení na nejbližší celé číslo. Díky tomu naivní přístup s odhadnutím Fibonacciho posloupnosti geometrickou zafungoval.

Dále, podíl dvou po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti není konstanta, protože posloupnost není geometrická v pravém slova smyslu. V napsaném přiblížení (zanedbáme příspěvek daný  $\alpha_-$ ) ale pro vysoké hodnoty  $n$  můžeme bez uzardění psát

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha_+. \quad (3.15)$$

Číslo  $\alpha_+$  tedy dostává přesný význam - popisuje, jak rychle rostou členy posloupnosti pro velká  $n$  (kvocient přibližné posloupnosti). Toto číslo má ovšem významnou roli v mnoha dalších úlohách teoretických i praktických. Je známé pod názvem zlatý řez a obvykle se v literatuře značí  $\varphi \doteq 1,618$ . Známý je jako vizuálně nejpříjemnější poměr délky a šířky v umění, ale najdeme jej i v přírodě: poměr výšky člověka a vzdálenosti jeho pupíku od země také odpovídá zlatému řezu. O toto číslo je dále opřena tzv. logaritmická spirála, kterou lze nalézt na šiškách stromů, parozích a klech zvěře či schránkách mlžů. Mnoho fyzikálních úloh rovněž vede na zlatý řez, např. poměr vzdáleností nabitých částic při minimálním elektrostatickém potenciálu. Hmyz se pak po logaritmické spirále přibližuje ke světlu, čímž řeší úlohu na trajektorii, z níž je cíl vidět pod stále stejným úhlem. Z aritmetických vlastností zlatého řezu jsou to třeba

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}, \quad (3.16)$$

zkrátka narazíme na něj (nejen v geometrii) téměř na každém rohu.

### 3.1.2 Diference ve fyzice

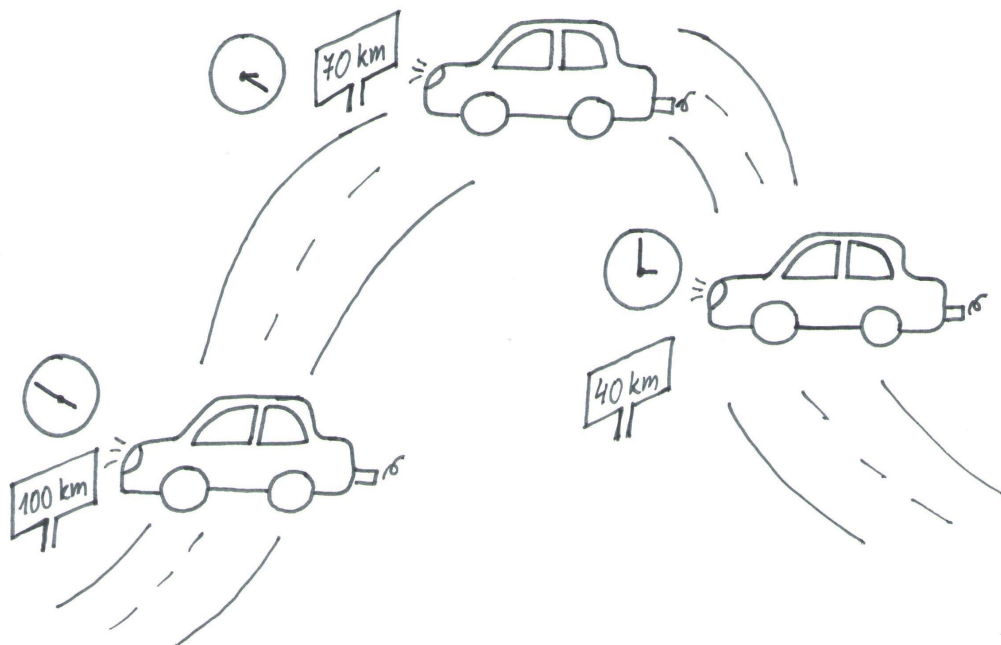
Touto kapitolou reagujeme nejen na otázku diference jako takové, ale i na problém rozlišování mezi hodnotou a změnou hodnoty veličiny, 2.2.1. Domníváme se, že k tomu, aby žák vědomě rozdíl rozlišoval, je vhodné využít jednoduché příklady z běžného života, které se zapíší formalismem diferencí. Pro fyzikální veličinu  $f$  rozumíme *absolutní diferencí* změnu jejích hodnot mezi dvěma stavy.  $\Delta f = f_2 - f_1$ . Absolutní diference veličiny má stejnou jednotku jako původní veličina. *Relativní diferencí* potom rozumíme bezrozměrný podíl  $\delta f = \frac{f_2 - f_1}{f_1} = \frac{\Delta f}{f_1}$ . S pojmem diference můžeme začít přirozeně už mnohem dříve v matematice.

**Př. 13:** Cena brambor  $c$  se zvýšila o  $\Delta c = 5 \frac{\text{Kč}}{\text{kg}}$ . O jakou částku  $\Delta C$  zaplatíme více při nákupu  $5 \text{ kg}$  brambor? Je podstatné, kolik stál kilogram brambor před zdražením?

**Př. 14:** Kolik korun  $\Delta C$  budeme muset připlatit, jestliže namísto požadovaných  $15 \text{ dk}$  salámu dostaneme naváženo  $18 \text{ dk}$ ? Cena salámu je  $120 \frac{\text{Kč}}{\text{kg}}$ .

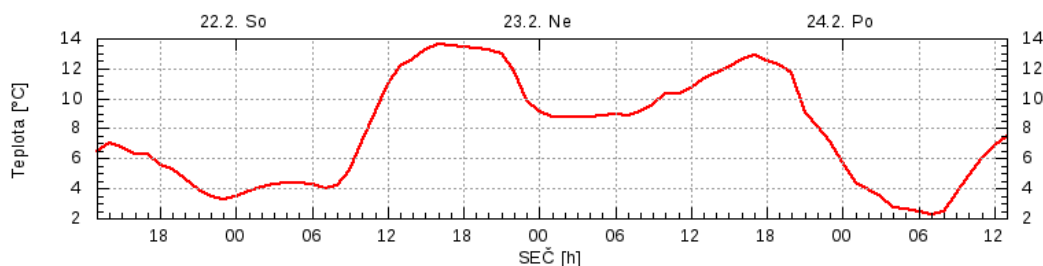
K odlišení hodnoty veličiny od její změny, je podle nás podstatné, aby učitel v různých situacích i věkových stupních neopomíjel zdánlivě jednoduché příklady jako např.

**Př. 15:** © Automobil jede po dálnici a postupem času mívá různé kilometrovníky, viz obrázek 3.1. Mělo auto větší průměrnou rychlost  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  v prvním, nebo druhém úseku cesty? Spočítej průměrnou rychlost za celý úsek mezi čtyřicátým a stým kilometrem.



Obrázek 3.1: Automobil jede po dálnici.

**Př. 16:** © Na obrázku 3.2 je graf závislosti teploty vzduchu na denní hodině. Zapište do tabulky aktuální teplotu  $T(t)$  po každých třech hodinách a změnu teploty oproti předchozímu stavu  $\Delta T(t) = T(t) - T(t - 3)$ . V kterém časovém úseku se teplota měnila nejrychleji?



Obrázek 3.2: Meteogram teploty vzduchu. Zdroj: [www.chmi.cz](http://www.chmi.cz)

Tento příklad nenápadně směřuje i k derivaci a analýze průběhu funkce, když hledá největší změnu teploty při stejné změně času.

Za matoucí okamžik, který je možná příčinou mnohých miskoncepcí nejen ve fyzikálním smyslu, považujeme tepelnou výměnu na základní škole. Při výuce o teple jako formě energie dochází často k nedorozuměním, které se následně mohou prolínat s miskoncepcí hodnoty a změny veličiny. Základním matoucím prvkem je označení tepla  $Q$ , které indikuje, že těleso má nějakou hodnotu tepla. Přitom teplo je forma energie, která se manifestuje pouze jako změna vnitřní energie jednoho tělesa na úkor jiného. Toto téma je detailně rozebíráno na vysoké škole, kde se dospěje k tomu, že teplo není totální diferenciál, a zavede se entropie, ale pro potřeby základní školy navrhujeme následující.

O teple v hodinách hovoříme pouze jako o předané energii, jakožto *změnu* energie jej zapisujeme výhradně diferencí  $\Delta Q$ . Doporučujeme provést poctivě energetickou analýzu tepelné výměny dvou těles z hlediska celkové energie a změny energií a mechanicky napočítat množství příkladů se zdůrazněním hodnoty teploty a změny teploty. Přitom považujeme za důležité zdůrazňovat, že aktuální hodnota veličin (z jaké teploty na jakou teplotu) není podstatná.

**Př. 17:** Jaká bude změna teploty  $\Delta T$  kilogramového železného závaží, jestliže mu dodáme teplo  $\Delta Q = 2200 \text{ J}$ ?  $c = 440 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$ . ( $T = 5^\circ\text{C}$ )

Diference se dále s pojmem energie objevují i v dalších situacích a teprve při vysokoškolském studiu dojdou hlubšího pochopení. Z příkladů takové situace teď vybíráme mechanickou práci. To je též forma energie, kterou jeden fyzikální systém předává jinému (koná/je na něm konána práce). Definice práce přichází pro elementární situaci přesunu tělesa silou  $F$  po dráze  $s$ . Opět si povšimneme, dráha není pozice tělesa, nýbrž její změna. Na místě tedy je psát diferencí  $\Delta s$ . Teprve až na VŠ po zavedení konzervativních sil a potenciálů dojde na završení  $\vec{F} = -\nabla U$ , což lze s nadhledem a přimhouřením fyzikálního oka zapsat do tvaru

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta s}. \quad (3.17)$$

Byli bychom tedy pro, aby se pro změnu energie (ve formě práce) psalo i  $\Delta W$ , jako jsme u tématu tepelné kapacity změnu energie (ve formě tepla) zapisovala  $\Delta Q$ . Důvodem pro to je nejen budování koncepce diferencí, ale také se opíráme o VŠ definici potenciálu a podobnost s teplem, kde tepelná kapacita je definovaná jako funkce teploty prostřednictvím derivace  $C = \frac{dQ}{dT}$ . Podle nás bychom tedy na SŠ i ZŠ měli psát  $\Delta W = F\Delta s$ ,  $\Delta Q = mc\Delta T$ .

Téma energií završujeme pojmem potenciální energie, kterou rozebereme v homogenním gravitačním poli, jak se s ní setkávají žáci již na ZŠ. V takovém pří-

padě platí  $mg = \frac{\Delta E_p}{\Delta h}$ , což je opět jen forma 3.17. Zdůrazňujeme tedy ještě jednou, že teorie potenciálů je pro současnou výuku nepříjemně obtížná, problémy činí i na elitních gymnáziích. Zejména lze problémy žáků demonstrovat na neschopnosti definovat nulovou hladinu potenciálu, kterou vnímají sice intuitivně např. jako podlahu, ale absolutně a jako fyzikální fakt, ne pomůcku. Novinka, volba nulové hladiny potenciálu, by nás mohla vést k výkladu symbolu  $\Delta E_p$  namísto  $E_p$  jako relativní energie stavu vůči nulové hladině  $\Delta E_p := E_p - E_0 = E_p - 0 = E_p$ , ale nejsme si jisti, že by tato relativizace žáky nezmátla více než v současnosti problematická fixace nulové hladiny. Změna energie při přechodu z jednoho stavu do druhého by byla  $\Delta E_p = \Delta E_{p2} - \Delta E_{p1} = E_{p2} - E_{p0} - (E_{p1} - E_{p0}) = E_{p2} - E_{p1}$  v souladu s klasickým chápáním a definice je v tomto smyslu dobrá. Ale považujeme ji za zbytečně komplikovanou, zejména pro ZŠ.

Navrhujeme využít ve výuce pouze symbol  $\Delta E_p$  pro vyjádření změny energie mezi dvěma stavy (v souladu s pojmem diference) a oprostít se tím od volby nulové hladiny potenciálu. Má totiž praktický smysl ptát se, kolik jouleů potenciální energie má závaží umístěné ve výšce pět metrů? Ne, pokud nespecifikujeme pět metrů nad čím. Výuka zavedením  $\Delta E_p$  také zachovává pojetí ústředního vzorce 3.17. Potenciální energie by se tak postavila do podobné role, jakou jsme dali teplu. Samotné nemá smysl (systém neobsahuje teplo), jen při změně stavu (předalo se teplo). Daní za toto pojetí bude poněkud jiný styl práce se současnými příklady, ale zapadne do konceptu  $\Delta W$  při diskuzi zachování mechanické energie, kdy pro zdvihnutí tělesa je potřeba vykonat práci  $\Delta W = \Delta E_p$ .

**Př. 18:** O kolik se změní potenciální energie tělesa hmotnosti  $m = 1 \text{ kg}$ , které jsme vyzvedli o výškový rozdíl  $\Delta h = 1 \text{ m}$ ? Počítáme, že na Zemi je tíhové zrychlení  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

**Řeš.:** Dosadíme  $\Delta E_p = mg\Delta h = 10 \text{ J}$ , tedy energie se zvýší o  $10 \text{ J}$ .

**Př. 19:** Jakou práci je třeba vykonat při přesunu knihy ze spodní do horní poličky knihovny? Jakou energii kniha získá? Poličky jsou vzdáleny  $2 \text{ m}$  a kniha váží  $250 \text{ g}$ .

**Řeš.:** Práci, kterou na knize vykonáme, spočítáme součinem síly  $F = mg$  (kompenzujeme gravitaci) s uraženou dráhou  $\Delta h$ . Tato námi vykonaná práce  $\Delta W = mg\Delta h = \Delta E_p$  je rovna přírůstku potenciální energie knihy, počtetně  $\Delta W = \Delta E_p = 0,25 \cdot 10 \cdot 2 = 5 \text{ J}$ .

**Př. 20:** Kámen jsme upustili z výšky  $5 \text{ m}$  nad zemí. Jakou rychlostí na ni kámen dopadne?

**Řeš.:** Změna výšky v gravitačním poli je  $\Delta h = 5 \text{ m}$ , při pádu se tedy potenciální energie změní o  $\Delta E_p = mg\Delta h$ . Tato energie se přeměnila na kinetickou energii, která původně byla nulová  $\Delta E_p = \Delta E_k = E_k - 0 = \frac{1}{2}mv^2$ . Celkem

$$2g\Delta h = v^2 \Leftrightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.18)$$

Vidíme, že narážíme na problém při práci s kinetickou energií, u níž je v ne-relativistické fyzice na SŠ rozumné se bavit, že "auto má tolik a tolik jouleů

kinetické energie". Tím má  $E_k$  jiný charakter než  $E_p, Q, W$  a v tu chvíli je tedy potřeba zavést změnu kinetické energie mezi dvěma stavy, což by ovšem mohlo být mnohem intuitivnější, než představa nulové hladiny potenciálu. Změnu kinetické energie beztak musíme rozebrat při diskuzi zákona zachování celkové mechanické energie. Navíc ani kinetická energie není jednoznačná a závisí na volbě vztahné soustavy, tím dokreslujeme celkovou náročnost výuky energie.

**Př. 21:** Motocyklista jede s počáteční rychlostí  $36 \frac{km}{h}$  z kopce samospádem. Jakou rychlost získá, pokud se sjezdem změní jeho nadmořská výška o 15 m? Neuvažujeme tření ani odpor vzduchu.

**Řeš.:**  $mg\Delta h = \Delta E_p = \Delta E_k = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$ , tedy  $2 \cdot 10 \cdot 15 = v_2^2 - 100$ , tj.  $v_2 = 20 \frac{m}{s}$ . Rychlost motocyklisty se tedy zvýší o  $\Delta v = 10 \frac{m}{s}$ .

Problém znaménkové konvence u konání práce, výměny tepla a přírůstků energie je stejný jak v navrhovaném, tak současném přístupu, proto je víc nerozebíráme a téma energií uzavíráme.

Rychlost je jednou z prvních (navíc intuitivních) fyzikálních veličin definovaných jako poměr diferencí, navíc se používá při výuce derivací jako motivační prvek. Proto je z propedeutického hlediska nesmírně významná. Na ZŠ se zavádí pouze průměrná rychlost  $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ , na SŠ se k ní nejprve vracíme.

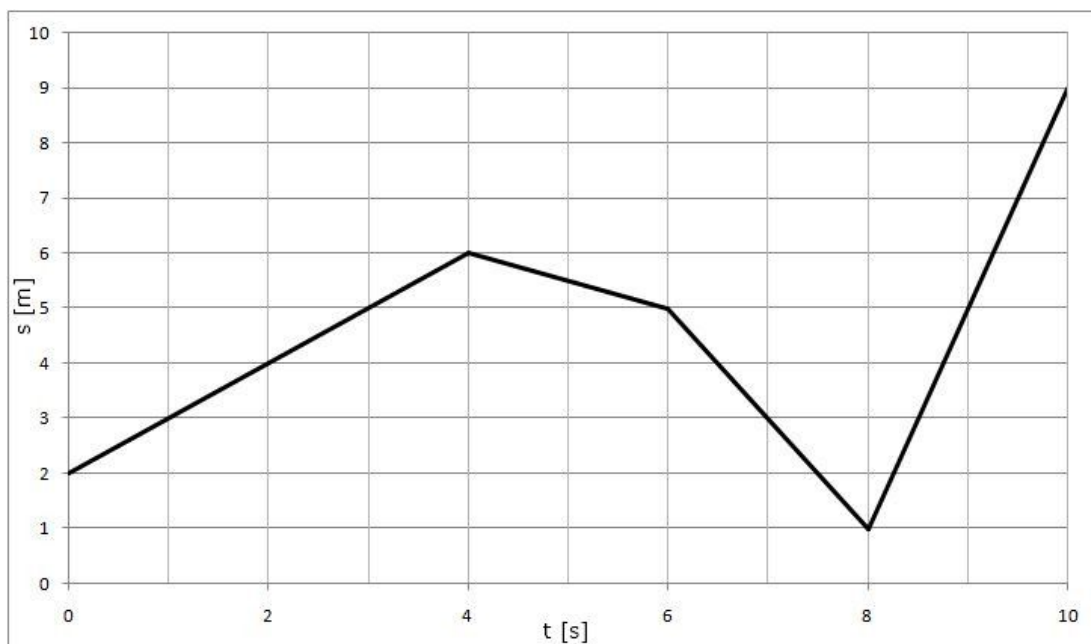
**Př. 22:** © Automobil se nacházel v 23 hodin 15 minut na 28. kilometru dálnice. 45 minut po půlnoci byl na 208. kilometru. Jakou dráhu  $\Delta s$  urazil za časový úsek  $\Delta t$ ? Jaká byla průměrná rychlost automobilu? Pokud byl v půlnoci řidič na 103. kilometru, v jakém z úseků měl řidič větší průměrnou rychlost? ( $120 \frac{km}{h}$ , druhém)

A v kontrastu k ní zavádíme okamžitou rychlost, přičemž vysvětlení tohoto pojmu se nemůže opřít o pojem derivace ani limity. Současné učebnice tedy přinejlepším vykládají, že okamžitá rychlost je podíl  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  pro velmi malá  $\Delta t$ . Domníváme se, že zůstává nedostatečně okomentováno právě ono "velmi malá", což by se dalo napravit např. následujícími příklady.

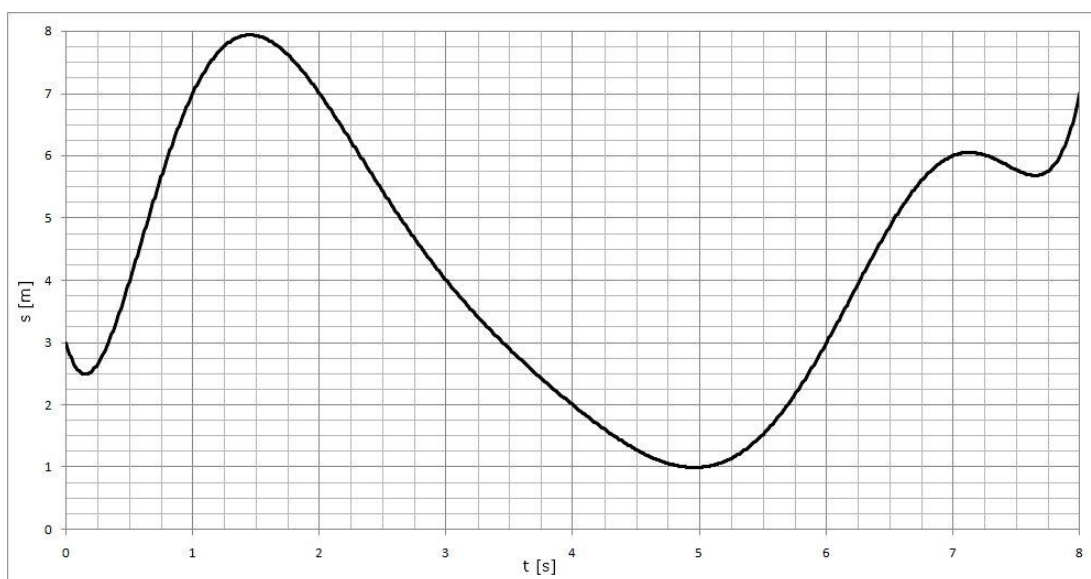
**Př. 23:** © Hmotný bod se vlivem neznámých sil pohybuje po přímce. Na grafu 3.3 je zachycena jeho poloha v čase. Určete rychlosti tělesa v jednotlivých úsecích a spočítejte průměrnou rychlost za prvních, prostředních a posledních šest sekund pohybu. Jaká je průměrná rychlost za celých 10 sekund? Naleznete alespoň dvě taková časová rozmezí, že průměrná rychlost v tomto období je nulová.

**Př. 24:** © Hmotný bod se vlivem neznámých sil pohybuje po přímce. Na grafu 3.4 je zachycena jeho poloha v čase. Určete průměrnou rychlost za celé období. Dále určujte průměrnou rychlost v dvousekundových intervalech, pak jednosekundových a nakonec půlsekundových. Odečtěte co nejpřesněji okamžitou rychlost bodu v časech  $t = 1 s, t = 3 s, t = 5 s, t = 6 s$ . V kterém okamžiku uvažovaného pohybu má těleso největší okamžitou rychlost?

**Př. 25:** © Hmotný bod se vlivem neznámých sil pohybuje po přímce. Na grafu 3.5 je zachycena poloha hmotného bodu v čase. Odhadněte, o jakou situaci se jedná. Odečtěte okamžitou rychlost v časech: 1s, 2s, 6s a při dopadu v cca 3s. Co z grafu usuzujete o rychlosti dopadu při druhém a čtvrtém dopadu? Určete průměrnou rychlost za celý druhý skok (kolem čtvrté sekundy) a čtvrtého odpadu (v časech mezi cca 5,6 s a 6,5 s).

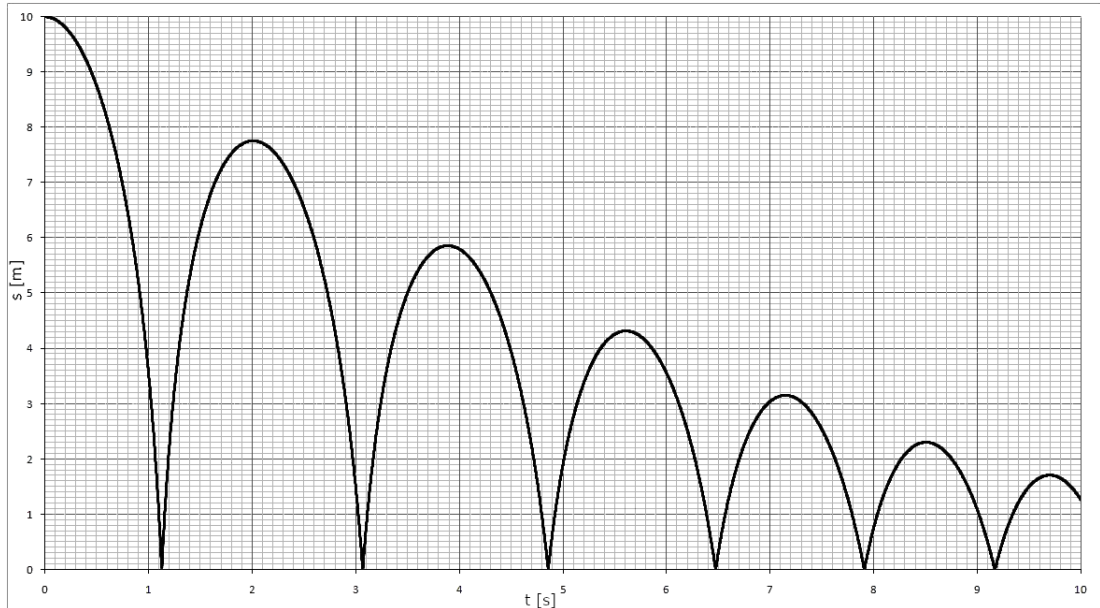


Obrázek 3.3: Určete okamžité a průměrné rychlosti pohybu.



Obrázek 3.4: Určete okamžité a průměrné rychlosti pohybu.

**Řeš.:** Situace by mohla představovat pády a odrazy tělesa volným pádem na zem. Jeden dílek časové osy představuje  $0,1\text{ s}$ , dílek prostorové osy  $10\text{ cm}$ . V intervalu  $(-0,9; 1,1)\text{ s}$  (dva dílky kolem zadaného okamžiku  $1\text{ s}$ ) těleso spadlo z výšky zhruba  $5,2\text{ m}$  na výšku asi  $1\text{ m}$ . Tím pádem okamžitá rychlost tělesa je cca  $v_1 \doteq \frac{4,2}{0,2} = 21 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . V časech  $1,9\text{ s}$  a  $2,1\text{ s}$  se těleso nalézá v identické výšce, proto  $v_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . V čase kolem šesté sekundy se za dva časové dílky urazí asi  $7,5$  výškových dílků, proto  $v_6 = 3,75\text{ s}$ . Kolem dopadu v třetí sekundě se za jeden časový dílek urazí  $18$  délkových, tj.  $v_3 = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Podobně  $v_{6,5} = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , tedy rychlost při čtvrtém dopadu je poloviční oproti rychlosti druhého dopadu. Druhý skok trval  $1,8\text{ s}$  a výška výstupu byla asi  $5,85\text{ m}$ , proto průměrná rychlost tohoto úseku pohybu je  $v_{II} = 6,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , pro čtvrtý skok podobně odhadneme  $v_{IV} = 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .



Obrázek 3.5: Určete okamžité a průměrné rychlosti pohybu.

Zavedení okamžité rychlosti je kritický okamžik, protože poprvé vyžaduje infinitesimální cítění do té doby nepotkané. Učitel by si měl být vědom, že v této látce může založit mnoho správných i mylných koncepcí, z fyzikálního hlediska zůstává přechod k "nekonečně malému" neokomentován, ale lze jej ilustrovat názorně graficky a jistě lze použít terminologii z budoucí látky. To, že žák netuší, co je limita, neznamená, že si nespojuje slovo "limitní" s nějakou mezní hodnotou. Domníváme se, že tedy není na škodu použít slovní obraty jako např.  $\Delta t$  se limitně blíží nule, ale je potřeba k tomu dodat adekvátní ilustraci či vysvětlení.

Rychlost není jediná veličina definovaná jako poměr diferencí (ať už v limitě jako derivace, nebo ne). Jmenujme nyní další látku, kde se tento matematický jev vyskytuje:

- rychlost a zrychlení  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ,  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
- úhlová rychlost a zrychlení  $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ ,  $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
- 2. Newtonův zákon  $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$  a 2. věta impulsová  $M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$
- výkon  $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$
- (popř. měrná) tepelná kapacita  $C = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$
- elektrický proud  $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$
- 1. Faradayův zákon (definice elektrochemického ekvivalentu)  $A = \frac{\Delta m}{\Delta Q}$
- proudový zesilovací činitel (tranzistoru v zapojení se společným emitorem)  
 $\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$
- Faradayův zákon elektromagnetické indukce  $U = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$
- vlastní indukce  $L = \frac{\Delta \Phi}{\Delta I}$

První situací, kde již nevystačíme s pojetím diferencí, tj. není dostatečná např. průměrná rychlost, průměrný výkon, ale je nutno brát vztah v limitě derivace, nastane u Faradayova zákona elektromagnetické indukce<sup>2</sup>. Do té doby se žák seznamuje se zákony lineárními (rovnoměrný přímočarý pohyb apod.), kdy se podíl diferencí shoduje s derivací. Souběh limitního přechodu k derivaci spolu s vysoce abstraktní veličinou toku magnetického pole považujeme za zásadní problém výuky, protože jde o příliš velký skok v uvažování. Nejspíš proto je tato kapitola fyziky extrémně nepopulární – navzdory rozsáhlému praktickému uplatnění.

Poslední podstatnou látkou, při níž se intenzivně využívá pojmu diference, je studium relativního prodloužení (v tuto chvíli pro jednorozměrný případ). Bud vlivem teplotní roztažnosti, nebo deformací při působení vnějších sil. V obou případech srovnáváme koncovou délku tělesa oproti počáteční, čili  $\Delta l$ . Tento délkový rozdíl je poměřen k počáteční délce a zavádíme relativní prodloužení. Navrhujeme, aby se ke značení relativního prodloužení použila výhradně symbolika používaná pro zápis (relativní) chyby měření, jak jsme avizovali v první kapitole a dále rozvedeme v sekci 3.2:

$$\delta l = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (3.19)$$

Analogii s chybou měření považujeme za velice pozitivní. Je-li již žák s pojmy relativní a absolutní chyba (nyní diference) seznámen, nalezne snadněji porozumění v této látce. V tuto chvíli ovšem poukazujeme na to, že ve vztahu (vzorečku) může vystupovat pouze jedna diference – síla  $F$  vyvolává deformaci  $\Delta l$ , což jde proti zkušenostem s veličinami dosud zapsanými v tomto textu. V případě teplotní roztažnosti se vracíme k intuitivnímu konceptu, že změna teploty  $\Delta T$  vyvolá prodloužení  $\Delta l$ . Podrobnější diskuzi provedeme v sekci o Taylorovu rozvoji 3.8.

### 3.1.3 Praktický význam diference

Diference nabývá podstatného významu i bez použití derivace ve chvíli, kdy se změní vstupní parametry nějaké situace. Můžeme se pak ptát, jak se změní funkční hodnoty, a to opět buď absolutně nebo relativně. Kromě základu – matematického či fyzikálního vzorce získáváme nadstavbu – např. o kolik/jak se změní gravitační zrychlení působící na družici, pokud změní poloměr své oběžné dráhy? Definice fyzikálních veličin v minulé podsekci jsou jen případy, kdy tyto situace mají důležitý fyzikálně-praktický význam.

Nyní se budeme věnovat rozvoji funkcionálního cítění, které se později může stát základem pro pojem derivace. Uvádíme sadu příkladů jak ryze matematických, fyzikálních i kombinovaných.

**Př. 26:** Insp. <https://www.youtube.com/watch?v=cuBbmeLwZGg>. Představme si provaz napnutý kolem dokola po rovníku Země. O kolik bychom museli nastavit provaz, aby takto obepínal Zemi ve výšce 1 m nad povrchem? Nejdříve si tipněte a poté přesně spočítejte.

**Řeš.:** Tento příklad patří k těm, při nichž selhává běžná intuice. Při představě obrovské zeměkoule, kterou musíme rozšířit v poloměru ještě o jeden metr,

<sup>2</sup>Existuje jediný příklad – rovnoměrně se posouvající vodič po rovnoběžných kolejnicích v homogenním mag. poli, na něm se zákon demonstruje a lze provést odvození díky speciálnímu tvaru  $\Phi(t) = t \cdot const$ .



to bude nepochybně vyžadovat velkou délku provazu srovnatelnou s obvodem Země, ne? Nemůžeme se mýlit víc:  $\Delta l = 2\pi\Delta R \doteq 6,28 m$ . Na tento úkol nepotřebujeme víc než deset metrů lana! Intuice nás zklamala, protože jde o diferencování lineární závislosti, ale na obrovském argumentu (to zaujalo náš mozek) difference obvodu vůbec nezáleží. Stejně bychom museli nastavit lano při obepínání celé Sluneční soustavy i jediného atomu.

**Př. 27:** © Jak se změní obsah čtverce (absolutně i relativně), jestliže se o 1 cm prodlouží jeho strana, která má A)  $a = 1$  cm, B)  $a = 2$  cm, C)  $a = 5$  cm, D)  $a = 10$  cm? Na základě těchto výpočtů uhodněte vzorec pro změnu obsahu jako funkci délky strany  $a$ , tj.  $\Delta S = \Delta S(a) = ?$ . Tento vztah potom odvodte teoreticky a srovnajte funkce  $S(a)$  a  $\Delta S(a)$ .

**Řeš.:** Pro přehlednost zapíšeme do tabulky všechny známé veličiny a dopočítáme neznámé; čárkou značíme parametry zvětšeného čtverce.

$a$	1	2	5	10
$a'$	2	3	6	11
$S$	1	4	25	100
$S'$	4	9	36	121
$\Delta S$	3	5	11	21
$\delta S$	300%	125%	44%	21%

Z tabulky hádáme, že  $\Delta S = 2a + 1$ . To dokážeme, když si ujasníme zapsáním  $\Delta S = S' - S = (a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1$ . Funkce jsou  $S \sim a^2$ ,  $\Delta S \sim a$ .

**Př. 28:** © Jak se změní povrch a objem krychle (absolutně i relativně), jestliže se o 1 cm prodlouží její strana, která má A)  $a = 1$  cm, B)  $a = 2$  cm, C)  $a = 5$  cm, D)  $a = 10$  cm? Na základě numerických výpočtů se pokuste uhodnout vzorce pro změny povrchu a objemu jako funkcí délky strany  $a$ , tj.  $\Delta S = \Delta S(a) = ?$ ,  $\Delta V = \Delta V(a) = ?$ . Tyto vztahy potom odvodte teoreticky a porovnejte funkce  $\Delta S(a)$  a  $\Delta V(a)$ .

**Řeš.:** Zapíšeme do tabulky všechny známé veličiny a dopočítáme neznámé:

$a$	1	2	5	10
$a'$	2	3	6	11
$S$	6	24	150	600
$S'$	24	54	216	726
$\Delta S$	18	30	66	126
$\delta S$	300%	125%	44%	21%
$V$	1	8	125	1000
$V'$	8	27	216	1331
$\Delta V$	7	19	91	331
$\delta V$	700%	200%	72,8%	33,1%

Zatímco lze s troškou píle (či poznatky z minulého příkladu) uhodnout  $\Delta S(a) = 6(2a + 1)$ , k objemu bude spíše potřeba vztah odvodit:  $\Delta S = S' - S = 6(a + 1)^2 - 6a^2 = 6(2a + 1)$ ,  $\Delta V = V' - V = (a + 1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1$ . K povrchu  $S(a)$  jako kvadratické funkci je  $\Delta S(a)$  funkce lineární. Ke kubické funkci objemu  $V(a)$  je změna  $\Delta V(a)$  funkcí kvadratickou.

**Př. 29:** © O kolik by musela být počáteční rychlost svislého vrhu vzhůru větší, aby vrh tělesa trval o 1 s déle?

**Řeš.:** Pro dobu svislého vrhu vzhůru platí  $t = \frac{2v}{g}$ . Počáteční rychlost tedy musí být o  $\frac{g}{2}$  vyšší, bez ohledu na její konkrétní původní hodnotu.

**Př. 30:** [F72] O kolik je větší dráha volně padajícího tělesa za  $n$ -tou sekundu, než za sekundu předcházející? (g)

**Př. 31:** © O kolik metrů se prodlouží dostřel při vrhu pod úhlem  $45^\circ$ , pokud se zvětší počáteční rychlost vrženého tělesa o  $1 \frac{m}{s}$ ?

**Řeš.:** Pro dostřel platí  $d = \frac{v^2}{g}$ , tedy  $\Delta d = \frac{2v\Delta v}{g}$ . Tento výsledek vyniká podobností s příkladem na obsah čtverce, kde vyšlo  $\Delta S = 2a + 1$ .

**Př. 32:** Insp. [F78]. O kolik se zmenší gravitační zrychlení, když se vzneseme o 10% poloměru Země nad její povrch?

**Řeš.:**  $\Delta g = g' - g = \kappa M \left( \frac{1}{(1,1R)^2} - \frac{1}{R^2} \right) = g \frac{-0,21}{1,21} \doteq -0,17g$ . Gravitační zrychlení je asi o  $1,7 \frac{m}{s^2}$  menší.

Rozpad radioaktivního materiálu (tvořeného jediným izotopem) se řídí zákonem  $m = m_0 e^{-\lambda \Delta t}$ , kde  $m_0$  a  $m$  jsou hmotnosti materiálu na začátku a konci sledování procesu, jež trval čas  $\Delta t$ . Parametr  $\lambda$  souvisí s tzv. poločasem rozpadu a udává "rychlost", s jakou jaderný rozpad probíhá. Uvažujme pro jednoduchost modelový materiál s  $\lambda = \ln 2 \text{ dne}^{-1}$ , to umožňuje zákon rozpadu zapsat jako  $m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\Delta t}$ , kam čas dosazujeme ve dnech.

**Př. 33:** Zapište do tabulky, jaká hmotnost radioaktivního materiálu  $m$  s poločasem rozpadu jeden den zůstane po prvním, druhém, ...,  $n$ -tém dnu a jaké množství látky  $\Delta m$  se ten daný den rozpadlo, přičemž  $m_0 = 32 \text{ kg}$ .  $m(n)$ ,  $\Delta m(n)$  určují posloupnosti indexované dnem pozorování  $n$ ; napište předpisy pro  $m(n)$ ,  $\Delta m(n)$ . Konečně, vyjádřete  $\Delta m$  jako funkci  $m$ .

Tento příklad jsme mohli zmínit už v sekci o posloupnostech 3.1.1, neboť de facto řeší geometrické posloupnosti, ale uvádíme jej zde pro návaznost na předchozí příklady o změně funkčních hodnot u různých závislostí. Navíc ve fyzikálním kontextu. Za zmínku rozhodně stojí výsledek  $\Delta m = -m$  (obecně  $\Delta m = -\lambda m$ , resp.  $\delta m = -\lambda^3$ ). Ten říká, že rychlost rozpadu je přímo úměrná množství materiálu, čili relativní množství rozpadajícího se materiálu je konstantní. A to je důvod, proč je manipulace s radioaktivním materiálem tolik nebezpečná. Model exponenciálně rostoucí populace (Fibonacciho úloha) lze pro tuto úlohu také použít; příklady na úroky, vybíjení kondenzátoru apod. s exponenciálním průběhem již nejsou tak dobře ilustrativní. Jejich měřítko je buď nerealistické (v předchozí úloze by šlo o úrok 100%), nebo fyzikální pozadí úlohy je náročné a zbytečně odvádí pozornost od matematické otázky.

<sup>3</sup>Vztah přechází v limitě  $\Delta m \rightarrow 0$  na tzv. logaritmickou derivaci, o té se zmíníme později.

## 3.2 Chyby a aproximace

### 3.2.1 Smysl pro preciznost

Žák na ZŠ si velice rychle zvykne pracovat s desetinným rozvojem čísla, ale dlouho si neuvědomí, co se mu o něm snaží učitel říct. Totiž, že jde jen o praktický a mnohdy jen přibližný zápis. Žák by podle nás měl umět např. při nákupu spočítat cenu zboží - ne přesně, ale dostatečně přesně. Jde tedy o smysl pro preciznost, zaokrouhlování a odhady, které jsou v hodinách matematiky často odpojené od fyziky a praxe. Soustředíme na "zlepšováky", které nám umožní snadno počítat bez kalkulačky.

Základní přibližné vztahy jsou podle nás následující:

$$\pi \doteq \frac{1}{\pi} \doteq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{\pi} \doteq 1, 7\pi \doteq 22, 8\pi \doteq 25 \quad (3.20)$$

$$\pi^2 \doteq 10 \Leftrightarrow \frac{10}{\pi} \doteq 3 \Leftrightarrow 3\pi \doteq 10 \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0,7, \sqrt{2} \doteq \frac{7}{2}, \sqrt{3} \doteq \frac{7}{4}, \sqrt{5} \doteq \frac{9}{4} \quad (3.22)$$

Lze vymyslet celou škálu podobných zaokrouhlení, čísla  $\pi$  a  $\sqrt{2}$  ale hrají podstatnou roli v geometrii, a proto na ně narážíme nejčastěji. Fyzikálně důležitá a překvapivě přesná aproximace platí pro tíhové zrychlení na povrchu Země.

$$g \doteq \pi^2 \quad (3.23)$$

Než přejdeme k praktickému využití, varujeme, že  $\frac{10}{\pi} \doteq 3$  a  $\frac{\pi}{10} \doteq 3$  jsou sice dva příklady zaokrouhlení, ale druhý z nich je nepatrně přesnější. Souvislost si čtenář jistě uvědomí, když si vzpomene na nerovnosti při dělení.

**Př. 34:** © Přibližně určete:  $\frac{\sqrt{37}+1}{\sqrt{2}}$ .

**Řeš.:** V čitateli podhodnotíme výraz pod odmocninou  $\sqrt{37} \doteq \sqrt{36}$  a jmenovatel zmenšíme na 0,7. Jelikož jsme jak čitatele, tak jmenovatele zaokrouhlili na stejnou stranu, máme tu výhodu, že nepřesnosti se částečně vyruší. Tím pádem odhad  $\frac{\sqrt{37}+1}{\sqrt{2}} \doteq \frac{6+1}{0,7} = 10$  bude vcelku přesný, ale nemůžeme snadno říci, zda bude vůči přesnému výsledku nadhodnocen či podhodnocen.

**Př. 35:** © Přibližně určete:  $\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ .

**Řeš.:**  $\frac{1}{\sqrt{3}} \doteq \frac{4}{7}$  a  $\frac{1}{\sqrt{2}} \doteq \frac{7}{10}$ , proto výraz přepíšeme na  $\frac{2}{7} + \frac{7}{10} = \frac{20+49}{70} \doteq 1$ .

**Př. 36:** © Přibližně určete:  $\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ . ( $\frac{9}{4} \doteq \sqrt{5}$ )

**Př. 37:** © Přibližně určete:  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ .

**Řeš.:** Nejspíše si povšimneme, že jde o výraz typu  $\frac{A}{B} + \frac{B}{A}$ . To bychom sice mohli vzorcem převést na  $\frac{A^2-B^2}{AB}$ , ale většina odmocnin se neodečte:  $\frac{(3+2\sqrt{15}+5)-(2+2\sqrt{12}+6)}{\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{18}+\sqrt{30}} = \dots$ . Namísto toho rovnou nahradíme  $\frac{A}{B} \doteq \frac{\frac{7}{4}+\frac{9}{4}}{\frac{10}{7}+\frac{10}{7,4}} = \frac{4}{\frac{10 \cdot 11}{7 \cdot 4}} \doteq \frac{4 \cdot 2 \cdot 7}{5 \cdot 11} = \frac{56}{55}$ . Protože sčítanec  $\frac{A}{B}$  z celého výrazu odhadujeme nepatrně

větší než jedna, musí být podle našeho odhadu druhý sčítanec  $\frac{B}{A}$  nepatrně menší než 1. Celkový součet je tedy  $\doteq 2$ . Zcela mimoděk jsme si také povšimli, že  $\sqrt{3} + \sqrt{5} \doteq \sqrt{2} + \sqrt{6} \doteq 4$ .

**Př. 38:** © Přibližně určete:  $\sqrt{\frac{18^2\pi}{5^2-1}}$ .

**Řeš.:** Po usměrnění odmocniny na  $18\sqrt{\frac{\pi}{5^2-1}} \doteq 18\sqrt{\frac{1}{8}} \doteq 6,3$ . Jelikož jsme podhodnotili číselník  $\pi \doteq 3$ , správný výsledek bude větší, než náš odhad.

**Př. 39:** © Z paměti přibližně vypočítejte obvod kruhu s poloměrem 30 cm. (188,4 cm)

**Př. 40:** © Kolik tisícikorun musíme vybrat z bankomatu, pokud chceme v obchodě nakoupit dlažbu na do kuchyně o výměře 22 m<sup>2</sup>? Cena dlažby je 249  $\frac{Kč}{kg}$ . Co kdybychom chtěli přikoupit ještě 2 m<sup>2</sup> "do foroty"?

**Řeš.:** První aproximací je zaokrouhlení ceny dlažby na 250  $\frac{Kč}{kg}$ . Při nákupu 22 m<sup>2</sup> tak cenu nadhodnotíme o 22 Kč, ale s takto upravenou částkou se dobře počítá. Chceme koupit více než 20 m<sup>2</sup>, což by stálo 5000 Kč. Ale chceme koupit méně než 30 m<sup>2</sup>, což by vyšlo na 7500 Kč. Jelikož závislost ceny na množství je lineární, je vidět, že za 25 m<sup>2</sup> (průměr odhadnutých výměr) bychom zaplatili 6250 Kč (průměr ceny, nemusíme tak násobit 25 · 250), s výměrou 22 m<sup>2</sup> se tedy jistě vejdem do ceny 6000 Kč. Závěr tedy je, že stačí vybrat šest tisícikorun.

Mimochodem, lze si povšimnout, že pro větší výměru 24 m<sup>2</sup> bychom mohli cenu odvodit od ceny za 25 m<sup>2</sup> odečtením 250 Kč, čímž by cena byla odhadnuta na problematických 6000 Kč. V tuto chvíli přichází do hry, že jsme cenu nadhodnotili zaokrouhlením ceny dlažby. Skutečná platba by byla nižší a stále by tedy stačilo 6 tisícikorun.

**Př. 41:** © Z jakého materiálu je kovová kulička o poloměru 4 cm, pokud při zavěšení na siloměr odečítáme sílu 20 N?

**Řeš.:**  $\rho = \frac{\beta F}{4\pi g R^3} = \frac{20}{4^4 \cdot 10^{-5}} = 7812,5 \frac{kg}{m^3}$ . V tabulkách nalezneme nejbližší tomuto výsledku železo  $\rho = 7860 \frac{kg}{m^3}$  či ocel  $\rho = 7850 \frac{kg}{m^3}$ .

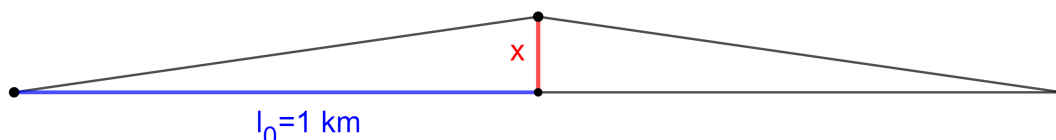
**Př. 42:** © Jakou silou by se přitahovaly dvě identické kulové planetky s poloměrem 10 m, které by se právě dotýkaly, kdyby byly z materiálu s hustotou asi 3000  $\frac{kg}{m^3}$  (hornina s příměsí kovu)?

**Řeš.:**

$$F = \kappa \frac{(\rho \frac{4\pi r^3}{3})^2}{(2r)^2} \doteq \frac{2 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \pi}{3 \cdot 3 \cdot 4} \rho^2 r^4 \doteq \frac{8\pi}{3^2} 10^{-11} \cdot 3000^2 \cdot 10^4 \doteq 2,5 N$$

Kde jsme odhadli  $\kappa = \frac{2}{3} \cdot 10^{-11} \frac{kg^3}{ms^2}$ ,  $\frac{\pi}{3} = 1$ ,  $8\pi = 25$ . Přesný výpočet (včetně  $\kappa = 6,6743 \cdot 10^{-11} \frac{kg^3}{ms^2}$ ) by vedl na  $F \doteq 2,635 N$ .

**Př. 43:** © Dvě kolejnice každá délky 1 km jsou k sobě jedním koncem napřímo přivařené a na opačných koncích při teplotě  $-6^\circ C$  napevno připevněné k zemi. Pokud by se zahřátím na teplotu  $30^\circ C$  ve sváru vybočily podle obrázku 3.6, určete velikost červeně vyznačené velikosti vybočení. Určete také, o jaký úhel by se kolejnice od původního směru vychýlily. Součinitel teplotní délkové roztažnosti oceli je  $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ .



Obrázek 3.6: Vybočení kolejnice vlivem teplotní roztažnosti.

**Řeš.:** Přeponou pravouhlého trojúhelníka je délka teplotně roztažené koleje  $l = l_0(1 + \alpha\Delta T)$ . S číselným zadáním se dá bez pomoci kalkulačky spočítat  $17 \cdot 36 = 612$ , čímž určíme  $l = 1000,612 \text{ m}$ . Odvěsnu určíme z Pythagorovy věty  $x = \sqrt{(1000 + 0,612)^2 - 1000^2} \doteq \sqrt{2 \cdot 1000 \cdot 0,612} \doteq \sqrt{1225} = 35 \text{ m}$ . Úhel vybočení určíme na kalkulačce z  $\tan \alpha = \frac{x}{l_0} \rightarrow \alpha \doteq 2^\circ$ .

V sekci o Taylorově rozvoji upozorníme na aproximaci  $\tan \alpha \doteq \alpha$  pro  $\alpha \doteq 0$ . S jejím použitím netřeba kalkulačky ani pro výpočet úhlu  $\alpha \doteq 0,035 \text{ rad} = \frac{0,035 \cdot 180^\circ}{\pi} = \frac{2 \cdot 3,15^\circ}{\pi} \doteq 2^\circ$ .

### 3.2.2 Chyba měření

Žádné skutečné fyzikální měření není přesné, ale poskytuje pouze nějaké rozmezí hodnot. S tím můžeme u mladých žáků začít mnohem dříve, než se pustíme do formální práce s chybou ve fyzice. Následující příklady můžeme použít v matematice při práci s nerovnicemi a jejich nesporná výhoda je v tom, že si žák ujasní změnu znaménka nerovnosti při rozdílu a podílu veličin (dělení menším číslem dává větší výsledek). Následující příklady bereme ze základní učebnice [Z28], škoda, že se do současných knih nedostaly.

**Př. 44:** Dvě tyče délek  $12 \text{ mm} \leq a \leq 14 \text{ mm}$ ,  $34 \text{ mm} \leq b \leq 36 \text{ mm}$  byly spojeny. Určete, v jakém rozmezí je délka spojené tyče. ( $46 \text{ mm} \leq a + b \leq 50 \text{ mm}$ )

**Př. 45:** Obsah čtverce je  $360,5 \text{ cm}^2 \leq p \leq 369,5 \text{ cm}^2$ . Určete jeho strany. ( $18,99 \text{ cm} \leq a \leq 19,22 \text{ cm}$ )

**Př. 46:** Z obsahu trojúhelníka  $(39,4 \pm 0,1) \text{ cm}^2$  a z výšky  $(7 \pm 0,2) \text{ cm}$  vypočítejte příslušnou stranu. ( $(5,7 \pm 0,1) \text{ cm}$ )

Nyní již přejdeme k fyzikálnímu přístupu k práci s chybou. Pro potřeby výuky na nižším gymnáziu jsme do vlastní praxe vytvořili stručný, zahuštěný text, který představuje úvod do této práce. Tyto poznámky slouží žákům k doplnění ústního výkladu a demonstrační práce.

#### Fyzikální měření

Fyzika jako věda je závislá na pozorování okolního světa. Libovolné měření libovolné fyzikální veličiny je vždy zatíženo nějakou chybou. Ať už nepřesností přístroje, nedokonalostí metody experimentu, vlivem okolních podmínek nebo nedbalostí experimentátora.

Chyby podle charakteru rozlišujeme na:

- *Náhodné* - vznikají souběhem různých okolností, díky nim je každé měření trochu jiné. Dají se odstranit mnohanásobným opakováním měření.

- *Systematické* - vznikají specifickou chybou přístroje, metody měření. Výsledek ovlivňují vždy stejně, nelze je odhalit opakováním stejného měření.
- *Hrubé* - vznikají omylem, měření ovlivňují významně, a proto se taková měření rovnou vyřazují.

Jak zapisovat chybu? Označme pro fyzikální veličinu s jednotkou  $j$  písmenem  $X$  její skutečnou hodnotu a  $x$  naměřenou hodnotu. Potom velikost rozdílu naměřené hodnoty a skutečné hodnoty nazýváme *absolutní chybou*:

$$\Delta x = |X - x| \quad (3.24)$$

Všimněme si, že je-li např. pro délku skutečná hodnota  $X = 100 \text{ cm}$ , naměřená hodnota  $x = 101 \text{ cm}$ , potom je absolutní chyba  $\Delta x = 1 \text{ cm}$ . Tedy absolutní chyba měření má stejnou fyzikální jednotku jako veličina sama!

Chybu, s jakou měříme, ovšem neznáme, proto je třeba ji odhadnout, typicky podle měřidla. Za absolutní chybu se obvykle bere nejmenší dílek, který stupnice ukazuje, někdy se bere pouze polovina nejmenšího dílku. Případně je chyba měřicího přístroje přímo specifikována. Výsledek potom zapisujeme:

$$X = (x \pm \Delta x)j \quad (3.25)$$

V praxi je ovšem vhodné používat chybu ne ve smyslu *o kolik* jsme se spletli, ale *jak moc vůči naměřené hodnotě* jsme se spletli. Absolutní chyba  $1 \text{ cm}$  má přeci úplně jiný význam, když měříme průměr vlasu a když měříme vzdálenost Země – Měsíc! Proto zavádíme *relativní chybu*:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} \quad (3.26)$$

Všimněme si, že pro výše zmíněný příklad měření délky je relativní chyba

$$\delta x = \frac{1 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = 0,01 = 1\% \quad (3.27)$$

Jednotky se krátí a relativní chyba nemá fyzikální jednotku! Typicky ji uvádíme v procentech.

Jak pracovat s chybou? Představme si, že jsme změřili dvě stejné fyzikální veličiny, můžeme si představit např. časy, za jaké uběhneme první a druhé kolečko na stadionu. Naměřili jsme  $X_1 = (x_1 \pm \Delta x_1)j$  a  $X_2 = (x_2 \pm \Delta x_2)j$  a ptáme se, jaký je celkový čas  $X = (x \pm \Delta x)j$  na obě kolečka dohromady. Bez chyby by to bylo nepochybně  $X_1 + X_2$ , ale jak s chybou? Při prvním měření jsme mohli udělat chybu až  $\Delta x_1$  a při druhém až  $\Delta x_2$ . Dohromady jsme se tedy mohli dopustit chyby přinejhorším

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \quad (3.28)$$

Podobně při odčítání, tj. například zjišťování, o kolik sekund bylo druhé kolečko pomalejší. Celková chyba je přinejhorším složením obou chyb. Můžeme psát:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= (x_1 + x_2 \pm (\Delta x_1 + \Delta x_2))j \\ X_1 - X_2 &= (x_1 - x_2 \pm (\Delta x_1 + \Delta x_2))j \end{aligned} \quad (3.29)$$

Jinak řečeno:

$$\begin{aligned} \Delta(X_1 + X_2) &= \Delta x_1 + \Delta x_2 \\ \Delta(X_1 - X_2) &= \Delta x_1 + \Delta x_2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Jak je to s násobením a dělením veličin?

$$\begin{aligned}
 X_1 \cdot X_2 &= (x_1 + \Delta x_1)(x_2 + \Delta x_2) = x_1 x_2 + x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 + \Delta x_1 \Delta x_2 / - x_1 x_2 \\
 \Delta(x_1 x_2) &= X_1 X_2 - x_1 x_2 = x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 + \Delta x_1 \Delta x_2 \quad / : (x_1 x_2) \\
 \delta(x_1 x_2) &= \frac{\Delta(x_1 x_2)}{x_1 x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{x_1 x_2} = \delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_1 \delta x_2
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Klíčové je si uvědomit, že relativní chyby jsou malá čísla blízko nuly. Součin dvou takových čísel je tedy zanedbatelný oproti naměřeným hodnotám (srovnej  $\delta = 0,001$  a  $\delta^2 = 0,000001 \ll \delta$ ). Člen obsahující součin chyb tedy vyškrtáme. Dostáváme tak

$$\delta(x_1 x_2) = \delta(x_1) + \delta(x_2) \tag{3.32}$$

Co se týče dělení, uvažujeme následovně (zamysli se, proč v prvním kroku dosazujeme  $X_2 = x_2 - \Delta x_2$ ):

$$\begin{aligned}
 \frac{X_1}{X_2} &= \frac{x_1 + \Delta x_1}{x_2 - \Delta x_2} = \frac{x_1}{x_2} \frac{1 + \frac{\Delta x_1}{x_1}}{1 - \frac{\Delta x_2}{x_2}} = \frac{x_1}{x_2} \frac{1 + \delta x_1}{1 - \delta x_2} = \frac{x_1}{x_2} \frac{1 - \delta x_2 + \delta x_1 + \delta x_2}{1 - \delta x_2} \\
 \text{tj. } \frac{X_1}{X_2} &= \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2} \frac{\delta x_1 + \delta x_2}{1 - \delta x_2} \quad / - \frac{x_1}{x_2}, : \frac{x_1}{x_2} \\
 \frac{\frac{X_1}{X_2} - \frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}} &= \delta \frac{x_1}{x_2} = \frac{\delta x_1 + \delta x_2}{1 - \delta x_2} = \frac{(\delta x_1 + \delta x_2)(1 + \delta x_2)}{(1 - \delta x_2)(1 + \delta x_2)} = \frac{\delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_1 \delta x_2 + \delta x_2 \delta x_2}{1 - (\delta x_2)^2}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Opět jako u výše u součinu vyškrtáme zanedbatelné členy (kde se vyskytuje součin relativních chyb), tj. výrazy typu  $\delta \cdot \delta$ . Dostáváme:

$$\delta \frac{x_1}{x_2} = \delta x_1 + \delta x_2 \tag{3.34}$$

Tyto získané poznatky z rovnic 3.30, 3.32, 3.34 shrnujeme do pravidla:

*Absolutní chyba součtu/rozdílu veličin je součet jejich absolutních chyb.*

*Relativní chyba součinu/podílu veličin je součet jejich relativních chyb.*

**Př. 47:** Jaký je objem dřevěné krychle, pokud jsme délku hrany určili jako  $a = (10 \pm 0,5) \text{ cm}$ ?

**Řeš.:** Objem  $V = a^3$  spočítáme jako součin dvou veličin - obsahu podstavy  $S = a^2$  a výšky  $a$ . Obsah podstavy je součin dvou veličin, a to délek  $a$  s relativní chybou  $\delta a = \frac{0,5}{10} = 5\%$ . Získáváme z pravidla pro součin:

$$S = a^2 = 100 \text{ cm}^2 \text{ s relativní chybou } \delta S = \delta a + \delta a = 10\%$$

Znovu uplatníme pravidlo pro součin a spočítáme absolutní chybu:

$$V = S \cdot a = 1000 \text{ cm}^3 \text{ s relativní chybou } \delta V = \delta S + \delta a = 15\%$$

$$\Delta V = V \cdot \delta V = 1000 \cdot 0,15 = 150 \text{ cm}^3$$

Závěr je, že objem krychle je  $V = (1000 \pm 150) \text{ cm}^3$ .

**Př. 48:** Obvod kružnice jsme změřili jako  $o = (31,4 \pm 0,2) \text{ cm}$ , poloměr jsme naměřili jako  $r = (10 \pm 0,2) \text{ cm}$ . Kolik je číslo  $\pi$ ?

Řeš.:

$$\pi = \frac{o}{2r} \Rightarrow \delta(\pi) = \delta(o) + \delta(2) + \delta(r)$$

Jelikož číslo 2 je konstanta určena s chybou 0%, máme přímo  $\delta(\pi) = \frac{0,2}{31,4} + \frac{0,2}{10} \doteq 0,02637$ . Závěr tedy je, že číslo  $\pi$  má hodnotu  $\pi = (3,14 \pm 0,08)$ . Stejného výsledku bychom dosáhli, kdybychom použili vztah  $o = \pi d$  a počítali  $d = r + r$  s chybou  $\Delta(d) = \Delta(r) + \Delta(r)$  a dále pravidlem pro podíl.

### 3.3 Diferenciál

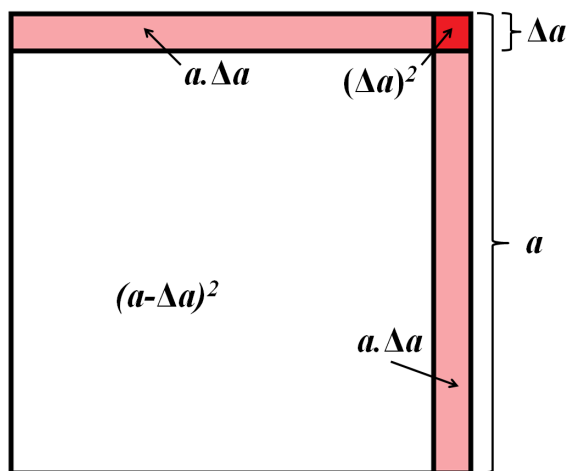
Pojem diferenciál vzejde z definice derivace, my jej naopak chceme zavést jako nástroj propedeutice. Proto se opíráme o předchozí práci s chybou a zavádíme jej "fyzikálně". Nenutíme žáka do představy nekonečně malého přímo. Limitní přechod se projevuje jako logické a přirozené zanedbání určité chyby.

Diferenciálem rozumíme nekonečně malou diferencii  $\Delta x$ , značíme  $dx$ . Diferenciálem funkce rozumíme  $df = f(x + dx) - f(x)$ . Pro diferenciály dvou libovolných veličin  $x, y$  platí  $dx \neq 0 \neq dy \wedge dx \cdot dy = 0$ . Slovně: je to nula, kterou můžeme dělit. Takto podaná "definice" není matematicky korektní, nevystihuje pojem, ale spíše fyzikální způsob práce. Ten spočívá v tom, že diferenciál považujeme za nejmenší změřitelnou diferencii. Jakékoliv menší množství nejsme schopni detekovat. Korektní definice bychom opřeli o pojem *nekonečně malé* veličiny z [V81, V85], viz součin nekonečně malých veličin řádů  $m, n$ , který je nekonečně malou veličinou řádu  $m + n$  a v limitě  $dx \rightarrow 0$  je v podílu s veličinou nekonečně malou řádu menšího než  $\min\{n, m\}$  nulový.

Fyzikální způsob zanedbávání vyšších řádů malosti ilustrujeme následujícím příkladem. Uvažme čtverec o straně  $a$  vystřižený z papíru. Pokud jej chceme nepatrně zmenšit, ze dvou (k sobě kolmých) stran odstříhneme proužky o šířce  $\Delta a$ . Jak se změnil obsah čtverce? Pod hodnotami si přitom můžeme představovat číselně  $a = 1 \text{ m}$ ,  $\Delta a = 10^{-3} \text{ m}$ .  $\Delta S = (a - \Delta a)^2 - a^2 = -2a\Delta a + (\Delta a)^2$ . Je-li  $\Delta a \ll a$ , pak člen  $(\Delta a)^2$  (druhého řádu malosti, v číselné představě  $10^{-6} \text{ m}^2$ ) zanedbáme vůči  $2a\Delta a$  (prvního řádu malosti s číselnou představou  $2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ), jeho význam je obsah dvou tenkých proužků se stranami  $a, \Delta a$ , které jsme odstříhli (proto znaménko  $-$ ) ze dvou stran. Tím, že jsme stříhali postupně, je druhý odstřížený proužek kratší, chybí mu čtvercový růžek  $(\Delta a)^2$ , viz obrázek 3.7. Tento drobný čtvereček jsme do  $\Delta S$  odečetli v obou páscích, proto jej musíme jednou přičíst. Pokud je ovšem  $\Delta a$  dostatečně malé, tento příspěvek neumíme změřit, proto zapisujeme  $dS = -2ada$ . Pokud bychom čtverec zvětšovali dolepením proužků, stejným zanedbáním bychom získali  $dS = +2ada$ . Tím jsme osvětlili i význam znaménka diferenciálu, je-li kladný, hodnota funkce se zvětšuje se zvětšujícím se parametrem, je-li naopak diferenciál záporný, hodnota funkce klesá s rostoucím parametrem.



Domníváme se, že s tímto příkladem snadno uspějeme už na ZŠ při procvičování obsahu obdélníka, navíc bychom jej mohli spojit s ověřením vážením kartonového čtverce na analytických vahách. Motivováni úspěchem se můžeme pustit do složitějších příkladů, které již budeme řešit formálněji. Pokud to půjde, zdůrazníme, kde se zanedbáním vyšších řádů dopouštíme chyby.



Obrázek 3.7: Diferenciál obsahu čtverce.

**Př. 49:** Insp. [F78]. Jak se změní povrch a objem krychle, pokud se změní její strana o  $da$ ?

**Řeš.:**  $\Delta S = 6(a + \Delta a)^2 - 6a^2 = 12a\Delta a + 6(\Delta a)^2 \rightarrow dS = 12a da$ ,  $\Delta V = (a + \Delta a)^3 - a^3 = 3a^2\Delta a + 3a(\Delta a)^2 + (\Delta a)^3 \rightarrow dV = 3a^2 da$ . Tento výsledek je intuitivní - pokud chci zvětšit krychli v každé straně o kousek délky  $\Delta a$ , musím na tři stěny sdílející stejný vrchol nalepit tři desky tloušťky právě  $\Delta a$  (a samozřejmě o ploše stěny krychle  $a^2$ ). Zaokrouhlování  $(\Delta a)^2$  apod. představují problémy napojení v rozích krychle/čtverce. Plošky těchto detailů jsou ovšem mnohem menší, zanedbatelné vůči dolepaným plochám.

**Př. 50:** Insp. [F78]. Jak se změní obsah kruhu  $S$  a objem koule  $V$ , pokud se změní jejich poloměry o  $dR$ ?

**Řeš.:** Rozepíšeme si difference  $\Delta S = \pi(R^2 + 2R\Delta R + \Delta R^2 - R^2)$ ,  $\Delta V = \frac{4\pi}{3}(R^3 + 3R^2\Delta R + 3R(\Delta R)^2 + (\Delta R)^3 - R^3)$  a zanedbáním získáme

$$dS = 2\pi R \cdot dr \quad , \quad dV = 4\pi R^2 \cdot dr. \quad (3.35)$$

Tyto výrazy jsou pro nás velmi užitečné, protože dávají následující představu o kruhu a kouli: Pokud chceme vyrobit z daného kruhu kruh s poloměrem o  $\Delta R$  větším, připravíme si pásek o délce obvodu kruhu a tloušťce  $\Delta R$ . Tento tenoučký pásek jako provázek navineme kolem kruhu. V případě koule musíme na její povrch nalepit vrstvu o ploše povrchu koule  $4\pi R^2$  a tloušťce  $\Delta R$ . Takto bychom mohli kruh/kouli lepit od středu postupně k většímu a většímu poloměru dle libosti, takto spleaná koule by se skládala z jednotlivých elementárních slupek podobně jako cibule.

**Př. 51:** Insp. [F50]. U tyče z daného materiálu při malé změně teploty o  $\Delta T$  naměříme relativní prodloužení/zkrácení  $\frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T$ . Určete, relativní změnu obsahu čtvercové plochy a objemu krychle vyrobené ze stejného materiálu.

**Řeš.:** Předpis pro délkovou roztažnost přepíšeme do tvaru  $l' = l(1 + \alpha \Delta T)$ . Obsah čtverce je potom  $S' = l'^2 = l^2(1 + \alpha \Delta T)^2 = S(1 + 2\alpha \Delta T + \alpha^2 \Delta T^2)$ , tedy zanedbání kvadratického členu (pro malé rozdíly teplot) vede na  $\frac{\Delta S}{S} = 2\alpha \Delta T$ .

Pro krychli  $V' = l'^3 = l^3(1 + \alpha\Delta T)^3 = V(1 + 3\alpha\Delta T + 3\alpha^2\Delta T^2 + \alpha^3\Delta T^3)$ , tedy  $\frac{\Delta V}{V} = 3\alpha\Delta T$ . Poslední rovnost je základem pro položení objemové teplotní roztažnosti  $V(T) = V_0(1 + \beta\Delta T)$ , kde součinitel  $\beta = 3\alpha$ . Zde už jen vyzdvihneme fyzikálně zajímavý důsledek, že pokud se vlivem změny teploty změní délkový rozměr daného materiálu o např. 1%, pak se plošný rozměr změní asi o 2% a objem asi o 3%.

Výše zmíněné příklady slouží k ujasnění toho, jak pracovat s diferenciálem součtu a součinu. Tato pravidla přímo navazují na práci s chybou 3.30, 3.32, 3.34, jichž jsou novou matematickou formou obohacenou o neformální práci s pojmem nekonečně malé. Shrňme pravidla:

$$d(f + g) = df + dg, \quad d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df, \quad (3.36)$$

kde v speciálním případě  $g = c = \text{const.}$  platí  $d(c \cdot f) = c \cdot df$ . Vícenásobnou aplikací těchto pravidel lze dojít k diferenciálu libovolného polynomu. Nyní se podíváme na diferenciál podílu, odmocniny a později na diferenciál goniometrických funkcí, logaritmu a exponenciely.

**Př. 52:** Insp. [F78]. Jak se posune obraz při zobrazení tenkou spojkou, pokud se předmět posune nepatrně o  $dx$ ?

**Řeš.:** Zobrazovací rovnice určuje polohu obrazu  $a'$  z polohy předmětu  $a$  a ohniskové vzdálenosti čočky  $f$ :  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$ . Porovnáme situace před a po posunutí:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} = \frac{1}{a + \Delta a} + \frac{1}{a' + \Delta a'} \Rightarrow a^2 a'^2 + a^2 \Delta a' + a'^2 \Delta a + a a' \Delta a + a a' \Delta a' + (a + a') \Delta a \Delta a' = a^2 a' + a a'^2 + a a' \Delta a + a' a \Delta a' \Rightarrow da' = -\frac{a'^2}{a^2} da = -\frac{f^2}{(a-f)^2} da$ . Zajímavá je zde role znaménka  $-$ . Pokud těleso přibližujeme z nekonečna k ohnisku čočky ( $da < 0$ ), obraz se vzdaluje k nekonečnu  $da' > 0$ . Nic se nemění přechodem předmětu skrze ohnisko - obraz "přeskočí" z  $+\infty$  do  $-\infty$ , ale opět se přibližuje k čočce z předmětového prostoru,  $da' > 0$ . Diferenciál tedy respektuje komplikovanou znaménkovou konvenci.

Tímto příkladem jsme mimochodem odvodili diferenciál podílu, který lze jednoduchou aritmetikou a zanedbáním  $x\Delta x$  oproti  $x^2$  odvodit přímo.

$$d\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} dx \quad (3.37)$$

**Př. 53:** © Jak se změní doba volného pádu, pokud upustíme těleso z výšky nepatrně větší o  $dh$ ?

**Řeš.:** Dráha volného pádu je určena vztahem  $h = \frac{1}{2}gt^2$ , je tedy pro nás snadné určit, o kolik se prodlouží dráha pádu, pokud bude trvat o  $\Delta t$  déle:  $\Delta h = \frac{1}{2}g\Delta(t^2) = \frac{1}{2}g \cdot 2t\Delta t = gt\Delta t$ . V předpise  $dt = \frac{dh}{gt}$  ovšem vystupuje doba pádu, která je funkcí výšky, která nás původně pro vyjádření  $\Delta t$  zajímá, proto dosadíme z rovnice pro volný pád  $t = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{h}$  a dostáváme  $dt = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{dh}{2\sqrt{h}}$ . Ve vztahu explicitně vystupuje výška, z které těleso pouštíme, pokud těleso pouštíme z větší výšky, doba pádu se prodlouží méně, než při pádu z menší výšky.

Závěrem příkladu je vztah pro diferenciál odmocniny, ke kterému můžeme přijít i přímo (příklad de facto využil derivaci inverzní funkce) na základě algebraických operací.

$$\Delta\sqrt{x} = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{x + \Delta x - x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

Pokud uvážíme, že v aproximaci  $\Delta x \doteq 0$  platí  $\sqrt{x + \Delta x} \doteq \sqrt{x}$ , pak dostáváme  $d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ . Výše počítaný příklad nám dal obecnější situaci, pro niž zobecníme pravidlo:

$$d\sqrt{\alpha x + \beta} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha x + \beta}} dx \quad (3.38)$$

**Př. 54:** © Kulový balonek o poloměru 10 cm zmenšil při ucházení vzduchu svůj povrch o 1 mm<sup>2</sup>. O kolik se zmenšil jeho poloměr?

**Řeš.:**

$$r = \sqrt{\frac{1}{4\pi} S} \Rightarrow dr = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{2\sqrt{S_0}} dS = \frac{dS}{8\pi r_0}, \quad (3.39)$$

kde jsme označili  $S_0 = 4\pi r_0^2$  původní povrch balonku s počátečním poloměrem  $r_0 = 0,1$  m. Dosazením  $dS = 0,000001$  m<sup>2</sup> nalezneme  $dr = 3,98$  μm. Přesný výpočet  $\Delta r = r_0 - \sqrt{r_0^2 - \frac{\Delta S}{4\pi}}$  se od výpočtu přes diferenciál liší až na páté platné cifře, což je dáno tím, že skutečně  $\Delta S = 0,000001$  m<sup>2</sup> je zanedbatelný úbytek vůči povrchu  $S_0 \doteq 0,126$  m<sup>2</sup>. Výpočet přes diferenciál lze navíc provést z hlavy zaokrouhlením  $8\pi \doteq 25$ , pak dostaneme  $dr \doteq 4$  μm, což je jistě dostačující výsledek.

**Př. 55:** © Odhadněte  $\sqrt{1,1}$ .

**Řeš.:** Představíme si  $\sqrt{1,1} = \sqrt{1 \cdot x + 1}$  pro  $x = 0,1$ . Snadno takovou odmocninu určíme v  $x = 0 \rightarrow \sqrt{1} = 1$ . Jak se změní odmocnina, když se změnilo  $x$  o  $\Delta x = 0,1$  určíme z pravidla pro diferenciál odmocniny  $d\sqrt{1 \cdot x + 1} = \frac{1}{2\sqrt{1 \cdot x + 1}} dx = \frac{1}{2} dx$ , neboť se bavíme o přírůstku funkce v dosazeném bodě  $x = 0$ . Odhadneme tedy, že  $\sqrt{1,1} = \sqrt{1} + \Delta\sqrt{1 \cdot x + 1} = 1 + \frac{\Delta x}{2} = 1,05$ . Odhad není přesný, protože  $\Delta x = 0,1$  nelze považovat za nekonečně malé. Přesto jsme se aproximací dopustili překvapivě malé chyby, skutečná hodnota je  $\sqrt{1,1} \doteq 1,0488$ .

**Př. 56:** © Experimentální pozorování závaží na pružince odhalilo, že výchylka tělesa od rovnovážné polohy je dána rovnicí  $x = \sin(\omega t)$ . Odhadněte, jakou okamžitou rychlost má těleso v čase  $t$  a jakou silou na něj v čase  $t$  pružina působí.

**Řeš.:** Zadání hovoří o okamžité rychlosti, která je definovaná jako poměr změny polohy a změny času, které jsou velmi malé,  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Předběžně můžeme (i na základě praktické zkušenosti) říci, že v okamžiku, kdy těleso prochází rovnovážnou polohou, je jeho rychlost nejvyšší, zato v bodech obratu je nulová. Máme ale za úkol určit, jak vypadá změna polohy tělesa v obecném čase. S použitím goniometrických vzorců:

$$\Delta x = \sin(\omega(t + \Delta t)) - \sin(\omega t) = \sin(\omega t) \cos(\omega \Delta t) + \sin(\omega \Delta t) \cos(\omega t) - \sin(\omega t),$$

kde po substituci  $\varphi = \omega\Delta t$  provedeme odhad malých změn času  $\Delta\varphi \doteq 0 \rightarrow \sin \Delta\varphi \doteq \Delta\varphi \wedge \cos \Delta\varphi \doteq 1$ . Tím jsme získali

$$\Delta x = \cos(\omega t)\omega\Delta t, \quad (3.40)$$

tím pádem rychlost definovaná jako poměr diferenciálů je  $v = \omega \cos(\omega t)$ .

**Př. 57:** © Deskový kondenzátor je tvořen čtvercovými deskami o straně  $a$ , které jsou od sebe vzdáleny  $d$ . Jak by se změnila kapacita kondenzátoru, pokud bychom hranu desek zvětšili o nepatrnou délku  $\Delta a$ ? Jak by se změnila kapacita, pokud bychom od sebe oddálili desky o nepatrnou délku  $\Delta d$ ?

**Řeš.:** Při zvětšování desek zanedbáním členu  $(\Delta a)^2$  získáme  $\Delta C = \frac{\varepsilon}{d} \cdot 2\Delta a$ . Pokud si vybavíme pravidla pro skládání kapacit, poznáváme, že jsme tímto pouze paralelně připojili k původnímu další deskový kondenzátor, jehož desky mají rozměr  $2a\Delta a$  (to je právě ona přidaná plocha). Každý deskový kondenzátor tedy můžeme chápat jako paralelní zapojení mnoha malinkých deskových kondenzátorků.

Pro přiblížení desek použijeme aproximaci  $d + \Delta d \doteq d$ , a nalézáme tak  $\Delta C = \varepsilon a^2 \left( \frac{1}{d+\Delta d} - \frac{1}{d} \right) = \varepsilon a^2 \frac{d - (d+\Delta d)}{d(d+\Delta d)} \doteq \varepsilon a^2 \frac{-\Delta d}{d^2} = C \frac{-\Delta d}{d}$ . Jinak řečeno  $\frac{\Delta C}{C} = -\frac{\Delta d}{d}$ , čili  $\delta C = -\delta d^4$ . Pokud se tedy přiblíží desky např. o 10% původní vzdálenosti, zvýší se kapacita kondenzátoru také o 10%.

**Př. 58:** © Uvažme rozpad radioaktivního materiálu podle vztahu  $m = m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$ . Určete, jaký čas od počátku uplynul, pokud se hmotnost materiálu změnila o  $dm$ .

**Řeš.:** Přepíšeme  $t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{m}{m_0}$ . Pokud se oprostíme od konstant, jde nám v podstatě o určení diferenciálu logaritmu  $\Delta(\ln x) = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ . Označíme písmenem  $N = \frac{x}{\Delta x}$  a rozšíříme  $\Delta(\ln x) = \frac{1}{N} N \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$ . Známe limitu  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e$ , v našem případě přecházíme od  $\Delta x$  k nekonečně malému  $dx$ , což znamená, že veličina  $N$  roste nade všechny meze a můžeme argument logaritmu oprávněně aproximovat limitou. Po úpravě a zpětném dosazení uzavíráme, že diferenciál logaritmu<sup>5</sup> má tvar

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}. \quad (3.41)$$

Můžeme se vrátit k radioaktivnímu rozpadu, kde po dosazení upravíme  $\Delta t = -\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta m}{m}$ . Fyzikálně zajímavý tvar této rovnice ovšem je  $\Delta m \sim -m\Delta t$ , jinak řečeno: množství rozpadlého materiálu za krátký časový okamžik je úměrné množství materiálu, ještě jinak: rychlost rozpadu materiálu je úměrná jeho množství. Také je ale závislá na materiálové konstantě  $\lambda$ , která souvisí s tzv. poločasem rozpadu  $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ .

<sup>4</sup>Nepoužíváme zápis znakem diferenciálu, abychom žáka nezmátli výrazem typu  $dC d = ddC$ .

<sup>5</sup>Cenou za zisk tohoto klíčového poznatku je znalost limity. Bez ní bychom museli tvar diferenciálu nechat "spadnout shůry", případně podložit numericky.

Poslední myšlenka v řešení příkladu není zcela intuitivní, ale provedené matematické kroky slouží jako náznak důkazu, že právě tento fakt stojí za exponenciální závislostí  $m = m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$ . Exponenciální závislost tak můžeme hledat všude tam, kde narazíme na  $\Delta x \sim x$ . Kromě toho, že jsme v příkladu odvodili diferenciál logaritmu, můžeme jít dál a odvodit další pravidlo zpětným dosazením za  $m$ :  $\Delta t \doteq -\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta(m_0 e^{-\lambda t})}{m_0 e^{-\lambda t}} \Rightarrow \Delta e^{-\lambda t} \doteq -\lambda e^{-\lambda t} \Delta t$ . Dostáváme pravidlo pro diferenciál obecné exponenciály. Nedalo by již mnoho práce odvodit následující vztahy pro práci s logaritmem a exponenciálou

$$d(e^{\alpha x + \beta}) = \alpha e^{\alpha x + \beta} \cdot dx \quad , \quad d \ln(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha dx}{\alpha x + \beta}, \quad (3.42)$$

které můžeme využít nejen v situacích obvyklých pro látku o logaritmech a exponenciále.

**Př. 59:** Insp. [V101]. *Mešcherského rovnice*. Uvažme vozík naložený pískem, který je poháněn konstantní silou. Pokud z něj písek volně vypadává rychlostí  $\mu$ , jak se bude vozík pohybovat?

**Řeš.:** Nejde nám o explicitní vyřešení úlohy, ale o vyznačení významu diferenciálu. Pohyb určuje 2. Newtonův zákon, který obvykle zapisujeme  $F = ma$ . V tomto případě se ovšem bavíme o tělese s proměnnou hmotností  $m(t) = m_0 - \mu t$ . Vyjdeme proto z obecného zápisu  $F = \frac{dp}{dt}$ . Do něj musíme určit, jak se v čase mění hybnost definovaná jako  $p = mv$ . Diferenciál určíme následovně:  $\Delta p = (m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv \rightarrow dp = m dv + v dm$ . Zákon síly proto čteme

$$F = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}, \quad (3.43)$$

tuto rovnici nazýváme Mešcherského rovnicí a představuje výchozí bod pro obecné simulace pohybu těles.  $u$  v ní má význam rychlosti, kterou materiál opouští vozík. To je v případě, kdy se písek volně vysypává 0, takže nemusíme rozebírat člen  $\frac{dm}{dt}$ , což je poměr, jak se mění hmotnost vozíku se změnou času, v našem případě  $\frac{dm}{dt} = -\mu$ . Pokud dosadíme hmotnost vozíku, obdržíme rovnici

$$F = m(t) \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = \frac{F}{m_0 - \mu t} dt, \quad (3.44)$$

která popisuje změnu rychlosti prostřednictvím změny času. Výraz na pravé straně je ovšem komplikovaný, proto bychom se mohli v rámci středoškolské výuky omezit např. na ukázání numerických simulací. K analytickému vyřešení této rovnice bychom dospěli úvahou o jmenovateli  $m(t)$ , kdy přepíšeme prostřednictvím rychlosti vysypávání písku  $dt = \frac{-1}{\mu} dm$

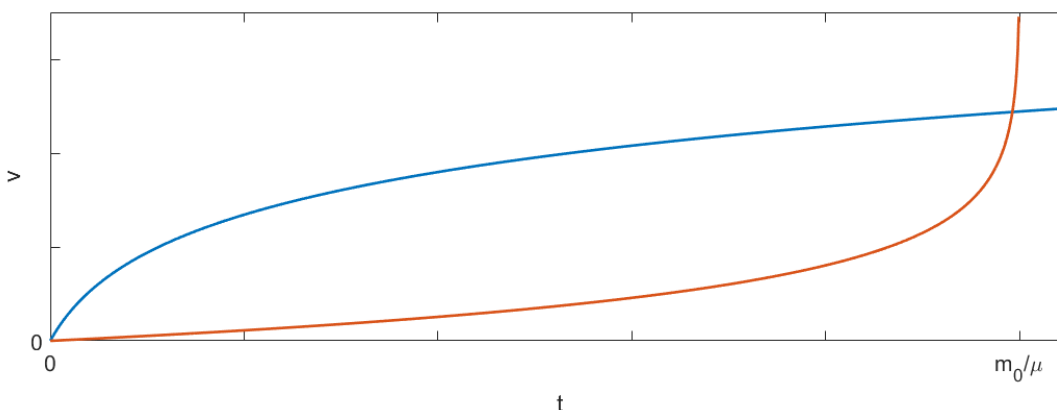
$$dv = \frac{F}{\mu} \frac{dm}{m} = -\frac{F}{\mu} d(\ln m), \quad (3.45)$$

kde jsme využili tvar diferenciálu logaritmu. Jelikož poměr diferenciálů  $\frac{dv}{d \ln m} = \text{const.}$ , znamená to, že rychlost je lineární funkcí v  $\ln m$ . Stejně jako dřív situace  $\frac{dv}{dt} = a = \text{const.}$  značila rovnoměrně zrychlený pohyb, tehdy rychlost byla lineární funkce času. Pokud převezmeme výsledek pro rovnoměrně zrychlený pohyb  $v = \alpha + at$ , můžeme rovnou psát  $v = \alpha - \frac{F}{\mu} \ln m = \alpha - \frac{F}{\mu} \ln(m_0 - \mu t)$ . Zbývá

určit hodnotu parametru  $\alpha$ , který v případě rovnoměrně zrychleného pohybu měl hodnotu počáteční rychlosti  $v_0$ . Pokud bychom zvolili, že v čase  $t = 0$  byl vozík v klidu, pak  $0 = \alpha - \frac{F}{\mu} \ln(m_0)$ . Po dosazení zpět do řešení a úpravách logaritmu získáváme:

$$v(t) = \frac{F}{\mu} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t} \quad (3.46)$$

Rychlost vozíku poroste s časem, jak je ilustrováno na obrázku 3.8. Samozřejmě do té doby, než ve vozíku dojde písek, pak by byla hmotnost vozíku konstantní a pohyb by se změnil v rovnoměrně zrychlený. Formálně stejné řešení by měla i např. situace sekání sekačkou se sběrem trávy, v takovém případě by hmotnost tělesa rostla, což by se na výsledku projeвило změnou znaménka u  $\mu$ .



Obrázek 3.8: Rychlost tělesa s proměnnou hmotností podrobeného konstantní síle. Příklad zmenšující se hmotnosti (červeně) má kritický bod v  $t = \frac{m_0}{\mu}$ , kdy se hmotnost tělesa stává nulovou a zrychlení i rychlost roste k nekonečnu. V případě s rostoucí hmotností (modře) zrychlení tělesa postupně klesá.

**Př. 60:** Insp. [V101] *Ciolkovského rovnice*. Uvažme raketu ve volném vesmíru, která k pohybu používá hoření paliva, které vyvrhuje rychlostí  $u$  za sebe. Jakým způsobem se bude pohybovat?

**Řeš.:** Jde opět o pohyb tělesa s proměnnou hmotností. V Meščerského rovnici 3.43 ale nyní musíme dosadit  $F = 0$ , protože raketa je izolovaná soustava bez vnějších sil. Dále,  $u \neq 0$  je nyní předepsána a musíme ji brát v potaz. Vzniká tak speciální případ, rovnice, kterou nazýváme Ciolkovského, kam rovnou dosadíme  $\frac{dm}{dt} = -\mu$ :

$$m(t) \frac{dv}{dt} = -u\mu \rightarrow dv = -u \frac{dm}{m} = -u d(\ln m) \rightarrow \frac{dv}{d(\ln m)} = -u \quad (3.47)$$

Znaménko mínus u rychlosti  $u$  je proto, že zplodiny rakety opouští v opačném směru k pohybu rakety. Rovnice se svou strukturou neliší od rovnice v předchozím příkladu, jiná je pouze konstanta na pravé straně, proto rovnou převezmeme řešení:  $v = \alpha - u \ln m$ . Protože v čase  $t = 0$  má raketa hmotnost  $m(0) = m_0$ , nalezneme hodnotu konstanty  $\alpha$  a upravíme řešení na:

$$v = u \ln \frac{m_0}{m} \quad (3.48)$$

Nemáme tentokrát explicitní tvar řešení s časem, protože neznáme, jak přesně rychle raketa palivo spaluje. Ale máme dost informací, abychom mohli postavit raketu pro vyslání do vesmíru! Má-li raketa dosáhnout co největší rychlosti, musíme buď zvýšit rychlost  $u$ , s jakou spaliny opouští raketu, nebo zvýšit poměr  $\frac{m_0}{m}$ . To znamená, že raketa sama by měla být co nejlehčí a měla by být naplněna pokud možno jen palivem. Závěrem uvedme, že pro účely startu do vesmíru bychom museli ve skutečnosti uvažovat vliv gravitace  $0 \neq F_g = F_g(t, h) = m(t) \cdot g(h)$  a odporu vzduchu  $F_o = F_o(v, h)$ , což jsou složité funkce rychlosti, polohy a času. Ale přesto máme užitečný výsledek, který jednak umožňuje odhadnout množství paliva potřebného pro danou raketu, ale také říká, že žádné další konstrukční vylepšení rakety na zvýšení rychlosti nemá vliv.

## 3.4 Limita

### 3.4.1 Propedeutická funkce limity

Základním smyslem limity je vystihnout lokální chování dané funkce v daném bodě, resp. posloupnosti v nekonečnu. Tuto myšlenku lze snadno modifikovat k porovnání dvou funkcí (posloupností). Domníváme se, že i v tomto leží dobrý motivační potenciál. Sepisujeme tedy několik úloh, které hezky znázorňují takové porovnání či ukazují některá matematická fakta v zajímavém světle. Nevynecháváme ani příklady, které již obsahují zárodky derivace. Následující tři příklady přebíráme z [V96], kde je podobných k dispozici více.

**Př. 61:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{1 + 2 + 3 + \dots + n} \quad (3.49)$$

**Řeš.:** Sečtením rovností  $k + (k - 1) = 2k - 1$  pro  $\forall k \in \hat{n}$  dostáváme  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$ . Také víme, že  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$ . Celkem tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + n} = 2 \quad (3.50)$$

Tento výsledek není zcela intuitivní, ukazuje, že součet prvních  $n$  lichých čísel je pro velká čísla asi dvakrát větší, než součet prvních  $n$  čísel. Jako by v součtu byly podstatné pouze poslední sčítance.

**Př. 62:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2}{n^3} \quad (3.51)$$

**Řeš.:** Postup je podobný jako v předchozím příkladě, jen je potřeba odvodit  $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . Potom je ovšem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{1}{6}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2}{n^3} = \frac{4}{3} \quad (3.52)$$

Jinými slovy, součet čtverců prvních  $n$  čísel je pro velká  $n$  zhruba šestkrát menší, než  $n^3$ . I součet čtverců lichých čísel roste jako  $n^3$  pro velká  $n$ .

**Př. 63:** Dokažte  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h} = 2 \cos x$

**Řeš.:** Použitím známých součtových vzorců  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x \cos h + \cos x \sin h}{h} = 2 \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 2 \cos x$ .

**Př. 64:** © Zapište rovnici sečny paraboly  $f(x) = x^2$ , která prochází bodem  $[1; 1]$  a bodem  $[p; p^2]$ . Provedte v této rovnici limitu  $p \rightarrow 1$ . Načrtněte tuto limitní přímku do grafu. Jaký je její geometrický význam?

**Řeš.:** Přímka má obecnou rovnici (v rámci výuky funkcí, není potřeba analytické geometrie)  $y = \alpha x + \beta$ , přitom víme, kterými body přímka prochází:  $1 = \alpha + \beta \wedge p^2 = \alpha p + \beta$ . Tyto dvě rovnice poskytnou  $\alpha = 1 + p \wedge \beta = -p$ , čili rovnice sečny je  $y = (1 + p)x - p$ . V limitě přejde triviálně rovnice v  $y = 2x - 1$ . Tato přímka je tečnou ke grafu v bodě  $[1; 1]$ .

### 3.4.2 Limita ve fyzice

Fyzika neposkytuje na SŠ velké množství příkladů na limitu z toho důvodu, že k provedení limity je potřeba nejprve obecné situace, v níž jeden z parametrů je volný a v něm můžeme limitu provést. Takových situací je málo, protože velká část vztahů závisí na jedné proměnné. K tomu je navíc většina vztahů co do limitních situací "nudných", protože fyzikální závislosti jsou obvykle hladké funkce. Příklady, kdy síla rostoucí nade všechny meze vyvolá zrychlení velké nade všechny meze nejspíš nebudou mít motivační účinek. Představujeme několik situací, které čerpají z nadhledu nad SŠ látkou. Udané vztahy lze žákovi představit jako fakt plynoucí z pokročilého studia. Přesto, že nejsme schopni na SŠ úrovni původ vzorců vysvětlit, přesto ukážeme SŠ metodami jejich důsledky.

**Př. 65:** Insp. [F76]. Van der Waalsova stavová rovnice plynu má tvar  $(p - n \frac{a}{V^2})(V - nb) = nRT$ . Korekční faktor  $\frac{a}{V^2}$  zachycuje charakteristickou vzdálenost silové interakce částic. Korekční parametr  $b$  představuje nenulový objem částic plynu. Diskutujte význam limity  $a, b \rightarrow 0$ .

**Řeš.:** Limita  $a \rightarrow 0$  má ten význam, že částice spolu interagují pouze pokud se dostanou do vzájemného kontaktu. Tj. mimo srážky spolu silově neinteragují. Limita  $b \rightarrow 0$  pak značí nahrazení částic hmotnými body. Takový plyn je v důsledku ideálně stlačitelný. Tyto požadavky definují model ideálního plynu, jehož rovnice  $pV = nRT$  je právě studovaným limitním případem van der Waalsovy rovnice.

**Př. 66:** Insp. [V102]. Kulový kondenzátor je tvořen elektrodami ve tvaru soustředných sfér. Je-li poloměr vnitřní elektrody  $r$  a vnější elektrody  $R$ , kondenzátor je vyplněn dielektrikem s permitivitou  $\varepsilon$  a nabit nábojem  $Q$ , pak jeho kapacita je dána vztahem  $C = 4\pi\varepsilon \frac{Rr}{R-r}$ . Ukažte, že pokud vzdálenost elektrod klesá k nule, přechází kapacita kulového kondenzátoru v kapacitu deskového kondenzátoru  $C = \varepsilon \frac{S}{d}$ , kde  $S$  je plocha desek a  $d$  jejich vzdálenost.

**Řeš.:** Označíme  $R - r = d$  vzdálenost obou elektrod. Potom  $C = 4\pi\varepsilon \frac{R(R-d)}{d} = 4\pi\varepsilon \frac{R^2 - Rd}{d}$ . V čitateli můžeme zanedbat člen obsahující  $d$ , který je nesrovnatelně menší než člen  $R^2$ . Potom ale  $C = \varepsilon \frac{4\pi R^2}{d}$ , což je kapacita deskového kondenzátoru, jehož plocha má velikost povrchu vnější elektrody  $S = 4\pi R^2$ . Striktně



vzato, v tomto příkladu jsme neprovedli limitu, ale jen jakési první přiblížení. Dosáhli jsme ale názorné geometrické představy, kdy v limitě nulové vzdálenosti elektrod nezávisí na jejich zakřivení, lokálně se kulové elektrody chovají jako rovinné desky. Na rozdíl od deskového kondenzátoru ale tento kulový kondenzátor nemá okrajové efekty!

**Př. 67:** Insp. [V102]. Válcový kondenzátor (koaxiální kabel) je tvořen elektrodami ve tvaru souosých plášťů válců. Je-li poloměr vnitřní elektrody  $r$  a vnější elektrody  $R$  a jejich výška  $v$ , kondenzátor je vyplněn dielektrikem s permitivitou  $\varepsilon$  a nabit nábojem  $Q$ , pak jeho kapacita je dána vztahem  $C = \frac{2\pi\varepsilon v}{\ln R - \ln r}$ . Ukažte, že pokud vzdálenost elektrod klesá k nule, přechází kapacita válcového kondenzátoru v kapacitu deskového kondenzátoru  $C = \varepsilon \frac{S}{d}$ , kde  $S$  je plocha desek a  $d$  jejich vzdálenost.

**Řeš.:** Faktor  $\left(\ln \frac{R}{r}\right)^{-1}$  přepíšeme pomocí  $R - r = d$  na  $\left(\ln \frac{R}{R-d}\right)^{-1} = \left(-\ln \frac{R-d}{R}\right)^{-1} = -\frac{R}{d} \frac{\frac{d}{R}}{\ln 1 - \frac{d}{R}}$ . Pro názornost si můžeme pomoci substitucí  $\frac{d}{R} = x \approx 0$ , kdy si snáze uvědomíme, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 1 - x}{x} = -1$ . Použitím tohoto přiblížení získáme  $C = \varepsilon \frac{2\pi Rv}{d}$ . Výraz  $2\pi Rv$  není nic jiného, než obsah pláště vnější válcové elektrody. V limitě přibližujících se elektrod se tedy co do kapacity ztrácí křivost válcových ploch, lokálně se elektrody chovají jako rovinné desky.

**Př. 68:** © Určete polohu obrazu předmětu při zobrazení tenkou spojnou čočkou, pokud předmět přibližujeme směrem k čočce do ohniska a pokud předmět přibližujeme do ohniska směrem od čočky.

**Řeš.:** Využitím zobrazovací rovnice čočky  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$  máme provést limity  $\lim_{a \rightarrow f \pm} a'$ . Po vyjádření  $a' = \frac{af}{a-f}$  v případě přibližování předmětu k čočce do ohniska, tj.  $a \rightarrow f+$ , obdržíme  $\lim_{a \rightarrow f+} a' = \infty$ , tedy obraz se za čočkou promítá "do nekonečna". Pro případ přibližování předmětu k ohnisku směrem od čočky pak  $\lim_{a \rightarrow f+} a' = -\infty$ . Obraz se tedy bude posouvat do nekonečna, ale v předmětovém prostoru (obraz je zde zdánlivý). Tento matematický zápis je důvodem, proč se používá terminologie „zaostřit na nekonečno“ apod.

**Př. 69:** Insp. [V102]. V teorii relativity je energie tělesa pohybujícího se rychlostí  $v$  určena jako  $E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , kde  $E_0$  je tzv. klidová energie. Jak se bude měnit rychlost tělesa, pokud mu budeme dodávat další a další množství energie? Určete, co se stane v limitním případě  $E \rightarrow \infty$ .

**Řeš.:** Vyjádříme rychlost tělesa pomocí jeho energie:  $v = c\sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E^2}}$ . Pokud roste dodávaná energie, zmenšuje se výraz  $\frac{E_0^2}{E^2}$ , proto se zvětšuje rychlost tělesa. V limitě  $\lim_{E \rightarrow \infty} v = c$ . Rychlost tělesa se bude blížit rychlosti světla. Tento stav není experimentálně dosažitelný, protože neexistuje zdroj nekonečné energie.

**Př. 70:** Insp. [F77]. Pokud neuvažujeme odpor vzduchu, těleso padající volným pádem je podrobena pouze tíhové síle, která mu uděluje konstantní zrychlení. Odporové síly při pohybu vzduchem jsou úměrné čtverci rychlosti,  $F_o = \frac{1}{2}CS\rho v^2$ , kde  $\rho$  je hustota vzduchu,  $S$  plocha průřezu padajícího tělesa a  $C$  součinitel odporu daný tvarem tělesa. To má za následek, že během pádu roste třecí síla,

kteřá působí proti směru tíhové. Tím se zrychlení tělesa časem snižuje, rychlost tělesa se nemůže nekonečně zvětšovat, ale blíží se nějaké limitní hodnotě (při níž by třecí síla byla právě rovná síle tíhové). Podrobnou analýzou se dospěje k tomu, že rychlost tělesa je následující funkcí času:  $v(t) = \sqrt{\frac{g}{A}} \operatorname{tgh}(t\sqrt{gA})$ . Určete tzv. terminální rychlost dopadu  $v_\infty$ , přitom dosadte do vztahu konstantu  $A$ , jejíž význam odvoďte z rovnováhy sil. Spočítejte, jakou rychlostí dopadne na zem parašutista, pokud i s výstrojí váží  $100 \text{ kg}$ , československý padák OVP-68 má poloměr kulového vrchlíku  $4,8 \text{ m}$  a činitel odporu je asi  $C \doteq \frac{4}{3}$ .

**Řeš.:** Terminální rychlost dopadu je dána mezní situací, kdy se kapka pádem pohybuje nekonečně dlouho, t.j.  $v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ . Čas se vyskytuje pouze v argumentu hyperbolického tangentu, tento argument  $x$  roste k nekonečnu, tím pádem  $\operatorname{tgh} x \rightarrow 1$ . Terminální rychlost je proto  $v_\infty = \sqrt{\frac{g}{A}}$ . Konstantu  $A$  určíme z rovnováhy sil  $F_o = \frac{1}{2}CS\rho\frac{g}{A} = mg = F_G$ . Proto  $A = \frac{CS\rho}{2m}$  a terminální rychlost je  $v_\infty = \sqrt{\frac{2gm}{CS\rho}}$ . Pro číselný dopočet v případě parašutisty dostaneme rychlost asi  $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Zpřesnění výpočtu bychom docílili uvažováním vztlaku v plynu. Podobný výpočet umožňuje odhadnout rychlost dešťových kapek, kde ovšem hraje největší roli jejich nestálý tvar, a tím problematická hodnota  $C$ .

**Př. 71:** Insp. [F77]. Uvažujte pohyb kovové kuličky vazkou kapalinou, třeba olejem. V takovém případě je třecí síla při laminárním proudění přímo úměrná rychlosti tělesa, což vyjadřuje tzv. Stokesův vzorec:  $F_o = 6\pi r\eta v$ , kde se kulička poloměru  $r$  pohybuje rychlostí  $v$  skrz kapalinu s dynamickou viskozitou  $\eta$ . Pro vodu je dynamická viskozita  $\eta = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Uvažme, že do vody vhodíme kuličku; bude na ní kromě vazké třecí síly působit tíhová a vztlaková síla, jejich výslednice bude kuličce udílet zrychlení, dokud se třecí síla nezvýší natolik, že výslednice sil bude nulová. Dá se odvodit vzorec pro rychlost kuličky při tomto volném pádu ve vazké kapalině:  $v = \frac{g}{B}(1 - e^{-Bt})$ , kde  $B$  je kladná konstanta. Určete, jakou mezní rychlost může kulička nabýt, přitom odvoďte význam konstanty  $B$  a dosadte. Numericky dopočítejte, jakou rychlost pádem v ricinovém oleji (hustotu zaokrouhlíme na  $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , dynamická viskozita je  $\eta \doteq 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  dosáhne kulička z vanadu (jeho hustota  $6000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ) o poloměru  $3 \text{ mm}$ . Dále se dá odvodit, jakou dráhu těleso urazí za čas  $t$  tímto pádem:  $s(t) = \frac{g}{B}(t - \frac{e^{-Bt}-1}{B})$ , zjednodušte výraz pro velké časy.

**Řeš.:** Provedením limity (při níž  $e^{Bt} \rightarrow 0$ ):  $v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{g}{B}$ . Tato rychlost vyvolává třecí sílu, která vyrovná sílu tíhovou a vztlakovou:  $6\pi\eta r\frac{g}{B} = mg - m_0g$ , kde jsme symbolem  $m_0$  označili hmotnost kapaliny tělesem vytlačené. Pokud uvažujeme, že těleso je kulička, můžeme konstantu  $B$  přepsat pomocí hustoty tělesa  $\rho_t$  a hustoty kapaliny  $\rho_k$ :  $B = \frac{6\pi\eta r}{(\rho_t - \rho_k)\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{9\eta}{2\Delta\rho r^2}$ . Terminální rychlost tím pádem má tvar  $v_\infty = \frac{2\Delta\rho g r^2}{9\eta}$ . Pro vanadovou kuličku v oleji  $v_\infty = \frac{2 \cdot 5000 \cdot 10 \cdot 0,003^2}{9 \cdot 1} = 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Dráha tělesa pro dostatečně velké časy přejde  $s(t) \doteq \frac{g}{B}(t - \frac{1}{B}) = v_\infty(t - \frac{v_\infty}{g})$ . To odpovídá rovnoměrnému přímočarému pohybu terminální rychlostí s odečtenou chybou za pozvolné dosažení rychlosti.

Limitu lze též nenápadně použít k integrování, vyžaduje to ovšem složitější matematické nástroje (konkrétně řady) dřív, než jsou ve fyzice k dispozici.

**Př. 72:** Insp. [F76]. Určete moment setrvačnosti homogenního kruhu o poloměru  $R$  a hmotnosti  $M$  při rotaci kolem své osy.

**Řeš.:** Moment setrvačnosti umíme spočítat pro těleso o hmotnosti  $m$  rotující ve vzdálenosti  $r$  od osy rotace:  $i = mr^2$ . Takovým tělesem může být tenká obruč, jejíž osa splývá s osou rotace. Pokud si celý kotouč nahradíme jednou takovou obručí (kružnicí) o poloměru  $\frac{R}{2}$ , pak odhadujeme moment setrvačnosti jako

$$I_1 = M \frac{R^2}{4} = 0,25 \cdot MR^2 \quad (3.53)$$

Tento odhad je ale příliš hrubý, proto jej zjemníme a nahradíme kotouč dvěma obručemi s hmotnostmi  $\frac{M}{2}$ , které mají poloměry  $\frac{R}{4}$  a  $\frac{3R}{4}$ . Potom by moment setrvačnosti byl

$$I_2 = \frac{M}{2} \left( \frac{R^2}{4^2} + \frac{(3R)^2}{4^2} \right) = \frac{M}{2} \frac{R^2}{4^2} (1^2 + 3^2) = 0,3125 \cdot MR^2 \quad (3.54)$$

Zkusme nahradit kruh třemi obručemi o hmotnostech  $\frac{M}{3}$ , které rovnoměrně umístíme na místo kotouče, čili jejich poloměry budou  $\frac{R}{6}, \frac{3R}{6}, \frac{5R}{6}$ :

$$I_3 = \frac{M}{3} \left( \frac{R^2}{6^2} + \frac{(3R)^2}{6^2} + \frac{(5R)^2}{6^2} \right) = \frac{M}{3} \frac{R^2}{6^2} (1^2 + 3^2 + 5^2) \doteq 0,3241 \cdot MR^2 \quad (3.55)$$

Vidíme, že zpřesňováním dělení kruhu se moment setrvačnosti zvyšuje, pokračujme proto a nahradme kruh 4 obručemi s hmotnostmi  $\frac{M}{4}$  a poloměry  $\frac{R}{8}, \frac{3R}{8}, \frac{5R}{8}, \frac{7R}{8}$ , takže I odhadujeme:

$$I_4 = \frac{M}{4} \left( \frac{R^2}{8^2} + \frac{(3R)^2}{8^2} + \frac{(5R)^2}{8^2} + \frac{(7R)^2}{8^2} \right) = \frac{M}{4} \frac{R^2}{8^2} (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) \doteq 0,3281 \cdot MR^2 \quad (3.56)$$

Kdybychom rozdělili kruh na  $n$  mezikružší a každé mezikružší nahradili obručí se středním poloměrem mezikružší, tj. pro  $k$ -té mezikružší  $r_k = \frac{kR}{2n}$ , a každé obruči přiřadili hmotnost  $m_k = \frac{M}{n}$ , pak bychom měli

$$I_n = \frac{M}{n} \frac{R^2}{(2n)^2} \left( 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n-1)^2 \right) \quad (3.57)$$

Nekonečně jemné dělení bychom reprezentovali limitou, přičemž  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{MR^2}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}{n^3} = \frac{MR^2}{4} \frac{4}{3} = \frac{1}{3} MR^2$ . Tento výsledek je ovšem fyzikálně chybný, protože každému mezikružší přiřadil stejnou hmotnost. Tím se ovšem disk stal hustější u středu, a nebyl tedy homogenní. Výpočet, který byl snadný a který využil limity 3.52, musíme upravit, aby zohledňoval hmotnost konkrétního mezikružší.

Rozdělme poloměr kruhu dělicími body  $(r_i)_{i=0}^n$ , kde  $r_0 = 0, r_n = R$ . Kružnice s těmito poloměry dělí kruh do soustavy  $n$  mezikružší. Obsah  $k$ -tého mezikružší je  $\pi(r_k^2 - r_{k-1}^2)$ , proto mu přísluší hmotnost  $m_k = \frac{M}{R^2}(r_k^2 - r_{k-1}^2)$ . Takové mezikružší nahradíme kružnicí s hmotností  $m_k$  a poloměrem  $\frac{r_k + r_{k-1}}{2}$ . Moment setrvačnosti  $k$ -té kružnice je dán:

$$i_k = \frac{M}{4R^2} (r_k^2 - r_{k-1}^2) (r_k + r_{k-1})^2 \quad (3.58)$$

Celý kruh má potom odhadnutý moment setrvačnosti  $I = \sum_{k=1}^n i_k$ . Zbývá nalézt rozumnou volbu rozdělení kruhu do mezikruží. Nejjednodušší volba je stejně širokých mezikruží: ( $\forall k \in \hat{n}$ )  $(r_k - r_{k-1} = \frac{R}{n})$ , jinak řečeno  $r_k = R \frac{k}{n}$ . Potom upravíme:

$$i_k = \frac{M}{4R^2} \left( R^2 \frac{k^2}{n^2} + R^2 \frac{(k-1)^2}{n^2} \right) \left( R \frac{k}{n} - R \frac{k-1}{n} \right)^2 = \frac{MR^2}{4n^4} (2k-1)^3 \quad (3.59)$$

Posčítání všech příspěvků potom znamená, že odhad momentu setrvačnosti rozdělením na  $n$  mezikruží je součet řady

$$I_n = \sum_{k=1}^n i_k = \frac{MR^2}{4n^2} \sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = \frac{MR^2}{4} \frac{2n^4 - n^2}{n^4}. \quad (3.60)$$

K určení  $\sum_{k=1}^n (2k-1)^3$  lze využít známějších součtů  $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ,  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ . Závěrem zbývá zjemňovat dělení kruhu na mezikruží skrz parametr  $n$ . Čím více se počet mezikruží blíží nekonečnu, tím přesnější je jeho nahrazení kružnicí. Limitním přechodem dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - n^2}{n^4} = 2 \Rightarrow I = \frac{1}{2}MR^2, \quad (3.61)$$

což je správný výsledek. Pro zajímavost, posloupnost  $\frac{2n^4 - n^2}{n^4}$  se přiblíží hodnotě 2 poměrně brzy, už při  $n = 4$ , tj. nahrazením kruhu soustavou 4 kružnic, podhodnotíme moment setrvačnosti o méně než 4%. Pro  $n = 5$  pak přesně o 2%, při  $n = 10$  pak přesně o 0,5%.

Poslední příklad je za možnostmi běžné středoškolské výuky, jen málo žáků (nejspíše řešitelů olympiád) by jej bylo schopno i přes skvělý názorný výklad vstřebat. Ale jako ukázka pro učitele, že i takto lze učivo o řadách a limitách převést v přípravu na integrální počet, je příklad hodnotný. Pro žáky by stačilo seznámení se zásadní myšlenkou rozdělení kruhu do nekonečně mnoha kružnic. Při opětovném setkání s touto myšlenkou při výstavbě určitého integrálu by žák měl intuitivní podklad.

## 3.5 Derivace

Pojem derivace stavíme na dobře vybudovaném pojmu diference.

**Definice 6.** *Budiž funkce  $f$  definovaná na intervalu obsahujícím  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Pokud existuje limita*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0 \pm} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0 \pm} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (3.62)$$

*nazveme ji pravou resp. levou derivací funkce  $f$  v bodě  $x_0$ . Pokud existují obě limity a jsou si rovny, má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci a značíme ji*

$$\frac{df}{dx}(x_0), \text{ popř. } \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \text{ či } f'(x_0). \quad (3.63)$$

*Jinak funkce derivaci v bodě nemá.*

Zápis pomocí  $\Delta x$  je vhodnější a srozumitelnější v kontextu změny hodnoty nezávisle proměnné a závislé funkční hodnoty. Při výkladu se obvykle pracuje s limitou  $x \rightarrow x_0$  či s pojmem okolí, resp. prstencového okolí a o výrazu pomocí delt se knihy obvykle nenápadně zmiňují jako o možné alternativě. Tím se ale nenavazuje na propedeutické myšlenky, které jsme budovali v předchozích sekcích. Nyní úvahy o diferencích završujeme limitním přechodem a definujeme derivace jako mezní poměr diferencí. Takto cílený zápis definice  $\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  zdůrazňuje ze všech pročtených knih jen dvojice [V88, V89], podle nich tedy navrhuje zapisovat definici derivace přímo tvarem 3.62, učitel musí pečlivě vysvětlit znaménko  $\Delta x$  při diskuzi jednostranných derivací.

V běžném použití si nevystačíme s derivací funkce v bodě, proto se dále zavádí derivace jako funkce v intuitivním smyslu. Domníváme se, že tím vzniká určitá miskoncepce. Ta možná stojí za tím, že žáci v dotazníkovém šetření neuvádí geometrický význam derivace. Tu chápou pouze jako přiřazení, funkci odvozenou z jiné funkce. Tím se ztrácí uvažování v lokálním kontextu, což je nežádoucí. Učitel by to měl mít na paměti a rozdíl mezi derivací jako funkcí a derivací v bodě řádně vysvětlit.

**Definice 7.** *Má-li funkce  $f$  konečné derivace na vnitřcích všech souvislých komponentách svého definičního oboru a má jednostranné derivace ve všech krajních bodech svého definičního oboru, pak funkci definovanou v každém bodě  $\mathcal{D}_f$  příslušnou derivací  $\frac{df}{dx}(x)$  nazýváme derivací  $f$  a značíme  $\frac{df}{dx}$  či krátce  $f'$ .*

Uvedme zásadní věty, které se k práci s derivacemi pojí. Základní aritmetika derivací je pouze důsledkem aritmetiky limit.

**Věta 3.** *Mají-li funkce  $f, g$  v bodě  $x_0$  vlastní derivace, pak*

$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0), \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \end{aligned} \quad (3.64)$$

*ve druhém případě navíc předpokládáme  $g(x_0) \neq 0$ .*

Těmito pravidly zužitkováváme práci s chybou fyzikálního měření, kde platilo  $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$  a  $\Delta(f \cdot g) = \Delta f \cdot g + f \cdot \Delta g$ , tyto rovnice jsme pouze podělili  $\Delta x$  a provedli limitu  $\Delta x \rightarrow 0$ . Diference zde ztratily konkrétní smysl fyzikální chyby a stávají se abstraktním pojmem.

**Věta 4.** *Nechť  $g$  má vlastní derivaci v bodě  $x_0$  a funkce  $f$  má vlastní derivaci v bodě  $y_0 := g(x_0)$ . Potom složená funkce  $f \circ g$  má derivaci v  $x_0$ , platí*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0). \quad (3.65)$$

**Věta 5.** *Bud' funkce  $f$  prostá a spojitá na intervalu obsahujícím jako vnitřní bod  $x_0$ , označme  $y_0 = f(x_0)$ . Nechť inverzní funkce  $f^{-1}$  má v  $y_0$  derivaci různou od nuly. Potom má  $f$  v  $x_0$  derivaci a platí*

$$f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'(y_0)} \quad (3.66)$$

Pro poslední dvě věty můžeme použít mnemotechnické pomůcky při  $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$  a  $(y^{-1})' \equiv \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} = (y')^{-1}$ . Matematik nemůže používat tyto pomůcky jen

tak bez rozmyslu, neboť příslušné věty mají předpoklady, které je třeba ověřit. Konstatujeme zde, že pro drtivou většinu funkcí studovaných na SŠ (zejména ve fyzice) předpoklady jsou splněny, proto je možné k řešení příkladů přistupovat "fyzikálně". Práce s derivací v matematice by měla najít kompromis mezi korektností a praktickou užitností, např. prostřednictvím právě zmíněné pomůcky Leibnizovy notace. Nemůžeme dát jednoznačný návod, jak by tento kompromis měl být zvolen, také protože styl práce na gymnáziu a na průmyslové škole může být velmi odlišný.

**Věta 6.** *Má-li funkce v bodě  $x_0$  vlastní derivaci (příp. jednostrannou), je v tomto bodě spojitá (resp. spojitá jednostranně).*

Poslední tvrzení dává do souvislosti spojitost a diferencovatelnost. A jednoduchý protipříklad ukazuje, že opačná implikace neplatí - stačí vyšetřit  $f(x) = |x|$ . Pokud ve výuce vypustíme pojem spojitost, toto je jeden z okamžiků, který musíme zpracovat jinak. Nic se nejspíše v kontextu výuky *D&I* pro SŠ nestane, když tuto větu vypustíme také.

### 3.5.1 Derivace ve fyzice

Základním spojením fyziky a derivace je rychlost, kterou jsme v první kapitole navrhli jako propedeutickou pomůcku. Pro ujasnění nyní jmenujme fyzikální látku, s kterou se žák na SŠ setkává (nebo může setkat), a při tom jde o veličiny definované derivací (nejen podle času) či situace, kde se bez derivace neobejdeme; část jsme zmínili už v kapitole o diferenciálu:

- okamžitá rychlost a zrychlení  $v = \frac{dx}{dt}$ ,  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$
- okamžitá úhlová rychlost a úhlové zrychlení  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ,  $a = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
- výkon  $P = \frac{dW}{dt}$
- potenciální energie, teorie potenciálů  $F = -\frac{dU}{dx}$  (obecně  $\vec{F} = -\text{grad } U$ )
- 2. Newtonův zákon a 2. věta impulsová  $F = \frac{dp}{dt}$ ,  $M = \frac{dL}{dt}$
- (měrná) tepelná kapacita  $c = \frac{dQ}{dT}$
- elektrický proud  $I = \frac{dQ}{dt}$
- 1. Faradayův zákon  $AI = \frac{dm}{dt}$
- Curieova teplota a kritické body fázových přechodů jsou dané nespojitostmi derivací, např. skokem  $\frac{dV}{dT}$
- Faradayův zákon, změna magnetického toku  $U = -\frac{d\Phi}{dt}$
- vlastní indukce  $L = \frac{d\Phi}{dI}$
- rovnice kontinuity a diferenciální rovnice např. pro harmonický oscilátor či elektromagnetické vlnění

**Př. 73:** Insp. [M44]. Denní životní cyklus (tzv. cirkadiánní biorytmus) člověka se projevuje změnou tělesné teploty v průběhu dne. Tato závislost se u zdravého člověka dá zhruba popsat rovnicí  $T(t) = 36,8 - 1,3 \sin \left[ \frac{2\pi}{24}(t - 2) \right]$ , kde  $T$  je teplota v  $^{\circ}\text{C}$  a  $t$  je čas v  $h$ . Vysvětlete význam hodnot  $36,8$ ,  $2\pi$  a  $24$  v rovnici. Užijte znalostí goniometrických funkcí k tomu abyste našli dvojici:  $t_{min}, T_{min}$  a  $t_{max}, T_{max}$ , časy, kdy má lidské tělo nejnižší a nejvyšší teplotu, a také odpovídající hodnoty teploty. Stejný úkol proveďte využitím diferenciálního počtu. Jeho užitím nalezněte časy  $t_{1,2}$ , kdy se teplota lidského těla mění nejrychleji a určete tuto rychlost  $\vartheta_{max}$  (s jednotkou  $\frac{^{\circ}\text{C}}{h}$ ).

**Řeš.:** Řešení rozebereme pouze z pohledu diferenciálního počtu. Hodnota  $36,8$  je průměrná denní teplota ve  $^{\circ}\text{C}$ , podíl  $\frac{2\pi}{24}$  škáluje funkci, aby byla periodická s periodou jednoho dne. Dvojice extrémálních teplot jsou  $t_{min} = 8 h, T_{min} = 35,5^{\circ}\text{C}$  a  $t_{max} = 20 h, T_{max} = 38,1^{\circ}\text{C}$ . Tyto hodnoty nalezneme užitím diferenciálního počtu z derivace  $\vartheta(t) = \frac{dT}{dt} = -1,3 \frac{2\pi}{24} \cos \left[ \frac{2\pi}{24}(t - 2) \right]$ . Pro extrémy teploty pokládáme  $\vartheta(t) \stackrel{!}{=} 0$ . Pokud nás zajímá rychlost změny teploty  $\vartheta(t)$ , hledáme  $\frac{d\vartheta}{dt} = 1,3 \left( \frac{2\pi}{24} \right)^2 \sin \left[ \frac{2\pi}{24}(t - 2) \right]$ . Pro maximální rychlost změny musí být  $\frac{d\vartheta}{dt} \stackrel{!}{=} 0$ , což nastává v časy  $t_1 = 2 h, t_2 = 14 h$  a teplota se mění rychlostí  $\vartheta_{max} = -\vartheta(2) = \vartheta(14) = 1,3 \frac{2\pi}{24} \cdot 1 \frac{^{\circ}\text{C}}{h} \doteq 0,34 \frac{^{\circ}\text{C}}{h}$ .

**Př. 74:** © Ukažte, že pro kvadratickou závislost veličin lze vztah  $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  přepsat do tvaru  $y - y_0 = \alpha(x - x_0)^2$ , přičemž v bod  $[x_0; y_0]$  je extrém funkce - minimum pro  $\alpha > 0$  či maximum pro  $\alpha < 0$ .

**Řeš.:** Nalezneme extrém dané závislosti derivací  $\frac{dy}{dx} = 2\alpha x + \beta \stackrel{!}{=} 0$ .  $x_0$  souřadnice extrému je tedy určena pomocí parametrů předepsané závislosti jako  $\frac{-\beta}{2\alpha}$ . Funkční hodnota je pak  $y_0 = y(x_0) = \alpha \cdot \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \beta \cdot \frac{-\beta}{2\alpha} + \gamma = \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}$ . Shrneme souřadnice extrému:

$$[x_0; y_0] = \left[ \frac{-\beta}{2\alpha}; \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} \right]. \quad (3.67)$$

Nyní je třeba nalézt úlohy těchto hodnot v předepsané rovnici. Zadání napovídá úpravu na čtverec:  $y = \gamma + \alpha(x^2 + 2\frac{\beta}{2\alpha}x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}) = \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} + \alpha(x + \frac{\beta}{2\alpha}) = y_0 + \alpha(x - x_0)^2$  a k tomu jsme směřovali. O tom, zda má závislost maximum či minimum rozhoduje druhá derivace, která je pro  $\forall x \in \mathbb{R}$  rovna  $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\alpha$ , což odpovídá tvrzení ze zadání.

Mimochodem, můžeme si všimnout výrazu  $-4\alpha y_0 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ , což je dobře známý diskriminant kvadratické rovnice, a to původní rovnice  $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ . V tom vidíme souvislost, kdy pro nulový diskriminant má kvadratická rovnice jen jedno řešení - a to extrémální - dříve již chápané jako jediný průsečík s přímkami  $y(x) = const$ .

### 3.5.2 Extremální úlohy

Příklady na hledání extrému jsou kánonem aplikací diferenciálního počtu. Bohužel, většina příkladů v současných materiálech má nudný tvar, který derivace suchopárně promítá do geometrické abstrakce. Typickým příkladem je úloha dokázat, že obdélník daného obvodu s maximálním obsahem je čtverec. Proto

přinášíme sérii těchto klasických úloh v lepším kabátě. K tomu dále přisazujeme příklady, které jsou dobře řešitelné či mají zajímavé řešení, ale v literatuře je nenacházíme. Klíčem k úspěšnému řešení veškerých úloh na extrém je *parametrizovat úlohu jediným volným parametrem*, který jednoznačně identifikuje řešení. Správná parametrizace je otázkou určité geometrické intuice a vnímání funkčních závislostí a může úlohu významně zjednodušit.

**Př. 75:** Určete, jakou maximální výměru obdélníkového pozemku lze ohradit plotem dané délky  $l$ , a ukažte, že tento pozemek je čtvercový.

**Př. 76:** Pokud chcete mít obdélníkový záhon o dané výměře  $S$ , který má co nejmenší obvod, jaký poměr stran musíte zvolit? Vypočítejte pak tento minimální obvod. (půjde o čtverec,  $o = 4\sqrt{S}$ )

**Př. 77:** Určete, jaké rozměry musí mít bazén tvaru kvádra s objemem  $375\text{ m}^3$  a hloubkou  $3\text{ m}$ , aby na vykachličkování jeho stěn bylo potřeba nejméně materiálu. Jaká je minimální částka, kterou vykachličkování bazénu bude stát, jestliže  $1\text{ m}^2$  kachliček stojí  $25\text{ Kč}$ ?

**Př. 78:** Insp. [V87]. Přípustné zatížení trámu o obdélníkovém průřezu se základnou  $z$  a výškou  $v$  je úměrné  $\sim zv^2$ . Určete, jaký poměr stran  $v : z$  musí mít trám vyřezaný z břevna kruhového průřezu o poloměru  $R$ , aby vydržel co největší zatížení.

**Řeš.:** Vztah mezi základnou obdélníka  $z$ , jeho výškou  $v$  a poloměrem břevna  $R$  je totiž  $R^2 = \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$ , z čehož je nejvhodnější vyjádřit  $v^2 = 4R^2 - z^2$ . Zatížení je tak určeno jako funkce základny, extremalizujeme funkci  $F = 4R^2z - z^3$ :

$$\frac{dF}{dz} = 4R^2 - 3z^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow z = \frac{2}{\sqrt{3}}R \Rightarrow v = \sqrt{\frac{8}{3}}R \quad (3.68)$$

Poměr stran je tedy  $v : z = \sqrt{2}$ . Že má nosnost skutečně maximum, ukazuje druhá derivace  $\frac{d^2F}{dz^2} = -6z < 0$ .

Zadání žádá nalézt obdélník extremalizující funkci, která tentokrát není jen obvodem či obsahem; postup byl sice podobný, jako bude v následujících geometrických příkladech, ale přímé praktické užití v stavební praxi je nesmírně hodnotné. Příklad je možno upravit a doplnit číselnými údaji, např. pro  $R = 20\text{ cm}$  má trám maximální nosnosti průřez velikosti  $S = \frac{4\sqrt{2}}{3}R^2 \doteq 754\text{ cm}^2$ .

**Př. 79:** Jaký největší obdélník lze vepsat do pravoúhlého trojúhelníka? Vyjádřete obsah tohoto maximálního obdélníka v poměru k obsahu trojúhelníka. (1:2 nezávisle na tvaru rozměrech trojúhelníka)

**Př. 80:** Jaký největší obdélník lze vepsat do rovnoramenného trojúhelníka s vrcholovým úhlem  $\alpha$ ? Vyjádřete obsah tohoto maximálního obdélníka v poměru k obsahu trojúhelníka.

**Řeš.:** Když rovnoramenný trojúhelník rozdělíme výškou proti základně na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, přechází příklad v předchozí.

**Př. 81:** Ukažte, že z pravoúhlých trojúhelníků s danou přeponou má největší obsah ten rovnoramenný.



**Př. 82:** Určete obsah největšího obdélníka vepsaného kružnici s poloměrem  $R$ . Ukažte, že jde o čtverec.

**Př. 83:** © Který z pravoúhlých trojúhelníků s daným obsahem má nejmenší obvod? Naopak, který z pravoúhlých trojúhelníků s předepsaným obvodem má největší obsah?

**Řeš.:** V pravoúhlém trojúhelníku vyjádříme vztah mezi obsahem a obvodem prostřednictvím jednoho z úhlů  $\alpha$ , když strany nejdříve vyjádříme pomocí přepony  $a = c \sin \alpha, b = c \cos \alpha$ , obsah je dán  $S = \frac{ab}{2} = \frac{c^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha$  a obvod  $o = a + b + c = c(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)$ . Eliminací  $c$  získáme

$$o = \sqrt{2S} \frac{(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)}{\sqrt{\sin \alpha \cos \alpha}} \Leftrightarrow S = \frac{o^2}{2} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)^2}. \quad (3.69)$$

Derivování těchto vztahů je náročnějším cvičením na derivaci podílu a mocnin, výsledky lze upravit na

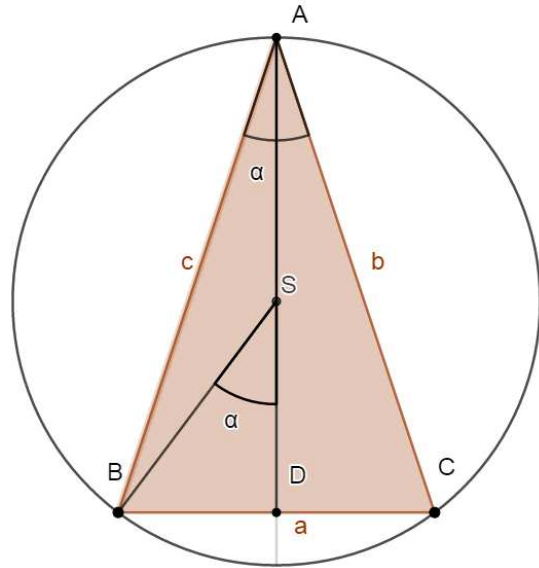
$$\frac{do}{d\alpha} \sim (\tan \alpha - 1)(\cotg \frac{\alpha}{2} + 1), \quad \frac{dS}{d\alpha} \sim \cos \alpha - \sin \alpha, \quad (3.70)$$

oba výrazy položené rovny nule vedou v kontextu pravoúhlého trojúhelníka  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  k jedinému řešení, a to  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Dokazovat, zda jde o maximum/minimum není vhodné kvůli technické náročnosti druhých derivací. Proto doporučujeme na řešení jít "fyzikálně" řešením limitních případů  $\alpha \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . V případě konstantního obvodu se trojúhelník stává téměř dvojicí identických úseček délky  $\approx \frac{o}{2}$  svírající nulový obsah, pro úhel rostoucí od 0 musí obsah růst, takové tvrzení podle nás není třeba více dokazovat. Řešení  $\frac{\pi}{4}$  je jediným možným extrémem, tedy odpovídá maximu, kdy se obsah začne pro  $\alpha$  rostoucí k  $\frac{\pi}{2}$  zmenšovat. Tato situace dobře zapadá do symetrie trojúhelníka, v níž bychom se mohli omezit na studium  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ . Případně žákovi můžeme oznámit, že druhá derivace by vyšla  $4 - 3\sqrt{2} < 0$ . V případě pevně daného obsahu se s  $\alpha \rightarrow 0$  musí strany  $b, c$  prodlužovat nade všechny meze, čímž  $o \rightarrow \infty$ . S rostoucím úhlem tedy obvod klesá, až do kritické hodnoty  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Hodnota druhé derivace je zde skutečně  $2(1 + \sqrt{2}) > 0$ . Pro úplnost uvedme, že v extrému  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  je vztah mezi obvodem a obsahem trojúhelníku  $o = \sqrt{S} \cdot 2(1 + \sqrt{2})$ .

**Př. 84:** © Za čtverce papíru o hmotnosti 1,5 g chceme vystřihnout rovnoramenný trojúhelník tak, že vrchol proti základně bude jedním z vrcholů čtverce. Ukažte, že takový vystřižený trojúhelník může vážit nejvýše 0,75 g.

**Př. 85:** © Určete obvod největšího (co do obsahu) rovnoramenného trojúhelníka vepsaného do kružnice o poloměru  $R$ . Jakou část obsahu kruhu zabírá plocha takového trojúhelníka?

**Řeš.:** Využijeme vztah středového a obvodového úhlu a jednoznačně parametrizujeme trojúhelník vrcholovým úhlem  $\alpha$ , viz obrázek 3.9. Jelikož úsečka  $BD$  má délku  $R \sin \alpha$  a úsečka  $AD$  má délku  $R(1 + \cos \alpha)$  (rozmyslíme si, že vztah platí i pro tupé úhly  $\alpha > 90^\circ$ ), pak obsah trojúhelníka je dán  $S = R^2 \sin \alpha(1 + \cos \alpha)$ . Hledáme tedy úhel  $\alpha$ , pro nějž je extrémální geometrický faktor  $\sin \alpha(1 + \cos \alpha)$ .



Obrázek 3.9: Rovnoramenný trojúhelník vepsaný v kružnici.

$$\frac{dS}{d\alpha} \sim \cos^2 \alpha + \cos \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.71)$$

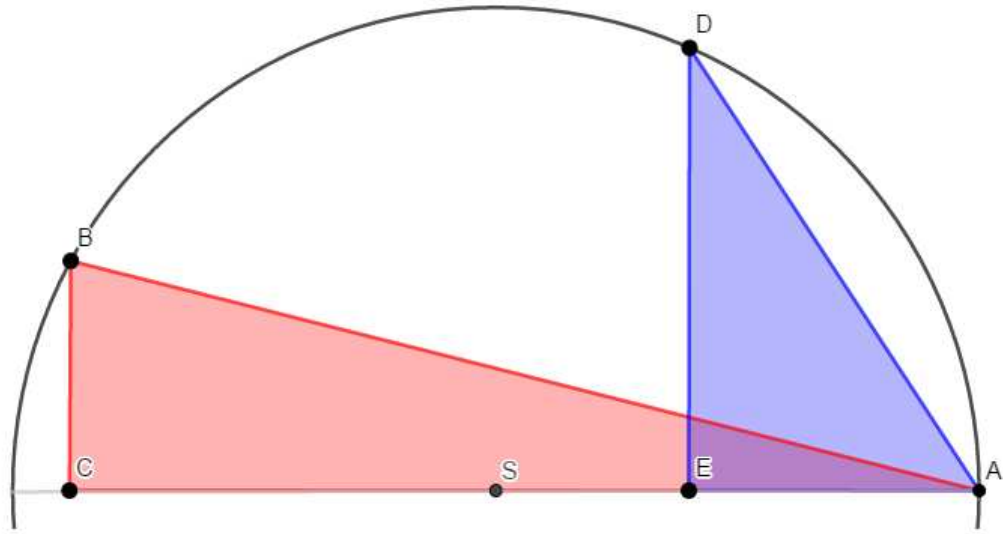
Při substituci  $x = \cos \alpha$  nalézáme řešení kvadratické rovnice  $2x^2 + x = 1$ :  $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -1$ . Úhly podezřelé na extrém jsou tedy  $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}, \alpha_2 = \pi$ . Druhá derivace geometrického faktoru pro tyto úhly má po řadě hodnoty  $-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0$ . Maximální obsah tedy má trojúhelník, který je rovnostranný. Jeho výšku  $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ , určíme jako délku  $AD$  pro případ  $\alpha_1$ , stranu jako dvojnásobek délky  $BD$ , čili  $\sqrt{3}R$ . Trojúhelník má tedy obvod  $o = 3\sqrt{3}R$  a obsahem zabírá  $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \doteq 41\%$  kruhu.

Pro zajímavost, obvod kruhu je k obvodu trojúhelníka dvojnásobný. Pokud bychom hledali největší vepsaný trojúhelník co do obvodu, hledali bychom extrém funkce  $o = 2R(\sin \alpha + \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}) = 4R \cos \beta(1 + \sin \beta)$ , kde jsme substituovali  $\beta = \frac{\alpha}{2}$ . Derivací dostaneme kvadratickou rovnici  $2y^2 + y = 1$  se substitucí  $y = \sin \beta$ . Výsledným řešením ( $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} = -1$ ) je, že trojúhelník s maximálním obvodem je též ten rovnostranný. Vzhledem k vícenásobným substitucím a vzorci pro  $\cos \frac{\alpha}{2}$  by takové zadání bylo komplikovanější.

Nesmíme ovšem opomenout jednu věc. Je-li  $\alpha = 0 \vee \alpha = \pi$ , pak je logicky obsah trojúhelníka  $ABC$  nulový, čili minimální možný, pro jiné hodnoty nenulový. Je proto z povahy věci rozumné předpokládat kromě dvou globálních minim existenci (alespoň jednoho) úhlu, který určí onen maximální trojúhelník. Ten jsme vskutku našli, ale naše analýza prostřednictvím derivací nás dovedla jen k tomu, že pro řešení  $\alpha = \pi$  jde o inflexní bod. Nesmíme zapomenout na okraje definičního oboru, protože náš problém je ohraničen  $\alpha \in \langle 0; \pi \rangle$ . V bodě  $\alpha = 0$  je funkce rostoucí, v bodě  $\alpha = \pi$  klesající, tyto body tedy skutečně jsou minima.

**Př. 86:** © Určete obsah největšího pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona má vrcholy na obvodu dané kružnice a vrchol při pravém úhlu leží na průměru kružnice, který obsahuje jeden z vrcholů. Viz obrázek 3.10.

**Řeš.:** Tento příklad je variantou předchozího. Studovaný trojúhelník je totiž polovinou z rovnoramenného.



Obrázek 3.10: Pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou na průměru.

**Př. 87:** © Z kruhu chceme vystříhnout dva kruhy, aby měly v součtu maximální obsah. Jak to máme udělat?

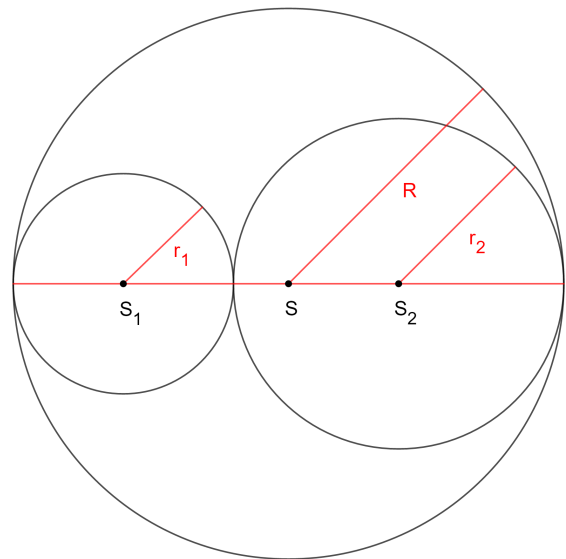
**Řeš.:** "Rozumná" volba vepsání dvou kruhů je zobrazena na vedlejším obrázku. Není složité si povšimnout vztahu

$$R = r_1 + r_2,$$

který umožňuje zapsat obsah vepsaných kruhů jako

$$S = \pi(r_1^2 + (R - r_1)^2).$$

Derivací  $\frac{dS}{dr_1} \sim 2r_1 - R$  získáme bod podezřelý na extrém  $r_1 = r_2 = \frac{R}{2}$ .



Obrázek 3.11: Kruhy vystřížené z kruhu.

Tento příklad ale zařazujeme proto, že ukazuje důležitost druhé derivace.  $\frac{d^2S}{dr_1^2} = 2 > 0$  značí, že jsme ve skutečnosti našli minimum. Hledané maximum tedy odpovídá situaci, kdy se jeden z kruhů redukuje na bod a druhý splyne s původním kruhem. Tato situace skutečně z původního kruhu zabere maximální možný obsah. Nejde již ale formálně o dva kruhy. Příklad tedy můžeme uzavřít s tím, že rozumné řešení pro praktické účely, jako je stříhání nůžkami, neexistuje.

**Př. 88:** © V kruhu zvolme průměr a na něm dělicí bod. Vzniklé úsečky berme za úhlopříčky dvou čtverců. Pro jakou polohu dělicího bodu bude největší součet obsahů takových čtverců?

**Př. 89:** © Jaký maximální obsah čtvercového papíru mohou zabrat dva kruhy, které z něj vystříhneme?

Tyto dva příklady jsou identické v postupu řešení, jako jim předcházející, jiné jsou pouze vztahy a úměry mezi délkami/obsahy.

**Př. 90:** Jaký největší kužel lze vyříznout z koule? Určete poměr objemů těchto dvou těles.

**Řeš.:** Osový řez koulí s vepsaným kuželem de facto máme na obrázku 3.9. Označíme-li poloměr podstavy kužele  $r = |BD|$  a výšku kužele  $v = |AD|$ , můžeme je vztáhnout přes polovinu vrcholového úhlu  $\psi = \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle DAB$  k poloměru koule  $R = |SB|$  :  $r = R \sin 2\psi$ ,  $v = \frac{r}{\tan \psi}$ , proto objem kužele je

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2 \psi \cos^4 \psi \Rightarrow \frac{dV}{d\psi} \sim \sin \psi \cos^3 \psi (3 \cos^2 \psi - 2) =, \quad (3.72)$$

odkud jsou položením  $\frac{dV}{d\psi} = 0$  triviálně vidět minima pro  $\psi = 0 \wedge \psi = \frac{\pi}{2}$ , což jsou okraje přípustného intervalu pro  $\psi$ . Rovnice  $3 \cos^2 \psi - 2 = 1 - 3 \sin^2 \psi = 0$  dává v uvažovaném intervalu další kořen,  $\psi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \doteq 35,26^\circ$ . Tento úhel určuje hledané maximum, přitom jej nemusíme k určení objemu přesně vyčíslovat, protože dosadíme do vzorce pro objem  $\cos^2 \psi = \frac{2}{3}$ ,  $\sin^2 \psi = \frac{1}{3}$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot 2 \sin^2 \psi \cos^4 \psi = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{8}{27} \quad (3.73)$$

Poměr objemů koule a největšího možného kužele je  $27 : 8$ , dodejme, že výška tohoto největšího kužele je  $v = 2R \cos^2 \psi = \frac{4}{3}R$ .

**Př. 91:** Jaký největší válec lze vyříznout z koule? Určete poměr objemů těchto dvou těles.

**Řeš.:** Protože výška válce  $v$  a jeho poloměr  $r$  jsou s poloměrem koule  $R$  svázány vztahem  $\frac{v^2}{4} + r^2 = R^2$ , je objem válce snadno vyjádřitelný parametrem  $v$ :

$$V = \pi r^2 v = \pi \left(R^2 - \frac{v^2}{4}\right) v \Rightarrow \frac{dV}{dv} \sim R^2 - \frac{3}{4}v^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow v = \frac{2}{\sqrt{3}}R, \quad (3.74)$$

proto pro kritický poloměr válce bude  $r^2 = R^2 - \frac{v^2}{4} = \frac{2}{3}R^2$  a maximální dosažitelný objem válce zabere

$$V = \pi r^2 v = \pi \frac{2}{3}R^2 \frac{2}{\sqrt{3}}R = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (3.75)$$

tedy asi 57,74% objemu koule.

**Př. 92:** © Z kužele dané hmotnosti vyřízneme válec maximálního objemu. Ze zbylého kuželového vrchlíku opět vyřízneme válec největšího objemu a takto pokračujeme dále, do nekonečna. Kolik bude vážit odpad?

**Řeš.:** Označme  $R, W$  poloměr a výšku kužele a  $r, v$  poloměr a výšku vepsaného válce. Potom musí platit z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků  $\frac{R}{W} = \frac{R-r}{v}$ . Pro objem válce tedy platí

$$V = \pi r^2 v = \pi \frac{W}{R} (r^2 R - r^3) \Rightarrow \frac{dV}{dr} \sim 2rR - 3r^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r = 0 \vee r = \frac{2}{3}R \quad (3.76)$$

Maximum nastává pro  $r = \frac{2}{3}R \leftrightarrow v = \frac{1}{3}R$  a objem válce zabere  $V = \pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi R^2 W \cdot \frac{4}{9}$ , tzn. zabere  $\frac{4}{9}$  objemu původního kužele  $V_0$ . Zbýlý vrcholový kužel má výšku  $\frac{2}{3}W$ , ale stejné proporce, proto jeho objem je  $\frac{8}{27}V_0$ . Navíc z něj vyříznutý váleček bude opět zabírat  $\frac{4}{9}$  jeho objemu. Tedy další váleček má objem  $\frac{8}{27} \cdot \frac{4}{9}V_0$ . Dalším seřezáváním vrcholových kuželů, jejichž objem vždy klesá faktorem  $\frac{8}{27}$ , dostaneme válečky o objemech  $\left(\frac{8}{27}\right)^n \cdot \frac{4}{9}V_0$ . Nekonečné opakování tohoto procesu vyústí ve válečky, jejichž objemy tvoří geometrickou posloupnost s  $a_0 = \frac{4}{9}V_0$  a kvocientem  $\frac{8}{27}$ . Součtem řady je

$$V_{tot} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{9}V_0 \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^n = \frac{4}{9}V_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{8}{27}} = \frac{12}{19}V_0. \quad (3.77)$$

Odpad vzniklý ořezáváním kužele tedy tvoří  $\frac{7}{19}$  jeho objemu.

**Př. 93:** <sup>6</sup> Dvě rovné silnice se potkávají na křižovatce pod pravým úhlem. V jeden okamžik je jeden z automobilů 360 metrů od křižovatky a přibližuje se rovnoměrně rychlostí 20 m/s. Druhý z automobilů se přibližuje po kolmé silnici ze vzdálenosti 420 m rychlostí 15 m/s. Za jak dlouho budou oba automobily nejbližší sobě a na jakou vzdálenost?

**Řeš.:** Okamžitá vzdálenost automobilů je přeponou pravoúhlého trojúhelníka o stranách  $360 - 20t, 420 - 15t$ . Hledáme proto extrém funkce  $\sqrt{(360 - 20t)^2 + (420 - 15t)^2} = 25\sqrt{489,6 - 43,2t + t^2}$ . Položíme její derivaci rovnu nule a získáme  $t = 21,6$  s.

**Př. 94:** © Cyklista jedoucí po přímé silnici se chce dostat k tábořišti, které je umístěno na louce v kolmé vzdálenosti  $b = 60$  m od silnice. Podélná vzdálenost cyklisty k místu na silnici, které je nejbližší tábořišti, je  $a = 120$  m. Pokud se po silnici cyklista pohybuje rychlostí  $v_1 = 5 \frac{m}{s}$  a po louce rychlostí  $v_2 = 3 \frac{m}{s}$ , za jaký nejkratší čas může k tábořišti dorazit? V jakém místě má přitom sjet ze silnice na louku?

**Řeš.:** Situaci schematicky znázorníme obrázkem 3.14 a při daném označení bude doba dojezdu určena

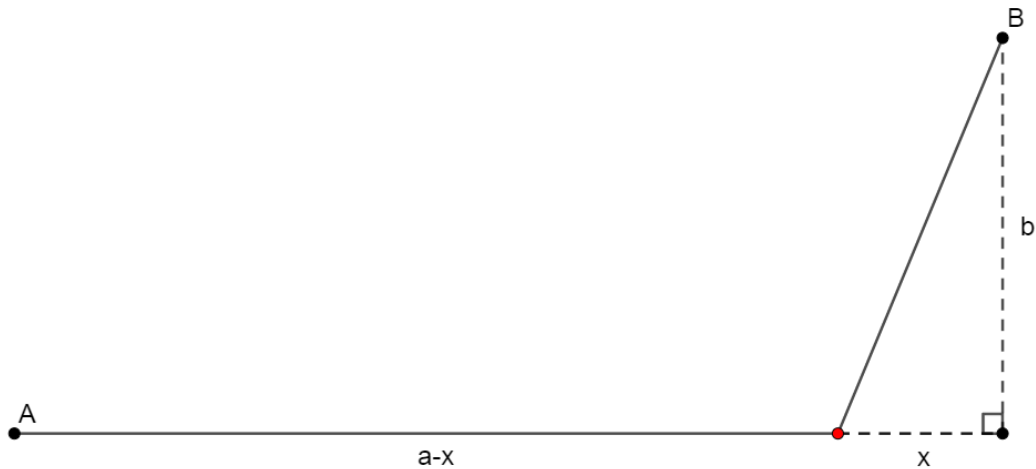
$$T = \frac{a - x}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{v_2}, \quad (3.78)$$

<sup>6</sup>Tento typový příklad je v učebnici [M29], ale v geometrické řeči. Není jednoduché najít hodnoty tak, aby příklad šel řešit snadno bez použití kalkulačky, vymysleli jsme toto zadání jako jednu z rozumných výjimek.

nejkratší dobu dojezdu hledáme derivací  $\frac{dT}{dx} \stackrel{!}{=} 0$ , což vyústí v

$$v_1 x = v_2 \sqrt{b^2 + x^2} \Rightarrow x = \frac{b v_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}, \quad (3.79)$$

přítom je vhodné okomentovat regulérnost úprav. Všimneme si např., že hledané místo sjezdu na louku nezávisí na podélné vzdálenosti cyklisty na silnici  $a$ , to je samozřejmě pouze v situaci  $a > x$ . Také by se příklad změnil, kdyby  $v_2 > v_1$ , kdy by podle provedené úpravy vyšlo pod odmocninou záporné číslo. V kontextu zadání je právě nalezený výsledek správný a dosazením číselných hodnot získáme  $x = 45 \text{ m}$  a  $T = 40 \text{ s}$ .



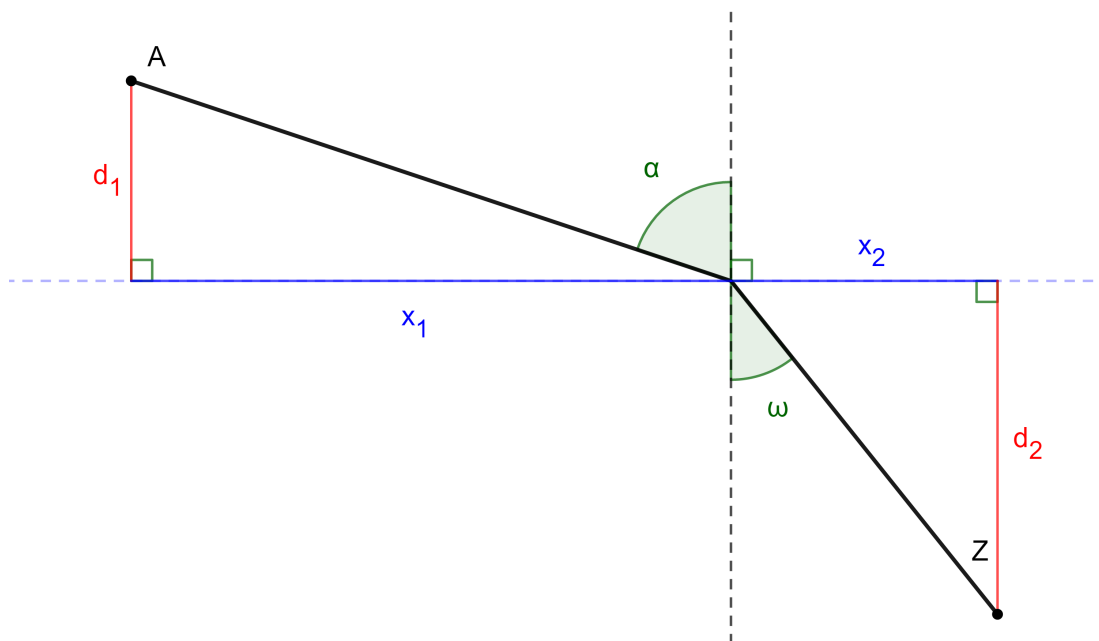
Obrázek 3.12: Optimalizace trasy cyklisty.

Podobné příklady lze upravit např. do kontextu stavby co nejlevnějších cest apod. Pokud ovšem chceme, aby zadání mělo přijatelné numerické hodnoty, jen obtížně lze nalézt realistické hodnoty.

Extremální úlohy mají i ten význam, že řada fyzikálních pravidel a vzorců vychází z extremalizace určité veličiny, mezi tyto typy vyšších zákonů patří např. Gaußův princip, který hovoří o minimalizaci tzv. vázanosti; Hertzův princip realizuje pohyb po křivkách s minimální křivostí (tzv. geodetikách); Maupertuisův princip minimalizuje tzv. zkrácenou akci, jeho důsledek je tzv. Jacobiho princip, který z Maupertuisova principu vylučuje čas a tím určuje tvar trajektorie pohybu nalezením extrémálního řešení. Důsledkem Jacobiho principu je Fermatův princip, který je integrální formou Hertzova principu, a o kterém se obvykle bavíme v optice jako o principu nejkratšího času. Ten v následujícím příkladě využijeme k odvození zjištěného zákona lomu světla, který žák pozná nejprve experimentálně.

Extremální situaci představují i tzv. integrály pohybu, veličiny  $\mathcal{I}$ , pro jejichž časový vývoj platí  $\frac{dT}{dt} = 0$ . Takovou veličinou často bývá energie či moment hybnosti a uvedené vlastnosti integrálů pohybu lze využít k řešení fyzikální situace bez nutnosti explicitního řešení parciálních diferenciálních rovnic.

**Př. 95:** Využijte Fermatův princip nejkratšího času k odvození Snellova zákona lomu světla.



Obrázek 3.13: Schéma k odvození Snellova zákona lomu.

**Řeš.:** Máme dvě optická prostředí, v nichž se světlo šíří rychlostmi  $v_1, v_2$ . V každém z prostředí zvolíme libovolný bod. Formulace principu nejkratšího času říká, že světelný paprsek spojující zvolené body bude taková lomená čára, že cesta touto trajektorií zabere fotonu nejméně času. Na obrázku 3.13 je vidět zákres takového rozhraní a pro něj nyní provedeme odvození. Fakt, že v homogenním prostředí se světlo šíří přímočaře lze brát za experimentální fundament, ale také se dá z Fermatova principu odvodit pomocí variačního počtu. Lomená čára při průchodu rozhraním je jednoznačně určena polohou průsečíku paprsku a rozhraní. Při označení z obrázku 3.13 je čas, za který projde světlo prvním resp. druhým prostředím určen  $t_{1,2} = \frac{\sqrt{x_{1,2}^2 + d_{1,2}^2}}{v_{1,2}}$ . Využitím  $x_1 + x_2 = l$  můžeme psát celkový čas potřebný k uražení trajektorie jako funkci jediné proměnné, kterou pro jednoduchoost označíme  $x_1 = x = l - x_2$ , takže  $t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + d_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(l-x)^2 + d_2^2}}{v_2}$ . Jelikož tento čas má být nejkratší možný, hledáme lokální extrém prostřednictvím derivace  $\frac{dt}{dx}$ .

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{v_1 \sqrt{x^2 + d_1^2}} - \frac{2(l-x)}{v_2 \sqrt{(l-x)^2 + d_2^2}} \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.80)$$

čímž jsme v podstatě hotovi. Pohledem na pravoúhlé trojúhelníky v náčrtku zjistíme, že právě nalezenou rovnost můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} = \frac{1}{v_2} \frac{2(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + d_2^2}} = \frac{\sin \omega}{v_2} \quad (3.81)$$

a tento vztah se s využitím definice indexu lomu  $n = \frac{c}{v}$  dá přepsat na známý tvar  $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \omega$ .

**Př. 96:** [V102] Pro dva rezistory o odporech  $R_1, R_2$  zapojené paralelně na zdroj s napětím  $U$  zjistěte, v jakém poměru se má proud do větví rozdělit, aby se na rezistorech rozptyloval minimální tepelný výkon.

**Řeš.:** Označme  $I$  celkový proud protékající obvodem, ten se rozdělí do dvou větví s proudy  $I_1 + I_2 = I$ , takže rezistorem s  $R_1$  poteče proud  $I_1$  a druhým rezistorem s  $R_2$  proud  $I - I_1$ . Celkový ztrátový výkon je  $P = P_1 + P_2 = I_1^2 R_1 + (I - I_1)^2 R_2$ . Proměnnou je zde proud  $I_1$ , který nese informaci o rozdělení proudu do větví. Minimální výkon nalezneme derivací:

$$\frac{dP}{dI_1} = 2I_1 R_1 - 2(I - I_1)R_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.82)$$

Poměr velikostí proudu ve větvích určíme

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{I - I \frac{R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (3.83)$$

Tento vztah můžeme zapsat do podoby  $I_1 R_1 = U = I_2 R_2$ , což říká, že napětí na obou rezistorech je stejné. Tento fakt propojuje Ohmův zákon a "úspornost" přírody ve formulaci minimálního vyzářeného tepelného výkonu.

### 3.5.3 Diferenciální rovnice a další využití derivací

V první kapitole jsme naznačili, že žáka bychom měli seznámit s diferenciálními rovnicemi, přitom není třeba je explicitně řešit. Základní možnosti pro seznámení jsou: trajektorie obecného zrychleného pohybu  $\ddot{x} = \frac{F}{m}$  a speciální případ lineární harmonický oscilátor  $\ddot{x} = -\frac{g}{l}x$ . Radioaktivní rozpad  $\dot{m} = -\lambda m$ . Tyto příklady jsme již rozebrali, dokonce jsme v příkladech 59, 60 použili trik, kdy jsme mezi různými situacemi s formálně shodnými diferenciálními rovnicemi přeložili známé výsledky do kontextu nového příkladu. Tento nový přístup je i přes svou jednoduchost pro současného žáka SŠ nejspíš náročný, ale v seminářích maturitních ročníků aplikovatelný, neboť představuje přeložení univerzálního matematického aparátu z jedné konkrétní situace do jiné.

V literatuře jsou kapitoly o aplikaci derivace zakončeny tzv. větami o střední hodnotě. Těmto větám jsme ovšem nedokázali najít praktickou aplikaci vyjma následující: „Pokud opilec dorazí z hospody domů, pak alespoň v jednom okamžiku šel správným směrem.“ Tyto věty mají význam pro rozvoj geometrické představivosti a jako nástroj v mnohých důkazech matematických vět, pro žáka na SŠ je jejich význam malý. Diferenciální počet ale lze použít např. k položení již známých partií na matematicky korektní základy. V dodatku D zavádíme prostřednictvím derivací, resp. Taylorova rozvoje goniometrické funkce. Konstrukci není třeba žákům do detailů předávat, stačí je seznámit s tím, že je  $DP$  silný nástroj umožňující i pokročilou teoretickou práci.



## 3.6 Integrál

### 3.6.1 Výstavba Riemannova integrálu

Konstrukce Riemannova integrálu je složitá proto, aby korektně a formálně postihla myšlenku nekonečného zjemňování v aproximaci funkce. K výstavbě integrálu vedou různé konstrukce. Např. Darbouxovy úvahy o infimech a supremech horních a dolních integrálních součtů. Náš přístup k výstavbě pro SŠ popsaný níže se snaží využít původní Riemannovy konstrukce dělení intervalu, graf funkce aproximujeme intuitivně uchopitelnou lomenou čarou. Přijatelného zjednodušení objemné teorie se dojde záměrným nerozebíráním patologických funkcí, s nimiž se žák na SŠ beztak nesetkává. Přesto lze žáka informovat, že takové schéma integrálu má své matematické limity. Z prostorových důvodů nepodkládáme naše pojetí detailně příklady a grafickými podklady. To necháváme na učiteli, který stejně látku musí přizpůsobit své třídě.

Naše výstavba čerpá především z Jarníkova pojetí a stručně, přesto hustě a bez větších přešlapů či restrikcí následuje původní konstrukci v riemannovském duchu. Opíráme se o vybudované prekoncepty aproximací a funkci nahrazujeme tzv. rektifikací. To je pojem, který se aktuálně v tomto kontextu nepoužívá, ale dobře pojmenovává prováděnou aproximaci spočívající v nahrazení grafu funkce lomenou čarou – *rēctificāre* = narovnávat. Opíráme se i o existující pojem rektifikovatelné funkce, který do našeho konceptu dobře zapadá. Námi zavedená rektifikace by tedy navíc mohla nalézt širší uplatnění v další výuce. Obsah plochy pod křivkou aproximujeme plochou pod její rektifikací, tj. soustavou pravoúhlých lichoběžníků. Pokud při zpřesňování rektifikace výsledný obsah nezáleží na přesně zvolené rektifikaci, pak se dostáváme na půdu Riemannovy konstrukce prostřednictvím věty 67 v [V82]. Na její geometricky uchopitelné interpretaci a při tom matematické korektnosti tedy vystavujeme určitý integrál způsobem přijatelným pro žáka SŠ. Běžné učebnice využívají přímo riemannovské úvahy o horních a dolních součtech. Aproximace stupňovitými funkcemi ale nechávají neformulované, v intuitivní rovině, přitom jsou podle nás náročnější, než náš koncept rektifikace. My se navíc vyhneme srovnávání horních a dolních integrálních součtů v nerovnostech, s nimiž žáci nemají mnoho zkušeností.

Zkoumejme funkci  $f \geq 0$  a pokusme se určit obsah plochy, kterou funkce ohraničuje v intervalu  $\langle a; b \rangle$ , tj. obsah tzv. křivočarého lichoběžníku<sup>7</sup>, útvaru vymezeném grafem funkce  $f$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a, x = b$ . Tento obsah budeme nadále značit  $S$ . Rozdělíme-li interval na drobné úseky a v nich nahradíme funkci lineární funkcí, přibližně určíme obsah křivočarého lichoběžníku jako součet obsahu mnoha (pravoúhlých) lichoběžníků. Otázkou zůstává, jestli dělením intervalu na menší a menší díly dostaneme přesnější a přesnější odhad obsahu  $S$ ?

**Definice 8.** *Dělením intervalu  $\langle a; b \rangle$  rozumíme libovolnou uspořádanou množinu  $X$  bodů  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Intervaly  $\langle x_i; x_{i+1} \rangle$  nazýváme podintervaly či subintervaly. Normou takového rozdělení rozumíme "délku nejdelšího intervalu",  $|X| = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{x_{i+1} - x_i\}$ . Zjemněním  $Y$  dělení intervalu  $X$  rozumíme takové dělení intervalu  $Y$ , že  $a = y_0 < \dots < y_m = b$  a přitom  $X \subset Y$ . Je-li  $X \neq Y$ , hovoříme o vlastním zjemnění.*

<sup>7</sup>Tento pojem je užíván v [V81, V85] i další běžné starší literatuře. Domníváme se, že intuitivně pojmenovává uvažovaný obrazec. Pojem by se tedy mohl do učebnic znovu vrátit.

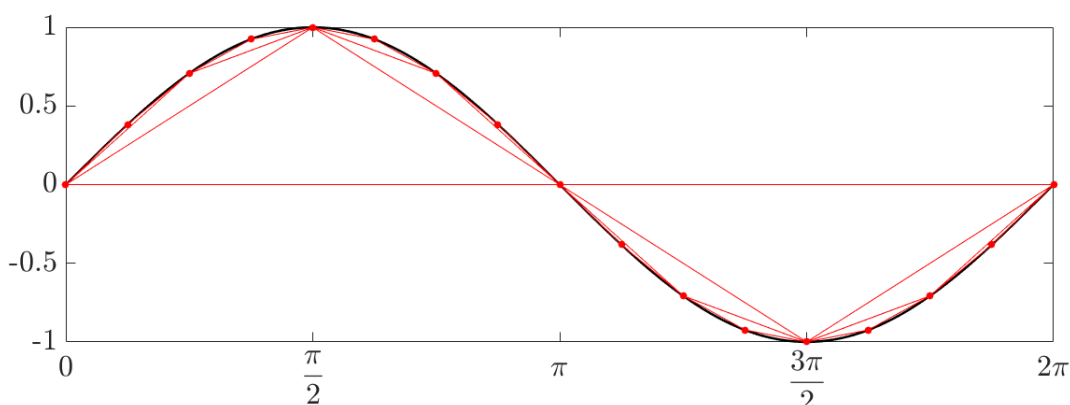
*Poznámka.* Jemnější rozdělení tedy může přidat další dělicí body a tím rozdělit některé podintervaly. Předchozí dělicí body jsou zachovány. Jinými slovy rostoucí posloupnost dělicích bodů  $X$  je posloupností vybranou z posloupnosti dělicích bodů  $Y$ . V důsledku platí  $|Y| \leq |X|$ . Pozor, ani pro vlastní zjemnění nemusí platit  $|Y| < |X|$ !

**Definice 9.** Posloupnost rozdělení intervalu  $(X_n)_{n=1}^{\infty}$  nazveme normální, pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| = 0$ .

**Definice 10.** Rektifikací funkce  $f$  při rozdělení  $X = (a = x_0, x_1, x_2, \dots, b = x_n)$  na intervalu  $\langle a; b \rangle$  rozumíme po částech lineární funkci definovanou na každém z podintervalů  $\langle x_i; x_{i+1} \rangle$  následovně<sup>8</sup>:

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \quad (3.84)$$

*Poznámka.* Graf rektifikace funkce je lomená čára tvořená úsečkami, které spojují body  $[x_i; f(x_i)]$  dané funkčními hodnotami na bodech dělení intervalu.



Obrázek 3.14: Různě jemné rektifikace (červeně) sinusoidy (černě) při ekvidistantních děleních intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  s normami  $\frac{2\pi}{2^n}$ ,  $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ .

**Definice 11.** Středním integrálním součtem funkce  $f$  při rozdělení  $X = (a = x_0, x_1, x_2, \dots, b = x_n)$  rozumíme číslo

$$\mathcal{S}_f(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i) \quad (3.85)$$

*Poznámka.* Střední integrální součet je obsahem plochy pod grafem rektifikace  $f$ , tj. je definován jako součet obsahů jednotlivých pravoúhlých lichoběžníků, které tuto plochu tvoří.

**Definice 12** (Cauchyův-Riemannův integrál). Buď funkce  $f$  omezená na intervalu  $\langle a; b \rangle$ . Pokud pro každou normální posloupnost  $(X_n)_{n=1}^{\infty}$  rozdělení intervalu  $\langle a; b \rangle$  existuje konečná limita středních integrálních součtů  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_f(X_n)$  a hodnota

<sup>8</sup>V kontextu diferencí bychom mohli zavést značení např.:  $\Delta f = \frac{\Delta f_i}{\Delta x_i} \Delta x$ .

této limity nezávisí na volbě posloupností  $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ , pak tuto společnou limitu nazýváme určitým integrálem funkce  $f$  v mezích  $a, b$  a značíme  $\int_a^b f(x)dx$ , případně  $\int_a^b f$ . Pokud má funkce určitý integrál na daném intervalu, říkáme že je na něm integrovatelná.

*Poznámka.* Definice určitého integrálu pro nezápornou funkci odpovídá záměru určit obsah plochy pod křivkou. Funkce je rektifikována, její graf je tedy nahrazen lomenou čarou. Obsah křivočarého lichoběžníka je tedy nahrazen obsahem mnoha pravoúhlých lichoběžníků. Pokud dělíme interval jemněji a jemněji tak, že výška jednotlivých lichoběžníků  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  jde limitně k nule, střední integrální součet lépe a lépe aproximuje obsah křivočarého lichoběžníka. Pokud výsledný součet v limitním přechodu nezávisí na konkrétních aproximacích, pak společná limita skutečně udává obsah křivočarého lichoběžníka.

*Poznámka.* Pokud budeme uvažovat určitý integrál záporné funkce, vyjde numericky záporné číslo. Určitý integrál tedy rozlišuje, zda je graf funkce nad či pod osou  $x$ . Obsah křivočarého lichoběžníka pod osou  $x$  je potom roven absolutní hodnotě určitého integrálu. Stejně tak je potřeba brát  $|f|$  v případě, že funkce nabývá kladných i záporných hodnot.

*Poznámka.* Skutečně existují funkce, u nichž střední integrální součty pro různé normální posloupnosti rozdělení nemají jedinou limitu. Nemusí dokonce pro některé normální posloupnosti dělení intervalu ani existovat. Příkladem "patologické" funkce je tzv. funkce Dirichletova. Jejím definičním oborem jsou reálná čísla a je definovaná:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (3.86)$$

Pokud volíme dělení intervalu s iracionálními dělicími body, je rektifikací nulová funkce a integrální součet je nulový, naopak pro dělení s racionálními body je rektifikací konstantní funkce s hodnotou 1 a integrální součet na intervalu  $\langle a; b \rangle$  je roven číslu  $b - a$ . Klíčovým faktorem pro tuto "patologii" funkce je to, že má nekonečně mnoho bodů nespojitosti. Naopak funkce spojitá se z hlediska integrovatelnosti chová mravně, což shrnuje následující věta.

**Věta 7.** *Funkce definovaná na intervalu  $(a; b)$ , která má konečně mnoho bodů nespojitosti, má na tomto intervalu určitý integrál  $\int_a^b f(x)dx$ .*

Určitý integrál je dán funkcí a mezemi. Proto představíme následující věty, které mají intuitivní charakter:

**Věta 8.** *Pro integrovatelnou funkci  $f$  platí  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ .*

**Věta 9.** *Nechť má funkce  $f$  určité integrály  $\int_a^b f(x)dx$  a  $\int_b^c f(x)dx$  pro meze  $a < b < c$ . Potom má  $f$  i určitý integrál v mezích od  $a$  do  $c$  a platí  $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ .*

Otázkou zůstává, jak a zda vůbec spolu souvisí určitý integrál a derivace. Pro nalezení odpovědi představíme žákovi určitý integrál následujícím způsobem. Pro integrovatelnou funkci  $f$  na intervalu  $\langle a; b \rangle$  definujeme funkci  $S(x) := \int_a^x f(t)dt$ , je to tedy integrál jako funkce horní meze. Taková funkce udává obsah křivočarého lichoběžníka vytčeného od kraje intervalu jen do určité pozice  $x$ . Porovnejme, jak se změní obsah, pokud se posuneme v mezi o malý úsek  $\Delta x$ . Rozdíl je udán v aproximaci obdélníkem s obsahem  $S(x + \Delta x) \doteq S(x) + f(x) \cdot \Delta x$ , při limitním přechodu  $\Delta x \rightarrow 0$  přesně. Jinými slovy

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x), \quad (3.87)$$

funkce  $f(x)$  je tedy derivací  $S(x)$ , říkáme, že  $S(x)$  je primitivní funkcí k  $f(x)$ <sup>9</sup>.

Definice funkce  $S$  je ovšem opřená o bod  $a$  a od něj se nyní oprostíme, zejména také z důvodu, že je třeba studovat funkce definované na celém  $\mathbb{R}$ , kde není žádný význačný krajní bod. Označíme-li  $S_a(x) := \int_a^x f(t)dt$ ,  $S_b(x) := \int_b^x f(t)dt$  pro nějaké

hodnoty  $a < b$ , je potom podle přechodí věty  $S = S_b(x) - S_a(x) = \int_a^b f(t)dt$ , což je číselná konstanta. Dolní mez integrálu tedy odpovídá posunu primitivní funkce o konstantu<sup>10</sup>. Obsah plochy pod křivkou  $f$  mezi body  $a < b$  můžeme s využitím libovolně zvolené funkce  $S_c$  psát  $S = S_c(b) - S_c(a)$  a tato hodnota je nezávislá na volbě dolní meze  $c$ . Je tedy nepodstatné, kterou konkrétní primitivní funkci z neurčitěho integrálu vybereme, a to nás opravňuje k zapsání výsledku známého jako Newtonova formule.

**Věta 10.** *Nechť existuje  $\int_a^b f(x)dx$  pro  $a < b$  a nechť  $F$  je primitivní funkcí k  $f$ , navíc  $F$  je spojitá na  $\langle a; b \rangle$ . Potom platí*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (3.88)$$

Výpočet integrálů z Riemannovy definice je téměř nemožný, a to i pro základní běžné funkce. Uznejme, že ani počítačově nelze projít všechna možná dělení intervalu a počítat rektifikace. Vztah k neurčitěmu integrálu nám ovšem situaci zesnadhňuje, protože primitivní funkce nalezneme v tabulce derivací C.3. Připomeňme na tomto místě důležitý poznatek: derivace a integrace jsou dva procesy k sobě opačné. To ovšem neříká, že oba procesy budou stejně snadné. Praktické pořekadlo, které vystihuje, jaký je mezi derivací a integrací rozdíl, zní: "Derivovat je jako mačkat pastu z tuby. A integrovat, to je jako ji tam cpát nazpátek."<sup>11</sup>

Základní nástroje pro práci s integrály, ať už určitými či neurčitými, lze odvodit pomocí pravidel pro aritmetiku derivací. Ta jsou zapsána v každé literatuře a není cílem této práce se jim detailně věnovat.

<sup>9</sup>Tímto a až teď zavádíme neurčitý integrál. To bychom provedli klasicky, z prostorových důvodů zde definici neuvádíme.

<sup>10</sup>Všechny takto definované funkce náleží neurčitěmu integrálu.

<sup>11</sup>Na tento názor prý profesorka Edita Pelantová narazila v rámci výuky analýzy na FJFI, autorem výstižného přirovnání je tedy nejspíš neznámý zoufalý prvák. Profesorce Pelantové se ovšem přisuzuje autorství přirovnání, že derivování a integrování je jako v telefonním seznamu hledat telefonní číslo podle jména a naopak jméno podle čísla.

### 3.6.2 Princip integrace

Riemannovská výstavba integrálu je proces, který používáme pro studium složitých objektů. Jde o myšlenkou související s diferenciály a derivacemi, nicméně důsledky, do kterých vede, jsou tak široké, že si zaslouží své vlastní knihy. Diferenciál odpovídal na otázku, jak se mění závislá veličina se změnou jiné. Integrál umožňuje korunovat tuto myšlenku praktickou aplikací, kterou shrnujeme následovně: Složitý objekt rozdělíme na nekonečně mnoho nekonečně malých objektů. Díky diferenciálu a dalším (třeba fyzikálním) vztahům o těchto nekonečně malých objektech můžeme říci mnoho (co o celku neumíme), tyto dílčí informace potom poskládáme pro celý složitý objekt.

Příkladem budiž obsahy ploch. Obdélník je jednoduchý útvar, jehož obsah umíme dobře spočítat. Můžeme tuto znalost použít k určení obsahu kruhu? Ano, a myšlenka není těžká - správným způsobem matematicky "nastříháme" kruh na obdélníky, jejich obsahy spočítáme pro každý zvlášť a poté všechny obsahy posčítáme v obsah celého kruhu. Ovšem jsme zatím neprozradili, jak se naučit umění správně matematicky "stříhat". Nemusí samozřejmě zůstat jen u obsahu plochy, ale můžeme postoupit k objemům a také různým fyzikálním veličinám. Newtonův gravitační zákon určuje sílu, kterou se přitahují dva hmotné body. Jakou silou by ale hmotný bod přitahovala koule? Nebo krychle? Či válec? Takové složité těleso si představíme jako nekonečně mnoho hmotných bodů, elementů, pro které Newtonův zákon platí. Každý z elementů vyvolává elementární vektor síly, a pokud všechny tyto příspěvky sečteme za všechny elementy tělesa, dostaneme celkovou výslednici síly, třeba od celé planety.

Nejspíše první člověk, který se formálně zaobíral touto jednoduchou myšlenkou, byl Bonaventura Francesco Cavalieri, jehož princip se v [M37] formuluje následovně:

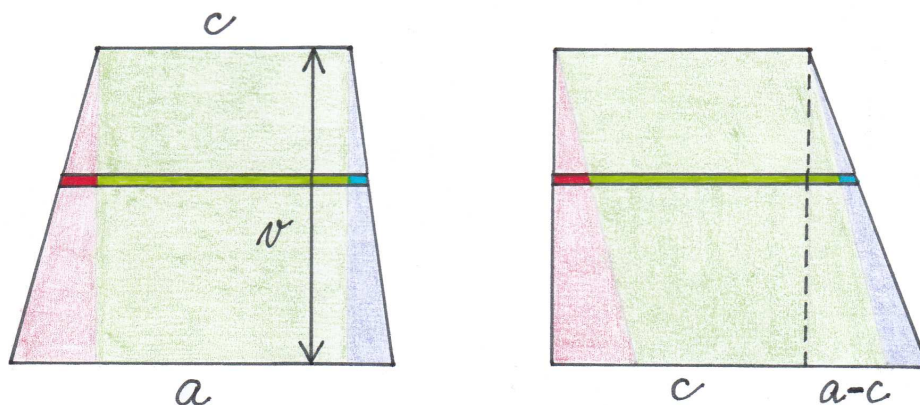
**Věta 11.** *Jestliže pro dvě tělesa existuje taková rovina, že každá rovina s ní rovnoběžná protíná obě tělesa v rovinných útvarech se stejnými obsahy, mají tělesa stejný objem.*

Podstatná myšlenka ovšem je ta, že celek se rozdělí na části. Pokud jsou dvě tělesa lokálně stejná ve všech těchto částech, mají stejnou globální míru zkoumané vlastnosti. Mimochodem, Cavalieriho princip v podstatě použil už Eukleidés, když ve svých Základech ukázal, že kvádr lze rozdělit na tři objemově shodné jehlany, a tím spočítal objem jehlanu.

Nyní uvedeme základní příklady využití Cavalieriho principu pro výpočty obsahů a obvodů základních těles. Výchozím útvarem je obdélník, jehož obsah definujeme jako součin délek jeho stran  $S = ab$ . Užitím Cavalieriho principu lze libovolný rovnoběžník převést na obdélník o stranách  $a, v_a$ , kde  $v_a$  je výška rovnoběžníka nad stranou  $a$ , obsah rovnoběžníka je tedy  $S = av_a$ . Libovolný trojúhelník lze doplnit identickým trojúhelníkem na rovnoběžník, proto je obsah trojúhelníka roven polovině obsahu rovnoběžníka  $S = \frac{av_a}{2}$ . Libovolný útvar ohraničený konečným počtem úseček lze rozložit na sjednocení disjunkčních trojúhelníků, proto umíme obsah takového útvaru sečíst. Jednoduchým příkladem užití Cavalieriho principu je obecný lichoběžník, který lze transformovat na pravoúhlý lichoběžník, viz obrázek 3.15. Ten chápeme jako sjednocení obdélníka o stranách

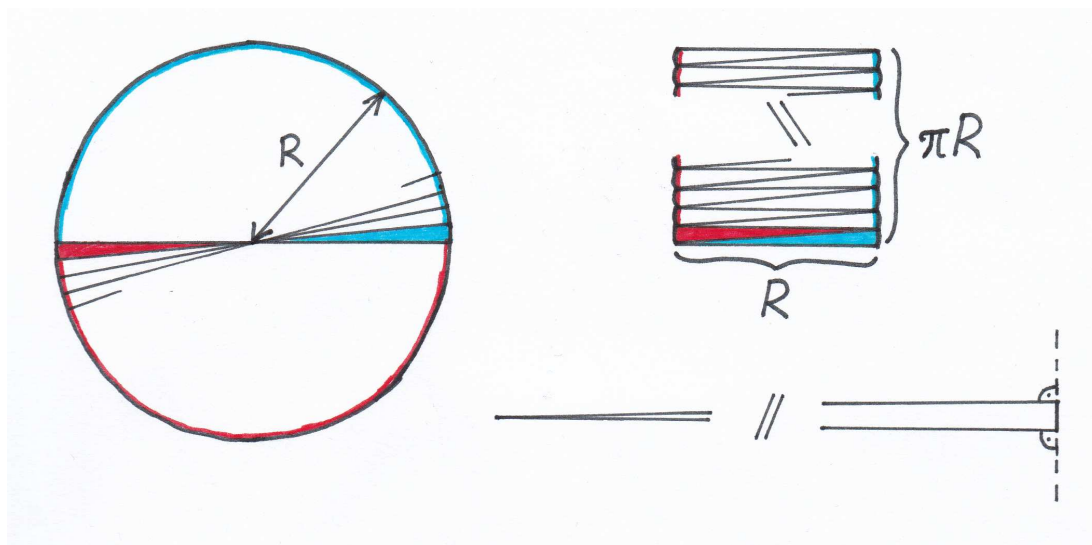
$c, v$  a pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami  $a - c, v$ . Proto

$$S = cv + \frac{(a - c)v}{2} = \frac{1}{2}(2cv + av - cv) = v \frac{a + c}{2} \quad (3.89)$$



Obrázek 3.15: Využití Cavalieriho principu k výpočtu obsahu lichoběžníka.

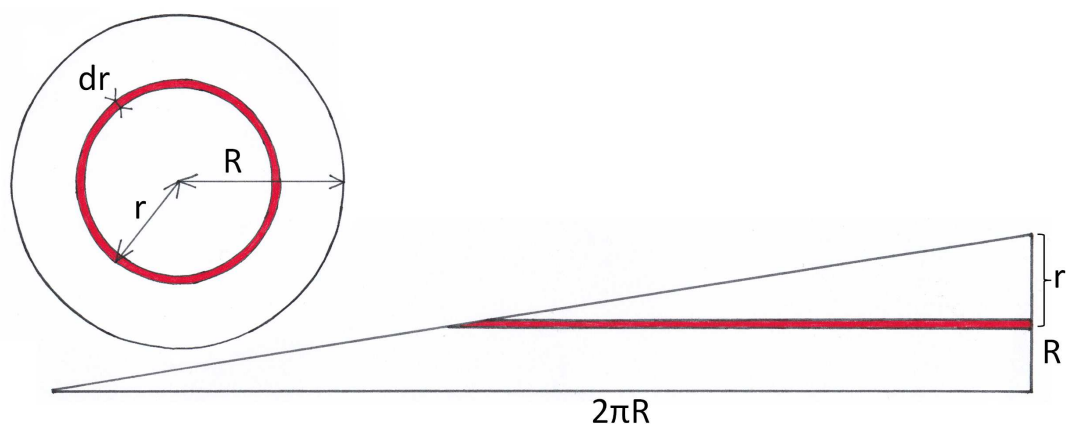
Problematické jsou útvary ohraničené nekonečným počtem úseček či křivkami. U nich rozebereme kruh, kde situaci dokreslují obrázky 3.17, 3.16.



Obrázek 3.16: Rozdělení kruhu ve výseče a jejich přeskládání v obdélník.

Cavalieriho myšlenku aplikujeme na rozdělení kruhu na velmi malé kruhové výseče o úhlové míře  $\Delta\varphi$ . Pro zanedbatelně malou hodnotu  $\Delta\varphi$  lze výseč aproximovat rovnoramenným trojúhelníkem. V limitním přiblížení je úhel při základně pravý<sup>12</sup> a délka jedné odvěsny je v pravoúhlém trojúhelníku s druhou odvěsnou  $R$  rovna  $R \operatorname{tg} \Delta\varphi$ ; také je v pravoúhlém trojúhelníku přepona tvořena poloměrem kruhu, čili délku odvěsny je možné určit vztahem  $R \sin \Delta\varphi$ . Obě tyto aproximace splývají v limitě  $\Delta\varphi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \Delta\varphi \doteq \operatorname{tg} \Delta\varphi \doteq \Delta\varphi$ . Nahrazení goniometrické

<sup>12</sup>Přesněji oba dva úhly při základně jsou pravé, ale tato představa je velmi matoucí. Můžeme si ale pomoci tím, že úhel při protějším vrcholu je nulový a stále se zachovává součet úhlů, i v tomto rovnoramenném trojúhelníku musí být  $\pi$ .



Obrázek 3.17: Rozdělení kruhu do mezikruží a jejich přeskládání v trojúhelník.

funkce argumentem okomentujeme blíže v sekci 3.8. Docházíme k tomu, že obsah elementární výseče je roven obsahu aproximačního pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami  $\frac{R \cdot R \Delta\varphi}{2}$ . Tato představa je klíčová pro mnoho fyzikálních jevů, např. plošnou rychlost planet. Pokračovat již můžeme Cavalieriho principem, když dvě protilehlé výseče složíme v elementární obdélník a tyto elementární obdélníky na sebe složíme podél stran délky  $R$ . Druhá strana výsledného trojúhelníka je tvořena elementy oblouků, jejich souhrnná délka musí být obvodem půlkruhu  $\pi R$ . Převodli jsme kruh pomocí Cavalieriho principu na obdélník, jehož obsah je v limitní aproximaci roven  $S = R \cdot \pi R = \pi R^2$ . Tohoto zápisu dosáhneme i neformálním součtem jednotlivých elementárních výsečí:  $S = \sum \frac{R \cdot R \Delta\varphi}{2} = \frac{R^2}{2} \sum \Delta\varphi = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi$ . To protože se sčítají úhlové příspěvky po celém kruhu, tedy na plný úhel  $2\pi$ . Celý proces je možné názorně demonstrovat i mladším žákům, když kruh z papíru nastříhají a přeskládají podle návodu na 3.16.

Analogicky můžeme určit objem válce, kdy pouze namísto kruhu dělíme válec a výseče válce skládáme v kvádry. Snazší na prostorovou představivost je ovšem představa válce rozděleného do soustavy kruhových destiček infinitesimální výšky, kruhovou desku lze výše uvedeným procesem přeměnit na obdélníkovou, pak nejde o nic jiného než o objem elementárního kvádru  $dV = \pi R^2 dv$ . Komplikovanější je případ kužele. Jeho elementární válce lze také Cavalieriho principem v limitní aproximaci převést na kvádry o stranách  $r, \pi r, dv$ , kde je ovšem  $r$  proměnné podél výškové polohy v kuželu  $x$ ,  $r(x) = \frac{x}{v}R$ . To znamená, že strany obdélníka rostou lineárně s výškou. Shrnujeme, že kužel lze převést na jehlan o obdélníkové základně s obsahem  $\pi r^2$  a výškou  $v$ . Tři objemově identické kopie takového jehlanu lze složit v kvádr o rozměrech  $r, \pi r, v$ , jak dokázal již Eukleidés. Závěrem je, že objem kužele je roven  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 v$ .

Považujeme za vhodné budovat geometrickou představivost Cavalieriho principem ve vyšších dimenzích např. úvahami o složení kužele z elementárních kuželových pláštů či z elementárních válců s infinitesimální výškou a proměnným poloměrem. Myšlenka válce jako soustavy válcových ploch či koule jako soustavy sfér je důležitá pro mnohé fyzikální aplikace od rotačních pohybů po kondenzátory. Další příklady aplikace Cavalieriho jevu jsme uvedli ve výpočtu momentu setrvačnosti disku v př. 72, kdy jsme skládání kruhu z infinitesimálních mezikruží jako na obr. 3.17 využili k výpočtu složitější funkce. S jednoduššími příklady bychom mohli začít takto:

**Př. 97:** Určete energii potřebnou k vystavění Cheopsovy pyramidy. Její základna měla hranu asi 230 metrů a její výška byla zhruba 147 m. Počítejte, že celý jehlan je vyplněn vápencem o hustotě  $2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

**Řeš.:** Pro účely výpočtu je jednodušší počítat od špice a zkoumat jedno tenké "patro" pyramidy, které je vzdáleno v hloubce  $z$  od vrcholu. Průřez pyramidy v dané úrovni je čtvercový s hranou danou lineární funkcí  $a(z) = \frac{A}{v}z$ , kde  $A$  je základna jehlanu a  $v$  výška, viz náčrtek. Jakou energii vyžadovalo vyzdvihnout materiál na stavbu tohoto patra, tedy o výšce  $\Delta h = v - z$  od země? Potenciální energie tělesa v této výšce je dána vztahem

$$\Delta E_p = mg\Delta h$$

Hmotnost daného patra je dána součinem jeho hustoty a objemu.

Musíme tedy odhadnout objem, což učiníme tak, že dané patro nepatrné výšky  $dz$  budeme brát za kvádr s touto výškou a základnou o ploše  $a^2(z)$ . Element objemu pyramidy je tudíž  $dV = \frac{A^2}{v^2}z^2 dz$ , jeho hmotnost  $dm = \rho dV$ , a přírůstek energie potřebný k vyzdvžení patra je proto

$$dE_p = \rho g \frac{A^2}{v^2} z^2 (v - z) dz \quad (3.90)$$

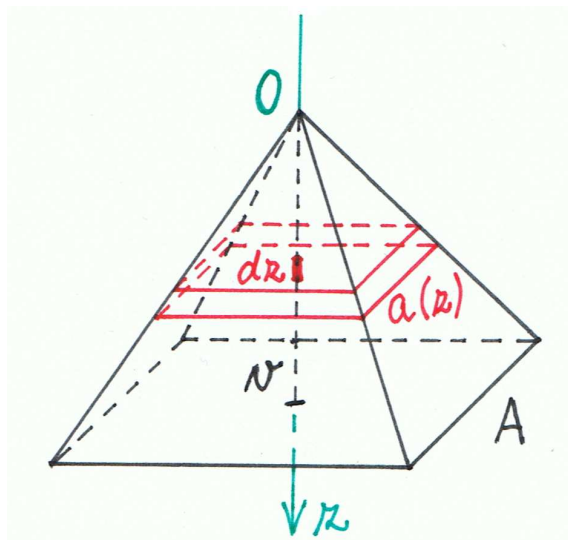
Pyramidu vystavíme přistavováním pater ve výškách  $z \in \langle 0; v \rangle$ , tedy vysčítáme celkový přírůstek potenciální energie, který je roven práci potřebné na výstavbu

$$E_p = \rho g \frac{A^2}{v^2} \int_0^v z^2 (v - z) dz = \rho g \frac{A^2}{v^2} \left( V \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^v - \left[ \frac{z^4}{4} \right]_0^v \right) = \frac{1}{12} \rho g A^2 v^2. \quad (3.91)$$

Numerickým dosazením získáváme  $E_p \doteq 2,52 \text{ T J}$  energie. Pro srovnání, jaderná elektrárna Temelín má nominální výkon 2100 MW, potřebnou energii by tedy vyrobila za 20 minut. Samozřejmě, vypočtená potenciální energie není zdaleka dostatečná, neuvažovali jsme překonávání tření atp. Přesto tento výpočet podporuje to, že se starověká stavba mohla obejít bez pomoci magie či mimozemských návštěvníků.

**Př. 98:** Insp. [V102]. Určete odpor krychle o hraně  $a$  vyrobené z materiálu s rezistivitou  $\rho$ , pokud elektrody přiložíme na protější stěny.

**Řeš.:** S krychlí spojíme souřadnou soustavu tak, že jeden z vrcholů splývá s počátkem a příslušné strany s osami, přitom osa  $x$  míří ve směru procházejícího proudu. Krychli si představujeme jako soustavu nekonečně mnoha nekonečně



Obrázek 3.18: Každá část jednoho patra pyramidy má stejnou potenciální energii.



malých rezistorů - kvádříků o hranách  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ . Užijeme vztah  $R = \rho \frac{l}{S}$  pro výpočet odporu vodiče délky  $l$  a průřezu  $S$ , abychom určili, že odpor takového elementárního rezistoru je

$$\Delta R = \rho \frac{\Delta x}{\Delta y \Delta z} \quad (3.92)$$

Tyto elementární odpory jsou sériově (podél osy  $x$ ) zapojeny do infinitesimálního kvádrů, "drátu". Užitím pravidla pro sčítání sériově zapojených odporů  $R = \sum_i R_i$  přes příspěvky  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ :

$$\Delta R_x = \rho \frac{\Delta x_1}{\Delta y \Delta z} + \rho \frac{\Delta x_2}{\Delta y \Delta z} + \rho \frac{\Delta x_3}{\Delta y \Delta z} + \dots = \rho \frac{\sum_i \Delta x_i}{\Delta y \Delta z} = \rho \frac{a}{\Delta y \Delta z} \quad (3.93)$$

Takto vytvořené elementární vodiče jsou zapojeny paralelně (podél osy  $y$ ) do desky o zanedbatelné tloušťce  $dz$ . Užitím pravidla pro sčítání paralelně zapojených odporů  $R^{-1} = \sum_i R_i^{-1}$  sčítáme přes příspěvky  $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots$ :

$$\frac{1}{\Delta R_{xy}} = \frac{\Delta y_1 \Delta z}{\rho a} + \frac{\Delta y_2 \Delta z}{\rho a} + \frac{\Delta y_3 \Delta z}{\rho a} + \dots = \frac{\Delta z}{\rho a} \sum_i \Delta y_i = \frac{\Delta z a}{\rho a}$$

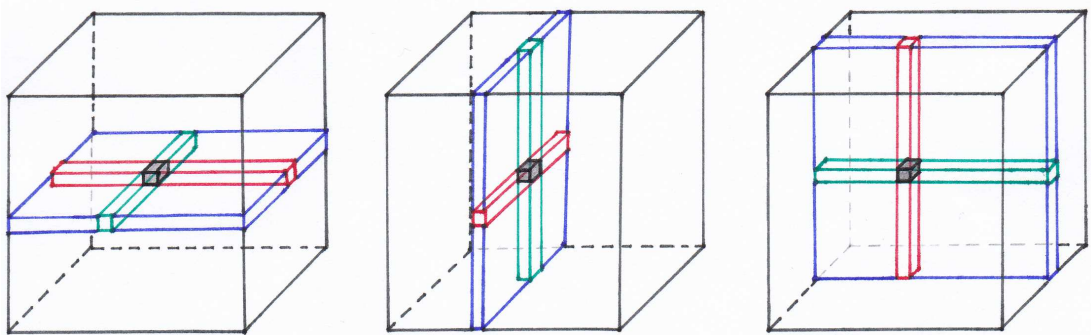
$$\Delta R_{xy} = \frac{\rho}{\Delta z} \quad (3.94)$$

Tyto elementární desky jsou zapojeny opět paralelně (podél osy  $z$ ), proto píšeme

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta z_1}{\rho} + \frac{\Delta z_2}{\rho} + \frac{\Delta z_3}{\rho} + \dots = \frac{a}{\rho} \Rightarrow R = \frac{\rho}{a}. \quad (3.95)$$

Tento závěr potvrzuje i rozměrová analýza – veličina  $R$  má jednotku  $\Omega$ , veličina  $\rho$  jednotku  $\Omega m$ , proto se musí délkový rozměr uplatnit jedině způsobem  $R \sim \frac{\rho}{a}$ , rozměrová analýza ovšem nemohla poskytnout konstantu úměrnosti, do které promlouvá geometrie útvaru. Náš výpočet tedy zjistil, že konstanta úměrnosti pro krychli je 1.

K výpočtu lze zvolit i jiný přístup, kdy z bodů budujeme úsečky, z úseček plochy a z ploch objem postupně podél jiných os, viz obrázek 3.19.



Obrázek 3.19: Integrace krychle z bodových elementů v pořadí podle různých os.

Tento příklad lze použít ve výuce prostorové představivosti, výuce řad či výuce elektrického proudu ve třetím ročníku SŠ. Podle kontextu lze patřičně upravovat notaci a práci se sumami, bez kterých se můžeme obejít. Díky tomu, že veškeré závislosti jsou lineární, není třeba nutně provádět limitní přechod  $\Delta x \rightarrow dx$  a zapisovat stylem  $\frac{1}{R} = \int \frac{1}{dR}$ . Pokročilou formou příkladu by byly příklady na odpor vodičů s proměnným průřezem  $S(x)$ . Ty už vyžadují znalost integrálu a mohou dokonce sloužit jako motivace pro zavedení zobecněného integrálu.

**Př. 99:** © Určete odpor krychle o hraně  $a$  vyrobené z materiálu s rezistivitou  $\rho$ , pokud elektrody přiložíme na protější hrany.

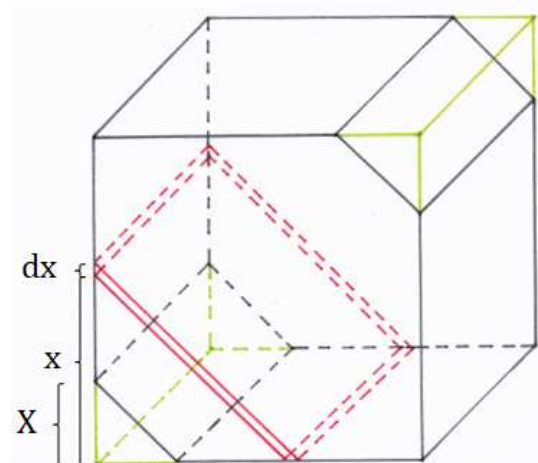
**Řeš.:** Oproti předchozímu příkladu je potřeba krychli "nakrájet" jinak, aby dělení respektovalo průchod proudu. Krychle je tvořena sériovým zapojením dvou identických čtyřstěnů, jež rozdělíme do soustavy obdélníkových ploch o hranách  $a, \sqrt{2}x$  s infinitesimální výškou  $dx$ . Odpor takové desky v poloze  $x$  je  $dR(x) = \rho \frac{dx}{\sqrt{2}ax}$ , přičemž tyto desky jsou zapojeny sériově, proto integrujeme

$$R = \int_0^a \frac{\rho}{\sqrt{2}ax} dx = \frac{\rho}{\sqrt{2}a} [\ln x]_0^a = ? \quad (3.96)$$

Tento integrál bychom mohli správně diskutovat až při zavedení zobecněného integrálu, nicméně fyzikální podstata umožňuje obejít problém pomocí intuice: Průřez "vodiče" se zmenšuje, až přímo u hrany klesá k nule, tím ovšem odpor takové vrstvy roste k nekonečnu. To odpovídá formálnímu dosazení do Newtonovy formule  $R = \frac{\rho}{\sqrt{2}a}(a - (-\infty)) = \infty$ . Abychom mohli příklad dořešit bez těchto komplikací, stačí z krychle kolem hran odříznout libovolně malé části, viz obrázek 3.20, čímž se z hran stanou plochy a integrál přejde v:

$$R = \int_X^a \frac{\rho}{\sqrt{2}ax} dx = \frac{\rho}{\sqrt{2}a} [\ln x]_X^a = \frac{\rho}{\sqrt{2}a} \ln \frac{a}{X} \quad (3.97)$$

Speciálními volbami  $X$  můžeme dostat různé výsledky, všechny tvaru  $R = \frac{\rho}{a}\xi$ , kde  $\xi$  je geometrický faktor postihující přesný tvar krychle s odseknutými hranami. Např. volbou  $X = \frac{a}{2}$  dostaneme  $\xi = \sqrt{2} \ln 2 \doteq 0,98$ . Nezapomeneme totiž na to, že integrací  $x \in \langle X; a \rangle$  jsme získali odpor pouze poloviny útvaru.



Obrázek 3.20: Krychle s odříznutými hranami pro výpočet odporu.

**Př. 100:** © Původně válcový drát byl tažen, takže nyní má délku  $l$  a poloměr jeho průřezu roste lineárně od  $r_1$  do  $r_2$ . Určete odpor drátu, je-li zhotoven z materiálu s rezistivitou  $\rho$ .

**Řeš.:** Průřez vodiče má podél jeho délky  $x$  tvar  $S(x) = \pi(r_1 + \frac{x}{l}(r_2 - r_1))^2$ . Infinitesimální element odporu tedy má

$$dR = \rho \frac{dx}{S(x)} \Rightarrow R = \int_0^l \frac{\rho dx}{\pi(r_1 + \frac{x}{l}(r_2 - r_1))^2}, \quad (3.98)$$

kde využijeme substituci  $s = r_1 + \frac{x}{l}(r_2 - r_1)$ , pročež

$$R = \frac{\rho}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{l}{r_2 - r_1} \frac{ds}{s^2} = \frac{\rho l}{\pi(r_2 - r_1)} \left[ \frac{-1}{s} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{\rho l}{\pi(r_2 - r_1)} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$r = \frac{\rho l}{\pi r_1 r_2} \quad (3.99)$$

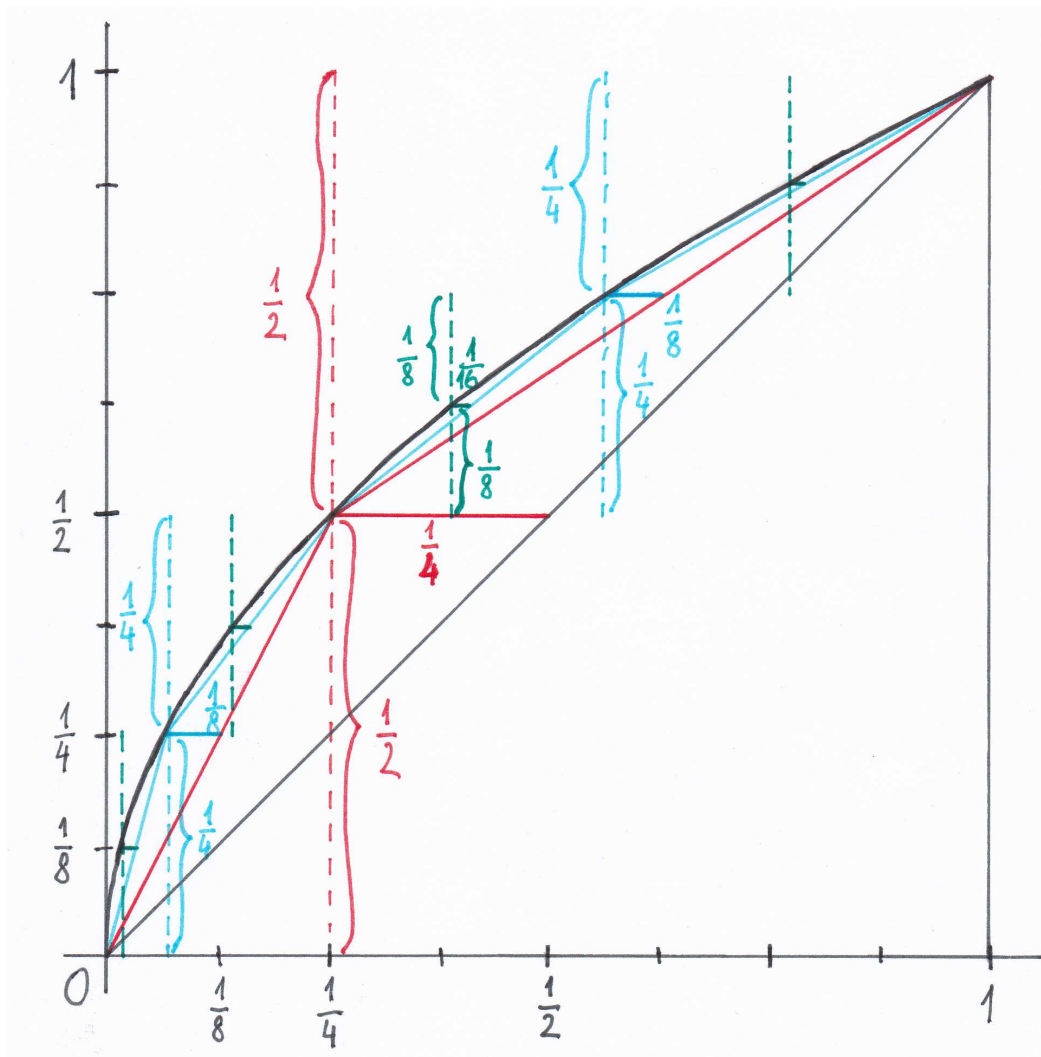
Fyzikálně se tedy takový vodič chová jako válcový s poloměrem daným geometrickým průměrem  $r = \sqrt{r_1 r_2}$ !

Podobných příkladů lze vymyslet mnoho, jejich náročnost spočívá v kombinaci dvou věcí: geometrické představy v Cavalieriho principu a limitního přechodu od sumy k integrálu. Obecně je potřeba v úlohách *sestavit integrál* na základě fyzikální a geometrické situace a poté *integrál spočítat*. Žákům nemusíme tyto dvě náročné situace kombinovat, ale můžeme přímo zadat, že např. odpor vodiče je dán integrálem 3.98, a takto zadat fyzikálně laděný příklad na substituci v integrálu. Podobné příklady, kde je vynecháno využití Cavalieriho principu, představují vzorce pro výpočet povrchu pláště a objemu rotačních těles. Domníváme se, že odvození těchto vzorců lze provést názorně a pochopitelně, podobně, jako jsme kreslili rozklad kruhu. Jako aplikaci Cavalieriho principu můžeme chápat také Guldinovy věty, které nahrazují výpočet objemu, resp. povrchu pláště rotačního tělesa prostřednictvím určitého těžiště. Integrál je tak skryt do výpočtu těžiště jako určité formy střední hodnoty

$$X = \frac{\int (m(x) \cdot x) dx}{\int m(x) dx}. \quad (3.100)$$

Cavalieriho princip spočívá v přeskládání částí celku, opírá se tedy o schopnost rozdělit celek do určitých částí. Pokud má vést k užitečnému cíli, může být takový proces dělení složitý. V případě paraboly uspěl již Archimédés. Ten převedl obsah úseku paraboly na součet řady tvořené obsahy trojúhelníků. Využitím geometrických vlastností, hledáním společných základů a výšek jednotlivých trojúhelníků je v obrázku 3.21 odhaleno, že každá sada menších z posloupnosti trojúhelníků má čtvrtinový obsah oproti předchozí. Je-li obsah prvního pravoúhlého trojúhelníka roven 1, pak obsah paraboly je  $S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ . V případě, že obsah pravoúhlého trojúhelníka je roven  $S_0$ , pak obsah celého parabolického úseku je  $S = \frac{4}{3} S_0$ . V obrázku 3.21 je obsah plochy pod  $\sqrt{x}$  roven  $\frac{2}{3}$ , neboť obsah  $S_0 = \frac{1}{2}$  je polovinou jednotkového čtverce. Obsah plochy pod parabolou  $x^2$ ,  $x \in \langle 0; 1 \rangle$  pak můžeme provést jako doplněk do čtverce, zkoušku správnosti můžeme udělat známým integrálem  $1 - \frac{4}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx$ .

Posledním matematickým zamyšlením nad výukou integrálů je obecná numerická kvadratura, ke které se beztak často uchylujeme počítačovými metodami



Obrázek 3.21: Numerická kvadratura paraboly.

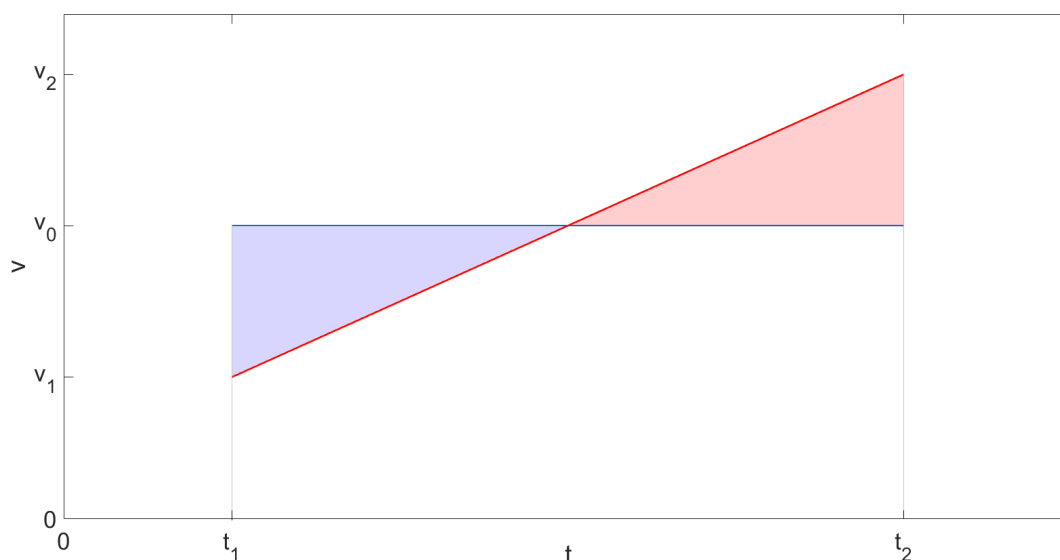
při řešení praktických problémů. Ve staré literatuře [V82, V85] nacházíme jako běžnou součást látky pravidlo lichoběžníkové a Simpsonovo pravidlo. Obě tyto metody vycházejí z nahrazení skutečné funkční závislosti a numericky počítají obsah plochy pod křivkou z funkčních hodnot. Lichoběžníková metoda ve svých variantách vychází z nahrazení grafu funkce po částech konstantní funkcí, popř. vylepšená metoda využívá rektifikaci, jak jsme ji zavedli v této práci. Simpsonova metoda nahrazuje graf funkce funkcemi po částech kvadratických. Domníváme se, že v dnešní počítačové době je vhodné tyto metody žákům představit, protože s jejich pomocí mohou sami snadno na počítači numericky integrovat. Z prostorových důvodů se těmto metodám nebudeme věnovat. Rozhodně by ale mohly podpořit Riemannovu myšlenku integrálu.

**Př. 101:** Určete numericky obsah plochy pod křivkou sinusoidy na intervalu  $\langle 0; \pi \rangle$ . Pracujte s různými dělení intervalu, s tabulkami či softwarem.

### 3.6.3 Integrál ve výuce fyziky

Kde se nachází příležitost k propedeutici integrálu ve fyzice? Představujeme témata, která jsou na integrál přímo šita. Nejprve rozebereme pojmy jako rychlost či dráha a na nich upozorníme na základní jevy a vystavíme tím propedeutický přístup aplikovatelný i v dalších oblastech.

Pohyb hmotného bodu si můžeme v nekonečně malém okamžiku představit jako rovnoměrný se specifickou okamžitou rychlostí  $ds = v(t)dt$ . Nejprimitivnějším příkladem je, když je v uvažovaném časovém úseku od  $t_1$  do  $t_2$  rychlost stálá, potom sčítání přírůstků je jednoduše  $\int ds = v \cdot \int dt$ , čili  $\Delta s = v\Delta t$ . Méně triviální leč jednoduchý případ je, když rychlost roste lineárně s časem, to známe jako rovnoměrně zrychlený pohyb  $v(t) = at \Rightarrow \Delta s = \int ds = a \int t dt = \frac{1}{2}a(t_2^2 - t_1^2)$ . Pokud si ujasníme, že v okamžicích  $t_{1,2}$  má bod po řadě rychlost  $v_{1,2} = at_{1,2}$ , pak přepíšeme  $\Delta s = \frac{a}{2}(t_2 - t_1)(t_1 + t_2) = \Delta t \frac{1}{2}(at_1 + at_2) = \Delta t \cdot \frac{v_1 + v_2}{2}$ . Tento vztah interpretujeme tak, že rychlost sice lineárně narůstala a v každém okamžiku měl bod jinou rychlost, ale z hlediska celého studovaného úseku, jako by se pohyboval rovnoměrně průměrnou rychlostí  $v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2}$ . To je vlastnost, která je společná všem situacím, kde budeme integrovat lineární funkci.



Obrázek 3.22: Dráha rovnoměrně zrychleného pohybu určená grafickou metodou představuje pro žáka prvního ročníku SŠ první setkání s integrací. Lineárně rostoucí okamžitou rychlost lze nahradit průměrnou rychlostí díky tomu, že obsahy červeného i modrého trojúhelníka jsou shodné.

V případě složitých závislostí rychlosti na čase se můžeme obrátit na výpomoc grafickými metodami. Pokud si vykreslíme graf závislosti rychlosti na čase (např. záznam z tachografu), pak obsah plochy pod křivkou je ураžená dráha. Proč? Protože pokud si vyšetříme nepatrný časový úsek  $dt$ , pak element ураžené dráhy  $ds = v(t)dt$  je obdélníček o hranách  $dt$  a  $v(t)$ , které právě odečítáme z grafu. Proces integrace by analyticky vysčítání celé plochy (uražené dráhy) provedl, pokud bychom měli k dispozici přesný popis funkce  $v(t)$ , a tu bychom navíc uměli zintegrovat.

U studia pohybu můžeme zajít ještě dál a integraci provést dvakrát, pokud známou informací bude zrychlení  $a(t)$ . Potom obecně můžeme psát  $s(t) = \int(\int(a(t)dt) + v_0) + s_0$ , náročné je ovšem vysvětlování role integračních konstant, které naráží na miskoncepce jmenované v první kapitole. V tu chvíli je velmi důležitá propedeutika naznačená v první kapitole a výše v tomto oddíle.

Kromě pohybu se setkáme s integrálem a s podobným pracovním postupem v následujících tématech:

- *Mechanická práce:*  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ , na SŠ se obvykle počítá s případem konstantní síly (ale síla svírá se změnou polohy jistý úhel  $\alpha$ ) působící po přímé dráze, v učebnici [F49] je uvedeno grafické schéma integrace, tj. obsah plochy pod křivkou v  $F - s$  diagramu. Tato situace je pro propedeutickou přípravu nejvhodnější.
- *Impuls síly:*  $dI = Fdt$  je podle našeho názoru zbytečně zaváděný pojem pro změnu hybnosti. Tedy jde o přepsání 2. Newtonova zákona. Žádná učebnice pojem nerozebírá a nevyužívá k propedeutice integrálního počtu, která je postupem totožná s tou u mechanické práce.
- *Poloha hmotného středu:* Hmotný střed je vážený průměr rozložení hmoty v prostoru  $\vec{R} = \frac{\int \vec{r}dm}{\int dm}$ , na střední škole se obvykle nepočítá, ale intuitivně nalézá na základě symetrií. Kalkulace jsou na příkladech převeditelných na soustavu diskrétních bodů, kde se integrál redukuje na jednoduchý součet.
- *Moment setrvačnosti:*  $dI = r^2dm$  je první příklad vyššího statistického momentu, který na rozdíl od hmotného středu nemá jednoduchou analogii. Vzorce pro moment setrvačnosti jsou tudíž exotické a memorují se.
- *Práce ideálního plynu:*  $dW = p dV$  je reformulace mechanické práce v kontextu tlaku  $p$  plynu, který se rozpíná v objemu  $V$ . Svým dalekosáhlým praktickým významem v oblasti motorů a možností propedeutické práce s  $p - V$  diagramy jde o jedno z nejlepších propedeutických témat, kde lze využít Cavalieriho principu, předestřít princip integrace, pracovat numericky atd.
- *Hustota elektrického náboje:*  $dQ = \rho dV$  pro střední školu nemá většího smyslu, podobně jako u hmotnosti a její hustoty se vždy uvažují homogenní symetrická tělesa.
- *Elektrické napětí:*  $U = \Delta\varphi = \int \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$  je příkladem vztahu, který v dnešní fyzice na SŠ neumíme dostatečně vysvětlit, protože vynecháváme teorii potenciálů. Můžeme ovšem elektrické napětí dobře zavést pro dvě situace: homogenní elektrické pole, tj.  $\vec{E} = \overrightarrow{const.}$  a coulombovské elektrostatické pole  $\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{\vec{r}}{r^3}$ . Obvykle se probírá pouze případ homogenního pole, kde  $U = \vec{E} \cdot \Delta\vec{s}$ , kde  $\Delta\vec{s}$  je vektor spojující výchozí a cílový bod, mezi nimiž napětí měříme.
- *Energie kondenzátoru:*  $E = \frac{1}{2}CU^2$  je vzorec, který pochází z integrálu: Chceme-li na nabitý kondenzátor s nábojem  $q$  přivést další elementární náboj  $dq$ , pak musíme vykonat práci  $dW = U(q)dq$ . Protože pro nabitý kondenzátor s kapacitou  $C$  platí vztah  $U(q) = \frac{q}{C}$ , je celková energie kondenzátoru  $E = \int_0^Q \frac{q dq}{C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2$ . Propedeuticky můžeme příklad předvést

i následovně: Napětí na kondenzátoru roste lineárně s nábojem, graf  $Q - U$  tedy vypadá jako 3.22. Protože funkce je lineární, určíme obsah plochy pod křivkou snadno jako polovinu obsahu obdélníka o hranách  $U$  a  $Q = CU$ , takový součin má fyzikální rozměr energie, jde tedy o elektrostatickou energii uloženou v kondenzátoru,  $E = \frac{1}{2}CU^2$ .

- *Biotův-Savartův zákon*: Elektrický proud, tj. změna elektrického pole, vyvolává pole magnetické. Příspěvek vyvolaný proudovým elementem  $d\vec{I}$  v místě od něj vzdáleném o vektor  $\vec{r}$  je  $d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{d\vec{I} \times \vec{r}}{r^3}$ . Tak toto je přesně příklad situace, kde s propedeutikou neuspějeme. Vyučují se výhradně případy. 1) indukce ve středu kruhové smyčky s poloměrem  $R$ , pro niž integrací v polárních souřadnicích, kde střed smyčky je v počátku:

$$\vec{r} = (-R \cos \varphi, -R \sin \varphi, 0), \quad d\vec{I} = I(-R \sin \varphi d\varphi, R \cos \varphi d\varphi, 0)$$

což integrujeme  $\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot (0; 0; 1)$ , tj.  $\vec{B} = \frac{\mu I}{2R} (0; 0; 1)$ . 2) vztah pro indukci přímého nekonečně dlouhého vodiče lze zpracovat v cylindrických souřadnicích, pro vodič umístěný v ose  $z$  dává  $\vec{B} = \frac{\mu I}{2R} \frac{(-x, y, 0)}{R}$ , kde je cylindrický poloměr  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Tento přístup není realizovatelný na SŠ, stručně jej uvádíme jen pro učitelův přehled.

- *Magnetická síla (Ampérův vzorec)*: Na vodič v magnetickém poli s indukcí  $\vec{B}$  je vyvíjena magnetická síla, která na element proudovodiče  $d\vec{I}$  má příspěvek  $d\vec{F} = d\vec{I} \times \vec{B}$ . Zde není příležitost pro propedeutickou práci, memoruje se vztah pro úsek přímého vodiče v konstantním poli  $\vec{F} = BIl \sin \alpha$ , kde  $l$  je délka vodiče-úsečky, který svírá s magnetickými indukčními čarami úhel  $\alpha$ .
- *Energie cívky*: V cívce dochází k přeměně elektrické energie v energii magnetického pole, ta je určena vzorcem  $E = \frac{1}{2}LI^2$ . Stejně jako u kondenzátoru, i tento vzorec vzchází z integrálu. Změna magnetického pole v cívce (vyvolaná změnou proudu tekoucího skrz cívku) je popsána změnou magnetického indukčního toku, který souvisí prostřednictvím zákona elektromagnetické indukce s napětím na cívce  $U = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dQ} \frac{dQ}{dt} = \frac{d\Phi}{dQ} i$ , tj.  $dE = U dQ = \frac{d\Phi}{i}$ . Změna magnetického indukčního toku cívkou je ale součástí definice vlastní indukčnosti cívky:  $d\Phi = L di$ . Dosazením do vzorce pro energii dostáváme  $dE = Li di$ , což integrujeme od nulového proudu (tehdy je nulové i magnetické pole) do plného proudu  $I$ . Výsledek je  $E = \frac{1}{2}LI^2$ .
- *Výkon v obvodu se střídavým proudem*: Jde o velice zajímavé téma, které v sobě skrývá šanci na propedeutickou práci, ale bohužel se pedagog v tu chvíli obvykle musí soustředit na jiné věci. Univerzální vztah pro výkon  $P = \frac{dW}{dt} = \frac{UdQ}{dt} = UI$  je platný i pro proměnný proud, tedy  $P(t) = U(t)I(t)$ . Harmonický střídavý proud postihují rovnice  $I = I_0 \sin(\omega t)$ ,  $U = U_0 \sin(\omega t + \Phi_0)$ , kde  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  je frekvence proudu a  $\Phi_0$  fázový posun napětí a proudu. Celkový náboj, který projde daným místem obvodu za jednu periodu proudu je určen  $Q = \int dQ = \int I dt = \frac{I_0}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$ , kde jsme použili substituci  $\omega t = \varphi$ . Tento výsledek odpovídá faktu, že náboj při střídavém proudě "běhá tam a zpátky", žádný náboj se tedy nepřenes. To ale neznamená, že by obvod nemohl konat práci (jinak bychom si ostatně rychlovarnou konvicí neuvařili čaj). Výkon v daném čase má po

aplikaci goniometrického vzorce  $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$  tvar  $P(t) = U_0 I_0 (\sin^2 \omega t \cos \Phi_0 - \sin 2\omega t \frac{\sin \Phi_0}{2})$ . Integrujme práci obvodem vykonanou za jednu periodu  $W = \int P(t) dt$ , opět se substitucí  $\omega t = \varphi$ , kdy jsou meze  $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$ . Integrál se rozpadá ve dva, v jednom se integruje  $\sin 2\varphi$ , ten integrací vymizí. Fyzikálně tuto část výkonu nazýváme výkon jalový, protože vyjadřuje energii, která se cyklicky přeměňuje mezi magnetickou energií cívek a elektrickou energií kondenzátorů. Nevymizí člen daný tzv. činným výkonem,  $W = U_0 I_0 \cos \Phi_0 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = U_0 I_0 \pi \cos \Phi_0$ . Toto je celková práce vykonaná za jednu periodu  $\Delta\varphi = 2\pi$ , průměrný výkon je tedy

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta\varphi} = \frac{\cos \Phi_0}{2} U_0 I_0 = \cos \Phi_0 \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \cos \Phi_0 U_{ef} I_{ef}, \quad (3.101)$$

kde tzv. účinník  $\cos \Phi_0$  zachycuje fázový posuv proudu a napětí. V obvodu bez reaktance je  $\cos \Phi_0 = 1$  a to je příčinou zavedení tzv. efektivního proudu  $I_{ef}$  a efektivního napětí  $U_{ef}$ , jejich hodnoty jsou svázány s amplitudami střídavého proudu a napětí vztahem  $I_0 = \sqrt{2} I_{ef}$ ,  $U_0 = \sqrt{2} U_{ef}$ . Jde o hodnoty stejnosměrného proudu a napětí, který by v obvodu vykonal stejnou práci. Z matematického hlediska nejde o nic jiného, než počítání středních hodnot  $E(f) = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx}{x_2 - x_1}$ . Pro žáka na SŠ ji ale můžeme představit pouze graficky, protože pojem střední hodnoty, natož integrálu ještě nejspíše nezná. Bohužel se ale v kapitole o střídavém proudu musí učitel fyziky věnovat jiným věcem, tento příklad by tedy mohl být cvičením při výuce integrálů, kdy už žák zná fyzikální podklad této situace.

Právě psaná témata se prolínají celým SŠ studiem a učitel fyziky by je měl využít ne jako mimoběžnou zajímavost, ale cíleně a systematicky, aby si žák z nich odnesl klíčové myšlenky integrace a aby mu tento proces byl povědomý. Jinak opakování, ke kterému dochází, viz obr. 2.1, nemá propedeutický efekt. K němu je třeba doplnit výklad o obsahu plochy i příklady jako následující, který používáme ve vlastním vyučování; obrázek je připraven k oboustrannému tisku.

**Př. 102:** Určete práci, kterou vykoná ideální plyn při kruhových dějích zachycených v  $p - V$  diagramech na obrázku 3.23.

Kromě výčtu témat, které jsou implicitně vystaveny integrálním počtem, můžeme integraci přinést do různých jiných úloh bez přímé souvislosti s integrálem, jako byl příklad o pyramidě 3.6.2, nebo následující.

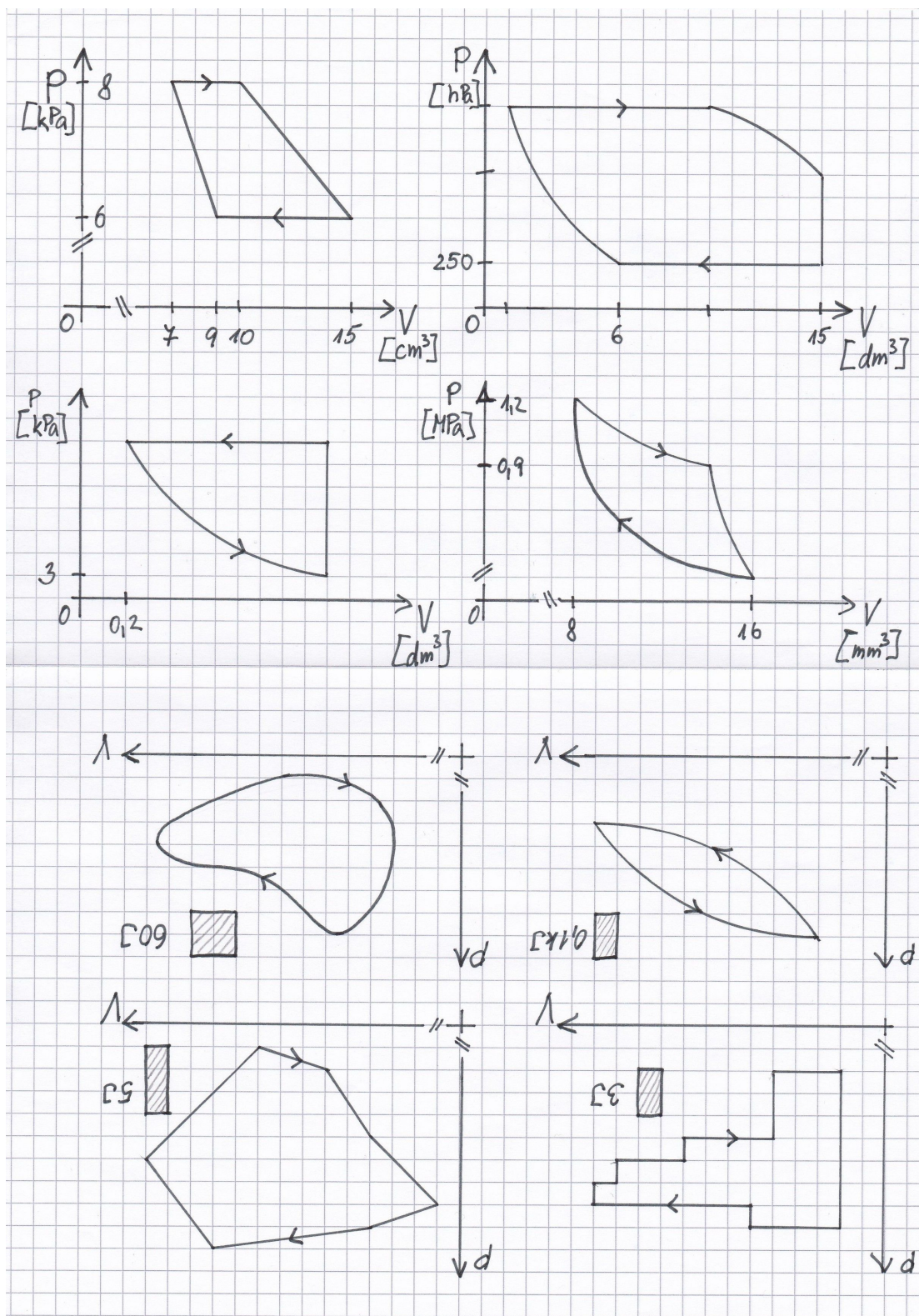
**Př. 103:** Určete sílu, kterou působí voda na svislou stěnu plného akvária. Výška stěny je  $v = 50 \text{ cm}$  a šířka  $s = 80 \text{ cm}$ .

**Řeš.:** Hydrostatický tlak je závislý na hloubce pod hladinou, proto zvolíme počátek svislé osy v hladině a nasměrujeme ji dolů, v hloubce  $h$  myšlenkově vytveme vodorovný obdélníček šířky stěny  $s$  a nekonečně malé výšky  $dh$ . Takový obdélníček má obsah  $dS = s dh$  a působí na něj tlak  $p = \rho gh$ , proto síla působící na tento obdélníček je  $dF = p dS = s \rho gh dh$ . Celkovou sílu dostaneme integrací

$$F = s \rho g \int_0^v h dh = sv \cdot \rho g \frac{v}{2} = 1000 \text{ N}. \quad (3.102)$$



Tento zápis volíme schválně, protože jej můžeme chápat tak, že na celou stěnu akvária s plochou  $S = sv$  působí průměrný hydrostatický tlak  $\bar{p} = \rho g \frac{v}{2}$ . Tento fakt je důsledkem toho, že tlak roste lineárně s hloubkou, situace je analogická rovnoměrnému pohybu, viz obr. 3.22.



Obrázek 3.23:  $p - V$  diagramy pro určení práce jednoho cyklu ideálního plynu.

## 3.7 Křivost

Derivace funkce v daném bodě má geometrický význam jako směrnice tečny ke grafu funkce. Mají vyšší derivace také svůj geometrický smysl? Ano, většina učebnic využívá druhou derivaci k určení konvexnosti/konkávnosti funkce. Umíme druhé derivaci přiřadit geometrický význam přesněji? Tečna ke grafu (určená první derivací) funkce je přímka, která se v bodě dotyku ke grafu nejlépe přimyká. Existuje kvadratická křivka, která by měla podobnou vlastnost? Představme si nejprve nějakou kružnici, která má v daném bodě grafu tečnu stejnou, jako samotná funkce. Taková kružnice není jediná, snadno rozmyslíme, že je jich nekonečně mnoho. Ale jen jedna z nich se bude ke grafu přimykát "nejlépe". Jak postihnout ono "nejlépe" pomocí derivace? Uvažme jednoduchý příklad, kdy si zvolíme za funkci  $(x) = x^2$  a budeme chtít nalézt "nejlepší" kružnici v bodě dotyku  $[0; 0]$ . Kružnice bude mít intuitivně ze symetrie střed na ose  $y$  nad osou  $x$ , tedy rovnice kružnice bude vypadat

$$k_r : x^2 + (y - r)^2 = r^2 \Leftrightarrow k_r(x) = y = r - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad (3.103)$$

kde poslední výraz explicitně vyjadřuje spodní půlkružnici, která k parabole  $x^2$  přimyká. Parametr  $r$ , poloměr kružnice, specifikuje konkrétní z nekonečna možných kružnic se středem na ose  $y$  v kladné polorovině  $y > 0$  a procházejí bodem  $[0; 0]$ . Ukážeme, že všechny takové kružnice skutečně mají s parabolou společnou tečnu:

$$\frac{dp}{dx} = 2x \quad \wedge \quad \frac{dk_r}{dx} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad (3.104)$$

což v bodě dotyku  $x = 0$  znamená rovnost derivací  $\frac{dp}{dx} = 0 = \frac{dk_r}{dx}$ , tím pádem i tečen. Čím se liší různé kružnice, jsou druhé derivace:

$$\frac{d^2k_r}{dx^2} = \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \text{pro } x = 0 \Rightarrow k_r''(0) = \frac{1}{r} \quad (3.105)$$

Která kružnice má stejnou druhou derivaci jako parabola? Je to pro volbu  $r = \frac{1}{2}$ , kdy  $k_{\frac{1}{2}}''(0) = 2 = p''(0)$ .

**Př. 104:** © Vykreslete (ručně či v nějakém programu) parabolu  $y = x^2$  a kružnice  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ ,  $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$ ,  $x^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = (\frac{1}{4})^2$ .

V geometrii se dají definovat obecné pojmy vztahující se ke "křivosti" křivek a tímto příkladem jsme je trochu nakousli. Takovou kružnici, která nejlépe přimyká ke křivce v tom smyslu, že má v bodě dotyku stejné první i druhé derivace, nazýváme *oskulační kružnicí*. Její poloměr nazýváme *poloměr křivosti* křivky (v daném bodě  $[x_0; y_0]$ ). Pro praktické užití se ovšem používá jeho převrácená hodnota, na kterou jsme narazili v rovnici 3.105. Nazývá se prostě *křivost*  $\mathcal{K}$  a pro obecnou křivku  $f$  v jejím obecném bodě  $[x_0; f(x_0)]$  se dá odvodit následující vzorec:

$$\mathcal{K}(f, x_0) = \frac{f''(x_0)}{(1 + (f'(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.106)$$

Takto definovaná křivost může nabývat kladných i záporných hodnot, podle znaménka druhé derivace. Díky tomu znaménko křivosti rozhoduje o vydutosti, plochosti či vypuklosti křivky (tj. tvar  $\cup$ , / či  $\cap$  podle  $f''' > 0$ ,  $f''' = 0$ ,  $f''' < 0$ ), teprve

absolutní hodnota křivosti  $|\mathcal{K}|$  o míře zakřivení, jak by člověk intuitivně čekal. Pokud bychom tento obecný vzorec chtěli mechanicky aplikovat na náš příklad paraboly a k ní nalezené oskulační kružnice, dosazujeme:

$$\mathcal{K}(p,0) = \frac{2}{(1 + (2 \cdot 0)^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 = \frac{\frac{(\frac{1}{2})^2}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2\right)^{\frac{3}{2}}}}{\left(1 + \left(\frac{0}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \mathcal{K}(k_{\frac{1}{2}},0) \quad (3.107)$$

a zjišťujeme, že příklady na křivost mohou být velmi pracné i pro tak jednoduchý útvar, jako kružnice. A proto jsme si také odpustili odvození vzorce pro křivost.

**Př. 105:** © Určete rovnici oskulační kružnice a křivost pro  $f(x) = \cos x$  v bodě  $x = 0$ .

**Řeš.:** Na křivosti kosinu nic nezměníme, pokud si jej posuneme do hezčí polohy, tedy uvažme  $g(x) = \cos x - 1$ , oskulační kružnice bude mít bod dotyku  $[0; 0]$ , střed na ose  $y$ , ale tentokrát pod osou  $x$ , což se projeví na

$$k_r : x^2 + (y - r)^2 = r^2 \Leftrightarrow k_r(x) = y = -r + \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow k_r''(0) = -\frac{1}{r} \quad (3.108)$$

Protože  $g''(0) = -\cos 0 = -1$ , poloměr oskulační kružnice musí být 1. Rovnice oskulační kružnice zadané funkce  $f(x) = \cos x$  je  $x^2 + y^2 = 1$  a křivost je  $-1$ , tedy kružnice leží pod grafem.

**Př. 106:** © Určete křivost a oskulační kružnici větve hyperboly  $f(x) = \frac{-x}{x+1}$  v  $x = 0$ .

**Řeš.:** Po rozkreslení situace zjišťujeme, že střed oskulační kružnice leží na ose kvadrantu  $y = x$ . Oskulační kružnice musí mít tvar  $k_r : \left(x - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2$ . Najdeme explicitní vyjádření oblouku kružnice v blízkosti počátku:  $k_r(x) = \frac{r}{\sqrt{2}} - \sqrt{r^2 - \left(x - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2}$ . Výpočet druhých derivací je pracný:  $k_r''(x) = \frac{2\sqrt{2}r^2}{(r^2 + 2\sqrt{2}rx - 2x^2)^{\frac{3}{2}}}$  a  $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ . Srovnáním  $k_r''(0) = \frac{2\sqrt{2}}{r} \stackrel{!}{=} 2 = f''(0)$  dostáváme poloměr  $r = \sqrt{2}$ . Hyperbola má tedy v počátku křivost  $\mathcal{K}(f,0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  a oskulační kružnici  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ .

Sekci zakončíme sdělením, že i vyšší derivace mají svůj geometrický význam a popisují (i když nám neznámým způsobem) křivost funkce. Intuitivně jsme oblouky křivek pomocí druhé derivace nahrazovali oblouky kružnic, ale snazší by bylo použít oblouky parabol, jak ukázal výpočet v úvodním příkladu. Třetí derivace by analogicky porovnávala graf funkce s kubickou křivkou  $x^3$  atd.

Pro tuto sekci o křivosti byly inspirací především knihy [V81, V85, V88, V89], které se křivostí a veličinami nekonečně malými zabývají. Sepsali jsme to, co nám osobně v literatuře chybělo, takovýto text a příklady nikde dostupné nejsou, pokud je nám známo.

## 3.8 Taylorův rozvoj

V této sekci nejprve podáme zjednodušené odvození Taylorova polynomu. Sice budeme volně pracovat s předpoklady, zato navážeme na středoškolskou látku matematické indukce a jednoduché integrace polynomu. Poté představíme rozsáhlé užití rozvoje ve fyzice.

V návaznosti na předchozí sekci si klademe následující otázku. Mějme známou funkci  $f(x)$ , která je ovšem pro naše výpočetní potřeby příliš komplikovaná, např.  $\sin x$ , kterou s pomocí tužky a papíru neumíme v obecném bodě spočítat. Můžeme si nějak pomoci a nahradit tuto funkci polynomem? Sčítání a násobení čísel bychom totiž na papíře v principu zvládli. Na tuto otázku máme odpověď, i když nemůžeme teď dokázat, že je skutečně funkční. Její myšlenka je: Představme si, že chceme určit přibližně hodnotu funkce v bodě  $x$  okolí jistého bodu, středu  $[x_0; y_0]$  a funkci budeme aproximovat polynomem  $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)^2 + \dots$ . Jak zvolit koeficienty polynomu  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ ? Využijeme již známého faktu, že geometrické chápání křivosti postihují právě derivace funkce, hledané koeficienty tedy budou tvořeny právě derivacemi funkce. Jak nalézt přesnou podobu jen nastíníme.

Nejprve označme  $\Delta x = x - x_0$  a připomeneme značení vyšších derivací  $f^{(n)}(x_0)$  včetně nulté  $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ . To děláme proto, že aproximace bude pozorovat, jak se změní funkce ( $\Delta f$ ), pokud se odchýlíme v argumentu ( $\Delta x$ ) prostřednictvím derivací. Pokud bychom chtěli funkci v  $x_0$  nahradit konstantou, pak bude rozumná volba

$$P_0(x) = f^{(0)}(x_0). \quad (3.109)$$

Pokud bychom chtěli funkci nahradit přímkou, půjde o tečnu

$$P_1(x) = f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(x_0)\Delta x. \quad (3.110)$$

Jak přejít k nahrazení funkce polynomem druhého stupně? To nevíme, ale když umíme nahradit polynomem nultého a prvního stupně nějakou funkci, můžeme stejný postup aplikovat na funkci  $f'(x)$ . Integrací lineární aproximace  $f'$  získáme nějakou kvadratickou aproximaci  $f$ . Je to ovšem vhodná aproximace? Že ano, napoví nultá aproximace derivace  $f'$ , což je konstantní funkce  $f'(x_0)$ , která ale není ničím jiným, než derivací  $\frac{dP_1(x)}{dx}$ . Tím dostáváme recept, jak induktivně vytvořit aproximace vyššího řádu. Umíme-li zapsat aproximační polynom  $n$ -tého řádu, zapíšeme jej ne pro  $f$ , ale pro derivaci funkce  $f'$ . Formální integrací získáme aproximaci původní funkce polynomem o stupeň vyšším, přitom integrační konstantou je vždy  $f^{(0)}(x_0)$ . Uvedme tedy, jak dostaneme kvadratickou aproximaci: lineární aproximace derivace  $f'$  má tvar  $f^{(1)}(x_0) + f^{(2)}(x_0)\Delta x$ , integrací dostaneme

$$P_2(x) = f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f^{(2)}(x_0)\Delta x^2. \quad (3.111)$$

Můžeme snadno ověřit, že jsme skutečně našli takový polynom, že jeho druhá derivace je shodná s druhou derivací původní funkce. Pokud do této aproximace dosadíme opět  $f'$  místo  $f$  a integrujeme, dostaneme kubickou aproximaci.

$$P_3(x) = f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f^{(2)}(x_0)\Delta x^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x_0)\Delta x^3. \quad (3.112)$$

A můžeme postupovat dál a dál; všimneme si teď, jaký číselný faktor se objevuje u vedoucích členů polynomu. Protože vyšší aproximace získáváme postupnou integrací polynomu s výrazy  $\Delta x^n$ , využijeme vzorec pro integraci polynomu  $f(\Delta x)^n d(\Delta x) = \frac{1}{n+1}(\Delta x)^{n+1}$ . Členy vyšších a vyšších aproximací se postupně násobí zlomky  $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \dots$ , u vedoucího členu aproximace  $n$ -tého řádu bude tedy faktor  $\frac{1}{n!}$ .

Takto vytvořený aproximační polynom nazýváme Taylorovým polynomem funkce  $f$  (stupně  $n$ ) se středem  $x_0$ , jeho předpis je následující.

$$T_f^n(x) = f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)\Delta x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)\Delta x^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n \quad (3.113)$$

Musíme se ovšem tázat, jestli takovýto polynom umíme vždy sestrojit. Očividný je fakt, že musí existovat patřičné derivace. Proto nelze sestrojit Taylorův polynom např. pro funkci  $|x|$  se středem v bodě 0. Matematická věta, která o Taylorovu polynomu mluví vypadá následovně:

**Věta 12.** *Nechť  $f$  je funkce, která má v bodě  $a \in \mathbb{R}$  konečnou  $n$ -tou derivaci. Potom existuje právě jeden polynom  $T_n$  stupně nejvýše  $n$  takový, že*

$$(\forall k \in \hat{n}) \left( T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \right) \quad (3.114)$$

*Tento polynom nazýváme Taylorovým polynomem (rozvojem) funkce  $f$  v bodě  $a$ . Jeho předpis je*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \\ &= \frac{f^{(0)}(a)}{0!} (x-a)^0 + \frac{f^{(1)}(a)}{1!} (x-a)^1 + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Nalezneme nyní několik příkladů Taylorova polynomu: aproximujme funkci  $\sin(x)$  se středem  $x_0 = 0$ . Takový příklad je jednoduchý, protože derivace sinu a kosinu na sebe vzájemně cyklicky přecházejí. Derivace sinu v nule mají tedy následující tvary:  $\sin 0 = 0$ ,  $\cos 0 = 1$ ,  $-\sin 0 = 0$ ,  $-\cos 0 = -1$  a dále se tyto koeficienty opakují. Taylorův polynom vypadá:

$$T(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} - 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} - 0 + \frac{x^9}{9!} + \dots \quad (3.116)$$

**Př. 107:** Nalezněte Taylorův polynom pro funkci  $\cos x$  se středem  $x_0 = 0$ .

**Řeš.:** Derivace kosinu jsme určili během příkladu se sinem. Výsledek tedy je

$$T(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \dots$$

Všímavému oku neunikne, že v rozvoji sinu vystupují pouze liché mocniny, u kosinu naopak sudé. Sinus jako lichou funkci je nutno kombinovat pouze z členů, které jsou samy liché. Jediný sudý člen by lichost zkazil. U kosinu naopak. Ostatně právě v této vlastnosti bychom nejspíš vypátrali důvod pojmenování lichých a sudých funkcí.

Proč je Taylorův polynom tak význačný matematický objekt? To, že jeho derivace jsou shodné s derivacemi původní funkce zaručuje, že grafy obou funkcí

se k sobě těsně přimykají. Mezi všemi polynomy daného stupně je Taylorův ten, který se "přimyká nejlépe", je to tedy zobecnění tečny jako přímky, která nejlépe přiléhá ke grafu. Pokud pro hodnoty  $x$  blízko  $x_0$  použijeme pro výpočet  $f(x)$  aproximaci Taylorovým polynomem, dopustíme se nejmenší možné chyby, kterou aproximace polynomem umožňuje. Stejně jako tečna se ale může Taylorův polynom s původní funkcí rozcházet v hodnotách daleko od středu. Například už z principu je kombinace polynomů neomezená funkce, zatímco sinus je funkce omezená, logicky tedy nelze rozvoj použít pro výpočet hodnot  $\sin x$  pro velká  $x$  (k tomu ale zase máme jiné nástroje). Jakých chyb se můžeme aproximacemi dopustit, ilustrují následující příklady.

**Př. 108:** Vypočtete, jaké chyby se dopustíte u funkce sinus, pokud její hodnotu vypočtete Taylorovým rozvojem  $T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ . Zkoumejte hodnoty  $x \in \{\frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1\}$ .  $(8,3 \cdot 10^{-18}, 8,3 \cdot 10^{-13}, 8,3 \cdot 10^{-8}, 2,6 \cdot 10^{-4}, 8,1 \cdot 10^{-3})$

**Př. 109:** Ve fyzikální výuce o harmonickém oscilátoru se používá aproximace  $\sin x \doteq x$  s komentářem, že tato aproximace platí dobře do hodnot  $5^\circ$ . Určete, jaká je chyba takové aproximace. (asi  $1,1 \cdot 10^{-4}$ , tj. asi 0,13%)

Výpočet Taylorova rozvoje z definice umíme obejít trikem, viz [F78], u funkce  $f(x) = (1 \pm x)^{-1}$ , když si uvědomíme, že pro  $|x| < 1$  platí  $\frac{1}{1-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots$ . Záměnou  $x \rightarrow -x$  snadno dostaneme  $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3$ .

**Př. 110:** Chceme spočítat Taylorovým rozvojem hodnotu  $\frac{1}{\sqrt{1,1}}$ . Jakou funkci rozvineme a do jakého řádu, pokud výsledek má souhlasit na pět desetinných míst?

**Řeš.:** Do rozvoje  $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$  bereme  $n = -\frac{1}{2}, x = 0,1$ . Má-li výsledek souhlasit na pět desetinných míst, poslední člen, který by mohl přispět, je šestý. V něm vystupuje  $const \cdot 10^{-6}$ . Pokud si ale rozmyslíme, jak vypadá konstanta daná kombinačním číslem, bude jistě  $< 1$ , vystačí nám tedy rozvoj do pátého stupně. Počítáme:  $y = (1+0,1)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}10^{-1} + \frac{3}{8}10^{-2} - \frac{5}{16}10^{-3} + \frac{35}{128}10^{-4} - \frac{63}{256}10^{-5}$ . Převodem na společný jmenovatel  $256 \cdot 10^5 y = 25600000 - 1280000 + 96000 - 8000 + 700 - 63 = 24408637 \rightarrow y \doteq 0,95346(24)$ . Srovnáním s kalkulačkou zjistíme  $\frac{1}{\sqrt{1,1}} \doteq 0,95346(26)$ . Chyby jsme se aproximací dopustili až na šestém desetinném místě.

To, co takto vyložené látce Taylorova rozvoje chybí, je odhad chyby. Vzhledem k náročnosti této otázky považujeme za vhodné žákům říci, že chyby se dopouštíme vždy a není v středoškolských silách ji přesně určit. Pokročilými metodami lze odhadnout chybu Taylorova rozvoje do  $n$ -tého řádu jeho  $n+1$ -tým členem. Pro nás bude postačující, pokud budeme Taylorův rozvoj používat pro výpočet hodnot s dostatečně malým  $x \ll 1$ . To, že chyba je zanedbatelná, dobře specifikuje pojem limita, Taylorův rozvoj tedy lze zpětně použít k výpočtu limity.

**Př. 111:** Určete  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .

**Řeš.:** Nahrazením sinu řadou

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x \cdot \mathcal{P}(x) = 1, \quad (3.117)$$

kde jsme zbytek řady přepsali do polynomu  $\mathcal{P}$ . Jelikož polynom je nekonečnou řadou, pro garanci, že tato řada pro  $x = 0$  neroste k  $\infty$ , musíme k řádnému vybudování teorie. V představě, že ovšem Taylorovým polynomem lze aproximovat funkci libovolně přesně s chybou  $< \varepsilon$ , je konečná hodnota  $\mathcal{P}$  intuitivní.

**Př. 112:** Určete  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ . Navrhněte další limitu tohoto typu a spočítejte ji. ( $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ )

**Př. 113:** Určete  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$  a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ . ( $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ )

Tímto končíme výkladovou část o Taylorovu rozvoji a ptáme se, kde přesně na SŠ narazíme na Taylorův rozvoj na SŠ? Je to ve fyzice na mnoha místech, bohatou sadu příkladů k tomu nalezneme v [F78], např. kalibraci chodu hodin na nadmořskou výšku, adiabatické kmity ve válci s ideálním plynem, korekci na zobrazení dutým zrcadlem mimo paraxiální prostor atd. Z prostorových důvodů čtenáře odkážeme pro další řešené příklady i inspiraci na zmíněnou brožuru a zde představíme zajímavé příklady, které v brožuře nejsou. Také vyjmenujeme klíčové příklady a situace běžné výuky, které Taylorova rozvoje na SŠ využívají.

Základním principem fyziky je odvození zákonů, které popisují průběh či stav nějaké fyzikální situace. Do jejího popisu může promlouvat dlouhá řada veličin, přitom se za účelem vhodného popisu omezujeme pouze na několik vybraných. Tímto zúžením se dopouštíme přijatelné chyby, která ovšem může růst se změnou zanedbaného parametru. Takovým příkladem jsou teplotní efekty, např. pro elektrický odpor součástky, který je definován Ohmovým zákonem jako  $R = \frac{U}{I}$ . Na ZŠ pro jednoduchost  $R$  považujeme za konstantu. Z částicové podstaty látek ale pramení jeho teplotní závislost, na SŠ se dobereme k tomu, že jde o závislost lineární.

$$R(T) = R(T_0) + R(T_0)\alpha(T - T_0) \Leftrightarrow \frac{R}{R_0} = 1 \cdot (T - T_0)^0 + \alpha(T - T_0)^1 \quad (3.118)$$

Nejde o nic jiného, než o přiblížení skutečného komplikovaného vztahu do Taylorova řádu o stupeň vyššího. Přitom se lze snadným experimentem přesvědčit, že lineární aproximace není dostačující pro běžně dosažitelné teplotní rozdíly cca  $100^\circ\text{C}$ . Středoškolský vztah tedy zavádí novou konstantu *teplotní součinitel elektrického odporu*  $\alpha$ , která je pro žáky vcelku abstraktní, a tím považuje otázku teplotní závislosti odporu za úplně vyřešenou. Považujeme za nezbytné žákovi zdůrazňovat, že jde jen o aproximaci.

Analogická je situace u teplotní roztažnosti materiálu, kde zapisujeme

$$l = l_0[1 + \alpha(T - T_0)]. \quad (3.119)$$

Oba zákony teplotní závislosti jsou komplikované kvůli zavedení relativního prodloužení  $\frac{\Delta l}{l_0}$ , resp. relativní změny odporu  $\frac{\Delta R}{R_0}$ . To, že jsou ale oba zákony strukturně stejné, je naopak výhodou. *Součinitel délkové teplotní roztažnosti* má stejný matematický význam jako teplotní součinitel elektrického odporu, proto je totožná i jeho značka, dokonce i jednotka  $K^{-1}$ . Roztažnost materiálu ale poskytuje další opěrný bod pro propedeutiku *D&I*, když z délkové roztažnosti odvozuje objemovou  $V = V_0(1 + \beta(T - T_0))$ , tento příklad jsme uvedli v sekci o diferenciálu, 51. Myslíme, že by bylo velmi vhodné využívat značení, které jsme budovali v sekci

o chybě 3.2, zapisovat  $\delta l = \alpha \Delta T$  či alespoň  $\frac{\Delta l}{l_0} = 1 + \alpha \Delta T$ , a také neopomenout vztah mezi teplotní, plošnou a objemovou roztažností.

V učebnici [F50] se uvádí, že se někdy používá též aproximace kvadratická

$$l = l_0 \left[ 1 + \alpha_1(T - T_0) + \alpha_2(T - T_0)^2 \right], \quad (3.120)$$

při prohledávání dalších zdrojů i na internetu jsme ovšem nenašli žádné uplatnění, ani jsme nedohledali případné hodnoty materiálových koeficientů. Domníváme se, že tato nedostupnost materiálů je ke škodě, neboť kvadratická aproximace by byla příjemným zpestřením pro výuku. Její uplatnění totiž najdeme už v základěškolské látce, anomálii vody. Tabulka 3.2 uvádí závislost hustoty vody na teplotě v rozmezí blízko  $4^\circ\text{C}$ . Uvádíme následující řešenou úlohu, která je vhodná jako demonstrační právě k faktu, že teplotní roztažnost fyzikálně uchopujeme v opoře o Taylorův rozvoj. Konkrétně nahradíme hustotu vody lineární a kvadratickou funkcí. Nejde sice o Taylorovy polynomy v pravém slova smyslu, ale naším záměrem není na ZŠ argumentovat právě Taylorovým rozvojem, ten slouží jako matematická opora pro užití polynomiálních aproximací. Skutečným záměrem příkladu je propedeutice aproximací.

Tabulka 3.2: Anomálie vody: Závislost hustoty vody  $\rho$  na její teplotě v rozmezí kolem  $4^\circ\text{C}$ . Data převzata z tabulek [O107].

$T[^\circ\text{C}]$	$\rho[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$	$T[^\circ\text{C}]$	$\rho[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$	$T[^\circ\text{C}]$	$\rho[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$	$T[^\circ\text{C}]$	$\rho[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$
0,0	999,8426	2,0	999,9429	4,0	999,9750	6,0	999,9430
0,1	999,8493	2,1	999,9461	4,1	999,9748	6,1	999,9398
0,2	999,8558	2,2	999,9491	4,2	999,9746	6,2	999,9365
0,3	999,8622	2,3	999,9519	4,3	999,9742	6,3	999,9330
0,4	999,8683	2,4	999,9546	4,4	999,9736	6,4	999,9293
0,5	999,8743	2,5	999,9571	4,5	999,9728	6,5	999,9255
0,6	999,8801	2,6	999,9595	4,6	999,9719	6,6	999,9216
0,7	999,8857	2,7	999,9616	4,7	999,9709	6,7	999,9175
0,8	999,8912	2,8	999,9636	4,8	999,9696	6,8	999,9132
0,9	999,8964	2,9	999,9655	4,9	999,9683	6,9	999,9088
1,0	999,9015	3,0	999,9672	5,0	999,9668	7,0	999,9043
1,1	999,9065	3,1	999,9687	5,1	999,9651	7,1	999,8996
1,2	999,9112	3,2	999,9700	5,2	999,9632	7,2	999,8948
1,3	999,9158	3,3	999,9712	5,3	999,9612	7,3	999,8898
1,4	999,9202	3,4	999,9722	5,4	999,9591	7,4	999,8847
1,5	999,9244	3,5	999,9731	5,5	999,9568	7,5	999,8794
1,6	999,9284	3,6	999,9738	5,6	999,9544	7,6	999,8740
1,7	999,9323	3,7	999,9743	5,7	999,9518	7,7	999,8627
1,8	999,9360	3,8	999,9747	5,8	999,9490	7,8	999,8569
1,9	999,9395	3,9	999,9749	5,9	999,9461	7,9	999,8509
						8,0	999,8509

**Př. 114:** © Využijte dat z tabulky 3.2, abyste našli závislost hustoty vody na její teplotě. Použijte k tomu např. Excel – nalezení spojnice trendu – polynomická stupně 2. Tím se získá kvadratická aproximace skutečné závislosti, zaokrouhlete



koeficienty rovnice na pět desetinných míst. Nalezněte nejvyšší a nejnižší hodnotu hustoty pro teplotní rozmezí udané tabulkou. Porovnejte tyto hodnoty s průměrnou hodnotou tabulky a porovnejte s proložením lineární závislosti. Jaký je rozdíl hmotností vody, pokud naměříme 100 ml při teplotách odpovídající nejnižší a nejvyšší hustotě? Naměříme tento hmotnostní rozdíl na běžné laboratorní váze s přesností 0,01 g?

**Řeš.:** Aproximace jsou po řadě:

$$\begin{aligned}\rho_0(T) &= 999,93119, \\ \rho_1(T) &= 999,92908 + 0,00053 T, \\ \rho_2(T) &= 999,84470 + 0,06461 T - 0,00801 T^2.\end{aligned}\tag{3.121}$$

Z kvadratické aproximace lze hledat lokální extrém – maximální hustotu a teplotu, pro kterou jev nastává:  $\frac{d\rho_2}{dT} = -0,01602 T + 0,06461 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow T_{max} \doteq 4,03^\circ C \Rightarrow \rho_{max} = \rho_2 T_{max} \doteq 999,9750 \frac{kg}{m^3}$ . O tom, že zde hustota vody skutečně má maximum, se lze přesvědčit z druhé derivace aproximace - ta je záporná dokonce pro všechny hodnoty  $T$ . Toto zjištění umožňuje přepsat intuitivně:  $\rho_2(T) = 999,97499 - 0,00801(T - 4,03308)^2$ . Minimální hustota v intervalu  $T \in \langle 0; 8 \rangle^\circ C$  nastává pro teplotu  $T_{min} = 0^\circ C$  a má hodnotu  $\rho_{min} = 999,8426 \frac{kg}{m^3}$ . V porovnání s průměrnou hodnotou  $\rho_0$  se maximální a minimální hodnota neliší o více než  $0,1 \frac{kg}{m^3}$ , což je čtvrtá platná cifra. Při běžném zaokrouhlování na tři platné cifry tak vystačíme s průměrnou hustotou.

Největší dosažitelný rozdíl hustot v daném teplotním rozmezí je  $\Delta\rho = \rho_{max} - \rho_{min} \doteq 0,1324 \frac{kg}{m^3}$ . Pokud naměříme 100 ml vody, lze dosáhnout nejvýše hmotnostního rozdílu  $\Delta m = V \Delta\rho \doteq 0,013 g$ . Tento rozdíl je nepatrně vyšší než citlivost vah, a lze jej tedy danou laboratorní vahou při maximálně pečlivé práci zachytit.

Nejpodstatnější závěr spočívá ve srovnání kvadratické a lineární aproximace. Lineární funkce nepostihuje skutečnost a poskytuje špatný odhad pro případnou extrapolaci dat, kde by dosahovala značných chyb pro vyšší teploty (rostoucí aproximace přímo odporuje klesající závislosti; pro teplotu  $20^\circ C$  by aproximace poskytly  $\rho_1(20) = 999,9397 \frac{kg}{m^3}$ ,  $\rho_2(20) = 997,9329 \frac{kg}{m^3}$ , tabulková hodnota je  $\rho(20) = 998,2063 \frac{kg}{m^3}$ ). Tento fakt, že v okolí  $4^\circ C$  se závislost hustoty vody na její teplotě nedá úspěšně aproximovat lineárně, je tak nezvyklý pro nefunkčnost běžně používané lineární aproximace, že si se svými praktickými důsledky vysloužil název anomálie vody. Pro běžné situace rozpínavosti kapalin i pevných látek můžeme Taylorův rozvoj použít ještě jinak:

**Př. 115:** [F50] Při  $20^\circ C$  má rtuť hustotu  $\rho_{20} = 13546 \frac{kg}{m^3}$ . Z jejího součinitele objemové roztažnosti  $\beta = 1,818 \cdot 10^{-4} K^{-1}$  určete hustotu rtuti při teplotách  $-20^\circ C$  a  $100^\circ C$ .

**Řeš.:** Pro objem po změně teploty o  $\Delta t = t - t_0$  platí  $V = V_0(1 + \beta\Delta t)$ , kde  $V_0$  je objem při teplotě  $t_0$ . Hustota jako poměr  $\rho = \frac{m}{V}$  se tedy změní při zachování součinu  $\rho_0 V_0 = m = \rho V$ , protože hmotnost látky se teplotním rozpínáním nemění. V důsledku dostáváme pro hustotu po změně teploty vzorec, kam dosadíme Taylorovu aproximaci  $(1 + x)^{-1} \doteq 1 - x$ , což si můžeme dobře dovolit,

protože  $x = \beta\Delta T < 10^{-2}$ .

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta\Delta T} \doteq \rho_0(1 - \beta\Delta T) \rightarrow \rho_{-20} \doteq 13644 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \rho_{100} = 13349 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (3.122)$$

I další případ Taylorova rozvoje zůstává u materiálů, a to u deformačních účinků sil. Působení tahem/tlakem na materiál dochází k jeho prodloužení/zkrácení. V technické praxi i na SŠ se zavádí relativní prodloužení  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  a normálové napětí  $\sigma$  (velikost deformační síly vztažená k průřezu materiálu), kde pro malé hodnoty normálového napětí platí Hookeův zákon:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.123)$$

I tento vztah je pouze Taylorovým rozvojem komplikované závislosti prodloužení na napětí. To lze vyčíst z tzv. křivek deformace, kde se ovšem konvenčně (a neintuitivně) bere napětí jako funkce prodloužení. Praktický význam Hookeova zákona ovšem spočívá ne v tom, že takový Taylorův rozvoj lze provést kolem nulového napětí, ale v tom, že oblast, kdy je lineární aproximace dostačující, je u mnohých materiálů překvapivě široká. Meze platnosti Hookeova zákona tak výrazně převyšují obvyklé aproximační limity jako  $\sin x \doteq x$  pro  $x < 5^\circ$ .

Podobnou studii bychom mohli provést u studie závislosti elektrické rezistivity na teplotě. Poslední veličinou, která se váže k materiálům, je tepelná kapacita. Ta se podobně jako elektrický odpor na ZŠ považuje za konstantu. Na SŠ se připustí, že se tepelná kapacita s teplotou mění, tabulkové hodnoty uvádí kapacitu při  $20^\circ\text{C}$ . Opět nejde o nic jiného, než o Taylorův rozvoj. Téma tepelné kapacity navíc bylo zdrojem překvapivých důsledků, když se v kvantové teorii ukázalo, že s teplotou blízkou absolutní nule vymizí tepelná kapacita [V103]. Tím se exotický charakter měrné tepelné kapacity jako funkce teploty ještě posílil.

Pokud opustíme materiálové vlastnosti, můžeme Taylorův rozvoj použít v dalších, obecných výpočtech k praktickým zjednodušením:

**Př. 116:** © Určete, při jaké rychlosti je lidské ucho schopno vnímat Dopplerův jev u zdroje zvuku, který jej míjí? Uvažujte, že zdroj vydává komorní  $a$  s frekvencí  $440 \text{ Hz}$ , rychlost zvuku je  $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  a ucho v tomto frekvenčním pásmu rozezná frekvence lišící se o  $3 \text{ Hz}$ .

**Řeš.:** Frekvence zvuku  $f'$ , kterou vnímáme, pokud se zdroj přibližuje/vzdaluje rychlostí  $u$  je dána jako  $f' = \frac{V}{V \mp u} f$ , kde  $V$  je rychlost zvuku a  $f$  je frekvence zvuku vydávaná zdrojem. Rozdíl frekvencí od přibližujícího a vzdalujícího zdroje tedy je

$$\Delta f = \frac{V}{V - u} f - \frac{V}{V + u} f = \frac{2u}{1 - \frac{u^2}{V^2}} f \quad (3.124)$$

Očekáváme  $u \ll V$ , proto kvadratický člen ve jmenovateli zanedbáváme, v řeči Taylorovy aproximace  $(1 - x^2)^{-1} \doteq 1 + x^2 \doteq 1$ . Dosazením potom dostáváme

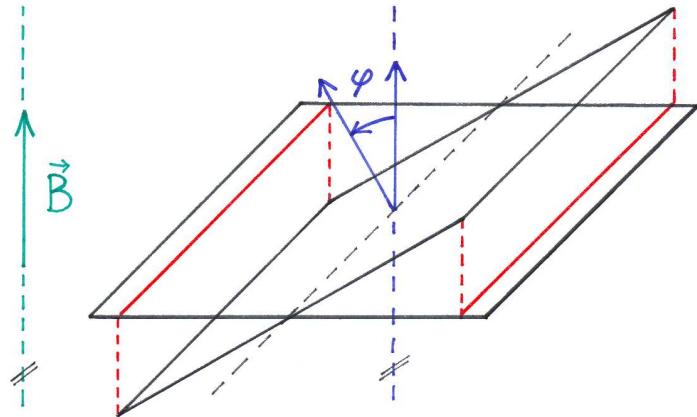
$$3 = \Delta f = 2 \frac{u}{V} f = \frac{2 \cdot 440}{340} u \Rightarrow u \doteq 1,16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3.125)$$

Dopplerův efekt bychom tedy při pečlivém soustředění měli být schopni vnímat už při chůzi. Mnohem více se ale projeví např. při projíždění automobilu, což

bychom mohli potvrdit o řád přesnější aproximací  $\frac{2\Delta f}{f} = \frac{u}{v} \left(1 + \frac{u^2}{v^2}\right)$ . Pro rychlost automobilu  $u \sim 20 \frac{m}{s}$  bychom očekávali změnu frekvence asi  $13 \text{ Hz}$ . Takový rozdíl v tomto frekvenčním pásmu odpovídá čtvrttónu. Pro vysoké či hluboké tóny tento výsledek není platný kvůli závislosti na  $f$  a rozdílné citlivosti ucha.

**Př. 117:** Uvažme smyčku rotující v homogenním magnetickém poli kolem osy, která je na vektor magnetické indukce kolmá, viz obr. 3.24. Odvodte z Faradayova zákona indukované napětí na cívce, jestliže úhlová rychlost rotace je  $\omega$ .

Obrázek 3.24:  
Smyčka rotující  
v magnetickém poli.  
Efektivní plocha  
vyznačeně červeně.



**Řeš.:** Faradayův zákon říká pro velmi malé změny času  $\Delta t$ :

$$U = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (3.126)$$

kde  $\Phi$  je tok magnetického pole smyčkou. Pokud je normálový vektor smyčky rovnoběžný s magnetickou indukcí  $\vec{B}$ , pak smyčkou prochází maximální tok, označme jej  $\Phi_0$ . Pokud se smyčka natočí o úhel  $\varphi$ , pak se vůči magnetické indukci efektivně zmenší plocha, a tím pádem i tok, a to faktorem  $\cos\varphi$ . Tím pádem získáváme časové vyjádření toku magnetického pole:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cos(\omega t) \quad (3.127)$$

při čemž jsme bez újmy na obecnosti brali, že v okamžik  $t_0 = 0 \text{ s}$  je  $\varphi_0 = 0$ . Zkoumejme, jak se tok magnetického pole změní, pokud se čas změní o  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t) = \Phi_0[\cos(\omega(t + \Delta t)) - \cos(\omega t)] = \\ &= \Phi_0[\cos(\omega t) \cos(\omega\Delta t) - \sin(\omega t) \sin(\omega\Delta t) - \cos(\omega t)], \end{aligned} \quad (3.128)$$

přičemž jsme využili součtový vzorec pro kosinus. Je-li ovšem  $\Delta t$  velmi malé, pak i  $x = \omega\Delta t \doteq 0$ . Využijeme, že pro hodnoty blízké nule aproximujeme  $\cos x \doteq 1$ ,  $\sin x \doteq x$  a čteme

$$\Delta\Phi \doteq \Phi_0[\cos(\omega t) \cdot 1 - \sin(\omega t) \cdot \omega\Delta t - \cos(\omega t)] = -\Phi_0\omega \sin(\omega t)\Delta t, \quad (3.129)$$

odkud rovnou

$$U = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \Phi_0\omega \sin(\omega t). \quad (3.130)$$

To ovšem znamená, že indukované napětí má harmonický průběh, navíc se mění s úhlovou frekvencí stejnou, jako je rotace smyčky. Také vidíme, že amplituda indukovaného napětí je přímo úměrná úhlové frekvenci, tedy čím rychleji bude cívka v magnetickém poli rotovat, tím větší napětí se indukuje. Tento příklad je tedy základem výroby elektrického proudu, jak jej známe a používáme.

**Př. 118:** Insp. [V102]. Určete kinetickou energii v relativistické fyzice a srovnajte s kinetickou energií v klasické fyzice.

**Řeš.:** Těleso pohybující se rychlostí  $v$  má definovanou energii podle tzv. Einsteina vzorce  $E = \gamma mc^2$ , kde  $m$  je klidová hmotnost tělesa,  $c$  je rychlost světla a  $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ . Kinetickou energii definujeme jako rozdíl energie tělesa v pohybu a klidu  $T = E(v) - E(0) = mc^2(\gamma - 1)$ . Klasicky je kinetická energie určena jako  $T = \frac{1}{2}mv^2$ . Tyto výrazy se zdají být diametrálně odlišné, ale zkoumejme tzv. klasickou aproximaci, tj. případ  $v \doteq 0$ . Potom lze rozvinout  $\gamma$  faktor jako funkci  $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$  při  $x = -\frac{v^2}{c^2} \doteq 0$ , proto do prvního řádu Taylorova rozvoje

$$T = mc^2 \left[ (1+x)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] \doteq mc^2 \left[ \left(1 - \frac{x}{2}\right) - 1 \right] = mc^2 \cdot \left( -\frac{-\frac{v^2}{c^2}}{2} \right) = \frac{1}{2}mv^2. \quad (3.131)$$

Klasická kinetická energie je tedy první přiblížení relativistické kinetické energie.

**Př. 119:** Insp. [F78]. Dokažte z barometrické rovnice  $p = p_0 e^{-\frac{\rho g}{p_0} \Delta h}$  (při konstantní teplotě), že pro malé rozdíly nadmořských výšek  $\Delta h$  platí vzorec pro hydrostatický tlak  $\Delta p = -\rho g \Delta h$  v homogenním tíhovém poli. Jaký atmosférický tlak naměříme přesně a v aproximaci v Praze a na vrcholu Sněžky, je-li na hladině moře normální atmosférický tlak  $p_0 = 1013,25 \text{ hPa}$ ? Průměrná nadmořská výška v Praze je  $h = 235 \text{ m}$ , vrchol Sněžky leží ve výšce  $h = 1603 \text{ m}$  a hustotu vzduchu berte  $\rho = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

**Řeš.:** Taylorova aproximace  $e^x \doteq 1+x$  dává:  $p = p_0(1 - \frac{\rho g}{p_0} \Delta h) \Leftrightarrow \Delta p = p - p_0 = -\rho g \Delta h$ . Znaménko mínus je zde za pokles tlaku s rostoucí nadmořskou výškou, narozdíl od běžného výkladu látky totiž neměříme hloubku, vertikální osa je opačně orientovaná.

Užitím barometrické rovnice pro tlak v Praze získáváme  $p = 1013,25 e^{\frac{1,2 \cdot 9,81 \cdot 235}{101325}} \doteq 985,96 \text{ hPa}$ , zatímco při aproximaci  $p = 1013,25 - \frac{1,2 \cdot 9,81 \cdot 235}{100} \doteq 985,59 \text{ hPa}$ , rozdíl tedy neuvidíme při zaokrouhlení na tři platná místa. Pro vrchol Sněžky dostaneme tlaky asi  $841 \text{ hPa}$  přesně a  $825 \text{ hPa}$  v aproximaci.

**Př. 120:** © Při výbuchu jaderné elektrárny Černobyl uniklo množství radioaktivního izotopu  $^{137}\text{Cs}$  s poločasem přeměny  $T_{1/2} = 30,17 \text{ let}$ . Určete, jaká část množství se rozpadla za rok od incidentu.

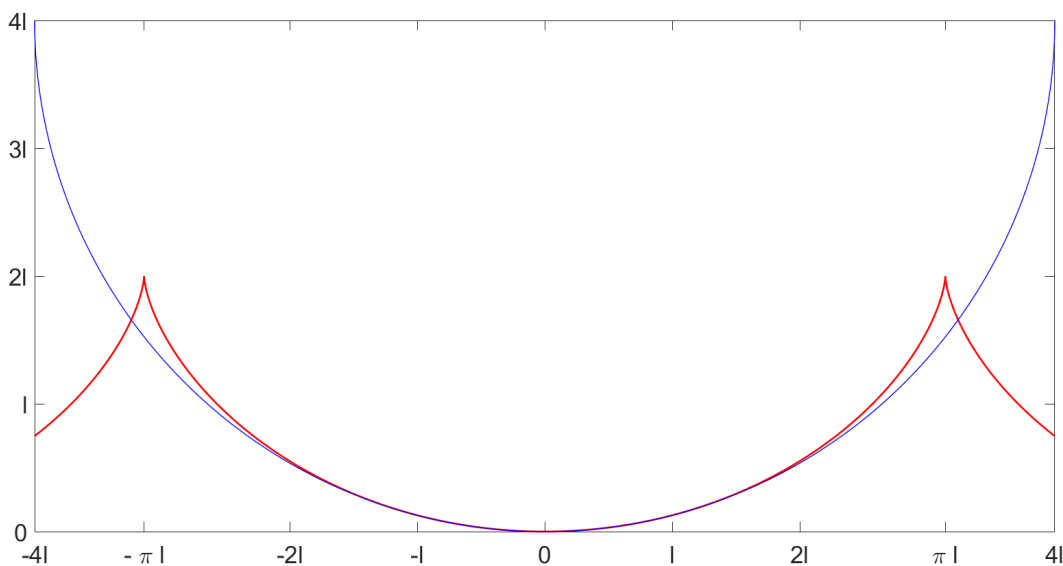
**Řeš.:** Zákon rozpadu zapíšeme  $\frac{m(t)}{m_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \doteq 1 - \frac{1 \cdot \ln 2}{30,17} \doteq 1 - 0,023$ . Za rok se tedy rozpadne asi 2,3% cesia. Stejně zaokrouhlený výsledek dostaneme i explicitním výpočtem exponenciály, výsledky  $\frac{m(t)}{m_0}$  se liší na 4. desetinném místě.

Sekci uzavřeme krátkou úvahou o jedné ze základních úloh mechaniky, lineárním harmonickém oscilátoru, vytkneme si úkol studovat matematické kyvadlo za aproximací malých odchylek. Polohu kyvadla v kružnici, kterou opisuje, charakterizujeme úhlem, který svírá průvodič bodu se svislou poloosou mířící dolů. Do 2. Newtonova zákona dosadíme průmět gravitační síly a obdržíme formální diferenciální rovnici  $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$ , kterou v případě běžného způsobu řešení aproximujeme  $\sin \varphi \doteq \varphi$ . Potom takové diferenciální rovnici vyhovuje  $\varphi(t) = \sin \omega t$ ,

kde  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Perioda kyvadla je tím pádem  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \doteq 2\sqrt{l}$  (při zaokrouhlení  $g \doteq \pi^2$  na Zemi) a nezávisí na počáteční výchylce. Pokud nepoužijeme taylorovskou aproximaci, nejsme schopni úlohu zintegrovat, protože vede na nový typ funkcí, tzv. eliptický integrál 1. druhu, [V103]. O něm lze pokročilými metodami ukázat, že perioda kyvadla závisí na tzv. rozkmitu, čili počáteční výchylce  $\varphi_m$  v komplikovaném rozvoji:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_m}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\varphi_m}{2} + \dots \right] \quad (3.132)$$

Při aproximaci  $\varphi \doteq 0$  skutečně tento vzorec přechází na periodu  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . Komplikované řešení vzešlo z toho, že závaží kyvadla koná kruhový pohyb. Takové závaží i v aproximaci malých kmitů časem nakumuluje chybu, čili jednoduché kyvadlové hodiny nemohou běžet přesně a nelze je ani kalibrovat, pokud nejsme s to udržet konstantní amplitudu. Existuje křivka, po níž by se závaží mělo pohybovat, aby hodiny běžely rovnoměrně při jakémkoliv - nejen dostatečně malé - výchylce? Ano, tou křivkou je cykloida, což lze ověřit výpočtem komplikovaného integrálu, viz [F79]. Cykloida je křivka, kterou opisuje pevně zvolený bod na kružnici, která se odvaluje po přímce. Tedy například kamínek uvázlý v pneumatice automobilu. Fakt, že cykloidální kyvadlo umožňuje měřit čas rovnoměrně, zjistil už francouzský matematik a fyzik Ch. Huygens, který díky tomu roku 1673 sestrojil přesné hodiny. Cykloidální kyvadlo lze snadno sestrojít upravením závěsu kyvadla do specifického tvaru (matematicky jde o evolventu cykloidy). Kružnici původního matematického kyvadla můžeme považovat za první přiblížení cykloidy, jak ukazuje obrázek 3.25, kde je vykreslena cykloida se svou oskulační kružnicí. Má-li oskulační kružnice poloměr  $4l$ , cykloida vznikla odvalováním kružnice o poloměru  $l$  a perioda cykloidálního kyvadla je přesně  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ .



Obrázek 3.25: Cykloida (červeně) a její oskulační kružnice (modře).

# Závěr

Náročná výuka *D&I* je spíše na okraji zájmu, přitom jde o zajímavé a hodnotné partie matematiky, jak jsme ukázali sadou příkladů. Proto mají co říct na střední škole, což jsme prokázali zejména studiem rámcových vzdělávacích programů. Hlavní myšlenkou této práce je potřeba propedeutiky, která buduje související koncepty, na nichž se později samotná výuka vystaví. Kromě běžně vnímaných pojmů jsme se soustředili na faktory, jejichž propedeutický potenciál je opomíjen. Tyto pojmy jsou diference, chyba (měření), diferenciál a Cavalieriho princip. Propedeutiku je třeba vést cíleně a smysluplně, aby např. učitel fyziky nevysvětloval několikrát odděleně určení veličiny jako obsahu plochy pod křivkou, ale aby s touto situací pracoval s vědomím, že zakládá důležitou myšlenku integrálu. Příležitostí k propedeuci je mnoho, nalézáme je už na základní škole např. v pojmu rychlost či při práci s chybou měření. Poskytli jsme širokou sadu příkladů a textů, které mají propedeutickou roli. Přitom zůstávají méně kognitivně náročné. V rámci propedeutických úvah jsme také upozornili na četné miskoncepce, např. v chápání hodnoty a změny hodnoty veličiny, pojmu rychlost či nedostatečnou intuicí o nekonečnu.

Další esencí pro úspěšnou výuku *D&I* je kvalitní motivace a potenciál praktického využití. K tomu jsme učiteli nabídli texty o pokročilejších partiích a též sady příkladů. Bez patřičného nadhledu a mezioborového přesahu nemůže učitel látku podat atraktivně a smysluplně. Mezi nadstavbová témata jsme zařadili Taylorův rozvoj, který v sobě elegantně propojuje pojmy chyby a derivace. Přitom na něm jsou postaveny mnohé středoškolské fyzikální zákony, jako např. vztah pro teplotní roztažnost.

Za nezbytné považujeme propojení matematiky s fyzikou, které ilustrujeme přehledy fyzikálních témat opřených o matematické pojmy, např. jsme jmenovali veličiny probírané na SŠ, které jsou definované prostřednictvím derivace. Velkou část příkladů jsme převedli do fyzikálního kontextu, čímž se podle nás dosáhne větší atraktivity látky. Důležitým upozorněním pro učitele je, že od žáka při výuce *D&I* vyžadujeme mnoho. Kromě pochopení myšlenek, které jsou objektivně obtížné, vyžadujeme práci s logickými výroky, aritmetickou zručnost, geometrickou představivost a zvládnutí limity. Cílem samotné výuky by mělo být soustředění na základní myšlenky, např. že integrace je pokročilý způsob sčítání. Právě úspěšná propedeutika a kvalitní motivace umožňují žákovi tyto myšlenky snadněji uchopit a soustředit se na ně.

Rešeršní prací jsme dospěli k závěru, že drtivá část literatury postupuje jarníkovským stylem. Ten není pro středoškoláka vhodný, neboť je velmi zahuštěn a soustředěn na korektnost a faktickou bezvadnost. Té podle nás na středoškolské úrovni nelze dosáhnout a učitel by měl umět dělat kompromis. Dostupná literatura rozumný kompromis nenabízí. Navíc, ZŠ a SŠ učebnice nevedou cílenou propedeuci. Za nejvhodnější současnou SŠ učebnici považujeme [M43], která na rozdíl od klasické [M29] obsahuje motivační texty a je lépe textově i graficky zpracována, ve srovnání s [M42] má citlivější výklad bez faktických chyb a přílišných zjednodušení. Učitel by si podle nás měl před výukou *D&I* projít knihu [V87], která je určena pro samouky či jako podpora VŠ studia a volí příjemnou rovnováhu náročnosti, motivace a aplikace. Kromě toho je ale vhodné pro učitele

projít knihu [F76], která je určena SŠ řešitelům olympiády a je užitečnou sbírkou výkladových textů a zejména aplikací látky ve fyzice. Podpůrné webové materiály k fyzikální olympiádě na stránkách <http://fyzikalniolympiada.cz/texty> rovněž představují pro učitele užitečný zdroj inspirace, ale pro žakovské potřeby jsou příliš obtížné. Ze zahraniční literatury za zajímavé považujeme knihu [V90], která se soustředí na základní myšlenky matematických témat včetně derivací a integrálu a rozebírá i jejich zajímavé souvislosti. [V88] je dostupná pouze v ruském originále, navíc téměř není k sehnání, ale podle nás nejlépe staví na propedeutických základech, které jsme my v této práci položili. Současné webové materiály podle nás nenaplnují svůj potenciál a napředstavují žádnou přidanou hodnotu oproti tradičnímu výkladu opřenému o běžné učebnice.

Doufáme, že naše texty, příklady a doporučení povedou ke zkvalitnění výuky, jejímu obohacení o zajímavé a důležité souvislosti. Také doufáme, že se nám podaří zahájit širší diskuzi a propedeutika a didaktika *D&I* se stanou tématy, kterým se bude věnovat širší odborná veřejnost. Časem se tak zlepší výsledky námi navrženého a vyhodnoceného dotazníku, který zjistil, že na znalostech a schopnostech středoškoláků je mnoho dobrého, ale také mnoho ke zlepšování. Derivace a integrály jsou totiž krásné téma, které si to zaslouží.

# Seznam literatury

---

## Základoškolské výukové materiály

---

- [Z1] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Úvodní opakování*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 2005. ISBN 80-7196-080-2.
- [Z2] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Kladná a záporná čísla*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 2014. ISBN 978-80-7196-371-4.
- [Z3] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Osová a středová souměrnost*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 1995. ISBN 978-80-7196-258-8.
- [Z4] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Dělitelnost*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 2015. ISBN 978-80-7196-261-8.
- [Z5] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Trojúhelníky a čtyřúhelníky*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 2015. ISBN 978-80-7196-332-5.
- [Z6] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Racionální čísla. Procenta*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 2007. ISBN 978-80-7196-238.
- [Z7] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Hranoly*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 2015. ISBN 978-80-7196-257-1.
- [Z8] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Výrazy 1*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2016. ISBN 978-80-7196-013-3.
- [Z9] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Výrazy 2*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2004. ISBN 80-7196-064-0.
- [Z10] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Rovnice a nerovnice*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2002. ISBN 80-7196-014-4.
- [Z11] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Kruhy a válce*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2015. ISBN 978-80-7196-023-2.
- [Z12] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Úměrnosti*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2004. ISBN 80-7196-056-X.
- [Z13] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Geometrické konstrukce*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2003. ISBN 80-7196-114-0.



- [Z14] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Rovnice a jejich soustavy*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2006. ISBN 80-7196-137-X.
- [Z15] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Funkce*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2003. ISBN 80-7196-182-5.
- [Z16] HERMAN, J. a kol.; *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Jehlany a kužely*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2006. ISBN 978-80-7196-225-2.
- [Z17] RAUMER, K. a kol.; *Fyzika 6, učebnice*. 1. vydání. Fraus, Praha, 2004. ISBN 80-7238-210-1.
- [Z18] RAUMER, K. a kol.; *Fyzika 7, učebnice*. 1. vydání. Fraus, Praha, 2005. ISBN 80-7238-431-7.
- [Z19] RAUMER, K. a kol.; *Fyzika 8, učebnice*. 1. vydání. Fraus, Praha, 2006. ISBN 80-7238-525-9.
- [Z20] RAUMER, K. a kol.; *Fyzika 9, učebnice*. 1. vydání. Fraus, Praha, 2007. ISBN 978-80-7238-617-8.
- [Z21] KOLÁŘOVÁ, R., BOHUNĚK, J.; *Fyzika pro 6. ročník základní školy*. 2. upravené vydání. Prometheus, Praha, 2004. ISBN 80-7196-246-5.
- [Z22] KOLÁŘOVÁ, R., BOHUNĚK, J.; *Fyzika pro 7. ročník základní školy*. 2. upravené vydání. Prometheus, Praha, 2013. ISBN 978-80-7196-265-6.
- [Z23] KOLÁŘOVÁ, R., BOHUNĚK, J.; *Fyzika pro 8. ročník základní školy*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2003. ISBN 80-7196-149-3.
- [Z24] KOLÁŘOVÁ, R. a kol.; *Fyzika pro 9. ročník základní školy*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2003. ISBN 80-7196-193-0.
- [Z25] BOHUNĚK, J.; *Sbírka úloh z fyziky pro žáky základních škol 1. díl*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 2005. ISBN 80-85849-06-2.
- [Z26] BOHUNĚK, J.; *Sbírka úloh z fyziky pro žáky základních škol 2. díl*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 2005. ISBN 80-85849-15-1.
- [Z27] BOHUNĚK, J.; *Sbírka úloh z fyziky pro žáky základních škol 3. díl*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 2005. ISBN 80-85849-82-8.
- [Z28] DUBEC, A. a kol.; *Matematika pro osmý postupný ročník*. 1. vydání. SPN, Praha, 1953.

---

## Středoškolské učebnice a cvičebnice matematiky

---

- [M29] HRUBÝ, D., KUBÁT, J.; *Matematika pro gymnázia - Diferenciální a integrální počet*. 3. vydání. Prometheus, Praha, 2008. ISBN 978-80-7196-363-9.
- [M30] ODVÁRKO, O.; *Matematika pro gymnázia - Funkce*. 3. upravené vydání. Prometheus, Praha, 2005. ISBN 80-7196-164-7.
- [M31] ODVÁRKO, O.; *Matematika pro gymnázia - Posloupnosti a řady*. 3. vydání. Prometheus, Praha, 2009. ISBN 978-80-7196-391-2.
- [M32] ODVÁRKO, O.; *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia - Funkce*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 2006. ISBN 80-7196-305-4.
- [M33] ODVÁRKO, O.; *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia - Posloupnosti a řady*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 2005. ISBN 80-7196-314-3.
- [M34] BUŠEK, I., CALDA, E.; *Matematika pro gymnázia - Základní poznatky z matematiky*. 4. vydání. Prometheus, Praha, 2013. ISBN 978-80-7196-366-0.
- [M35] CHARVÁT, J., ZHOUF, J., BOČEK, L.; *Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Prometheus, Praha, 2016. ISBN 978-80-7196-362-2.
- [M36] POMYKALOVÁ, E.; *Matematika pro gymnázia - Planimetrie*. 5. vydání. Prometheus, Praha, 2008. ISBN 978-80-7196-358-5.
- [M37] POMYKALOVÁ, E.; *Matematika pro gymnázia - Stereometrie*. 4. vydání. Prometheus, Praha, 2016. ISBN 978-80-7196-389-9.
- [M38] ODVÁRKO, O.; *Matematika pro gymnázia - Goniometrie*. 3. vydání. Prometheus, Praha, 2005. ISBN 80-7196-203-1.
- [M39] KOČANDRLE, M., BOČEK, L.; *Matematika pro gymnázia - Analytická geometrie*. 3. vydání. Prometheus, Praha, 2018. ISBN 978-80-7196-390-5.
- [M40] CALDA, E.; *Matematika pro gymnázia - Komplexní čísla*. 4. vydání. Prometheus, Praha, 2008. ISBN 978-80-7196-364-6.
- [M41] CALDA, E., DUPAČ, V.; *Matematika pro gymnázia - Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*. 5. vydání. Prometheus, Praha, 2017. ISBN 978-80-7196-365-3.
- [M42] LIŠKA, M.; *Matika pro spolužáky - Diferenciální a integrální počet*. 1. vydání. Prospolužáky.cz s.r.o., Praha, 2018. ISBN 978-80-88255-32-1.
- [M43] ZEMEK, V.; *Matematika pro střední školy 10. díl (učebnice)*. 1. vydání. Didaktis, Brno, 2019. ISBN 978-80-7358-314-9.
- [M44] ZEMEK, V.; *Matematika pro střední školy 5. díl (pracovní sešit)*. 1. vydání. Didaktis, Brno, 2015. ISBN 978-80-7358-218-0.

- [M45] VOŠICKÝ, Z.; *Matematika v kostce pro střední školy*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2007. ISBN 978-80-253-0191-3.
- [M46] RIEČAN, B., FRANEK, M., ČERVENKOVÁ, O.; *Úlohy z matematiky pro III. ročník gymnasia*. 1. vydání. SPN, Praha, 1974. ISBN 14-227-74.
- [M47] PETRÁNEK, O., SCHMIDTMAYER, J., ŠIKOLA, B.; *Matematika 3 pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy*. 1. vydání. SPN, Praha, 1980. ISBN 14-533-80.
- [M48] RYŠAVÝ, V.; *Počátky vyšší matematiky v řešených úlohách*. JČMF, Praha, 1945. ISBN 80-7196-048-9.

---

## Středoškolské učebnice a cvičebnice fyziky

---

- [F49] LEPIL, O. a kol.; *Fyzika pro gymnázia - Mechanika*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 1995. ISBN 80-7196-048-9.
- [F50] BARTUŠKA, K., SVOBODA, E.; *Fyzika pro gymnázia - Molekulová fyzika a termika*. 4. vydání. Prometheus, Praha, 2002. ISBN 80-7196-200-7.
- [F51] LEPIL, O.; *Fyzika pro gymnázia - Optika*. 3. vydání. Prometheus, Praha, 2004. ISBN 80-7196-237-6.
- [F52] LEPIL, O. a kol.; *Fyzika pro gymnázia - Mechanické kmitání a vlnění*. 3. vydání. Prometheus, Praha, 2001. ISBN 80-7196-216-3.
- [F53] LEPIL, O.; *Fyzika pro gymnázia - Elektřina a magnetismus*. 5. vydání. Prometheus, Praha, 2000. ISBN 80-7196-202-3.
- [F54] MACHÁČEK, M.; *Fyzika pro gymnázia - Astrofyzika*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 1998. ISBN 80-7196-091-8.
- [F55] ŠTOLL, I.; *Fyzika pro gymnázia - Fyzika mikrosvěta*. 3. vydání. Prometheus, Praha, 2002. ISBN 80-7196-241-4.
- [F56] BARTUŠKA, K.; *Fyzika pro gymnázia - Speciální teorie relativity*. 3. vydání. Prometheus, Praha, 2001. ISBN 80-7196-209-0.
- [F57] BARTUŠKA, K.; *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy. Díl I. Mechanika*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 1997. ISBN 80-7196-236-8.
- [F58] BARTUŠKA, K.; *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy. Díl II. Molekulová fyzika a termika; Mechanické kmitání a vlnění*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 1997. ISBN 80-7196-289-9.
- [F59] BARTUŠKA, K.; *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy. Díl III. Elektřina a magnetismus*. 2. vydání. Prometheus, Praha, 1998. ISBN 80-7196-235-X.

- [F60] BARTUŠKA, K.; *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy. Díl IV. Optika; Fyzika mikrosvěta; Speciální teorie relativity*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2000. ISBN 80-7196-037-3.
- [F61] LEPIL, O., BEDNAŘÍK, M., HÝBLOVÁ, R.; *Fyzika pro střední školy II*. 3. vydání. Prometheus, Praha, 2010. ISBN 978-80-7196-185-7.
- [F62] VACHEK, J. a kol.; *Fyzika pro 1. ročník gymnázií*. 2. vydání. SPN, Praha, 1985.
- [F63] SVOBODA, E. a kol.; *Fyzika pro 2. ročník gymnázií*. 1. vydání. SPN, Praha, 1985.
- [F64] NAHODIL, J. a kol.; *Fyzika v běžném životě*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 1996. ISBN 80-7196-005-5.
- [F65] NEČAS, T.; *Fyzika pro gymnázia - Mechanika*. Disertační práce online [https://is.muni.cz/th/lvbeb/disertacni\\_prace.pdf](https://is.muni.cz/th/lvbeb/disertacni_prace.pdf)
- [F66] LEPIL, O. a kol.; *Fyzika - Sbírka úloh pro střední školy*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 1995. ISBN 80-7196-048-9.
- [F67] KRUŽÍK, M. a kol.; *Sbírka úloh z fyziky pro žáky středních škol*. 4. vydání. SPN, Praha, 1979. ISBN 14-190-79.
- [F68] TOMANOVÁ, E. a kol.; *Sbírka úloh z fyziky pro gymnázia I. díl*. 1. vydání. SPN, Praha, 1988. ISBN 14-624-88.
- [F69] KOUBEK, V. a kol.; *Sbírka úloh z fyziky pro gymnázia II. díl*. 1. vydání. SPN, Praha, 1988. ISBN 80-04-23-980-3.
- [F70] LINDNER, H.; *Riešené úlohy z fyziky*. 1. vydání. ALFA, Bratislava, 1973. ISBN 63-028-72.
- [F71] ŽIVNÝ, F., LEPIL, O.; *Praktická cvičení z fyziky*. 5. vydání. SPN, Praha, 1974. ISBN 14-241-74.
- [F72] BALÁŽ, O.; *Zbierka úloh z fyziky*. 4. opravené vydání. SPN, Bratislava, 1969. ISBN 67-025-69.
- [F73] ŠANTAVÝ, I., TROJÁNEK, A.; *Fyzika - příprava k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Prometheus, Praha, 2002. ISBN 80-7196-138-8.
- [F74] KUBÍNEK, R., KOLÁŘOVÁ, H.; *Fyzika v příkladech a testových otázkách*. 1. vydání. Rubico s.r.o, Olomouc, 1996. ISBN 80-85839-07-5.
- [F75] KOHOUT, V.; *Písemky z fyziky SŠ*. 1. vydání. Nakladatelství Scientia, Praha, 2007. ISBN 978-80-86960-30-2.
- [F76] UNGERMANN, Z.; *Matematika a řešení fyzikálních úloh*. 1. vydání. SPN, Praha, 1990. ISBN 80-04-22957-3.
- [F77] VOLF, I., ŠEDIVÝ, P.; *Pohyby tělesa v odporujícím prostředí*. Studijní text pro řešitele fyzikální olympiády. <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/odpor.pdf>

- [F78] KAPOUN, M.; *Aproximace ve fyzikálních úlohách*. Studijní text pro řešitele fyzikální olympiády. <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/aproxim.pdf>
- [F79] JAREŠOVÁ, M., VOLF, I.; *Matematika křivek*. Studijní text pro řešitele fyzikální olympiády. <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf>
- [F80] VYBÍRAL, B.; *Zpracování dat fyzikálních měření*. Studijní text pro řešitele fyzikální olympiády. <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/mereni.pdf>

---

## Vysokoškolské a pokročilé výukové materiály

---

- [V81] JARNÍK, V.; *Diferenciální počet (I)*. 6.vydání. Academia, Praha, 1974.
- [V82] JARNÍK, V.; *Integrální počet (I)*. 5.vydání. Academia, Praha, 1974.
- [V83] JARNÍK, V.; *Diferenciální počet (II)*. 4.vydání. Academia, Praha, 1984.
- [V84] JARNÍK, V.; *Integrální počet (II)*. 3.vydání. Academia, Praha, 1984.
- [V85] VOJTĚCH, J.; *Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických, část I*. 7.vydání. JČMF, Praha, 1947.
- [V86] VOJTĚCH, J.; *Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických, část II*. 6.vydání. JČMF, Praha, 1949.
- [V87] РЕКТОРЫС, К.; *Co je a k čemu je vyšší matematika*. 1. vydání. Academia, Praha, 2001. ISBN 80-200-0883-7.
- [V88] ЗЕЕДОВИЧ, Я.В.; *Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике (Vyšší matematika pro začátečníky a její aplikace ve fyzice)*. Nauka, Moskva, 1965.
- [V89] ЗЕЕДОВИЧ, Я.В., ЯГЛОМ, И.М.; *Высшая математика для начинающих физиков и техников (Vyšší matematika pro začínající fyziky a techniky)*. Nauka, Moskva, 1982.
- [V90] COLERUS, E.; *Od násobilky po integrál*. 2. vydání. ALFA, Bratislava, 1969. ISBN 63-001-69.
- [V91] KVASNICA, J.; *Matematický aparát fyziky*. 2. opravené vydání. Academia, Praha, 2004. ISBN 80-200-0603-6.
- [V92] PELANTOVÁ, E., VONDRÁČKOVÁ, J.; *Matematická analýza 1*. 1. vydání. Nakladatelství ČVUT, Praha, 2007. ISBN 978-80-01-03011-0.
- [V93] PELANTOVÁ, E.; *Matematická analýza 2*. 1. vydání. Nakladatelství ČVUT, Praha, 2007. ISBN 978-80-01-03661-7.
- [V94] MASÁKOVÁ, Z.; *Diskrétní matematika II*. Online skripta [http://people.fjfi.cvut.cz/masakzuz/dim\\_soubory/dim2.pdf](http://people.fjfi.cvut.cz/masakzuz/dim_soubory/dim2.pdf)

- [V95] ČERNÝ, R., POKORNÝ, M. ; *Matematická analýza pro fyziky 1*. Online skripta [http://www.karlin.mff.cuni.cz/~lavicka/vyuuka/maf/skript\\_a\\_MAF\\_cerny\\_pokorny.pdf](http://www.karlin.mff.cuni.cz/~lavicka/vyuuka/maf/skript_a_MAF_cerny_pokorny.pdf)
- [V96] HLAVÁČEK, A.; *Sbírka příkladů z vyšší matematiky pro přípravu pracujících ke studiu na vysokých školách*. SPN, Praha, 1965.
- [V97] LIBRA, M. a kol.; *Fyzika v příkladech pro studenty technických univerzit*. Nakladatelství R. Hájek, Ústí nad Labem, 2003. ISBN 80-96540-17-0.
- [V98] SAMEK, L., ČERNÝ, F.; *Fyzika v příkladech - Mechanika - Pro studenty vysokých škol*. 1. vydání Academia, Praha, 2014. ISBN 978-80-200-2319-3.
- [V99] HAVLÍČEK, K.; *Diferenciální počet pro začátečníky*. SNTL, Praha, 1965.
- [V100] HORSKÝ, Z.; *Diferenciální počet*. SNTL, Praha, 1981. ISBN 04-012-81.
- [V101] ŠTOLL, I.; *Mechanika*. 3. vydání. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2010. ISBN 978-80-01-04554-1.
- [V102] ŠTOLL, I.; *Elektřina a magnetismus*. 2. vydání. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2003. ISBN 80-01-02693-0.
- [V103] ŠTOLL, I., TOLAR, J.; *Teoretická fyzika*. 4. vydání. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2008. ISBN 978-80-01-04005-8.
- [V104] HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J.; *Fyzika. Část 1 - Mechanika*. 1. vydání. VUTIUM, Brno a Prometheus, Praha 2000. ISBN 80-214-1868-0 (VUTIUM), ISBN 81-7196-213-9 (Prometheus).

---

## Ostatní

---

- [O105] MANDÍKOVÁ, D., TRNA, J.; *Žákovské prekoncepce ve výuce fyziky*. Paído, Brno, 2011. ISBN 978-80-7315-226-0.
- [O106] PAVELKOVÁ, I., HRABAL, V.; *Jaký jsem učitel*. Portál, Praha, 2010. ISBN 978-80-7367-755-8.
- [O107] LIDE, D.R. a kol.; *Handbook of Chemistry and Physics 85<sup>th</sup> edition*. CRC Press, Boca Raton, 2005.
- [O108] *Učitel matematiky*. Čtvrtletní magazín, různá čísla. Online na <https://ojs.cuni.cz/ucitel/>

# A. Dotazník ke stavu výuky

Abychom poznali, v jakém stavu současná výuka *D&I* je, vytvořili jsme dotazník A.1, který byl určen pro čerstvé studenty prvního ročníku bakalářského studia na FJFI ČVUT v Praze. Dotazníkové šetření proběhlo 4.10.2019 během přednášky z matematické analýzy. Z odevzdaných 154 lístků jsme vyřadili ty od žáků, kteří studovali SŠ v zahraničí. Následující statistické vyhodnocení se tedy opírá výhradně o výpovědi českých žáků, kterých bylo 132. Pokud student na danou otázku neodpověděl, pak jeho odpověď započítána není, proto ne vždy sedí kontrolní součet odpovědí. Lístky od zahraničních studentů nám posloužily jen pro srovnání a obohatily nás o pár zajímavostí o zahraničním vzdělání, ale vzhledem k nepatrnému počtu takových lístků z nich netvoříme žádné závěry.

Základní okolností dotazníku je, že šetření proběhlo mezi studenty, kteří se rozhodli matematiku/fyziku do hloubky studovat, mají pro to nejspíše vhodnou SŠ přípravu a také jistou dávku vloh. Stejný dotazník by mezi ostatními odmaturovanými mohl dopadnout výrazně odlišně. Druhou okolností zadání dotazníku je to, že studenti již v té době byli ve druhém týdnu semestru. Tomu navíc předcházel tzv. přípravný kurz, kdy se studenti intenzivně seznamovali mj. s pojmy derivace a integrál. Naše šetření o aktuálních znalostech z oboru tedy můžeme považovat za mírně zkreslené ve prospěch znalostí studentů.

Smyslem dotazníku je dvojitý pohled na nabyté vzdělání. První strana dotazníku obsahuje otázky typu, "myslím si", "porozuměl jsem" a ptá se na žákovu sebehodnocení a také hodnocení učitele, tím zjišťuje subjektivní vnímání vlastních znalostí žáka. Druhá strana (kterou si žák typicky nepročte před vyplněním první strany) pak nekompromisně testuje skutečné znalosti konkrétními otázkami, např. na pravidlo integrace per partes, tím objektivně zjišťuje žákovy znalosti. Tento dvojitý metr umožňuje objektivní znalosti a sebevnímání žáka konfrontovat a ukázat, zda si žák oprávněně přisvojuje porozumění látce.

Dotazník jsme zadali v této formě úmyslně, protože se autor dennodenně setkává s přehnaným sebehodnocením, ale nedostatečnými znalostmi. Dotazník tento nesoulad objektivně posoudí. Kromě toho má dotazník poskytnout základní údaje o tom, kolik studentů (matematicko-fyzikálních oborů) prošlo nějakou formou výuky derivací a integrálů na SŠ, zjistit, jak úspěšná ona výuka byla, a tedy poskytnout korektní oporu pro některé dojmy a názory autora. Ve své podstatě budou zanalyzovaná data i motivací pro celou tuto práci samotnou.

Dotazník umožnil i zkorelovat známku z fyziky/matematiky s hodnocením učitele a oblibou předmětu. Stručně uvádíme, že dotazník souhlasí s výzkumem v [O106], že obliba předmětu koreluje se známkou žáka, zato hodnocení učitele ne. Lze ovšem spatřovat jistou korelaci v hodnocení učitele a oblibou předmětu. Ve všech ukazatelích jsou silnější korelace u fyziky. Korelační koeficienty jsou k nahlédnutí v tabulce A.1 níže. Nemůžeme zodpovědět, jestli špatný prospěch je příčinou, či následkem neoblíby předmětu, ale můžeme říci, že s tímto faktem by mělo školství pracovat. Nalézáme také částečnou korelaci mezi žákovými známkami z matematiky a fyziky, jejich korelační koeficient je 0,3128. Domníváme se, že se zde ukazuje propojení obou předmětů, na což jsme v práci kladli důraz. Učitelé matematiky obdrželi od svých žáků průměrnou známku 1,75, fyzikáři pak 1,92. Průměrná známka žáků přitom je z matematiky 1,53 a z fyziky 1,38.

### Dotazník k výuce infinitesimálního počtu

Jaký typ střední školy jsi absolvoval(a) (např. průmyslová stavební, gymnázium se zaměřením na jazyky, lyceum...)? V jakém kraji?

.....; kraj .....

*Odpověz na následující tvrzení, z nabízených možností zakroužkuj nejvhodnější.*

- Matematika mě bavila. ano, hodně – ano – ani ne – vůbec
- Fyzika mě bavila. ano, hodně – ano – ani ne – vůbec
- Mého matikáře bych označoval známkou: 1 – 2 – 3 – 4 – 5
- Mého fyzikáře bych označoval známkou: 1 – 2 – 3 – 4 – 5

Pojem limita jsem pochopil. ano – ne – neznám

Pojem limita mi přijde složitý, náročný. ano – ne – neznám

Rozumím matematické definici spojitosti funkce. ano – ne – neznám

Derivace a integrály jsme ve škole probírali. ano – ne

Myslím, že pojem derivace jsem pochopil. ano – ne

Myslím, že neurčitý integrál jsem pochopil. ano – ne

Myslím, že určitý integrál jsem pochopil. ano – ne

Chápu vztah mezi určitým a neurčitým integrálem. ano – ne

Ovládám pravidla pro aritmetiku derivací a integrálů. ano – ne

Látka o derivacích mi přišla zajímavá. ano – ne

Látka o integrálech mi přišla zajímavá. ano – ne

Derivace a integrály považuji za užitečné. ano – ne

Zpětně vidím, že derivace a integrály se prolínaly ano – ne

látkou celého SŠ studia (byť skrytě).

*Oneš stranu*

*Odpověz na následující otázky, stačí heslovitě a není nutné vyplnit všechny body:*

Derivace funkce v daném bodě geometricky vyjadřuje:

.....

Pravidlo integrace per partes zní:

.....

Znalost derivací bych využil třeba v následujících problémech/úlohách:

- 1) .....
- 2) .....
- 3) .....
- 4) .....

Znalost integrálů bych využil třeba v následujících problémech/úlohách:

- 1) .....
- 2) .....
- 3) .....
- 4) .....

Kde najdu derivaci a integrál ve fyzice?

- 1) .....
- 2) .....
- 3) .....
- 4) .....

Z matiky jsem mival(a) známky typicky ....., z fyziky pak většinou .....

*Děkujeme za vyplnění dotazníku!*

Obrázek A.1: Dotazník na infinitesimální počet.



Korelační koeficient	Obliba matematiky	Známka z matematiky	Hodnocení matikáře
Obliba matematiky	X	0,5356	0,2131
Známka z matematiky	0,5356	X	0,1362
Hodnocení matikáře	0,2131	0,1362	X

Korelační koeficient	Obliba fyziky	Známka z fyziky	Hodnocení fyzikáře
Obliba fyziky	X	0,5516	0,3909
Známka z fyziky	0,5516	X	0,3209
Hodnocení fyzikáře	0,3909	0,3209	X

Tabulka A.1: Korelační koeficienty pro oblibu, známku a hodnocení učitele.

V rámci subjektivního hodnocení se měli studenti vyjadřovat, zda rozumí daným pojmům. Není tím vůbec zodpovězeno, že skutečně pojmu rozumí - mohou si mylně myslet, že ano, ale také mohou jen předstírat. Anebo pojem skutečně chápou, ale podle své představy, která může být zkreslená či nějak zjednodušená, podle výuky pedagoga. Pokud tedy student odpověděl, že pojmu rozumí, nemůžeme usuzovat, že tomu tak je. Nám jde ale o to, udělat si přehled o žácích, kteří se přiznávají, že tyto pojmy nezvládli, a také o počtu žáků, kteří jdou studovat matematiku a s limitou či spojitostí se na SŠ nesetkali. Z anketních lístků, kde byly odpovědi zaškrtnuty, shrnujeme data do tabulky A.2.

Otázka (a # odpovědí)	Ano	Ne	Neznám
Pojmu limita rozumím (131)	91,60%	5,34%	3,05%
Pojem limita mi přijde náročný (130)	17,69%	79,23%	3,07%
Rozumím matem. definici spojitosti funkce (128)	75,00%	13,28%	11,72%

Tabulka A.2: Subjektivní názor žáků na porozumění pojmům.

Shrňme podstatné: 3% žáků se na SŠ nesetkaly s pojmem limita. Z těch, kteří výukou prošli, se jen lehce přes 5% přiznává, že limitám nerozumí. Přes 79% limity nepovažuje za náročné, což považujeme za nesmírně zajímavé, protože abstraktní koncept zahrnující formalismus delt a epsilonů je zcela objektivně pro středoškolačka obtížný. Pokud by tedy těchto 79% žáků mělo pravdu, mohli bychom naše školství považovat za skvělé. Jenže praktické zkušenosti z výuky na VŠ ukazují, že toto číslo neodpovídá skutečnosti, jak ukážeme níže. Přes 11% se nesetkalo s pojmem spojitosti a jen necelých 85% žáků, kteří ji probrali, její definici údajně rozumí. Ačkoliv pojem spojitosti není nezbytně nutný k výuce  $D&I$ , jako určitá synergie je užitečný, a závěry dotazníku tedy nejsou povzbudivé.

Subjektivní hodnocení dotazníku provedeme přehledem sečtených odpovědí v tabulce A.3, odkud čtenář vyčte velkou škálu informací. Přitom rozebíráme jen 113 ze 131 platných lístků, a to žáků, kteří prošli nějakou výukou  $D&I$ . Konstatujeme tedy, že asi 86% žáků prošlo výukou  $D&I$ . Všichni se podle svého názoru orientují v derivacích, ale asi 10% se přiznává, že nerozumí integrálům. Téměř 19% žáků sice ovládá určitý i neurčitý integrál, ale nechápou jejich vzájemnou souvislost. Zhruba jeden z deseti je nepovažuje za zajímavou látku.

Výpověď	# odpovědí	
	ANO	NE
Derivaci jsem pochopil.	113	0
Neurčitý integrál jsem pochopil.	103	9
Určitý integrál jsem pochopil.	101	11
Chápu vztah mezi určitým a neurčitým integrálem.	85	26
Chápu určitý i neurčitý integrál. A vztah mezi nimi chápu.	78	18
Ovládám pravidla pro aritmetiku $D&I$ .	90	20
Derivace jsou zajímavé.	103	10
Integrály jsou zajímavé.	100	12
$D&I$ jsou užitečné.	110	3
$D&I$ v látce celé SŠ rozpoznávám.	85	27
Derivaci i integrál (určitý i neurčitý) jsem pochopil a nalézám je v látce celé SŠ.	75	41
Derivace jsem pochopil a jsou zajímavé.	103	10
Integrály (určitý či neurčitý) jsem pochopil a jsou zajímavé.	89	8

Tabulka A.3: Subjektivní názor žáků, kteří prošli výukou, na pochopení  $D&I$ .

Druhá strana dotazníku testuje objektivní znalosti studentů, výsledky jsou v tabulce A.4. Jelikož otázky byly otevřené, hodnotili jsme je následujícím způsobem: Pokud žák projevils přesnou znalost, připisujeme mu atribut „zná“; v případě, že jmenuje netriviální aplikace, zapisujeme je jako „široké“. Pokud žák formuluje myšlenku pouze orientačně, např. derivaci označí jako „tečnu k funkci“ či vzorec pro per partes zapíše ve formátu  $\int uv' = uv - u'v$ , pak odpověď přiřazujeme do skupiny „tuší“; pokud z aplikací jmenuje pouze hledání tečny ke grafu, určení rychlosti pohybu či obsahu plochy pod křivkou, označujeme, že zná „základní“ aplikace. Pokud je odpověď fundamentálně špatná, či chybí, zapisujeme jako „nezná“ či „žádné“ aplikace. Specifickou situací je, že k využití  $D&I$  ve fyzice napsala část žáků, že je lze nalézt všude. Tato šalomounská odpověď je svým způsobem pravdivá, ale neukazuje objektivní znalost žáka, proto ji řadíme jako zvláštní kategorii. Základním závěrem je, že velká část studentů má tušení o základních vlastnostech a aplikacích, ale není schopna je formulovat přesně. Navíc se omezují na základní poučky o tečně či obsahu plochy. Takto hrubé či vágní znalosti jsou podle nás pravděpodobně příčinou, že za zajímavé  $D&I$  považuje jen asi 9 z 10 žáků.

Žáků	zná	tuší	nezná	
geometrickou interpretaci derivace	37	49	26	
vzorec per partes	43	26	43	
<b>Žáků zná</b>	<b>široké</b>	<b>základní</b>	<b>žádné</b>	
využití derivace	17	69	26	
využití integrálu	13	82	17	
<b>Žáků zná</b>	<b>jsou všude</b>	<b>široké</b>	<b>základní</b>	<b>žádné</b>
využití $D&I$ ve fyzice	14	30	45	23

Tabulka A.4: Objektivní znalosti žáků, kteří prošli výukou  $D&I$ .

Závěry z testu objektivních znalostí jsou neutěšivé, neboť říkají např., že téměř čtvrtina žáků není schopna po výuce derivací ani částečně vysvětlit její geometrický význam coby směrnice tečny, přičemž právě odsud se k definici derivace přijde. Podrobněji interpretujeme hodnoty srovnáním subjektivního a objektivního vnímání, které je detailně rozepsané v tabulce A.5. Jelikož většina studentů deklarovala, že *D&I* rozumí, hodnoty jsou podobné.

Ze 112 lidí, kteří o sobě tvrdí, že derivace chápou, téměř čtvrtina neprokázala ani přibližně její geometrický význam. Podobně s integrály, kdy asi 30% žáků tvrdí, že ovládá aritmetiku derivací a integrálů, ale není schopno ani přibližně vyjádřit vzorec integrace per partes. Souhrnně tvrdíme, že znalosti žáků jsou iluzorní. Domníváme se, že nesoulad subjektivního a objektivního hodnocení spočívá ve dvou věcech. Jednou z nich je přehnané sebehodnocení žáka (vzniklé nedostatečným vzděláním?) a druhou to, že žák nejspíš umí jen mechanicky vypočítávat jednoduché příklady typu „Zderivuj  $f!$ “ To ovšem je situace, která není žádoucí, rádi bychom, aby žáci došli hlubšímu porozumění a znali praktické využití *D&I*, což jich prokázalo jen asi 15%. Zhruba dvojnásobnou úspěšnost v znalostech aplikací mají ti žáci, kteří o sobě tvrdí, že si uvědomují roli *D&I* v celé SŠ látce. Právě proto považujeme propedeutiku za významný klíč k výuce *D&I*. Domníváme se, že přesvědčení žáků o zvládnutí látky je opřené o výpočty snadných příkladů např. na derivace polynomů, jednoduché příklady třeba na derivaci polynomů by mohli zvládnout, ale např. 35% žáků (kteří podle svých slov integrály pochopili!) není schopna ani přibližně udat vzorec integrace per partes. Nelze proto podceňovat přehnané sebevědomí žáků, nejspíše i s mechanickým počítáním mohou mít problémy, ale nejsou si toho vědomi. To by měli mít na zřeteli hlavně učitelé na VŠ, kteří předpokládají určitou znalost infinitesimálního počtu.

Je třeba upozornit, že žák mohl některé otázky nepochopit či si je vyložit po svém. To by se mohlo podepsat např. na konfrontaci: „Ovládám pravidla pro aritmetiku *D&I*,“ tvrdí a vzorec integrace per partes žák zná/tuší/nezná. Žák nemusel do svého konceptu pravidel aritmetiky integrálů zahrnovat věty o substituci a per partes. A možná je ze SŠ ani neznal. Pro vysoké relativní zastoupení negativních výsledků se ovšem domníváme, že riziko chybného vyložení není majoritní příčinou. Tu spatřujeme ve skutečných (ne)znalostech, což bychom získali interpretací pouze tabulky A.4 objektivního testu znalostí. Je smutným faktem, že asi 23% žáků nezná žádnou aplikaci derivace a 8% neformuluje ani jedinou aplikaci integrálu. Drtivá většina žáků alespoň uvedla ty základní, které slouží jako motivace pro výstavbu látky, tj. určení tečny ke grafu, určení obsahu plochy pod křivkou, určení rychlosti pohybu, analýzu průběhu funkce atp. Pokročilé znalosti jako např. určení práce, momentů setrvačnosti či řešení optimalizačních úloh přitom lze na SŠ žákům úspěšně předat, o čemž svědčí asi 15% resp. 14% procent žáků, kteří tyto aplikace derivace resp. integrálu uváděli. Zajímavým fenoménem je aplikace *D&I* ve fyzice, kdy 12,5% žáků tvrdí, že je nalézá všude. Není sice objektivně podložené, že o takových aplikacích mají konkrétní povědomí, ale pokud je přesto započítáme k těm, kteří fyzikální aplikace alespoň v náznaku znají, zbývá necelých 17% žáků, kteří nejsou schopni udat jediné propojení *D&I* s fyzikou. I toto číslo ale považujeme za vysoké, protože fyzikální problémy jsou velkou inspirací pro *D&I* a také jich bohatě využívají k řešení každodenních problémů.

Dále konkrétní hodnoty nerozebíráme, necháváme na čtenáři, aby si poskytnutá data interpretoval sám. Uzavíráme dotazníkové šetření tím, že žáci, kteří

Situace		počet odpovědí	relativní zastoupení
"Derivaci jsem pochopil," tvrdí a geometrický význam derivace žák	zná	37	33,04%
	tuší	49	43,75%
	nezná	26	23,21%
"Integrál (určitý nebo neurčitý) jsem pochopil," tvrdí a vzorec integrace per partes žák	zná	43	40,57%
	tuší	26	24,53%
	nezná	37	34,91%
"Ovládám pravidla pro aritmetiku $D&I$ ," tvrdí a vzorec integrace per partes žák	zná	39	43,82%
	tuší	23	25,84%
	nezná	27	30,34%
"Derivaci jsem pochopil," tvrdí a její aplikace žák zná	široké	17	15,18%
	základní	69	61,61%
	žádné	26	23,21%
"Integrál (oba, určitý i neurčitý) jsem pochopil," tvrdí a jeho aplikace žák zná	široké	13	13,54%
	základní	75	78,13%
	žádné	8	8,33%
"Derivaci i integrál (určitý i neurčitý) jsem pochopil," tvrdí a jejich aplikace ve fyzice žák zná	jsou všude	12	12,50%
	široké	28	29,17%
	základní	40	41,67%
	žádné	16	16,67%
" $D&I$ v látce SŠ rozpoznávám," tvrdí a jejich aplikace ve fyzice žák zná	jsou všude	10	11,76%
	široké	23	27,06%
	základní	39	45,88%
	žádné	13	15,29%

Tabulka A.5: Konfrontace subjektivního a objektivního hodnocení studentů. Např. asi 35% žáků uvádí znalost integrálu, ale vzorec pro integraci per partes nedokázali ani naznačit.

jdou studovat matematicko-fyzikální obory, o sobě v drtivé většině tvrdí, že pojmy jako derivace, integrál či limita chápou, ovládají. Bohužel to obvykle znamená tzv. biflování bez hlubšího porozumění. Velkým problémem je, že až čtvrtina žáků odchází z bran SŠ s vědomím, že "všemu rozumí", ale neznají žádné aplikace. Další zhruba dvě třetiny se vyjadřují vágně a znají jen základní aplikace, kde podle kvality poskytnutých odpovědí lze pochybovat o jiném než povrchním porozumění a memorickém přístupu.

## B. Posloupnosti a řady

Posloupnost a řada slouží jako fundament pro stavbu budoucích znalostí *D&I*. Látku můžeme do jisté míry vynechat, upravit a "ošidit", což je ovšem nevhodné, protože umožňuje žákovi získat řadu užitečných prekonceptů. Nepochybně zajímavým fenoménem této látky je, že většina pojmů na SŠ zůstává nedefinovaná, učitelé tak nezbyvá než se odkazovat na intuitivní chápání pojmu. My se zde proto pokusíme představit látku v duchu formálního jazyka, i když je jasné, že není možné uspět. Vycházíme ovšem z přesvědčení, že práce ve stylu definice-věta-důkaz může být pro žáka přínosnou novinkou právě ve chvíli, kdy se bavíme o intuitivně chápaných pojmech. Proto látku prezentujeme jako učební text, jak by mohl doplnit, případně místy nahradit např. text v [M29], ale připomínáme, že jde spíše o přehled pro učitele. V této podobě by samozřejmě vyžadoval doplňující výklad, sady procvičovacích příkladů atd., ale zdůrazňujeme, že cílem tohoto dodatku je spíše se uvést do obrazu o pojmech a základních faktech.

**Definice 13.** *Posloupností rozumíme uspořádaný sled čísel, ať už konečný či nekonečný. Její členy indexujeme po řadě přirozenými čísly.  $n$ -člennou konečnou posloupnost, jejíž  $i$ -tý prvek je  $a_i$ , označujeme následujícím způsobem:*

$$(a_i)_{i=1}^n, \quad (\text{B.1})$$

pro nekonečnou posloupnost se symbol  $n$  nahradí symbolem  $\infty$ . Nemůže-li dojít k nedorozumění v indexování členů, lze zkrátit zápis  $(a_i)_i$  zahrnující oba případy. Posloupnost lze zadat výčtem, explicitním vzorcem pro  $n$ -tý člen či rekurentním vztahem.

*Příklad.* Nekonečná Fibonacciho posloupnost je dána rekurentním vztahem:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1; \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad \text{pro } \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{B.2})$$

*Poznámka.* Lze se setkat s odlišným indexováním členů posloupnosti motivovaným praktickými důvody. Posloupnost pak může mít nultý člen nebo třeba tvar  $(a_i)_{i=-5}^5$ . Jde pouze o přejmenování indexu, stejně tak lze psát např.  $(a_k)_{k=1}^m$  dle potřeby.

Speciálními případy posloupností jsou:

- *posloupnost aritmetická*  $\Leftrightarrow (\exists d \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} - a_n = d)$ , rozdíl  $d$  nazýváme *diference*;
- *posloupnost geometrická*  $\Leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(\frac{a_{n+1}}{a_n} = q)$ , přičemž tato posloupnost nemá žádný člen roven nule, podíl  $q$  nazýváme *kvocient*.

**Definice 14.** *Posloupností vybranou z posloupnosti  $(a_i)_i$  rozumíme libovolnou posloupnost  $(b_i)_i$  takovou, že existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel  $(k_i)_i$  taková, že*

$$(\forall i \in \mathbb{N})(b_i = a_{k_i}). \quad (\text{B.3})$$

**Definice 15.** *Řadou rozumíme součet členů jisté posloupnosti  $(a_i)_{i=1}^n$ . Značíme*

$$\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad (\text{B.4})$$

kde pro nekonečnou řadu analogicky zapisujeme  $\infty$  namísto  $n$ . Podobně jako u posloupností též zkracujeme  $\sum_i a_i$ . Jednotlivé sčítance řady nazýváme členy řady. Pro libovolnou řadu  $\sum_{i=1}^n a_i$  a přirozené  $k < n$  dále definujeme tzv.  $k$ -tý částečný součet  $s_k$ , jde o součet prvních  $k$  členů řady:

$$s_k = \sum_{i=1}^k a_i \quad (\text{B.5})$$

*Poznámka.*  $k$ -té částečné součty tvoří posloupnost  $(a_k)_{k=1}^n$ , která umožňuje lépe porozumět řadám při jejich analýze.

*Poznámka.* Určit číselnou hodnotu řady (tj. obvykle nekonečného součtu) není mnohdy jednoduché, mezi netriviální příklady patří

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (\text{B.6})$$

o čemž se lze přesvědčit až po zvládnutí pojmu fourierovské transformace. Přesto je tato látka v matematice nesmírně užitečná.

*Poznámka.* U mnohých řad není na první (a mnohdy ani další) pohled jasné, zda součet existuje. Pro příklad lze vzít řadu s členy  $a_i = (-1)^i i$ . Pokud bychom vzali všechny kladné členy, součet bude nekonečný, součet všech záporných členů dospěje k  $-\infty$ . Rozdíl těchto dvou nekonečen je neurčitý výraz, což bychom mohli chápat jako náš lidský artefakt přeuspořádání členů. Pokud řadu chápeme jako  $(-1 + 2) + (-3 + 4) + (-5 + 6) + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$ , dostaneme právě opačný výsledek, než při zápisu  $-1 + (2 - 3) + (4 - 5) + (6 - 7) + \dots = -1 - 1 - 1 - 1 - \dots = -\infty$ . Neuspějeme ani s jiným přístupem kontrolujícím částečné součty:  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -1 + 2 = 1$ ,  $s_3 = -1 + 2 - 3 = -2$ ,  $s_4 = -1 + 2 - 3 + 4 = 2$ ,  $s_5 = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 = -3, \dots$ . Až zde je ovšem vidět fundamentální matematický zádrhel. S každým dalším párem členů se součet v absolutní hodnotě zvětšuje a podle sudosti/lichosti mění částečný součet znaménko. Sčítání "do nekonečna" tedy nemá smysl, protože nemůže dojít ke konkrétní hodnotě.

*Poznámka.* Existují řady, které lze sečíst, ale jejich součet závisí na pořadí, v kterém členy sčítáme. Takovou řadou je např.  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i}$ . Její členy lze přerovnat tak, aby součet byl libovolně zvoleným číslem  $S$ . Řada má totiž nekonečně mnoho kladných a záporných členů. Začneme tedy postupně sčítat nejprve kladné členy, až mezisoučet přesáhne  $S$ . Poté začneme přičítat záporné členy, dokud součet nebude  $< S$ . Pak opět přičítáme kladné členy. Ani kladné ani záporné členy nikdy nedojdou, ale jejich absolutní hodnota se časem zmenšuje, takže se postupně dostáváme blíže a blíže hodnotě  $S$ . Formální popis této situace je nepřiměřeně náročný, proto ho neuvádíme, lze jej nalézt v literatuře jako tzv. Riemannovu větu o přerovnání, např. v [V93].

# C. Tabulka limit, derivací, integrálů, řad a Taylorových rozvojų

Tabulka C.1: Přehled základních a zajímavých limit

$\forall \alpha < 0 : \lim_{n \rightarrow \pm\infty} n^\alpha = 0$ $\forall \alpha > 0 : \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = \infty$ $\forall \alpha > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$	$\forall \alpha > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \infty$ $\forall \alpha > 0 : \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^\alpha} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n, \lim_{n \rightarrow \infty} \cos n, \lim_{n \rightarrow \infty} \tan n, \lim_{n \rightarrow \infty} \cot n$ neexistují $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \tan \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \cot \frac{1}{x}$ neexistují	
$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm} \tan x = \mp \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan \frac{1}{n} = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n^\alpha} = \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \gamma \doteq 0,577$	$\lim_{x \rightarrow 0} \cot x = \pm \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cot \frac{1}{n} = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n!} = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $\forall \alpha > 0, k \in \mathbb{Z} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^k n}{n^\alpha} = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

Tabulka C.2: Numerické hodnoty některých řad a integrálů. Pro parametry platí  $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}$ , Eulerova-Mascheroniho konstanta  $\gamma \doteq 0,577$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ $\int_0^{\infty} \frac{\alpha dx}{(\alpha+x^2)} = \frac{\pi}{2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \pi$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e}\right)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2}(\pi - 1)$ $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \alpha x}{x^2} dx = \frac{\pi}{4}$
$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos^2 \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2}  \alpha $	$\int_0^{\pi} \sin^2 \alpha x dx = \int_0^{\pi} \cos^2 \alpha x dx = \frac{\pi}{2}$	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \tan^m x} = \frac{\pi}{4}$
$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \tan^m x} = \frac{\pi}{4}$	$\int_0^{\pi/2} \frac{\tan x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$	$\int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \frac{1}{2}$	$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$	$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2}$
$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^k dx = k!$	$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \frac{\pi^2}{6}$	$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = \int_0^1 \ln \left(\ln \frac{1}{x}\right) dx = -\gamma$

Tabulka C.3: Derivace a integrace elementárních funkcí. Definiční obory jsou maximální možné, tedy např. pro  $f(x) = \operatorname{arccotgh}x$  uvažujeme  $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .

$f(x) = \operatorname{const.}$	$f'(x) = 0$	$f(x) = x^n, \text{ pro } n \in \mathbb{Z} \setminus 0$	$f'(x) = n x^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sinh x$	$f'(x) = \cosh x$	$f(x) = \cosh x$	$f'(x) = \sinh x$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{argsinh}x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$f(x) = \operatorname{argcosh}x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = \operatorname{tg}x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$f(x) = \operatorname{cotg}x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \operatorname{tgh}x$	$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$f(x) = \operatorname{cotgh}x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sinh^2 x}$
$f(x) = \operatorname{arctg}x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \operatorname{arccotg}x$	$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{argtgh}x$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$	$f(x) = \operatorname{argcotgh}x$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Tabulka C.4: Taylorovy rozvoje základních funkcí platné při  $x \doteq 0$ .

$$\begin{aligned}
 (1+x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots \\
 \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \\
 \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots \\
 \tan x &\doteq x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \\
 \tanh x &\doteq x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \\
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \\
 \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \dots
 \end{aligned}$$



## D. Zavedení elementárních funkcí

Integrální počet je teorie, již lze použít i k položení základů dalších teorií. Naznačíme, jak zavést logaritmus, celý postup lze nalézt v [V82]. Tradiční způsob vychází ze zavedení exponenciály a nalezení funkce inverzní. Nakonec se studují jejich derivace a integrály. My ovšem vyjdeme právě ze znalostí infinitesimálního počtu, pro jehož zavedení logaritmus a exponenciála nebyly potřeba. Uvažme libovolnou racionální polynomiální funkci

$$F(x) = \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_m x^m + \beta_{m-1}^{m-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}, \quad (\text{D.1})$$

její derivace je opět nějaká racionální polynomiální funkce. Lze ukázat fakt (který není úplně intuitivní), že žádná taková funkce ale nemá derivaci tvaru  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Tato funkce je ovšem spojitá (a také klesající) na intervalu  $(0, \infty)$ , proto má na libovolném uzavřeném podintervalu primitivní funkci (z věty o integrovatelnosti spojitě funkce). Můžeme tedy definovat novou funkci - pojmenujme ji  $\lg$  - předpisem pro libovolné  $x > 0$ :

$$\lg(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (\text{D.2})$$

Takto definovaná funkce má právě vlastnosti logaritmu, jak jej známe. Volba dolní meze zaručuje, že  $\lg 1 = 0$ . Ze substituce v integrálu lze odvodit pravidlo  $\lg(xy) = \lg x + \lg y$  pro libovolná  $x, y > 0$ :

$$\lg(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{du}{u} = \lg x + \lg y \quad (\text{D.3})$$

Povšimněme si, že jsme využili vlastnosti, že výraz  $\frac{dt}{t}$  je invariantní na přeškálování  $u = \frac{t}{x}$ . Tento fakt má souvislost s tím, že funkce  $\lg x$  je zavedena jako primitivní k  $x^{-1}$  - zapišme to jako  $\frac{d \lg x}{dx} = \frac{1}{x}$ . Proto lze v literatuře narazit na výraz

$$d \lg x = \frac{dx}{x}, \quad (\text{D.4})$$

který je nazýván logaritmicou derivací.

Další zřejmou vlastností funkce  $\lg(x)$  je to, že je rostoucí (její derivace je kladná) na celém  $(0; \infty)$ , ale jako monotónní tím pádem má inverzní funkci. Pojmenujme ji teď  $E(x)$ . Podívejme se na její derivaci, kterou nalezneme z věty o derivaci inverzní funkce. Označme  $x = \lg y$ , aby  $E(x) = y$ .

$$E'(x) = \frac{1}{\lg' y} = y = E(x) \quad (\text{D.5})$$

I další známé vlastnosti exponenciály a logaritmu lze odvodit jen ze znalosti derivací a integrálů. V konečném důsledku po rozsáhlé teoretické práci zjistíme, že tyto právě zavedené funkce  $\lg(x)$ ,  $E(x)$  jsou totožné se známými  $\ln x$ ,  $e^x$ .

Na teorii, konkrétně vzorci pro délku křivky, lze vybudovat i cyklometrické a goniometrické funkce. Funkce  $\arcsin x$  může být definována pomocí integrálu

$$\arcsin x := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (\text{D.6})$$

jehož geometrický význam je délka oblouku jednotkové půlkružnice  $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$  od vrcholu  $[0; 1]$  do bodu  $[x; y]$  pro  $x \in (-1; 1)$ . Do vzorce pro délku křivky se dosazuje  $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Pro krajní body půlkružnice  $x = \pm 1$  je nutno dodefinovat

$$\arcsin \pm 1 := \lim_{x \rightarrow \pm 1 \mp} \arcsin x, \quad (\text{D.7})$$

tato limita existuje, je konečná a pojmenujeme ji  $\arcsin 1 =: \frac{\pi}{2}$ . Tímto jsme definovali zcela nový matematický objekt, číslo  $\pi$ . Funkce  $\arcsin x$  je monotónní a (opět jako tomu bylo u  $\lg x$ ) umožňuje zavést inverzní funkci  $\sin x$  a posléze  $\cos x := \sqrt{1 - \sin^2 x}$  a další. Využití derivací a integrálů umožňuje také ukázat všechny známé vlastnosti těchto funkcí. Geometrická interpretace celé této teorie se stává pouze přímočarou praktickou aplikací abstraktní teorie (přišli jsme k ní z definice délky křivky, nikoliv z rýsování pravoúhlých trojúhelníků). To, že poměr obvodu jednotkové kružnice k jejímu poloměru je  $2\pi$ , nyní není experimentální zjištění či shůry daný vzorec, ale korektně odvozený matematický fakt.

Aby toho nebylo málo, lze exponenciálu a goniometrické funkce zavést přímo bez použití derivací a integrálů, ale se znalostí řad. A to pomocí Taylorova rozvoje:

$$e^x := 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{D.8})$$

Takto definovaná funkce navíc umožňuje rozšířit pojem exponenciály na komplexní čísla, neboť ta umíme mocnit a sčítat, můžeme tedy psát např.:

$$\begin{aligned} e^{ix} &:= 1 + ix + \frac{-x^2}{2!} + \frac{-ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ e^{-ix} &:= 1 - ix + \frac{-x^2}{2!} - \frac{-ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

a nově zavést:

$$\begin{aligned} \cos x &:= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin x &:= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Prokázat, že se obě definice goniometrických shodují i s běžně používanými funkcemi zaváděnými na bázi obrázků a geometrické intuice, je náročná práce, proto ji necháme pro fajnšmekry k vlastnímu studiu, např. v literatuře [V81, V82, V93].