MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Radovan Kneblík

Webová aplikace pro výuku algebraických rovnic v oboru komplexních čísel

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Učitelství matematiky – Učitelství informatiky

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval vedoucí své diplomové práce, doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc., za zapůjčení literatury a za didaktické a odborné rady.

Název práce: Webová aplikace pro výuku algebraických rovnic v oboru komplexních čísel

Autor: Bc. Radovan Kneblík

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá algrebraickými rovnicemi v oboru komplexních čísel a jejich výukou na střední škole. Práce má formu webových stránek, zahrnuje zavedení komplexních čísel v různých tvarech (tvar uspořádané dvojice, algebraický, goniometrický a exponenciální tvar) a operací s nimi a dále převody mezi jednotlivými tvary. Stěžejní část práce obsahuje řešení lineárních, kvadratických, binomických, trinomických, reciprokých a kubických rovnic v oboru komplexních čísel. Výklad je obohacen o interaktivní applety demonstrující danou látku. Součástí práce jsou také řešené úlohy, dále úlohy vedoucí na množiny bodů daných vlastností a dva souhrnné testy. Webové stránky vytvořené v rámci práce mohou využívat žáci i pedagogové středních škol.

Klíčová slova: komplexní číslo, rovnice, rovnice v oboru komplexních čísel

Title: Web application for teaching algebraic equations in complex numbers

Author: Bc. Radovan Kneblík

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Department of Mathematics Education

Abstract: This thesis deals with algebraic equations in the field of complex numbers and teaching of them in high school mathematics. The thesis is a web page, it includes the definition of complex numbers in various forms (form of ordered pair, algebraic, polar and exponential form) and operations with them, as well as conversions between forms. The main part of the thesis includes solving of linear, quadratic, binomial, trinomial, reciprocal and cubic equations in the field of complex numbers. The lecture is enhanced with interactive applets demonstrating given topic. The thesis also includes solved exercises, as well as exercises leading to sets of points satisfying a condition and two overall tests. Web page created within the thesis can be used by high school pupils and teachers.

Keywords: complex number, equation, equations in the field of complex numbers

Obsah

Úvod

Webové stránky se dnes využívají běžně ve výuce řady předmětů včetně matematiky. Webové prostředí má oproti tištěným výukovým materiálům mnoho výhod. Předně umožňuje využití interaktivních prvků, které mohou významně přispět k porozumění učiva. Žák v nich může pohybovat objekty a sledovat jejich vlastnosti v různých situacích. Další výhodou je možnost postupného odkrývání řešení úloh či automatické vyhodnocování testů. Neméně důležitým prvkem webových stránek jsou také hypertextové odkazy, díky nimž uživatel snadno přejde na odkazovanou látku a nemusí listovat v učebnici.

Diplomová práce má formu webové aplikace pro výuku algebraických rovnic v oboru komplexních čísel. Navazuje na bakalářskou práci, která se zabývala zavedením komplexních čísel jako uspořadaných dvojic, i ve tvaru algebraickém, goniometrickém a exponenciálním, dále převody mezi těmito tvary, operacemi s komplexními čísly a množinami bodů daných vlastností v komplexní rovině. Diplomová práce tuto práci rozšiřuje o zavedení odmocniny z komplexního čísla pro jednotlivé tvary a o řešení rovnic v oboru komplexních čísel. Práce pokrývá řešení lineárních, kvadratických, kubických, binomických, trinomických a reciprokých rovnic. V rámci diplomové práce byla také rozšířena původní část s komplexními čísly o další úlohy a jejich krokovaná řešení.

Webová stránka obsahuje výukový text doplněný interaktivními applety, které zobrazují zavedené pojmy a demonstrují vlastnosti komplexních čísel a řešení algebraických rovnic v Gaussově rovině. Teorie je v práci proložena ukázkovými příklady se vzorovým řešením, po kterých následují úlohy na procvičení se skrytým řešením. Webová stránka dále obsahuje dva souhrnné testy, které náhodně generují úlohy z probrané látky. První test je zaměřen na základní vlastnosti komplexních čísel, převody mezi jednotlivými tvary, operace a odmocniny; druhý test ověřuje dovednost řešit rovnice v oboru komplexních čísel.

Webová stránka je dočasně umístěna na adrese `http://karlin.mff.cuni.cz/~kneblik/kneblik/`. Po obhajobě diplomové práce se webová aplikace stane součástí Portálu středoškolské matematiky spravovaného Katedrou didaktiky matematiky MFF UK, který slouží jako výuková pomůcka pro žáky a učitele středních škol.

V tištěné verzi práce jsou dynamické applety nahrazeny obrázky pořízenými v jedné jejich konkrétní poloze. Příklady se skrytým řešením mají v textu práce uvedeno řešení přímo pod zadáním. V prvním souhrnném testu zaměřeném na znalosti oboru komplexních čísel je obsaženo sedm úloh a ve druhém souhrnném testu z rovnic šest úloh, ačkoliv databáze, ze kterých se testy generují, obsahují 39, resp. 30 úloh.

Ovládání stránek

Webové stránky obsahují applety vytvořené v programu GeoGebra, pro jejich funkčnost je nutné mít v prohlížeči povolen JavaScript. Body (obrazy komplexních čísel), kterými lze v appletech pohybovat, jsou pro snazší orientaci vyznačeny červenou barvou.

1. Zavedení komplexních čísel

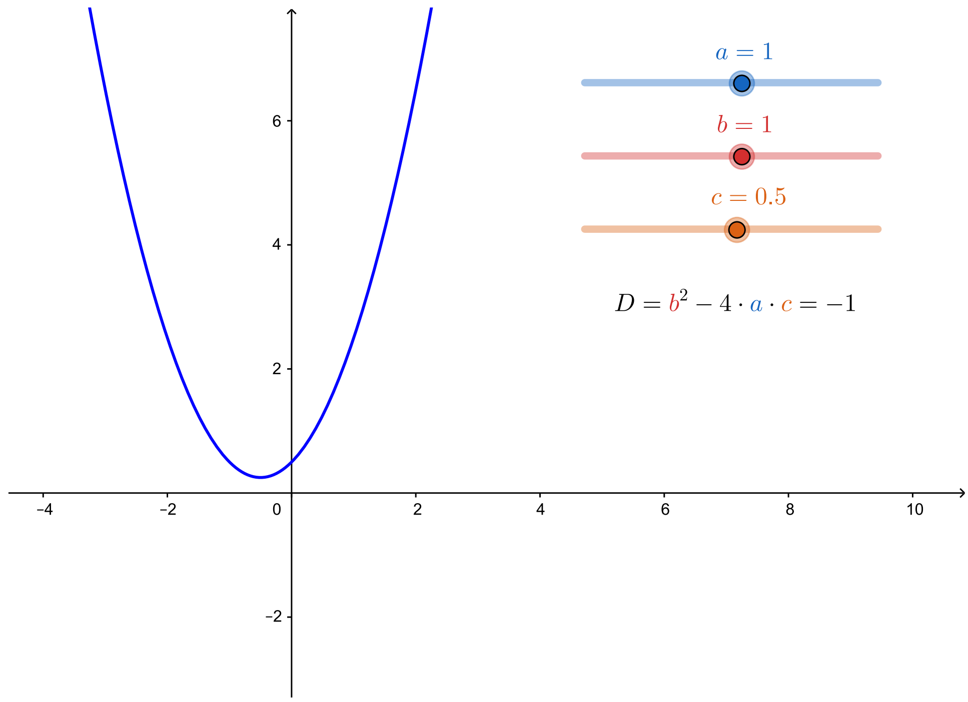
1.1 Motivace

Pokusme se vyřešit rovnici $x^2 + x + \frac{1}{2} = 0$. Začněme výpočtem diskriminantu:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

Diskriminant nám u této rovnice vyšel záporný. Pro výpočet kořenů kvadratické rovnice potřebujeme $\sqrt{D}$, ale druhá odmocnina ze záporného čísla není v reálných číslech definována. Rovnice tedy nemá reálné řešení.

Souvislost existence reálného řešení kvadratické rovnice $ax^2+bx+c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ a diskriminantu můžeme pozorovat v následujícím appletu (obr. 1.1), který zobrazuje grafické řešení této kvadratické rovnice pro některé hodnoty a, b, c podle nastavení posuvníků (pro $a = 0$ dostáváme graf lineární funkce). Kvadratická rovnice má v $\mathbb{R}$ dvě řešení v případě kladného diskriminantu, jedno řešení, pokud je diskriminant roven nule, a žádné řešení, když je diskriminant záporný.



Obrázek 1.1: Souvislost existence reálného řešení kvadratické rovnice a diskriminantu

V dalších kapitolách si ukážeme, že za určitých okolností lze kvadratické rovnice se záporným diskriminantem řešit.

1.2 Zavedení komplexních čísel

Abychom mohli vyřešit také kvadratické rovnice, které nemají reálné řešení, budeme muset nejprve zavést nový číselný obor, obor komplexních čísel.

Definice. *Komplexní číslo x definujeme jako uspořádanou dvojici $[x_1; x_2]$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; x_1 nazýváme reálnou částí a x_2 imaginární částí komplexního čísla x. Množinu všech komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$.*

Poznámka. Komplexní čísla obvykle označujeme malým písmenem, např. x, y, a, ...

Poznámka. Zápisem $\operatorname{Re} x$ značíme reálnou část a zápisem $\operatorname{Im} x$ imaginární část komplexního čísla x.

Je-li dáno komplexní číslo $x = [x_1; x_2]$, potom $\operatorname{Re} x = x_1$ a $\operatorname{Im} x = x_2$.

Definice. *Dvě komplexní čísla $x = [x_1; x_2]$ a $y = [y_1; y_2]$ jsou si rovna právě tehdy, když jsou si rovny jejich reálné i imaginární části, tedy*

$$x = y \iff (\operatorname{Re} x = \operatorname{Re} y \wedge \operatorname{Im} x = \operatorname{Im} y) \iff (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2).$$

Úlohy

1. Určete reálnou a imaginární část následujících komplexních čísel:
   - $a = [0; 0]$

     $\operatorname{Re} a = 0$, $\operatorname{Im} a = 0$
   - $b = [-5; 0]$

     $\operatorname{Re} b = -5$, $\operatorname{Im} b = 0$
   - $c = \left[0; \sqrt{3}\right]$

     $\operatorname{Re} c = 0$, $\operatorname{Im} c = \sqrt{3}$
   - $d = \left[7; -\frac{3}{2}\right]$

     $\operatorname{Re} d = 7$, $\operatorname{Im} d = -\frac{3}{2}$

2. Určete komplexní číslo x, pro které platí: $\operatorname{Re} x = -2\sqrt{2}$, $\operatorname{Im} x = 7{,}15$.

   $x = \left[-2\sqrt{2}; 7{,}15\right]$

3. Uveďte tři různá komplexní čísla, která mají:
   - stejnou reálnou část

     např. $[1; 2]$, $[1; 5]$, $[1; -1]$
   - stejnou imaginární část

     např. $[2; 3]$, $[-6; 3]$, $\left[\sqrt{2}; 3\right]$

4. Uveďte komplexní číslo, jehož reálná i imaginární část je číslo iracionální.

   např. $\left[3\sqrt{2}; \sqrt{5}\right]$, $[2\pi; -7e]$

5. Jsou dána komplexní čísla $a = [x-5; -7]$, $b = [-2; y+1]$. Určete reálná čísla x a y tak, aby platilo $a = b$.

   $x - 5 = -2 \wedge -7 = y + 1$

   Z toho plyne:

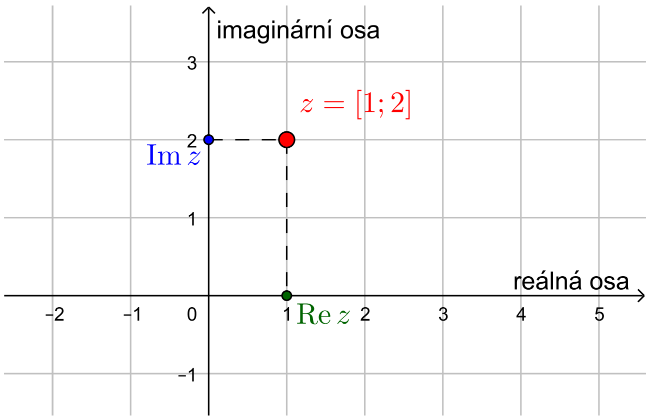
   $x = 3 \wedge y = -8$

1.3 Komplexní rovina

Povšimněme si, že zápis komplexního čísla $x = [x_1; x_2]$ připomíná zápis souřadnic bodu v rovině.

Komplexní čísla můžeme zobrazit jako body roviny se zvolenou kartézskou soustavou souřadnic. Tato rovina se nazývá komplexní či Gaussova. Osa x se nazývá reálná osa a osa y imaginární osa. Reálná část komplexního čísla odpovídá x-ové a imaginární část y-ové souřadnici daného bodu.

V následujícím appletu (obr. 1.2) můžeme pohybovat bodem v komplexní rovině a sledovat, jak se mění jeho souřadnice, a tedy i reálná a imaginární část příslušného komplexního čísla.



Obrázek 1.2: Komplexní rovina

Každý bod komplexní roviny je obrazem komplexního čísla.

V kapitole zavedení komplexních čísel jsme si uvedli, že jsou si dvě komplexní čísla x a y rovna právě tehdy, když jsou si rovny jejich reálné a imaginární části. Z toho vyplývá, že v komplexní rovině obrazy komplexních čísel x a y splývají.

Dvě komplexní čísla $x = [x_1; x_2]$ a $y = [y_1; y_2]$ jsou si rovna právě tehdy, když jejich obrazy v komplexní rovině splývají.

Využijte applet na obr. 1.2 k řešení následujících úloh.

Úlohy

1. Jakou množinu bodů tvoří obrazy komplexních čísel, které mají imaginární část nulovou?

   Obrazy komplexních čísel tvaru $[a; 0]$, kde $a \in \mathbb{R}$, tvoří reálnou osu.

2. Jakou množinu bodů tvoří obrazy komplexních čísel, které mají reálnou část nulovou?

   Obrazy komplexních čísel tvaru $[0; a]$, kde $a \in \mathbb{R}$, tvoří imaginární osu.

3. Jakou množinu bodů tvoří obrazy komplexních čísel, které mají reálnou část rovnu číslu 3?

   Obrazy komplexních čísel tvaru $[3; a]$, kde $a \in \mathbb{R}$, tvoří přímku rovnoběžnou s imaginární osou a procházející obrazem komplexního čísla $[3; 0]$.

4. Jakou množinu bodů tvoří obrazy komplexních čísel, které mají reálnou část rovnu imaginární části?

   Obrazy komplexních čísel tvaru $[a; a]$, kde $a \in \mathbb{R}$, tvoří osu prvního a třetího kvadrantu komplexní roviny.

5. Jakou množinu bodů tvoří obrazy komplexních čísel, které mají reálnou část větší nebo rovnu nule?

   Obrazy komplexních čísel tvaru $[a; b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, tvoří polorovinu, která je sjednocením prvního a čtvrtého kvadrantu komplexní roviny.

Poznámka. Z řešení úlohy 1 vyplývá, že obraz komplexního čísla $[a; 0]$ je totožný s obrazem reálného čísla a na reálné ose.

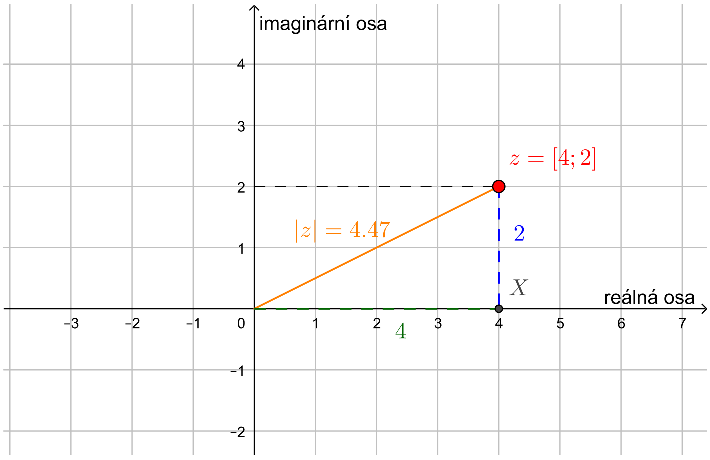
Poznámka. Množina všech reálných čísel, nahlížíme-li na každé reálné číslo a jako na uspořádanou dvojici $[a; 0]$, je tedy podmnožinou množiny všech čísel komplexních, tj. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.4 Absolutní hodnota komplexního čísla

Absolutní hodnota reálného čísla představuje jeho vzdálenost od nuly. Podobně zavádíme absolutní hodnotu čísla komplexního.

Definice. *Absolutní hodnota komplexního čísla z je vzdálenost jeho obrazu od počátku $O = [0; 0]$ v komplexní rovině. Značíme ji $|z|$.*

Jak je vidět v následujícím appletu (obr. 1.3), vzdálenost obrazu komplexního čísla od počátku kartézské soustavy souřadnic je rovna délce přepony pravoúhlého trojúhelníku OZX (kde O je počátek, Z obraz komplexního čísla z a bod X pata kolmice spuštěné z bodu Z na osu x). Odvěsny tohoto trojúhelníku mají délky odpovídající absolutním hodnotám souřadnic bodu, který je obrazem daného komplexního čísla v komplexní rovině. (Číselné hodnoty v appletu jsou zaokrouhlené na dvě desetinná místa.)



Obrázek 1.3: Absolutní hodnota komplexního čísla

Absolutní hodnotu komplexního čísla tedy můžeme spočítat pomocí Pythagorovy věty:

Absolutní hodnota komplexního čísla $z = [z_1; z_2]$ je reálné číslo $|z|$, pro které platí:

$$|z| = \sqrt{{z_1}^2 + {z_2}^2}$$

Definice. *Každé komplexní číslo, které má absolutní hodnotu rovnu jedné, nazýváme komplexní jednotkou.*

Příklad

Určete absolutní hodnotu komplexního čísla $z = [-6; 4]$.

Řešení

Reálnou a imaginární část komplexního čísla z dosadíme do vzorce $|z| = \sqrt{{z_1}^2 + {z_2}^2}$ a vypočítáme:

$$|z| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2 \cdot \sqrt{13}$$

Úlohy

1. Určete absolutní hodnotu následujících komplexních čísel:

   - $a = [0; 0]$

     $|a| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ (Obraz komplexního čísla a je počátkem soustavy souřadnic, jeho vzdálenost od počátku, tedy od sebe sama, je rovna 0.)

   - $b = [0; 4]$

     $|b| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$

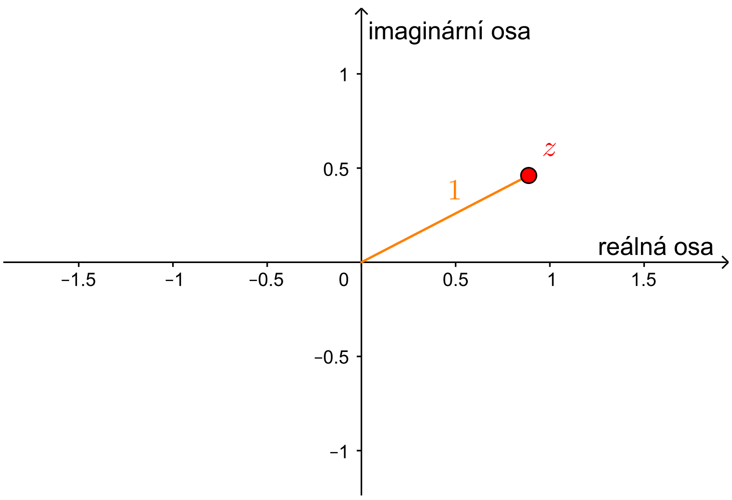
- $c = [3\pi; -4\pi]$

  $$|c| = \sqrt{(3\pi)^2 + (-4\pi)^2} = \sqrt{9\pi^2 + 16\pi^2} = \sqrt{25\pi^2} = 5\pi$$

- $d = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right]$

  $$|d| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

2. Definovali jsme si komplexní jednotku jako komplexní číslo s absolutní hodnotou rovnou jedné. Kolik takových komplexních čísel je? Jakou množinu tvoří jejich obrazy? K pozorování lze použít následující applet (obr. 1.4), v němž můžete pohybovat obrazem komplexního čísla z, jehož vzdálenost od počátku je rovna 1.



Obrázek 1.4: Komplexní jednotky

   Obrazy všech komplexních jednotek v komplexní rovině tvoří kružnici se středem v počátku a poloměrem 1. Kružnice obsahuje nekonečně mnoho bodů, tedy i komplexních jednotek je nekonečně mnoho.

3. Jakou množinu tvoří obrazy komplexních čísel, jejichž absolutní hodnota je rovna 2,5?

   Obrazy všech komplexních čísel x, pro něž platí $|x| = 2{,}5$, tvoří kružnici se středem v počátku a poloměrem 2,5.

4. Jakou množinu tvoří obrazy komplexních čísel, jejichž absolutní hodnota je rovna -3?

   Absolutní hodnota komplexního čísla nemůže být záporná, proto neexistuje žádné komplexní číslo, jehož obsolutní hodnota je rovna -3.

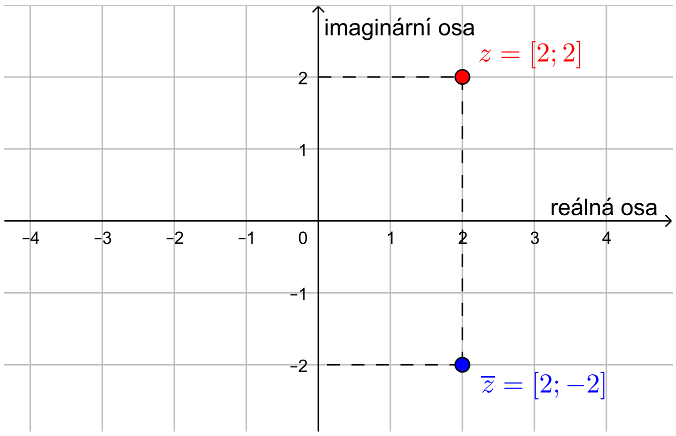
   Obrazy komplexních čísel, jejichž absolutní hodnota je rovna -3, tedy tvoří prázdnou množinu.

1.5 Komplexně sdružená a opačná čísla

Čísla komplexně sdružená

Definice. *Komplexní číslo komplexně sdružené k číslu* $z = [a; b]$ *je číslo* $\bar{z} = [a; -b]$. *Říkáme také, že čísla* z *a* $\bar{z}$ *jsou navzájem komplexně sdružená.*

V následujícím appletu (obr. 1.5) si můžeme při změně polohy obrazu komplexního čísla z všimnout, že obrazy komplexně sdružených čísel z a $\bar{z}$ jsou osově souměrné podle reálné osy.

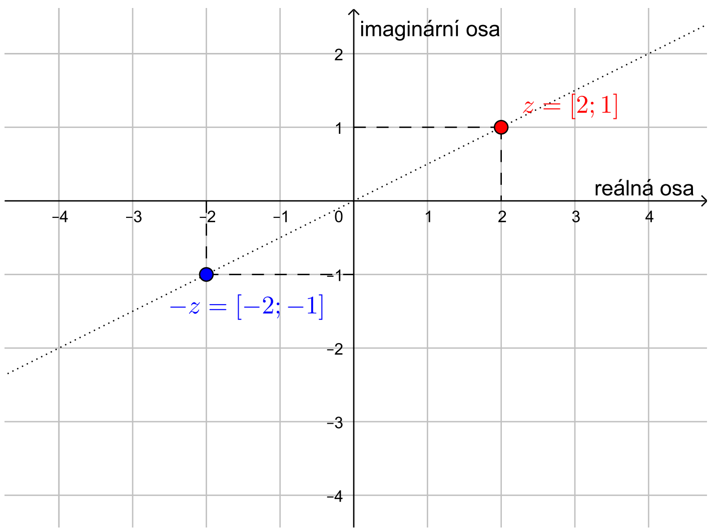


Obrázek 1.5: Komplexně sdružená čísla

Čísla opačná

Definice. *Komplexní číslo opačné k číslu* $z = [a; b]$ *je číslo* $-z = [-a; -b]$. *Říkáme také, že čísla* z *a* $-z$ *jsou navzájem opačná.*

Obrazy opačných čísel jsou středově souměrné podle počátku kartézské soustavy souřadnic, což demonstruje následující applet (obr. 1.6):



Obrázek 1.6: Opačná čísla

Úlohy

1. Nalezněte komplexně sdružená čísla k následujícím komplexním číslům:
   - $a = [0; 0]$

     $\bar{a} = [0; 0]$
   - $b = [-5; 6]$

     $\bar{b} = [-5; -6]$
   - $c = \left[\sqrt{2}; -\sqrt{3}\right]$

     $\bar{c} = \left[\sqrt{2}; \sqrt{3}\right]$
   - $d = \left[-6; -\frac{7}{2}\right]$

     $\bar{d} = \left[-6; \frac{7}{2}\right]$
2. Nalezněte opačná čísla k následujícím komplexním číslům:
   - $a = [0; 0]$

     $-a = [0; 0]$
   - $b = [-2; 7]$

     $-b = [2; -7]$
   - $c = \left[\sqrt{2}; -3\right]$

     $-c = \left[-\sqrt{2}; 3\right]$
   - $d = \left[-10; -\frac{2}{3}\right]$

     $-d = \left[10; \frac{2}{3}\right]$
3. Nalezněte komplexní číslo, pro které platí, že komplexní číslo k němu opačné má tvar $[a; -2]$ a komplexní číslo k němu komplexně sdružené má tvar $[3; b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

   Hledáme komplexní číslo $z = [z_1; z_2]$.

   $-z = [a; -2]$, z čehož plyne $-z_2 = -2$

   $\bar{z} = [3; b]$, z čehož plyne $z_1 = 3$

   Hledaným číslem je $z = [3; 2]$.

1.6 Početní operace s komplexními čísly

V množině komplexních čísel definujeme tyto početní operace:

Definice. *Mějme dána komplexní čísla* $x = [x_1; x_2]$ *a* $y = [y_1; y_2]$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Součet komplexní čísel x *a* y *je komplexní číslo* $x + y = [x_1 + y_1; x_2 + y_2]$.

Rozdíl komplexní čísel x *a* y *je komplexní číslo* $x - y = [x_1 - y_1; x_2 - y_2]$.

Součin komplexní čísel x *a* y *je komplexní číslo* $x \cdot y = [x_1 y_1 - x_2 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1]$.

Podíl komplexní čísel x *a* y *je komplexní číslo* $\dfrac{x}{y} = \left[\dfrac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{{y_1}^2 + {y_2}^2}; \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{{y_1}^2 + {y_2}^2}\right]$.

Můžeme si všimnout, že sčítání a odčítání komplexních čísel probíhá po složkách, tj. reálná část součtu je součtem reálných částí, imaginární část součtu je součtem imaginárních částí a obdobně je tomu i u rozdílu.

Poznámka. Součin a podíl komplexních čísel obvykle provádíme pro komplexní čísla v algebraickém tvaru.

V dalších kapitolách se seznámíme s operacemi pro komplexní čísla, která jsou vyjádřena v algebraickém, goniometrickém a exponenciálním tvaru.

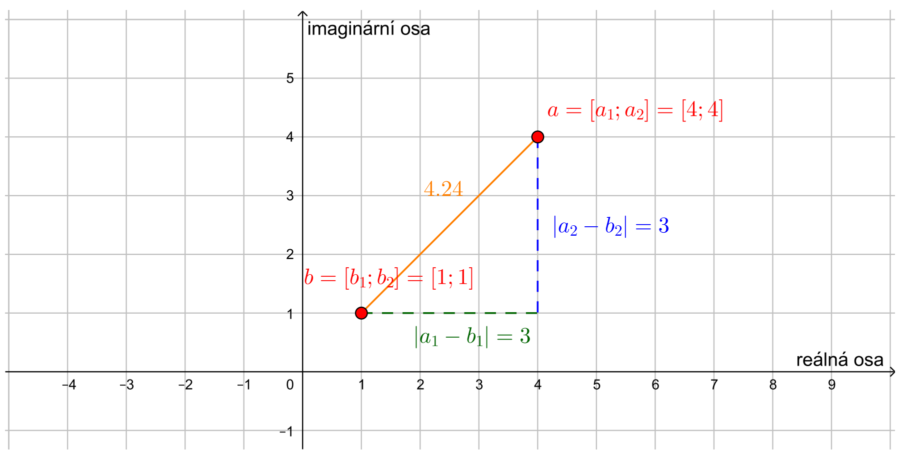
Definice. *Množina všech komplexních čísel* $\mathbb{C}$ *společně s operacemi sčítání a násobení tvoří obor komplexních čísel.*

Poznámka. Mějme komplexní čísla $a = [a_1; a_2]$ a $b = [b_1; b_2]$.

Pak $|a - b| = |[a_1 - b_1; a_2 - b_2]| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$.

Absolutní hodnota rozdílu komplexních čísel tedy představuje vzdálenost jejich obrazů v komplexní rovině.

Význam absolutní hodnoty rozdílu dvou komplexních čísel je možné sledovat v následujícím appletu (obr. 1.7).



Obrázek 1.7: Absolutní hodnota rozdílu komplexních čísel

Úlohy

1. Vypočítejte:
   - $a = [2; 3] + [3; 4]$

     $a = [5; 7]$

   - $b = [-5; 6] + \left[2; \frac{3}{2}\right]$

     $b = \left[-3; \frac{15}{2}\right]$

   - $c = \left[2; \sqrt{3}\right] - \left[5; -\sqrt{3}\right]$

     $c = \left[-3; 2\sqrt{3}\right]$

   - $d = \left[-6; -\frac{7}{2}\right] - \left[6; -\frac{3}{4}\right]$

     $d = \left[-12; -\frac{11}{4}\right]$

2. Určete komplexní číslo z, pro které platí:

   $z = [3; 4] + \left[\frac{2}{3}; \sqrt{2}\right] - \left[2; \frac{5}{2}\right] - [\pi; -8].$

   $$z = \left[\frac{11}{3}; 4 + \sqrt{2}\right] - \left[2; \frac{5}{2}\right] - [\pi; -8] = \left[\frac{5}{3}; \frac{8 + 2\sqrt{2} - 5}{2}\right] - [\pi; -8] =$$

   $$= \left[\frac{5 - 3\pi}{3}; \frac{8 + 2\sqrt{2} - 5 + 16}{2}\right] = \left[\frac{5 - 3\pi}{3}; \frac{19 + 2\sqrt{2}}{2}\right]$$

3. Vypočítejte absolutní hodnotu rozdílu komplexních čísel $a = [2; -1]$ a $b = [3; -2]$.

   $$|a - b| = |[2; -1] - [3; -2]| = |[-1; 1]| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

2. Algebraický tvar komplexního čísla

2.1 Algebraický tvar komplexního čísla

Definice. *Komplexní číslo* $[0;1]$ *nazýváme imaginární jednotkou, značíme ji písmenem* i.

Pomocí operací zavedených v předchozí kapitole můžeme každé komplexní číslo $[a;b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, převést do tvaru:

$$[a;b] = [a;0] + [0;b] = [a;0] + [b;0] \cdot [0;1] = a + b \cdot i$$

Definice. *Algebraický tvar komplexního čísla* $[a;b]$ *je výraz* $a + bi$, *kde* $a,b \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Pro $b = 0$ platí, že $z = a + bi = a$ je číslo reálné. Tedy např. místo $z = 2 + 0i$ budeme psát $z = 2$.

Pro zavedení operací s komplexními čísly v algebraickém tvaru si nejdříve odvodíme, jak určit druhou mocninu komplexní jednotky.

Již umíme násobit komplexní čísla ve tvaru uspořádaných dvojic, zkusme tedy nyní vynásobit imaginární jednotku se sebou samou, neboli ji umocnit na druhou.

$$i^2 = i \cdot i = [0;1] \cdot [0;1] = [-1;0] = -1$$

Druhá mocnina imaginární jednotky je tedy rovna -1. Zkusme ještě najít druhou mocninu $-i$:

$$(-i)^2 = (-i) \cdot (-i) = [0;-1] \cdot [0;-1] = [-1;0] = -1$$

Tedy druhá mocnina $-i$ je také rovna -1.

2.2 Početní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru

Číselné operace s komplexními čísly ve tvaru uspořádaných dvojic zavedené v předchozí kapitole nyní vyjádříme pro komplexní čísla v algebraickém tvaru.

Sčítání, odčítání a násobení komplexních čísel v algebraickém tvaru

Mějme komplexní čísla $x = [x_1;x_2] = x_1 + x_2 i$ a $y = [y_1;y_2] = y_1 + y_2 i$. Na základě operací s komplexními čísly ve tvaru uspořádaných dvojic lze zavést následující vztahy:

$$x + y = [x_1 + y_1; x_2 + y_2] = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)i$$

$$x - y = [x_1 - y_1; x_2 - y_2] = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)i$$
$$x \cdot y = [x_1y_1 - x_2y_2; x_1y_2 + x_2y_1] = (x_1y_1 - x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

Pro komplexní čísla $x = x_1 + x_2i$ a $y = y_1 + y_2i$ platí:

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)i$$
$$x - y = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)i$$
$$x \cdot y = (x_1y_1 - x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

Poznámka. Zkusme komplexní čísla x a y v algebraickém tvaru roznásobit jako dvojčleny.

$$x \cdot y = (x_1 + x_2i) \cdot (y_1 + y_2i) = x_1y_1 + x_1y_2i + x_2y_1i + x_2y_2i^2 =$$
$$= (x_1y_1 - x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

Násobení komplexních čísel v algebraickém tvaru tedy odpovídá násobení dvojčlenů.

Příklad

Vypočítejte součin komplexních čísel $a = 1 + i$ a $b = 2 - i$.

Řešení

$$a \cdot b = (1 + i) \cdot (2 - i) = 1 \cdot 2 + i \cdot 2 - 1 \cdot i - i^2 = 2 + 1 + 2i - i = 3 + i$$

Součin komplexně sdružených čísel

Podívejme se nyní na součin čísel komplexně sdružených:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Všimněme si, že součin komplexně sdružených čísel z a $\bar{z}$ je nezáporné reálné číslo a navíc jeho odmocněním získáme absolutní hodnotu těchto čísel.

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Nulový součin dvou komplexních čísel

Nyní si ukážeme, že součin dvou komplexních čísel je roven nule právě tehdy, když je alespoň jeden z činitelů roven nule.

Mějme dvě komplexní čísla x a y. Nechť platí, že jejich součin je roven nule. To platí právě tehdy, když je absolutní hodnota jejich součinu rovna nule (neboť komplexní číslo je rovno nule právě tehdy, když je jeho absolutní hodnota rovna nule).

$$x \cdot y = 0 \iff |x \cdot y| = 0$$

Z předchozího vztahu o odmocnině součinu komplexně sdružených čísel víme, že platí:

$$|x \cdot y| = \sqrt{(x \cdot y) \cdot \overline{(x \cdot y)}}$$

Dále platí:

$$\sqrt{(x \cdot y) \cdot \overline{(x \cdot y)}} = \sqrt{x \cdot y \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}$$

Dokážeme, že pro komplexní čísla x a y platí $\overline{(x \cdot y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$.

$x = x_1 + x_2 i$

$y = y_1 + y_2 i$

$x \cdot y = (x_1 + x_2 i) \cdot (y_1 + y_2 i) = (x_1 y_1 - x_2 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$

$\overline{(x \cdot y)} = (x_1 y_1 - x_2 y_2) + (-x_1 y_2 - x_2 y_1) i$

$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x_1 - x_2 i) \cdot (y_1 - y_2 i) = (x_1 y_1 - x_2 y_2) + (-x_1 y_2 - x_2 y_1) i$

Tedy platí $\overline{(x \cdot y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$.

Víme, že $x \cdot \bar{x}$ a $y \cdot \bar{y}$ jsou reálná čísla, proto můžeme provést následující úpravu:

$$\sqrt{x \cdot y \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}} = \sqrt{x \cdot \bar{x}} \cdot \sqrt{y \cdot \bar{y}}$$

Opět využijeme vztah o odmocnině součinu komplexně sdružených čísel:

$$\sqrt{x \cdot \bar{x}} \cdot \sqrt{y \cdot \bar{y}} = |x| \cdot |y|$$

Součin dvou reálných čísel je roven nule právě tehdy, když je rovno nule alespoň jedno z čísel.

$$|x| \cdot |y| = 0 \iff |x| = 0 \lor |y| = 0$$

Absolutní hodnota komplexního čísla je rovna nule právě tehdy, když je komplexní číslo rovno nule.

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

$$|y| = 0 \iff y = 0$$

Z předchozích ekvivalencí a rovností plyne, že součin dvou komplexních čísel je roven nule právě tehdy, když je roven nule alespoň jeden z činitelů.

$$\forall x, y \in \mathbb{C} : \; x \cdot y = 0 \iff x = 0 \lor y = 0$$

Obdobný poznatek platí pro součin libovolného počtu komplexních čísel, např. pro součin $x, y, z \in \mathbb{C}$:

$$x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$x \cdot (y \cdot z) = 0 \iff x = 0 \lor y \cdot z = 0$$

$$y \cdot z = 0 \iff y = 0 \lor z = 0$$

Z předchozích ekvivalencí plyne:

$$x \cdot y \cdot z = 0 \iff x = 0 \lor y = 0 \lor z = 0$$

Dělení komplexních čísel

Odvodíme si vztah pro výpočet podílu komplexních čísel v algebraickém tvaru a následně ověříme, že odpovídá definici podílu komplexních čísel ve tvaru uspořádaných dvojic. Podíl komplexních čísel $x = x_1 + x_2 i$ a $y = y_1 + y_2 i \neq 0$ je opět komplexní číslo, tedy podíl $\dfrac{x_1 + x_2 i}{y_1 + y_2 i}$ vyjádříme ve tvaru $a + bi$.

Nejdříve potřebujeme zařídit, aby se ve jmenovateli zlomku nacházelo číslo reálné. To už ale umíme, bude nám stačit rozšířit zlomek číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli. Následně už jen provedeme úpravu výrazu do požadovaného tvaru.

$$\frac{x_1 + x_2 i}{y_1 + y_2 i} = \frac{x_1 + x_2 i}{y_1 + y_2 i} \cdot \frac{y_1 - y_2 i}{y_1 - y_2 i} = \frac{(x_1 + x_2 i) \cdot (y_1 - y_2 i)}{{y_1}^2 + {y_2}^2} =$$

$$= \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{{y_1}^2 + {y_2}^2} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{{y_1}^2 + {y_2}^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{{y_1}^2 + {y_2}^2} i$$

Tento vztah pro podíl komplexních čísel v algebraickém tvaru zjevně odpovídá definici podílu komplexních čísel ve tvaru uspořádaných dvojic.

Podíl komplexních čísel $x = x_1 + x_2 i$ a $y = y_1 + y_2 i \neq 0$ je komplexní číslo

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{{y_1}^2 + {y_2}^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{{y_1}^2 + {y_2}^2} i$$

Vzorec pro dělení komplexních čísel je poměrně rozsáhlý, osvojit si předchozí postup je výhodnější než si vzorec pamatovat.

Příklad

Vypočítejte podíl $\dfrac{a}{b}$, kde $a = 1 + 2i$ a $b = 1 - i$.

Řešení

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + 2i}{1 - i} = \frac{1 + 2i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{(1 + 2i) \cdot (1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} =$$

$$= \frac{1 + 2i + i + 2i^2}{1 - i^2} = \frac{-1 + 3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i$$

Mocnina komplexního čísla

V množině komplexních čísel podobně jako v množině čísel reálných zavádíme přirozenou mocninu.

Definice. *Mějme komplexní číslo $z = a + bi$ a přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, pak n-tá mocnina komplexního čísla z je komplexní číslo*

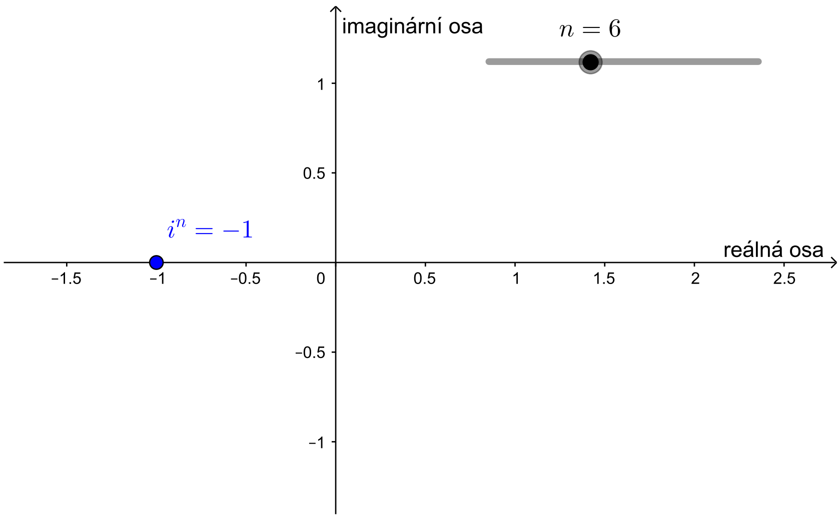
$$z^n = (a + bi)^n = \underbrace{(a + bi) \cdot (a + bi) \cdots (a + bi)}_{n}.$$

Mocniny i

Již víme, že druhá mocnina imaginární jednotky i je rovna -1. Můžeme vypočítat její další mocniny:

$$\begin{gathered} i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \\ i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1 \\ i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i \\ i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \\ \dots \end{gathered}$$

Povšimněme si, že se hodnoty příslušných mocnin imaginární jednotky opakují cyklicky s krokem 4. Posouváním posuvníku v následujícím appletu (obr. 2.1) lze měnit mocninu i.



Obrázek 2.1: Mocniny imaginární jednotky

Řešení motivační úlohy

V kapitole Motivace jsme se setkali s kvadratickou rovnicí $x^2 + x + \frac{1}{2} = 0$, u níž jsme došli k zápornému diskriminantu. Tato rovnice tedy nemá reálné řešení. Nyní si ukážeme řešení této rovnice v množině $\mathbb{C}$.

Nejdříve kvadratický trojčlen v rovnici doplníme na čtverec.

$$x^2 + x + \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$$

Zlomek $\frac{1}{4}$ převedeme na druhou stranu rovnice a upravíme.

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = (-1)\cdot\frac{1}{4}$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = (-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Již víme, že $-1 = i^2$ a $-1 = (-i)^2$, dosadíme tedy i^2 a $(-i)^2$ za -1 do předchozí rovnice. Vzniknou dvě rovnice, z každé z nich získáme jedno řešení původní rovnice.

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = i^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = (-i)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Hledáme číslo $x \in \mathbb{C}$, pro které platí uvedené vztahy. Z rovnic lze odhadnout:

$$x = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$
$$x = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

Provedeme zkoušku, která nám potvrdí, že tato dvě čísla jsou skutečně kořeny rovnice.

Nejprve dosadíme první číslo:

$$x^2+x+\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)+\frac{1}{2} =$$
$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{4}i^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2} = 0$$

Tedy $x = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ je kořenem rovnice. Analogicky můžeme ověřit, že i druhé číslo je kořenem.

Úlohy

1. Vypočítejte:
   - $a = (2+2i)+(1-6i)$

     $a = 3-4i$

   - $b = (-1+i)-(7-2i)$

     $b = -8+3i$

- $c = (3 - 2i) - (-3i)$

  $c = 3 + i$

- $d = (-5 - 4i) + 7$

  $d = 2 - 4i$

2. Vypočítejte:

- $a = 4(3 - 2i)$

  $a = 12 - 8i$

- $b = i(5 + 2i)$

  $b = 5i + 2i^2 = 5i + 2(-1) = -2 + 5i$

- $c = (3 + 4i)(3 - 4i)$

  $c = 3^2 + 4^2 = 25$

- $d = (2 + 3i)(-2 + 3i)$

  $d = -4 + 6i - 6i + 9i^2 = -4 - 9 = -13$

- $e = (2 + 5i)(3 - 2i)$

  $e = 6 - 4i + 15i - 10i^2 = 6 + 10 + 11i = 16 + 11i$

3. Vypočítejte:

- $a = \dfrac{3 + 7i}{3}$

  $a = \dfrac{3}{3} + \dfrac{7i}{3} = 1 + \dfrac{7}{3}i$

- $b = \dfrac{2 - 5i}{i}$

  $b = \dfrac{2 - 5i}{i} \cdot \dfrac{-i}{-i} = \dfrac{-2i - 5}{1} = -5 - 2i$

- $c = \dfrac{-5 + 3i}{1 + i}$

  $c = \dfrac{-5 + 3i}{1 + i} \cdot \dfrac{1 - i}{1 - i} = \dfrac{-5 + 5i + 3i + 3}{1 - i + i + 1} = \dfrac{-2 + 8i}{2} = -1 + 4i$

4. Vypočítejte:

- $a = (2 - 2i)^2$

  $a = (2 - 2i) \cdot (2 - 2i) = 4 - 4i - 4i - 4 = -8i$

- $b = (1 + i)^3$

  $a = (1+i)\cdot(1+i)\cdot(1+i) = (1+i+i-1)\cdot(1+i) = 2i\cdot(1+i) = -2+2i$

2.3 Odmocnina z komplexního čísla

Před zavedením odmocniny z komplexního čísla si připomeneme definici odmocniny z nezáporného reálného čísla.

Odmocnina z nezáporného reálného čísla

Definice. *Pro $n \in \mathbb{N}$ je n-tá odmocnina z nezáporného reálného čísla a takové nezáporné reálné číslo b, pro něž platí $a = b^n$. Značíme $\sqrt[n]{a} = b$.*

Poznámka. V oboru reálných čísel je n-tá odmocnina definována pouze pro čísla nezáporná a je také nezáporná a navíc jednoznačná.

Odmocnina z komplexního čísla

V oboru komplexních čísel nemáme kladná a záporná čísla. Za n-tou odmocninu z komplexního čísla označíme každé komplexní číslo, které vyhovuje dané rovnici $a = b^n$.

Definice. *Pro $n \in \mathbb{N}$ je n-tá odmocnina z komplexního čísla a každé takové komplexní číslo b, pro něž platí $a = b^n$.*

Příklad

Najděte všechny druhé odmocniny čísla $a = 3 + 4i$.

Řešení

Označme $b = b_x + b_y i$ druhou odmocninu čísla a. Z definice n-té odmocniny víme, že $a = b^2$.

$$a = b^2 = (b_x + b_y i)^2 = {b_x}^2 - {b_y}^2 + 2b_x b_y i$$

Tedy:

$$3 + 4i = {b_x}^2 - {b_y}^2 + 2b_x b_y i$$

Z definice rovnosti komplexních čísel víme, že dvě komplexní čísla jsou si rovna právě tehdy, když jsou si rovny jejich reálné i imaginární části. Z předchozího vztahu nám vzniká soustava dvou rovnic (jedna rovnice pro reálnou a jedna pro imaginární část) o dvou neznámých:

$$3 = {b_x}^2 - {b_y}^2$$

$$4 = 2b_x b_y$$

Soustavu vyřešíme.

$$b_y = \frac{2}{b_x}$$

$$3 = {b_x}^2 - \frac{4}{{b_x}^2}$$

$$3{b_x}^2 = {b_x}^4 - 4$$

Použijeme substituci $t = {b_x}^2$ a rovnici vyřešíme.

$$3t = t^2 - 4$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

Protože t je druhou mocninou reálného čísla, smysl má pouze kořen $t = 4$. Tedy:

$$b_x{}^2 = 4$$

$$b_x{}^2 - 4 = 0$$

$$(b_x - 2)(b_x + 2) = 0$$

$$b_{x_{1,2}} = \pm 2$$

Dopočítáme $b_y = \dfrac{2}{b_x}$:

$$b_{y_1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$b_{y_2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Druhými odmocninami komplexního čísla $3 + 4i$ jsou tedy komplexní čísla $2 + i$ a $-2 - i$.

Poznámka. Pokud budeme chtít určit n-tou odmocninu z komplexního čísla v algebraickém tvaru, dojdeme k rovnici n-tého stupně. Pro vyšší n je vyřešení rovnice (a tím i nalezení n-tých odmocnin) velmi obtížné či dokonce nemožné.

Počítání s odmocninami je výhodnější v goniometrickém a exponenciálním tvaru.

Úlohy

1. Najděte všechny druhé odmocniny z komplexního čísla $a = i$.

   $a = 0 + 1i = b_x{}^2 - b_y{}^2 + 2b_x b_y i$

   $0 = b_x{}^2 - b_y{}^2$

   $1 = 2b_x b_y$

   $b_y = \dfrac{1}{2b_x}$

   $0 = b_x{}^2 - \dfrac{1}{4b_x{}^2}$

   $0 = 4b_x{}^4 - 1$

   $\dfrac{1}{4} = b_x{}^4$

   $b_{x_{1,2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   $b_{y_1} = \dfrac{1}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$b_{y_2} = \frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Druhými odmocninami komplexního čísla i jsou tedy komplexní čísla $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ a $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

2. Najděte všechny druhé odmocniny z komplexního čísla $a = 1$.

$a = 1 + 0i = {b_x}^2 - {b_y}^2 + 2b_xb_yi$

$1 = {b_x}^2 - {b_y}^2$

$0 = 2b_xb_y$

Pokud by platila rovnost $b_x = 0$, pak by platila rovnost $1 = 0 - {b_y}^2$, což ale není možné.

Tedy $b_y = 0$.

$1 = {b_x}^2$

$b_{x_{1,2}} = \pm 1$

Druhými odmocninami komplexního čísla 1 jsou tedy komplexní čísla 1 a -1.

3. Najděte všechny druhé odmocniny z komplexního čísla $a = -5 - 12i$.

$a = -5 + (-12)i = {b_x}^2 - {b_y}^2 + 2b_xb_yi$

$-5 = {b_x}^2 - {b_y}^2$

$-12 = 2b_xb_y$

$$b_y = \frac{-12}{2b_x} = \frac{-6}{b_x}$$

$$-5 = {b_x}^2 - \frac{36}{{b_x}^2}$$

$-5{b_x}^2 = {b_x}^4 - 36$

${b_x}^4 + 5{b_x}^2 - 36 = 0$

$t = {b_x}^2$

$t^2 + 5t - 36 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot (-36)}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

Protože t je druhou mocninou reálného čísla, smysl má pouze kořen $t = 4$.

${b_x}^2 = 4$

$b_{x_{1,2}} = \pm 2$

$$b_{y_1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$b_{y_2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Druhými odmocninami komplexního čísla $-5 - 12i$ jsou tedy komplexní čísla $2 - 3i$ a $-2 + 3i$.

4. Vypočítejte absolutní hodnotu komplexního čísla $a = -5 - 12i$ a jeho druhých odmocnin (jež jsme vypočítali v předchozím příkladu).

$$|-5 - 12i| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$|2 - 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$|-2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Ve čtvrtém příkladu si můžeme všimnout, že absolutní hodnoty obou druhých odmocnin čísla $a \in \mathbb{C}$ jsou stejné a jsou rovny $\sqrt{|a|}$.

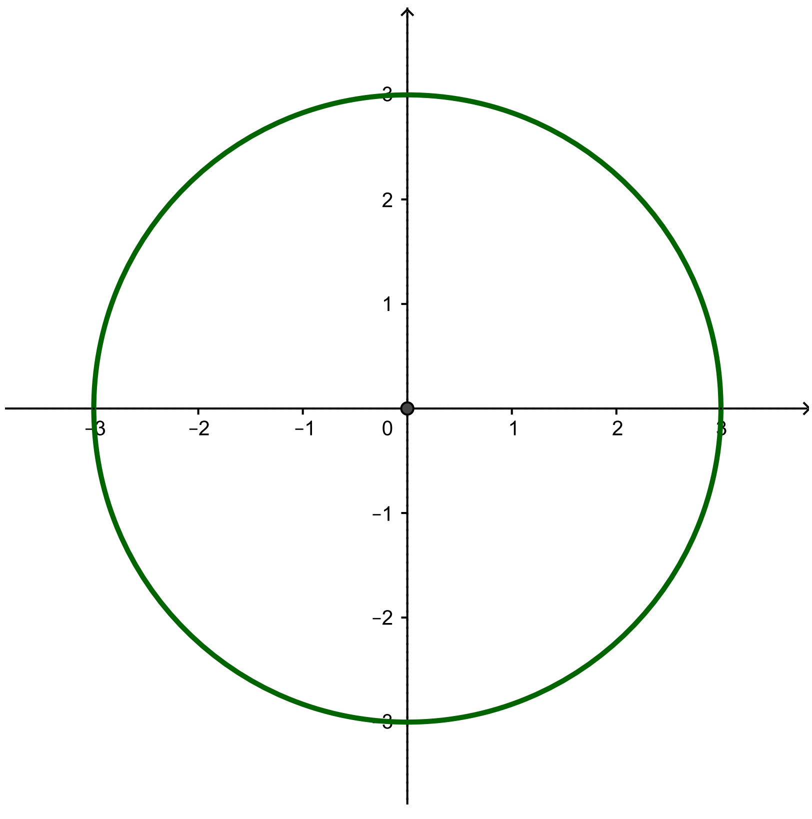
3. Množiny bodů v komplexní rovině

Při řešení následujících úloh budeme využívat znalosti o množinách bodů dané vlastnosti v rovině a poznatky z předchozích kapitol (absolutní hodnota, operace s komplexními čísly, absolutní hodnota rozdílu komplexních čísel).

Najděte v komplexní rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro něž platí:

1. $|z| = 3$

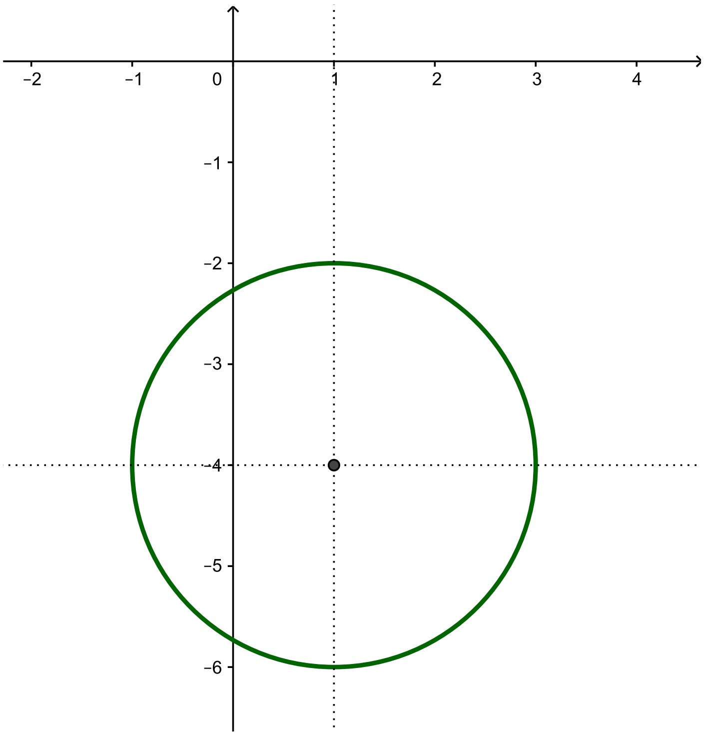
   Hledáme všechna taková komplexní čísla z, jejichž obrazy v komplexní rovině mají vzdálenost od počátku rovnu 3. Množina obrazů řešení tvoří v komplexní rovině kružnici se středem v počátku a poloměrem 3 (obr. 3.1).



Obrázek 3.1: Množina 1

2. $|z - 1 + 4i| = 2$

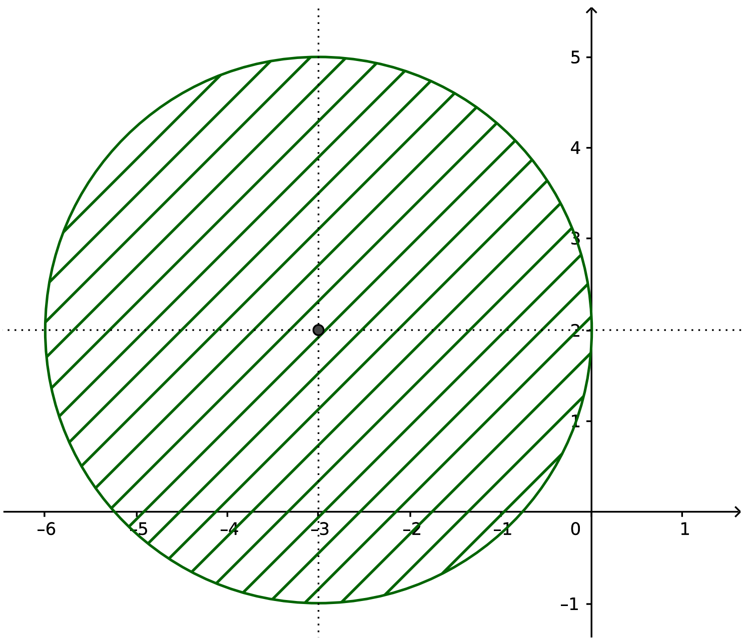
   Výraz $|z - 1 + 4i|$ můžeme upravit na tvar $|z - (1 - 4i)|$. Hledáme tedy všechna taková komplexní čísla z, jejichž obrazy v komplexní rovině mají od obrazu čísla $1 - 4i$ vzdálenost rovnu 2. Množina obrazů řešení tvoří v komplexní rovině kružnici se středem v bodě $[1; -4]$ a poloměrem 2 (obr. 3.2).



Obrázek 3.2: Množina 2

3. $|z + 3 - 2i| \leq 3$

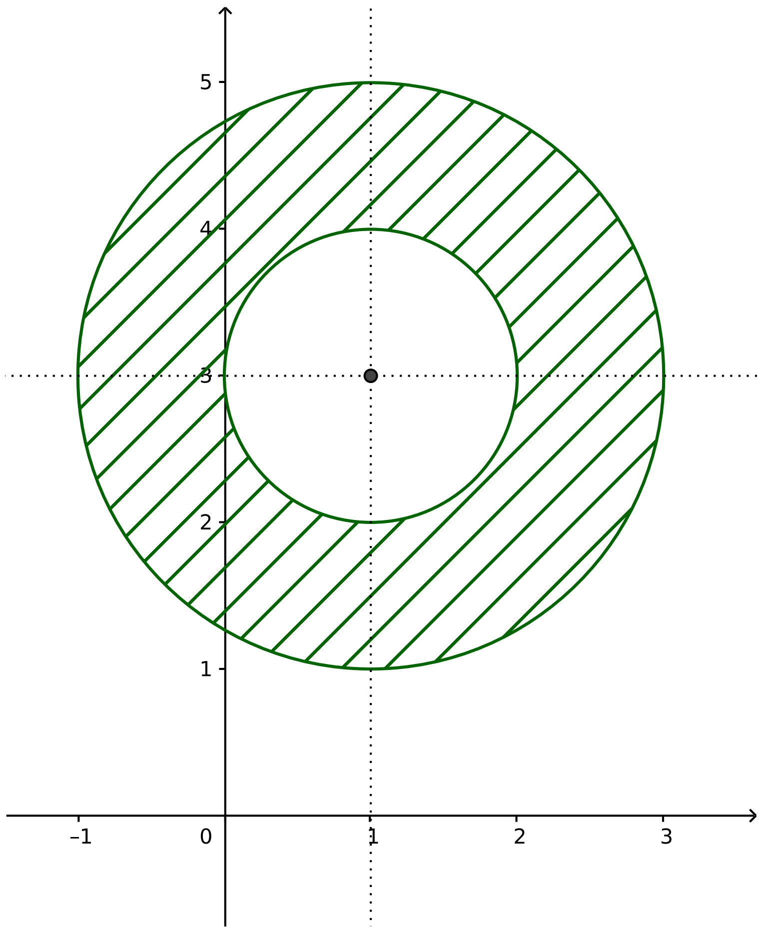
   Výraz $|z + 3 - 2i|$ můžeme upravit na tvar $|z - (-3 + 2i)|$. Hledáme tedy všechna taková komplexní čísla z, jejichž obrazy v komplexní rovině mají od obrazu čísla $-3+2i$ vzdálenost nejvýše 3. Množina obrazů řešení tvoří v komplexní rovině kruh se středem v bodě $[-3; 2]$ a poloměrem 3 (obr. 3.3).



Obrázek 3.3: Množina 3

4. $1 \leq |z - 1 - 3i| \leq 2$

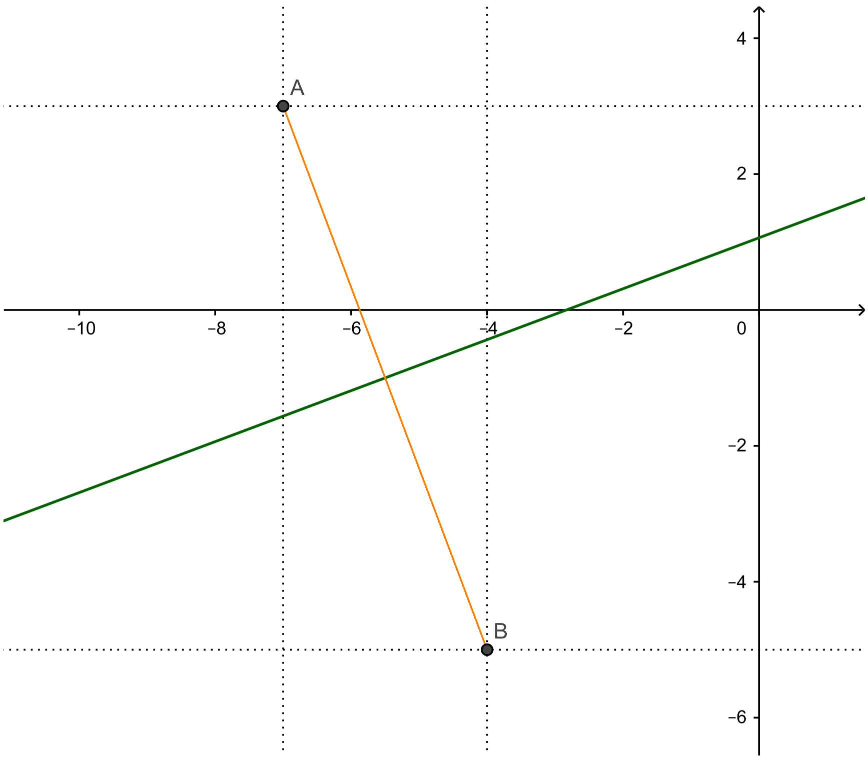
   Podobně jako v předchozí úloze můžeme výraz $|z - 1 - 3i|$ upravit na tvar $|z-(1+3i)|$. Hledáme tedy všechna taková komplexní čísla z, jejichž obrazy v komplexní rovině mají od obrazu čísla $1+3i$ vzdálenost nejméně 1 a nejvýše 2. Množina obrazů řešení tvoří v komplexní rovině mezikruží vymezené kružnicemi se středem $[1; 3]$ a poloměry 1 a 2 (obr. 3.4).



Obrázek 3.4: Množina 4

5. $|z + 7 - 3i| = |z + 4 + 5i|$

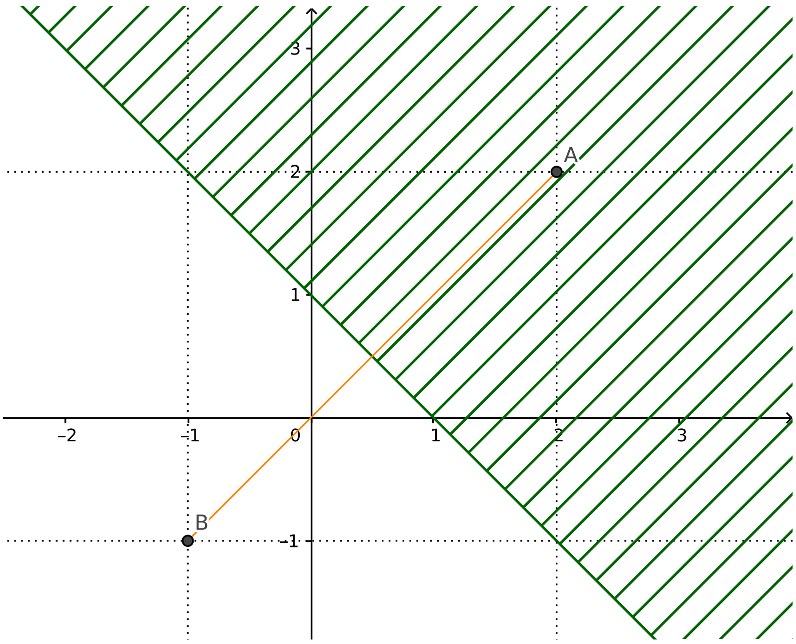
   Rovnici upravíme na tvar $|z - (-7 + 3i)| = |z - (-4 - 5i)|$. Hledáme všechna komplexní čísla z, jejichž obrazy v komplexní rovině mají od obrazu $A[-7; 3]$ čísla $-7+3i$ stejnou vzdálenost jako od obrazu $B[-4; -5]$ čísla $-4-5i$. Množina obrazů řešení tvoří v komplexní rovině osu úsečky AB (obr. 3.5).



Obrázek 3.5: Množina 5

6. $|z - 2 - 2i| \leq |z + 1 + i|$

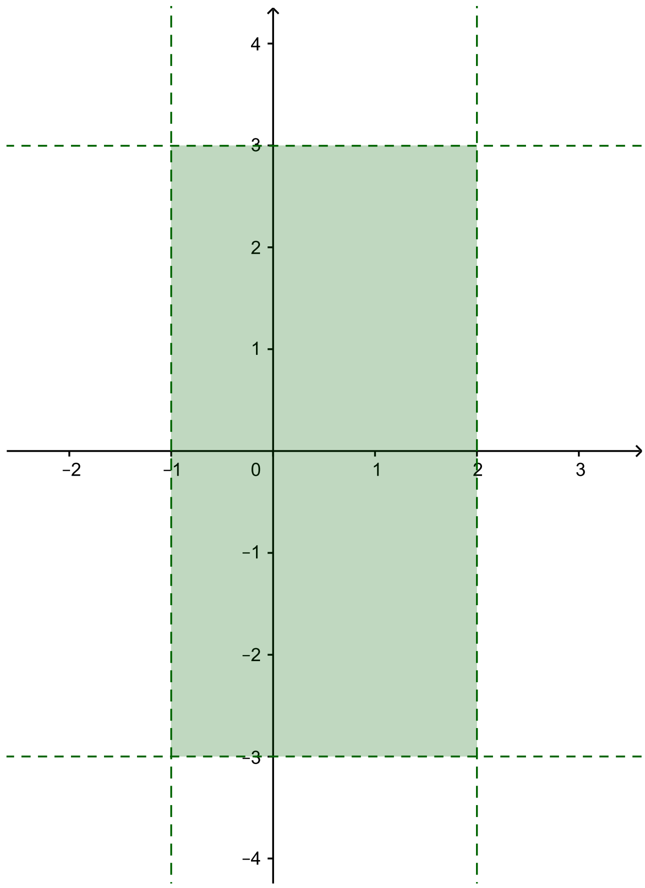
   Nerovnici upravíme na tvar $|z - (2 + 2i)| \leq |z - (-1 - i)|$. Hledáme tedy všechna komplexní čísla z, jejichž obrazy v komplexní rovině mají od obrazu $A[2; 2]$ čísla $2 + 2i$ vzdálenost menší nebo rovnu vzdálenosti od obrazu $B[-1; -1]$ čísla $-1 - i$. Množina obrazů řešení tvoří v komplexní rovině polorovinu, jejíž hraniční přímka je osou úsečky AB (obr. 3.6).



Obrázek 3.6: Množina 6

7. $|\operatorname{Im} z| < 3 \;\wedge\; -1 < \operatorname{Re} z < 2$

   Je-li $|\operatorname{Im} z| < 3$, potom $-3 < \operatorname{Im} z < 3$. Množina obrazů řešení tvoří v komplexní rovině „otevřený“ obdélník (obdélník bez hraničních úseček, tj. stran) (obr. 3.7).



Obrázek 3.7: Množina 7

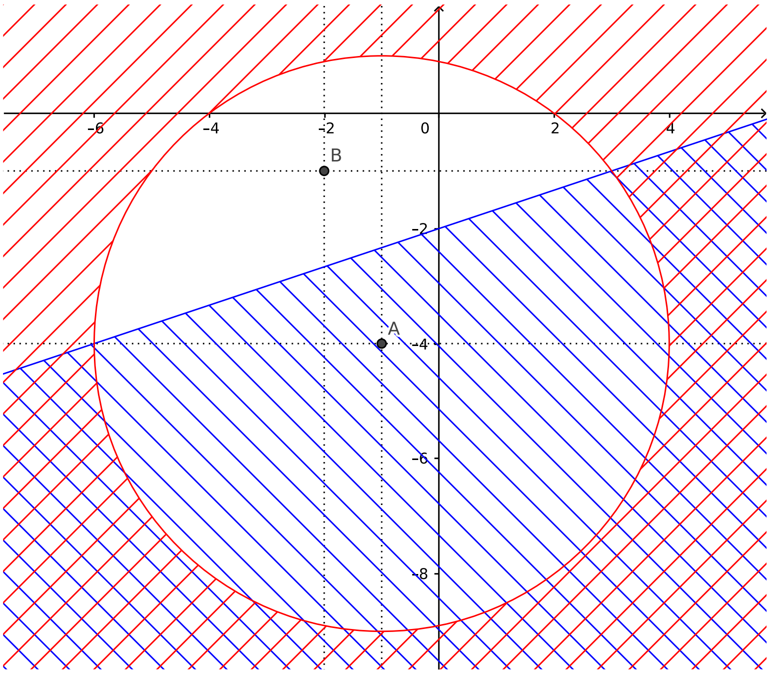
8. $|z + 1 + 4i| \geq 5 \;\wedge\; |z + 1 + 4i| \leq |z + 2 + i|$

   Nerovnice upravíme na tvar $|z - (-1 - 4i)| \geq 5$ a $|z - (-1 - 4i)| \leq$ $\leq |z - (-2 - i)|$.

   První nerovnice říká, že hledáme komplexní čísla, jejichž obrazy mají od obrazu $A[-1; -4]$ komplexního čísla $-1 - 4i$ vzdálenost větší nebo rovnu 5.

   Druhá nerovnice říká, že hledáme komplexní čísla, jejichž obrazy mají od obrazu $A[-1; -4]$ komplexního čísla $-1 - 4i$ vzdálenost menší nebo rovnu vzdálenosti od obrazu $B[-2; -1]$ komplexního čísla $-2 - i$.

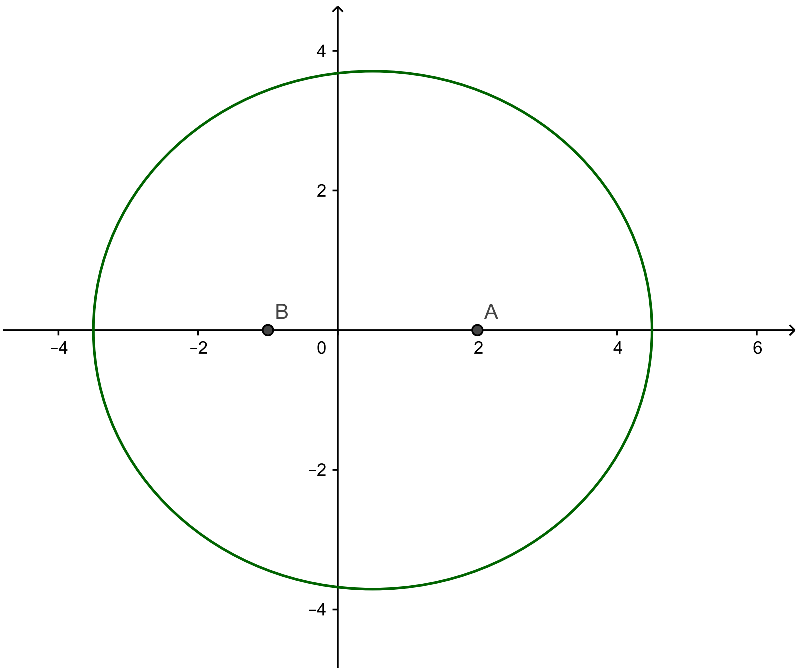
   V zadání je uvedeno „a současně“, hledáme tedy komplexní čísla, pro která platí současně obě dvě podmínky. Řešením je proto průnik dvou množin (v obrázku vyšrafován červeně a současně modře). V zadaných nerovnicích je $\geq$ a $\leq$, řešení tedy obsahuje i hranice průniku (obr. 3.8).



Obrázek 3.8: Množina 8

9. $|z-2|+|z+1|=8$

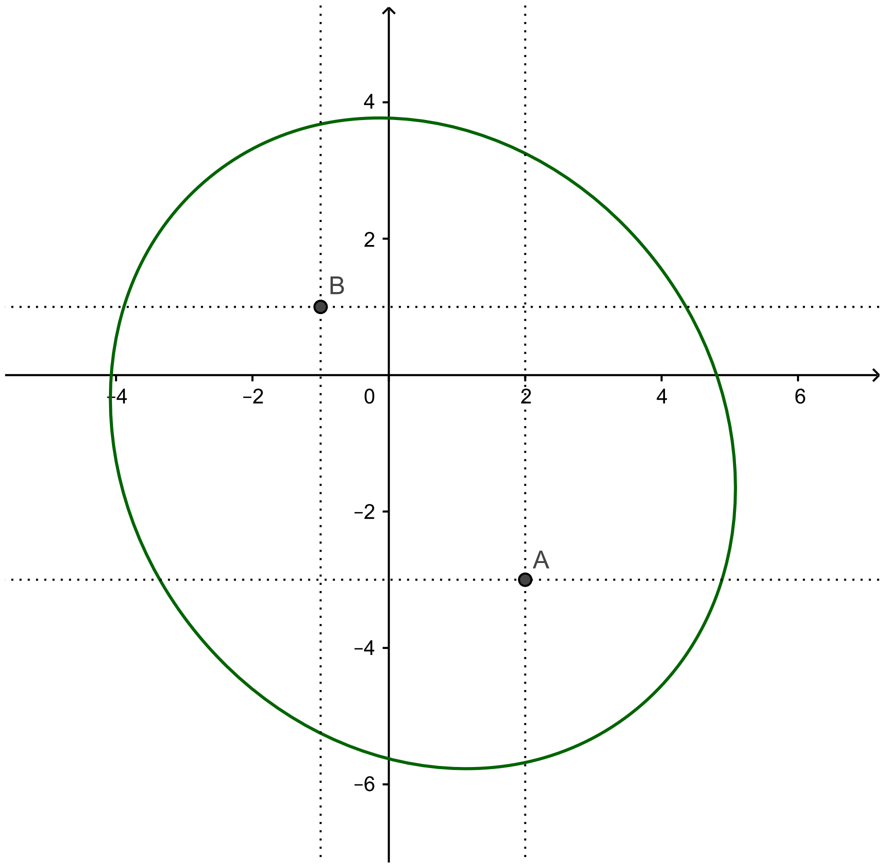
   Rovnici upravíme na tvar $|z-(2+0i)|+|z-(-1+0i)|=8$. Hledáme tedy komplexní čísla, jejichž obrazy mají konstantní součet vzdáleností od obrazu $A[2;0]$ čísla $2+0i$ a obrazu $B[-1;0]$ čísla $-1+0i$, tento součet je roven 8. Množina obrazů řešení tvoří v komplexní rovině elipsu s ohnisky A a B a hlavní poloosou délky 4 (obr. 3.9).



Obrázek 3.9: Množina 9

10. $|z - 2 + 3i| + |z + 1 - i| = 10$

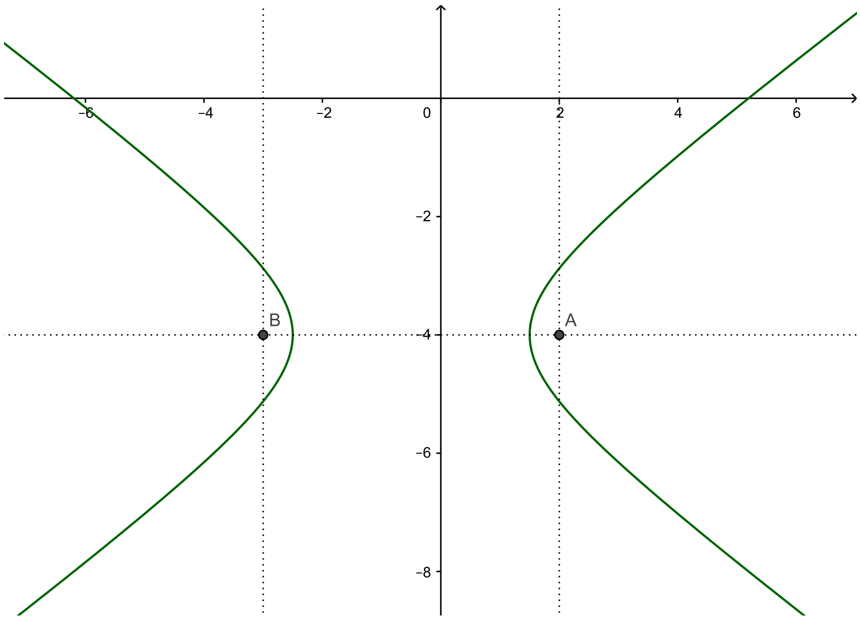
Rovnici upravíme na tvar $|z - (2 - 3i)| + |z - (-1 + i)| = 10$. Hledáme tedy komplexní čísla, jejichž obrazy mají konstantní součet vzdáleností od obrazu $A[2; -3]$ čísla $2 - 3i$ a obrazu $B[-1; 1]$ čísla $-1 + i$, tento součet je roven 10. Množina obrazů řešení tvoří v komplexní rovině elipsu s ohnisky A a B a hlavní poloosou délky 5 (obr. 3.10).



Obrázek 3.10: Množina 10

11. $\big||z - 2 + 4i| - |z + 3 + 4i|\big| = 6$

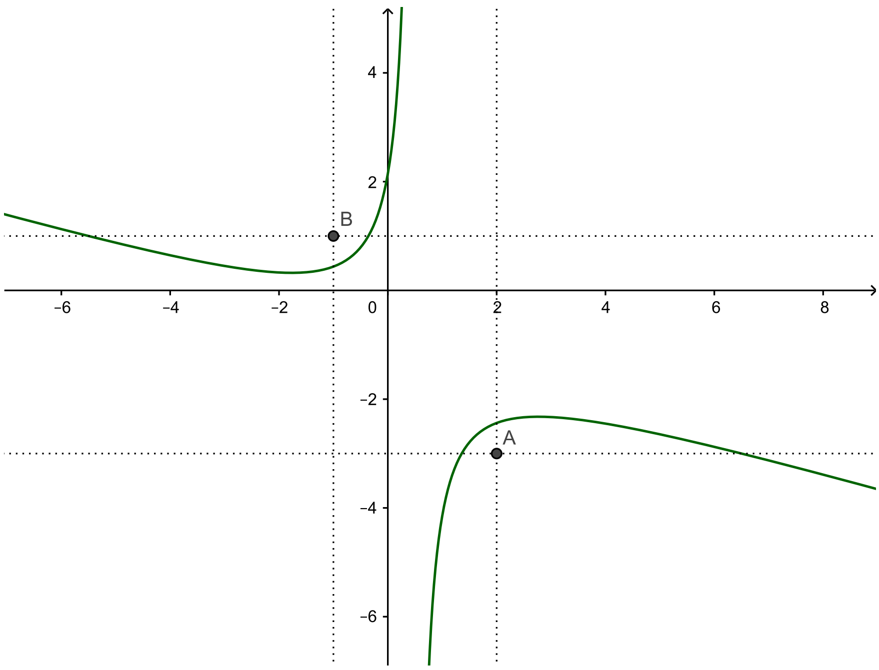
Rovnici upravíme na tvar $\big||z-(2-4i)|-|z-(-3-4i)|\big| = 6$. Hledáme tedy komplexní čísla, jejichž obrazy mají absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od obrazu $A[2; -4]$ čísla $2 - 4i$ a obrazu $B[-3; -4]$ čísla $-3 - 4i$ rovnu 6. Množina obrazů řešení tvoří v komplexní rovině hyperbolu s ohnisky A a B a hlavní poloosou délky 3 (obr. 3.11).



Obrázek 3.11: Množina 11

12. $\big||z-2+3i|-|z+1-i|\big|=4$

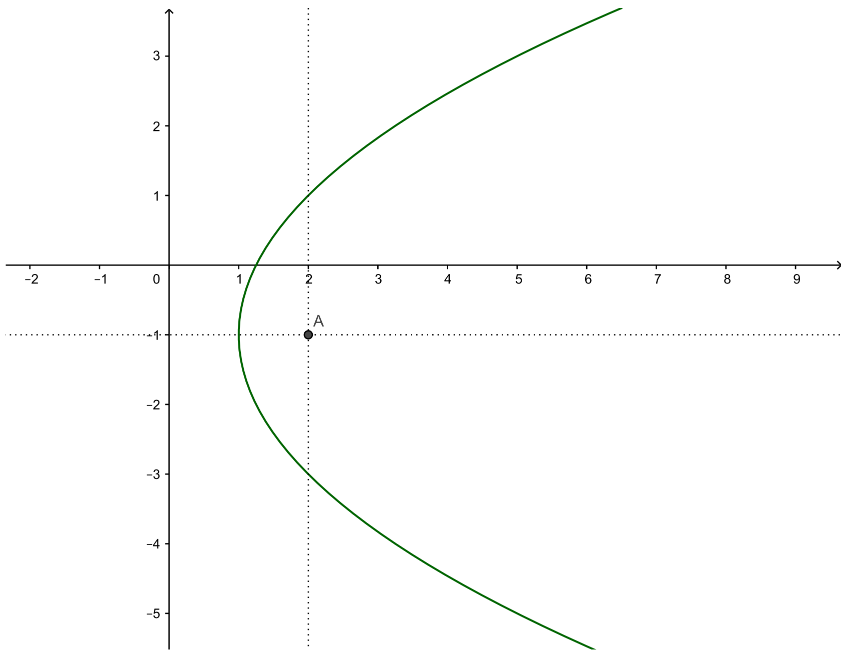
Rovnici upravíme na tvar $\big||z-(2-3i)|-|z-(-1+i)|\big|=4$. Hledáme tedy komplexní čísla, jejichž obrazy mají absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od obrazu $A[2;-3]$ čísla $2-3i$ a obrazu $B[-1;1]$ čísla $-1+i$ rovnu 10. Množina obrazů řešení tvoří v komplexní rovině hyperbolu s ohnisky A a B a hlavní poloosou délky 2 (obr. 3.12).



Obrázek 3.12: Množina 12

13. $|z - 2 + i| = |\mathrm{Re}\, z|$

Rovnici převedeme do tvaru $|z-(2-i)| = |\mathrm{Re}\, z|$. Absolutní hodnota reálné části komplexního čísla odpovídá vzdálenosti jeho obrazu od imaginární osy. Hledáme tedy komplexní čísla, jejichž obrazy mají vzdálenost od obrazu $A[2; -1]$ čísla $2 - i$ rovnu vzdálenosti od imaginární osy. Množina obrazů řešení tvoří parabolu, jejímž ohniskem je bod A a řídicí přímkou je imaginární osa (obr. 3.13).



Obrázek 3.13: Množina 13

4. Goniometrický tvar komplexního čísla

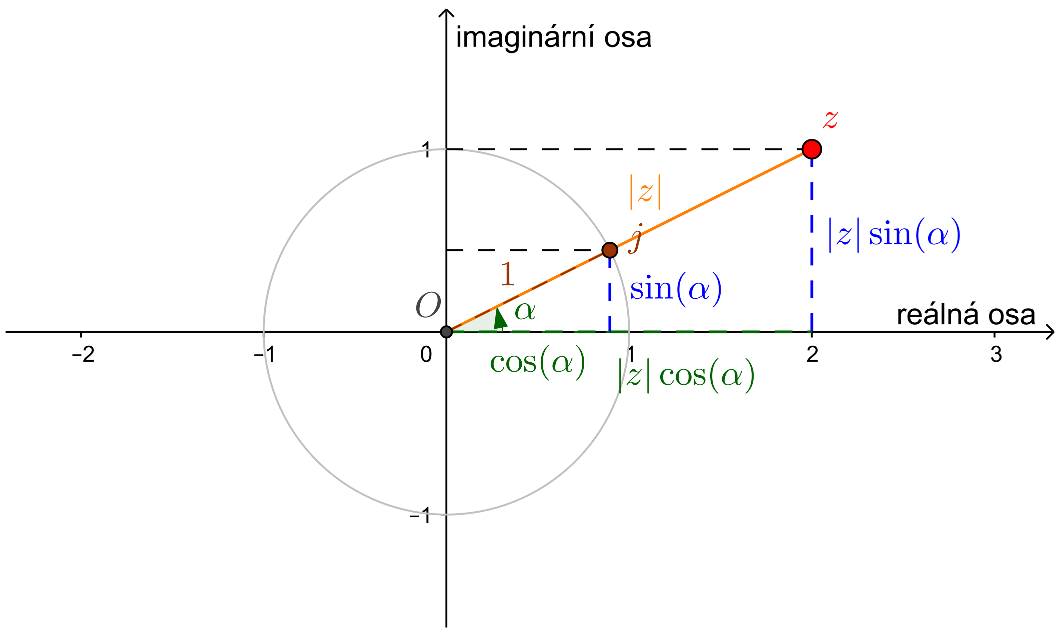
4.1 Goniometrický tvar komplexního čísla

Obraz Z nenulového komplexního čísla $z = [a; b]$ v komplexní rovině můžeme určit pomocí jeho vzdálenosti $|z|$ od počátku O a velikosti orientovaného úhlu α mezi kladnou poloosou x a polopřímkou OZ, kde kladná poloosa x je počátečním ramenem.

Nejdříve se podíváme na komplexní čísla, jejichž obrazy leží na jednotkové kružnici se středem v počátku O. Tyto body jsou obrazy komplexních jednotek. Jejich x-ové souřadnice jsou rovny $\cos\alpha$ a y-ové souřadnice rovny $\sin\alpha$. Komplexní jednotku $j = j_1 + j_2 i$ tedy můžeme vyjádřit takto:

$$j = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Goniometrický tvar nenulového komplexního čísla z můžeme odvodit pomocí podobnosti dvou trojúhelníků s přeponami OJ a OZ:



Obrázek 4.1: Goniometrický tvar komplexního čísla

Z appletu (obr. 4.1) můžeme vypozorovat následující vztah pro nenulové komplexní číslo z:

$$z = a + bi = |z|\cos\alpha + |z|i\sin\alpha = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Definice. *Goniometrický tvar nenulového komplexního čísla z je výraz $|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Reálné číslo α se nazývá argument komplexního čísla z.*

Poznámka. Goniometrické funkce jsou periodické, proto není argument komplexního čísla určen jednoznačně. Má-li komplexní číslo argument α, má také argument $\alpha + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Obvykle používáme základní argument $\alpha \in \langle 0; 2\pi)$.

Poznámka. Velikost orientovaného úhlu α uvádíme v radiánech nebo ve stupních.

Rovnost komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Z kapitoly o komplexní rovině víme, že dvě komplexní čísla jsou si rovna právě tehdy, když jejich obrazy v komplexní rovině splývají. Z toho plyne vztah pro rovnost komplexních čísel v goniometrickým tvaru.

Dvě nenulová komplexní čísla $x = |x|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a $y = |y|(\cos\beta + i\sin\beta)$ jsou si rovna právě tehdy, když jsou si rovny jejich absolutní hodnoty a jejich argumenty se liší o $k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$|x|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |y|(\cos\beta + i\sin\beta) \iff |x| = |y| \wedge \alpha = \beta + k \cdot 2\pi$$

Převod algebraického tvaru na goniometrický tvar

Pro převod nenulového komplexního čísla $z = a + bi$ v algebraickém tvaru na tvar goniometrický potřebujeme vypočítat jeho absolutní hodnotu (již umíme) a najít jeho argument α. Argument komplexního čísla nalezneme pomocí vztahů odvozených v předchozím appletu:

$$a = |z|\cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{a}{|z|}$$

$$b = |z|\sin\alpha \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \frac{b}{|z|}$$

Základní argument $\alpha \in \langle 0; 2\pi)$ je vztahy $\cos\alpha = \dfrac{a}{|z|}$ a $\sin\alpha = \dfrac{b}{|z|}$ jednoznačně určen.

Příklad

Vyjádřete v goniometrickém tvaru se základním argumentem číslo $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Řešení

Víme, že pro argument α komplexního čísla $z = a + bi$ platí tyto vztahy:

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} \wedge \sin\alpha = \frac{b}{|z|}$$

Čísla a a b známe, dále potřebujeme vypočítat absolutní hodnotu komplexního čísla z:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

Nyní vypočítáme hodnoty kosinu a sinu pro úhel α a podle nich určíme základní argument komplexního čísla z.

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots \quad \alpha \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$$
$$\sin\alpha = \frac{b}{|z|} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \quad \dots \quad \alpha \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$$

Oba vztahy musí platit současně, tedy základní argument $\alpha = \frac{\pi}{6}$ a goniometrický tvar komplexního čísla z tedy vypadá následovně:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

Převod goniometrického tvaru na algebraický tvar

Převod komplexního čísla v goniometrickém tvaru na tvar algebraický je snazší, budeme jen potřebovat vyjádřit hodnoty sinu a kosinu pro daný úhel α.

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|\cos\alpha + |z|\sin\alpha \cdot i$$

Příklad

Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní číslo $z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

Řešení

Nejdříve vypočítáme hodnoty sinu a kosinu úhlu $\alpha = \frac{4\pi}{3}$.

$$\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$
$$\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vypočítané hodnoty dosadíme do goniometrického tvaru a zjednodušíme výraz:

$$z = 2\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

Úlohy

1. Nalezněte mezi následujícími komplexními čísly dvojice čísel, která jsou si rovna:

   - $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
   - $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
   - $z_3 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right)$
   - $z_4 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$
   - $z_5 = 2\left(\cos\frac{-10\pi}{6} + i\sin\frac{-10\pi}{6}\right)$
   - $z_6 = 2\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$

   $$z_3 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = z_2$$

   $$z_5 = 2\left(\cos\frac{-10\pi}{6} + i\sin\frac{-10\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}\right) =$$

   $$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = z_1$$

   $$z_6 = 2\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = z_4$$

2. Vyjádřete v goniometrickém tvaru následující komplexní čísla, použijte základní argument α:

   - $z = 2$

     Obraz komplexního čísla z v komplexní rovině se nachází na kladné poloose x, proto základní argument $\alpha = 0$. Jeho vzdálenost od počátku je rovna 2.

     $$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2(\cos 0 + i\sin 0)$$

   - $z = -3i$

     Obraz komplexního čísla z v komplexní rovině se nachází na záporné poloose y, proto základní argument $\alpha = \frac{3\pi}{2}$. Jeho vzdálenost od počátku je rovna 3.

     $$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

   - $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$|z| = 1$

$\cos\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

- $z = -3\sqrt{3} + 3i$

  $|z| = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{9 \cdot 3 + 9} = 6$

  $\cos\alpha = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \sin\alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

  $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

  $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

- $z = (4 - 2i) + (1 + 7i)$

  $z = (4 - 2i) + (1 + 7i) = 5 + 5i$

  $|z| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

  $\cos\alpha = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \sin\alpha = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

  $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

- $z = (3 - i)(-1 + 3i)$

  $z = (3 - i)(-1 + 3i) = 10i$

  Obraz komplexního čísla z v komplexní rovině se nachází na kladné poloose y, proto základní argument $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Jeho vzdálenost od počátku je rovna 10.

  $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 10\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

3. Vyjádřete v algebraickém tvaru následující komplexní čísla:

   - $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

     $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

     $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

- $z = 3(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

4.2 Násobení a dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Násobení

Mějme dvě nenulová komplexní čísla $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a $b = |b|(\cos\beta + i\sin\beta)$. Jejich součin můžeme s využitím goniometrických vzorců spočítat takto:

$$a \cdot b = (|a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)) \cdot (|b|(\cos\beta + i\sin\beta)) =$$

$$= |a||b|(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$$

$$= |a||b|\left((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)\right) =$$

$$= |a||b|\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right)$$

Součin nenulových komplexních čísel $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *a* $b = |b|(\cos\beta + i\sin\beta)$ *je komplexní číslo*

$$|a||b|\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right).$$

Příklad

Vypočítejte součin komplexních čísel $a = 2(\cos 190° + i\sin 190°)$ a
$b = 3(\cos 220° + i\sin 220°)$.

Řešení

$$a \cdot b = 2(\cos 190° + i\sin 190°) \cdot 3(\cos 220° + i\sin 220°) =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot (\cos(190° + 220°) + i\sin(190° + 220°)) = 6(\cos 410° + i\sin 410°) =$$

$$= 6(\cos 50° + i\sin 50°)$$

Dělení

Podobným způsobem můžeme odvodit i dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru:

$$\frac{a}{b}=\frac{|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{|b|(\cos\beta+i\sin\beta)}=\frac{|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{|b|(\cos\beta+i\sin\beta)}\cdot\frac{(\cos\beta-i\sin\beta)}{(\cos\beta-i\sin\beta)}=$$

$$=\frac{|a|\left((\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\right)}{|b|(\cos^2\beta+\sin^2\beta)}=$$

$$=\frac{|a|}{|b|}\left(\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)\right)$$

Podíl nenulových komplexních čísel $a=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ *a* $b==|b|(\cos\beta+i\sin\beta)$ *je komplexní číslo*

$$\frac{|a|}{|b|}\left(\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)\right).$$

Příklad

Vypočítejte podíl $\frac{a}{b}$ komplexních čísel $a=5(\cos 20°+i\sin 20°)$ a $b=2(\cos 30°+i\sin 30°)$.

Řešení

$$\frac{a}{b}=\frac{5(\cos 20°+i\sin 20°)}{2(\cos 30°+i\sin 30°)}=\frac{5}{2}\left(\cos(20°-30°)+i\sin(20°-30°)\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\left(\cos(-10°)+i\sin(-10°)\right)=\frac{5}{2}(\cos 350°+i\sin 350°)$$

Poznámka. Goniometrický tvar komplexních čísel je výhodný pro operace násobení a dělení.

Mocnina

Pomocí násobení můžeme zavést i n-tou mocninu nenulového komplexního čísla v goniometrickém tvaru, kde $n\in\mathbb{N}$.

$$z^n=(|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha))^n=$$

$$=\underbrace{(|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha))\cdot(|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha))\cdots(|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha))}_{n}=$$

$$=|z|^n(\cos(\underbrace{\alpha+\alpha+\cdots+\alpha}_{n})+i\sin(\underbrace{\alpha+\alpha+\cdots+\alpha}_{n}))=$$

$$=|z|^n(\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha))$$

Mějme nenulové komplexní číslo $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, pak n-tá mocnina komplexního čísla z je komplexní číslo

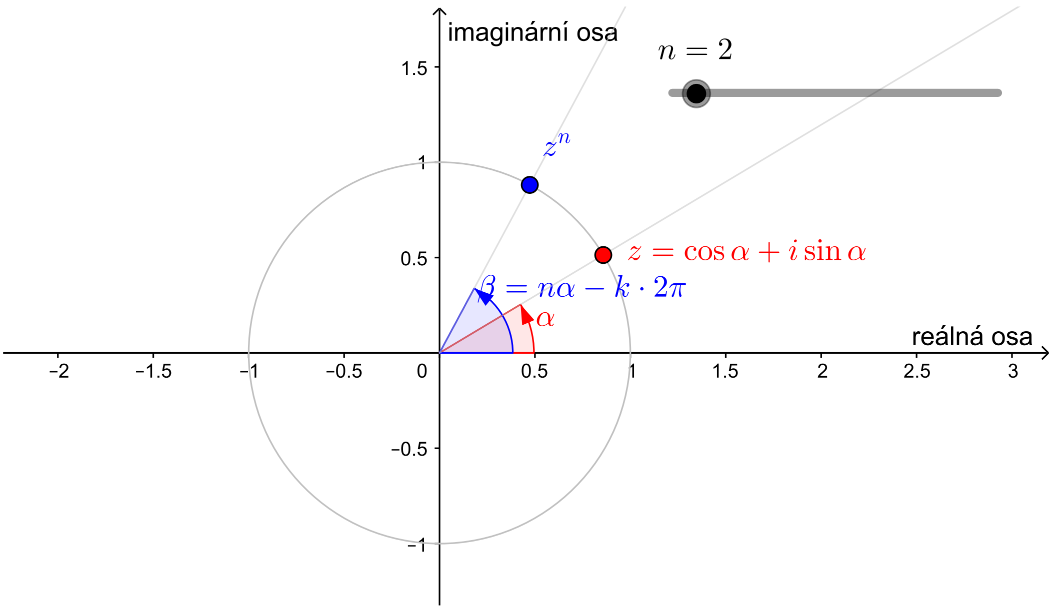
$$z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)).$$

Pokud je z komplexní jednotkou ($|z| = 1$), hovoříme o tzv. Moivreově větě.

Věta (Moivreova)**.** *Pro každé přirozené číslo n a každé reálné číslo α platí:*

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha).$$

V následujícím appletu (obr. 4.2) můžete pohybovat obrazem komplexního čísla z (které je komplexní jednotkou) a pomocí posuvníku měnit exponent, čímž se bude měnit i poloha obrazu komplexního čísla z^n.



Obrázek 4.2: Moivreova věta

Příklad

Vypočítejte pátou mocninu komplexního čísla $a = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

Řešení

$$a^5 = \left(2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right)^5 = 2^5\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^5 =$$
$$= 32\left(\cos\frac{5\cdot 4\pi}{3} + i\sin\frac{5\cdot 4\pi}{3}\right) = 32\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right) =$$
$$= 32\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

Úlohy

1. Vypočítejte v goniometrickém tvaru součin komplexních čísel x a y:
   - $x = 2,\ y = 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

     $$x = 2 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$$

     $$x \cdot y = 2(\cos 0 + i\sin 0) \cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

     $$= 10\left(\cos\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(0 + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 10\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

   - $x = \cos(-110°) + i\sin(-110°),\ y = \sqrt{5}(\cos 60° + i\sin 60°)$

     $$x \cdot y = (\cos(-110°) + i\sin(-110°)) \cdot \sqrt{5}(\cos 60° + i\sin 60°) =$$

     $$= \sqrt{5}(\cos(-110° + 60°) + i\sin(-110° + 60°)) =$$

     $$= \sqrt{5}(\cos(-50°) + i\sin(-50°)) =$$

     $$= \sqrt{5}(\cos(310°) + i\sin(310°))$$

   - $x = 2(\cos 230° + i\sin 230°),\ y = \sqrt{2}(\cos 170° + i\sin 170°)$

     $$x \cdot y = 2(\cos 230° + i\sin 230°) \cdot \sqrt{2}(\cos 170° + i\sin 170°) =$$

     $$= 2\sqrt{2}(\cos(230° + 170°) + i\sin(230° + 170°)) =$$

     $$= 2\sqrt{2}(\cos(400°) + i\sin(400°)) =$$

     $$= 2\sqrt{2}(\cos(40°) + i\sin(40°))$$

   - $x = -1 + i,\ y = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

     $$x = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

     $$x \cdot y = (-1 + i) \cdot \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) =$$

     $$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) =$$

     $$= 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{12}\right)\right) =$$

     $$= 2\left(\cos\frac{14\pi}{12} + i\sin\frac{14\pi}{12}\right)$$

2. Vypočítejte v goniometrickém tvaru podíl komplexních čísel x a y:
   - $x = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\ y = 9$

     $$y = 9 = 9(\cos(0) + i\sin(0))$$

     $$\frac{x}{y} = \frac{3}{9}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 0\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

- $x = 6,\ y = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$x = 6 = 6(\cos(0) + i\sin(0))$$

$$\frac{x}{y} = \frac{6}{3}\left(\cos\left(0 - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(0 - \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

- $x = \cos 80° + i\sin 80°,\ y = \sqrt{3}(\cos(-10°) + i\sin(-10°))$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos(80° - (-10°)) + i\sin(80° - (-10°))) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}(\cos(90°) + i\sin(90°))$$

- $x = 2(\cos 50° + i\sin 50°),\ y = \sqrt{2}(\cos 170° + i\sin 170°)$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{2}}(\cos(50° - 170°) + i\sin(50° - 170°)) =$$

$$= \sqrt{2}(\cos(-120°) + i\sin(-120°)) =$$

$$= \sqrt{2}(\cos(240°) + i\sin(240°))$$

- $x = 1 + i,\ y = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$$x = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 1\left(\cos\left(\frac{3\pi - 2\cdot 5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi - 2\cdot 5\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$

3. Vypočítejte následující mocniny komplexních čísel:

- $z^6 = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$

$$z^6 = \cos\left(6\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(6\frac{\pi}{6}\right) = \cos\pi + i\sin\pi$$

- $z^{10} = \left(2\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)\right)^{10}$

  $z^{10} = 2^{10}\left(\cos\left(10\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(10\frac{3\pi}{8}\right)\right) =$

  $= 1024\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right) = 1024\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

- $z^5 = \left(-4 + 4\sqrt{3}i\right)^5$

  $|z| = |-4 + 4\sqrt{3}| = \sqrt{16 + 16 \cdot 3} = 8$

  $z = -4 + 4\sqrt{3}i = 8\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

  $z^5 = 8^5\left(\cos\left(5\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(5\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$

  $= 32\,768\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right) = 32\,768\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

- $z^{12} = \left((3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i)(2\sqrt{3} + 2i)\right)^{12}$

  Nejdříve převedeme jednotlivé činitele do goniometrického tvaru, následně je vynásobíme a poté umocníme.

  Označíme $a = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$.

  $|a| = \sqrt{9 \cdot 2 + 9 \cdot 2} = 6$

  $a = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

  Nyní označíme $b = 2\sqrt{3} + 2i$.

  $|b| = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = 4$

  $b = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

  Číslo z je součinem čísel a a b.

  $z = a \cdot b = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$

  $= 24\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right) =$

  $= 24\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

  Nakonec číslo z umocníme.

  $z^{12} = 24^{12}\left(\cos\left(12 \cdot \frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(12 \cdot \frac{5\pi}{12}\right)\right) =$

  $= 24^{12}\left(\cos 5\pi + i\sin 5\pi\right) = 24^{12}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -24^{12}$

Výsledek -24^{12} má velké množství cifer, proto ho nebudeme vyčíslovat.

4. Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní číslo $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

   Pro úhel $\frac{5\pi}{12}$ neznáme hodnoty funkcí sinus a kosinus. Můžeme si ale uvědomit, že platí $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$. Pro úhly $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{4}$ hodnoty funkcí sinus a kosinus známe.

   Platí tedy

   $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

   Nyní vyjádříme jednotlivé činitele v algebraickém tvaru.

   $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

   $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

   Nakonec vypočítáme součin komplexních čísel v algebraickém tvaru.

   $z = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) + \sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)i$

4.3 Odmocnina z komplexního čísla v goniometrickém tvaru

Již jsme si definovali odmocninu z komplexního čísla. Pokud komplexní číslo b je n-tou odmocninou z komplexního čísla a, pak platí rovnost $a = b^n$. Nyní tento vztah vyjádříme v goniometrickém tvaru.

Předpokládejme, že $a \neq 0$. Pak i $b \neq 0$:

$a = b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n}$

Komplexní číslo a je tedy součin komplexní čísel.

Platí, že součin komplexních čísel je roven nule právě tehdy, když je jeden z činitelů roven nule. To je ekvivalentní s tvrzením, že součin komplexních čísel je nenulový právě tehdy, když jsou všechny činitele nenulové.

Tedy pokud $a \neq 0$, pak i $b \neq 0$.

Můžeme tedy komplexní čísla a a b vyjádřit v goniometrickém tvaru.

$$\begin{aligned} a &= |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ b &= |b|(\cos\beta + i\sin\beta) \end{aligned}$$

Dále platí:

$$\begin{aligned} b^n &= |b|^n(\cos\beta + i\sin\beta)^n \\ &= |b|^n(\cos(n\beta) + i\sin(n\beta)) \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice $a = b^n$:

$$|a|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |b|^n(\cos(n\beta) + i\sin(n\beta))$$

Dvě nenulová komplexní čísla v goniometrickém tvaru jsou si rovna právě tehdy, když jsou si rovny jejich absolutní hodnoty a jejich argumenty se liší o $k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (vyplývá z periodičnosti funkcí sinus a kosinus).

$$|a| = |b|^n \wedge n\beta = \alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Odtud:

$$|b| = \sqrt[n]{|a|} \wedge \beta = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$$

Komplexní číslo, které je n-tou odmocninou nenulového komplexního čísla a, má tedy tvar:

$$b_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Argumenty komplexních čísel b_k a b_{k+n} se liší o 2π, takže jsou si tato komplexní čísla rovna. Počet n-tých odmocnin z nenulového komplexního čísla je tedy n a stačí nám brát v potaz $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ mají n-té odmocniny z nenulového komplexního čísla

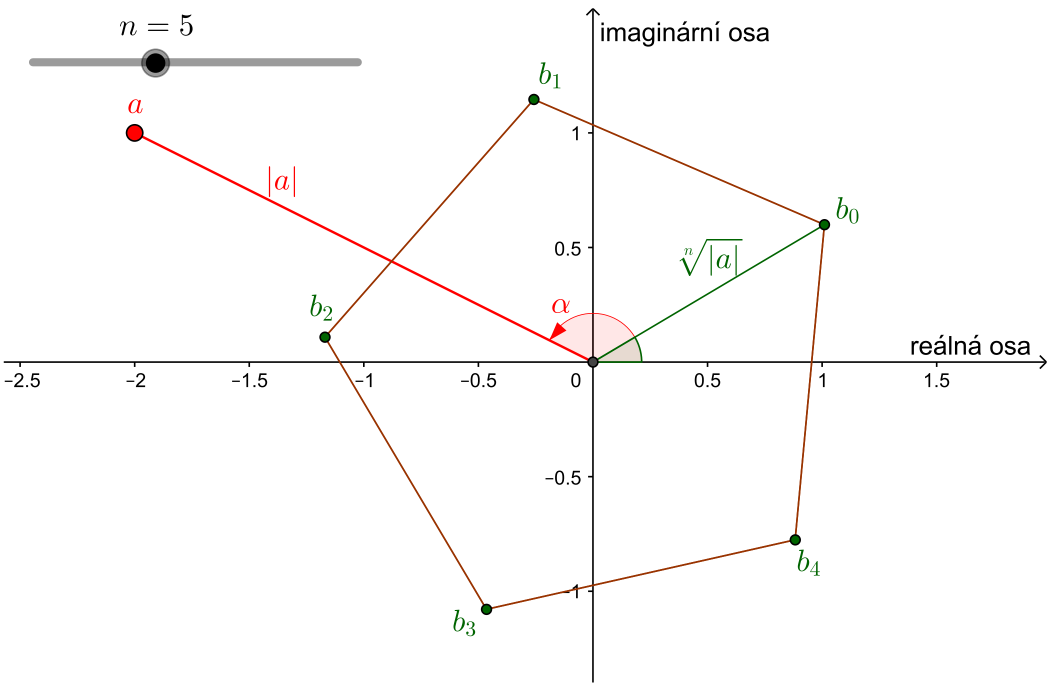
$a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *tvar*

$$b_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right),\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Poznámka. Počet n-tých odmocnin z nenulového komplexního čísla je n. Říkáme také, že n-tá odmocnina z nenulového komplexního čísla je n-značná.

Poznámka. Dosud jsme dolní index používali na označení složek komplexního čísla v algebraickém tvaru, např. $b = b_1 + b_2 i$. V této kapitole, v kapitole o odmocnině komplexních čísel v exponenciálním tvaru a dále v kapitolách o rovnicích budou $b_0, b_1, b_2, b_3 \cdots \in \mathbb{C}$ označovat jednotlivé odmocniny, resp. kořeny rovnice.

Na následujícím appletu (obr. 4.3) si můžeme všimnout, že obrazy n-tých odmocnin nenulového komplexního čísla jsou pro $n = 2$ krajními body úsečky se středem v počátku a pro $n > 2$ se jedná o vrcholy pravidelného n-úhelníka se středem/těžištěm v počátku.



Obrázek 4.3: Odmocnina z komplexního čísla v goniometrickém tvaru

Příklad

Najděte všechny čtvrté odmocniny z komplexního čísla $a = 64\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Řešení

Připomeňme si, že n-té odmocniny z nenulového komplexního čísla a mají tvar:

$$b_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + k\cdot 2\pi}{n}\right),\ k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

V tomto případě platí $n = 4$, $|a| = 64$ a $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dosadíme tyto hodnoty do vzorce:

$$b_k = \sqrt[4]{64}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi}{4}\right),\ k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Nejdříve odmocníme absolutní hodnotu komplexního čísla a.

$$\sqrt[4]{64} = 4\sqrt{2}$$

Nyní dosadíme do vzorce $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$$b_0 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$b_1 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$$

$$b_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$$

$$b_3 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+3\cdot 2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+3\cdot 2\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right)$$

Vypočítaná komplexní čísla b_0, b_1, b_2, b_3 jsou čtvrté odmocniny ze zadaného komplexního čísla a.

Úlohy

1. Najděte všechny páté odmocniny z komplexního čísla

   $a = 96 \cdot \left(\cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}\right).$

   $|b| = \sqrt[5]{96} = 2\sqrt[5]{3}$

   $$b_0 = 2\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{\frac{10\pi}{9}}{5} + i\sin\frac{\frac{10\pi}{9}}{5}\right) = 2\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$$

   $$b_1 = 2\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{\frac{10\pi}{9}+2\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{10\pi}{9}+2\pi}{5}\right) = 2\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{16\pi}{45} + i\sin\frac{16\pi}{45}\right)$$

   $$b_2 = 2\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{\frac{10\pi}{9}+4\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{10\pi}{9}+4\pi}{5}\right) = 2\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{22\pi}{45} + i\sin\frac{22\pi}{45}\right)$$

   $$b_3 = 2\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{\frac{10\pi}{9}+6\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{10\pi}{9}+6\pi}{5}\right) = 2\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{28\pi}{45} + i\sin\frac{28\pi}{45}\right)$$

   $$b_4 = 2\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{\frac{10\pi}{9}+8\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{10\pi}{9}+8\pi}{5}\right) = 2\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{34\pi}{45} + i\sin\frac{34\pi}{45}\right)$$

2. Najděte všechny čtvrté odmocniny z komplexního čísla

   $a = 324 \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$

   $|b| = \sqrt[4]{324} = 3\sqrt{2}$

   $$b_0 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16}\right)$$

   $$b_1 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16} + i\sin\frac{15\pi}{16}\right)$$

   $$b_2 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+4\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+4\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16} + i\sin\frac{23\pi}{16}\right)$$

   $$b_3 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+6\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+6\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{31\pi}{16} + i\sin\frac{31\pi}{16}\right)$$

3. Najděte všechny osmé odmocniny z komplexního čísla $a = 1$ a vyjádřete je v algebraickém tvaru.

Nejdříve převedeme komplexní číslo a do goniometrického tvaru:

$a = 1 = \cos 0 + i \sin 0$

$|b| = \sqrt[8]{1} = 1$

$$b_k = \cos \frac{0 + k \cdot 2\pi}{8} + i \sin \frac{0 + k \cdot 2\pi}{8}$$

$$b_0 = \cos \frac{0}{8} + i \sin \frac{0}{8} = 1 + 0i = 1$$

$$b_1 = \cos \frac{2\pi}{8} + i \sin \frac{2\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$b_2 = \cos \frac{4\pi}{8} + i \sin \frac{4\pi}{8} = 0 + 1i = i$$

$$b_3 = \cos \frac{6\pi}{8} + i \sin \frac{6\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$b_4 = \cos \frac{8\pi}{8} + i \sin \frac{8\pi}{8} = -1 + 0i = -1$$

$$b_5 = \cos \frac{10\pi}{8} + i \sin \frac{10\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$b_6 = \cos \frac{12\pi}{8} + i \sin \frac{12\pi}{8} = 0 - 1i = -i$$

$$b_7 = \cos \frac{14\pi}{8} + i \sin \frac{14\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

4. Najděte všechny třetí odmocniny z komplexního čísla $a = -24$ a vyjádřete je v algebraickém tvaru.

   Nejdříve převedeme komplexní číslo a do goniometrického tvaru:

   $a = -24 = 24 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$

   $|b| = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$

$$b_k = 2\sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\pi + k \cdot 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + k \cdot 2\pi}{3} \right)$$

$$b_0 = 2\sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2\sqrt[3]{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \frac{2\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{2\sqrt[3]{3}\sqrt{3}}{2} i$$

$$b_1 = 2\sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = 2\sqrt[3]{3} \cdot (-1 + 0i) = -2\sqrt[3]{3}$$

$$b_2 = 2\sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2\sqrt[3]{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \frac{2\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{2\sqrt[3]{3}\sqrt{3}}{2} i$$

5. Exponenciální tvar komplexního čísla

5.1 Exponenciální tvar komplexního čísla

Již víme, že goniometrický tvar nenulového komplexního čísla z má tvar $|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Označíme-li $e^{i\alpha} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, pak můžeme vyjádřit komplexní číslo z takto:

$$z = |z|e^{i\alpha}$$

Definice. *Exponenciální tvar nenulového komplexního čísla z je výraz $|z|e^{i\alpha}$, kde číslo α je argumentem komplexního čísla z a $|z|$ je jeho absolutní hodnotou.*

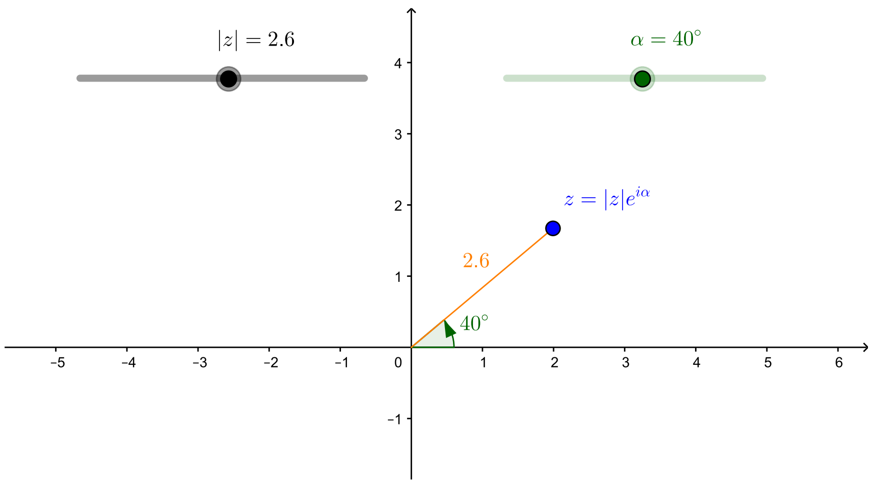
Poznámka. Vysokoškolský poznatek: exponenciální tvar vychází z vyjádření funkcí sinus, kosinus a exponenciální funkce jako součtu Taylorovy řady:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots
\end{aligned}$$

Nyní zkusme dosadit $x = i\alpha$ do rozvoje exponenciální funkce:

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha} &= 1 + i\alpha + \frac{(i\alpha)^2}{2!} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \frac{(i\alpha)^4}{4!} + \frac{(i\alpha)^5}{5!} + \frac{(i\alpha)^6}{6!} + \frac{(i\alpha)^7}{7!} + \dots = \\
&= 1 + i\alpha - \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{i\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^6}{6!} - \frac{i\alpha^7}{7!} + \dots = \\
&= \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots\right) + \left(i\alpha - \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{i\alpha^5}{5!} - \frac{i\alpha^7}{7!} + \dots\right) = \\
&= \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots\right) = \\
&= \cos\alpha + i\sin\alpha
\end{aligned}$$

V následujícím appletu (obr. 5.1) můžeme pomocí posuvníků měnit absolutní hodnotu a argument komplexního čísla z a sledovat, jak se mění poloha jeho obrazu v komplexní rovině.



Obrázek 5.1: Exponenciální tvar komplexního čísla

Převod algebraického tvaru na exponenciální tvar

Pokud chceme převést nenulové komplexní číslo z v algebraickém tvaru na tvar exponenciální, postupujeme stejně jako při převodu na tvar goniometrický, tj. musíme určit absolutní hodnotu a argument komplexního čísla z.

Příklad

Vyjádřete v exponenciálním tvaru se základním argumentem číslo $z = 1 - \sqrt{3}i$.

Řešení

Víme, že pro argument α komplexního čísla $z = a + bi$ platí tyto vztahy:

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} \wedge \sin\alpha = \frac{b}{|z|}$$

Čísla a a b známe, dále potřebujeme vypočítat absolutní hodnotu komplexního čísla z:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Nyní vypočítáme hodnoty kosinu a sinu pro úhel α a podle nich určíme základní argument komplexního čísla z.

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{2} \ \dots \ \alpha \in \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{|z|} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \dots \ \alpha \in \left\{\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$$

Oba vztahy musí platit současně, tedy základní argument $\alpha = \dfrac{5\pi}{3}$ a exponenciální tvar komplexního čísla z tedy vypadá následovně:

$$z = |z|e^{i\alpha} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Převod exponenciálního tvaru na algebraický tvar

Pro převod komplexního čísla z v exponenciálním tvaru na tvar algebraický potřebujeme vyjádřit hodnoty sinu a kosinu pro daný úhel α.

Příklad

Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní číslo $z = 4e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Řešení

Nejdříve vypočítáme hodnoty sinu a kosinu úhlu $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$.

$$\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Z vypočítaných hodnot vyjádříme reálnou a imaginární část komplexního čísla $z = a + bi$:

$$a = |z|\cos\alpha = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$b = |z|\sin\alpha = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$z = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$$

Úlohy

1. Vyjádřete v exponenciálním tvaru následující komplexní čísla:
   - $z = \cos\dfrac{7\pi}{8} + i\sin\dfrac{7\pi}{8}$

     $z = e^{i\frac{7\pi}{8}}$
   - $z = 25\left(\cos\dfrac{3\pi}{5} + i\sin\dfrac{3\pi}{5}\right)$

     $z = 25e^{i\frac{3\pi}{5}}$
2. Vyjádřete v goniometrickém tvaru následující komplexní čísla:

- $z = e^{i\frac{3\pi}{7}}$

  $z = \cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7}$

- $z = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$

  $z = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

3. Vyjádřete v exponenciálním tvaru následující komplexní čísla:

- $z = 3$

  Obraz komplexního čísla z v komplexní rovině je bod $[3; 0]$ a tedy se nachází na kladné poloose x, proto základní argument $\alpha = 0$. Jeho absolutní hodnota je rovna 3.

  $z = |z|e^{i\alpha} = 3e^{i\cdot 0}$

- $z = -2i$

  Obraz komplexního čísla z v komplexní rovině je bod $[0; -2]$ a tedy se nachází na záporné poloose y, proto základní argument $\alpha = \frac{3\pi}{2}$. Jeho absolutní hodnota je rovna 2.

  $z = |z|e^{i\alpha} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

- $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

  $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

  $\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \wedge \sin\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

  $\alpha = \frac{\pi}{3}$

  $z = |z|e^{i\alpha} = 1\cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

- $z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

  $|z| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{4\cdot 2 + 4\cdot 2} = 4$

  $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

  $\alpha = \frac{7\pi}{4}$

  $z = |z|e^{i\alpha} = 4e^{i\frac{7\pi}{4}}$

4. Vyjádřete v algebraickém tvaru následující komplexní čísla:

- $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$

  $z = a + bi$, kde $a = |z|\cos\alpha$ a $b = |z|\sin\alpha$

  $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

  $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

- $z = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$

  $z = a + bi$, kde $a = |z|\cos\alpha$ a $b = |z|\sin\alpha$

  $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

  $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

  $z = 3\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

- $z = 5e^{i\frac{23\pi}{6}}$

  $z = 5e^{i\frac{23\pi}{6}} = 5e^{i\frac{11\pi}{6}}$

  $z = a + bi$, kde $a = |z|\cos\alpha$ a $b = |z|\sin\alpha$

  $\cos\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  $\sin\dfrac{11\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

  $z = 5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} - \dfrac{5}{2}i$

5.2 Násobení a dělení komplexních čísel v exponenciálním tvaru

Již víme, jak vypadá součin a podíl nenulových komplexních čísel v goniometrickém tvaru. Tyto operace můžeme snadno vyjádřit ve tvaru exponenciálním.

Mějme dvě nenulová komplexní čísla

$$a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |a|e^{i\alpha} \text{ a}$$
$$b = |b|(\cos\beta + i\sin\beta) = |b|e^{i\beta}.$$

Jejich součin a podíl můžeme spočítat takto:

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= |a||b|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)) = |a||b|e^{i(\alpha+\beta)} \\
\frac{a}{b} &= \frac{|a|}{|b|}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)) = \frac{|a|}{|b|}e^{i(\alpha-\beta)}.
\end{aligned}
$$

Součin nenulových komplexních čísel $a = |a|e^{i\alpha}$ *a* $b = |b|e^{i\beta}$ *je komplexní číslo*

$$|a||b|e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Podíl nenulových komplexních čísel $a = |a|e^{i\alpha}$ *a* $b = |b|e^{i\beta}$ *je komplexní číslo*

$$\frac{|a|}{|b|}e^{i(\alpha-\beta)}.$$

Příklad

Vypočítejte součin komplexních čísel $a = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ a $b = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Řešení

$$
\begin{aligned}
a \cdot b = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot 3e^{i\frac{\pi}{6}} &= \sqrt{2} \cdot 3 \cdot e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} = \\
&= 3\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi+2\pi}{12}} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}
\end{aligned}
$$

Příklad

Vypočítejte podíl $\frac{a}{b}$ komplexních čísel $a = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$ a $b = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Řešení

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} = \frac{3e^{i\frac{5\pi}{6}}}{6e^{i\frac{\pi}{3}}} &= \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi-2\pi}{6}} = \\
&= \frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{6}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

Poznámka. Exponenciální tvar komplexních čísel je stejně jako goniometrický tvar výhodný pro operace násobení a dělení.

Násobení a dělení komplexních čísel v exponenciálním tvaru odpovídají násobení a dělení mocnin o stejném základu.

Úlohy

1. Vypočítejte v exponenciálním tvaru součin komplexních čísel x a y:

   - $x = 5$, $y = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

     $$x = 5 = 5e^{i\cdot 0}$$

     $$x \cdot y = 5e^{i\cdot 0} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}} =$$

     $$= 5 \cdot 2 \cdot e^{i\left(0+\frac{\pi}{3}\right)} = 10e^{i\frac{\pi}{3}}$$

   - $x = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $y = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

     $$x \cdot y = 4e^{i\frac{4\pi}{3}} \cdot \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} =$$

     $$= 4\sqrt{3}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)} =$$

     $$= 4\sqrt{3}e^{i\frac{(8+5)\pi}{6}} =$$

     $$= 4\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{6}} =$$

     $$= 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

   - $x = -2\sqrt{3} - 2i$, $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}i$

     Nejdříve převedeme komplexní čísla x a y do exponenciálního tvaru a poté vypočítáme jejich součin.

     $$x = -2\sqrt{3} - 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

     $$y = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

     $$x \cdot y = 4e^{i\frac{7\pi}{6}} \cdot \frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} =$$

     $$= 4 \cdot \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{5\pi}{4}\right)} =$$

     $$= 2e^{i\frac{(14+15)\pi}{12}} =$$

     $$= 2e^{i\frac{29\pi}{12}} =$$

     $$= 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

2. Vypočítejte v exponenciálním tvaru podíl komplexních čísel x a y:

   - $x = 8$, $y = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

     $$x = 8 = 8e^{i\cdot 0}$$

     $$\frac{x}{y} = \frac{8}{2}e^{i\left(0-\frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$= 4e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$= 4e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

- $x = 5e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $y = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{6}}$

  $$\frac{x}{y} = \frac{5}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{-\pi}{6}\right)} =$$

  $$= \frac{5\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{4\pi-(-\pi)}{6}} =$$

  $$= \frac{5\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

- $x = -4 - 4\sqrt{3}i$, $y = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

  Nejdříve převedeme komplexní čísla x a y do exponenciálního tvaru a poté vypočítáme jejich podíl.

  $$x = -4 - 4\sqrt{3}i = 8\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 8e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

  $$y = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

  $$\frac{x}{y} = \frac{8}{4}e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right)} =$$

  $$= 2e^{i\frac{(16-9)\pi}{12}} =$$

  $$= 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

5.3 Odmocnina z komplexního čísla v exponenciálním tvaru

Vztah odvozený pro n-tou odmocninu b_k z komplexního čísla a v goniometrickém tvaru, kde $a \neq 0$, můžeme snadno převést do tvaru exponenciálního.

$$b_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + k\cdot 2\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|a|}\cdot e^{i\frac{\alpha+k\cdot 2\pi}{n}}$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ mají n-té odmocniny z nenulového komplexního čísla $a = |a|e^{i\alpha}$ tvar

$$b_k = \sqrt[n]{|a|}\cdot e^{i\frac{\alpha+k\cdot 2\pi}{n}},\ k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Poznámka. V této kapitole stejně jako v kapitole o odmocnině komplexních čísel v goniometrickém tvaru budou $b_0, b_1, b_2, b_3 \dots \in \mathbb{C}$ označovat jednotlivé odmocniny.

Příklad

Najděte všechny třetí odmocniny čísla $a = 54e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Řešení

Budeme postupovat stejně jako při hledání odmocnin komplexního čísla v goniometrickém tvaru.

Nejdříve odmocníme absolutní hodnotu komplexního čísla a.

$$\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$$

Poté dosadíme do výše uvedeného vztahu pro odmocninu a zjednodušíme:

$$b_0 = 3\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{3}}{3}} = 3\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{9}}$$

$$b_1 = 3\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{3}} = 3\sqrt[3]{2}e^{i\frac{7\pi}{9}}$$

$$b_2 = 3\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{3}} = 3\sqrt[3]{2}e^{i\frac{13\pi}{9}}$$

Úlohy

1. Najděte všechny čtvrté odmocniny z komplexního čísla $a = 4e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

   $|b| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

   $b_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{2\pi}{5}}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{10}}$

   $b_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{2\pi}{5}+2\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{5}}$

   $b_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{2\pi}{5}+4\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{10}}$

   $b_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{2\pi}{5}+6\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{8\pi}{5}}$

2. Najděte všechny páté odmocniny z komplexního čísla $a = \frac{1}{32}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

   $|b| = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

   $b_0 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\frac{7\pi}{6}}{5}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{7\pi}{30}}$

   $b_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\frac{7\pi}{6}+2\pi}{5}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{19\pi}{30}}$

   $b_2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\frac{7\pi}{6}+4\pi}{5}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{31\pi}{30}}$

   $b_3 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\frac{7\pi}{6}+6\pi}{5}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{43\pi}{30}}$

$$b_4 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\frac{7\pi}{6}+8\pi}{5}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{55\pi}{30}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

3. Najděte všechny třetí odmocniny z komplexního čísla $a = 6\sqrt{3}+6i$. Využijte převod na exponenciální tvar.

   Nejdříve vyjádříme komplexní číslo a v exponenciálním tvaru:

   $a = 6\sqrt{3} + 6i = 12e^{i\frac{\pi}{6}}$

   $|b| = \sqrt[3]{12}$

   $b_0 = \sqrt[3]{12}e^{i\frac{\frac{\pi}{6}}{3}} = \sqrt[3]{12}e^{i\frac{\pi}{18}}$

   $b_1 = \sqrt[3]{12}e^{i\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi}{3}} = \sqrt[3]{12}e^{i\frac{13\pi}{18}}$

   $b_2 = \sqrt[3]{12}e^{i\frac{\frac{\pi}{6}+4\pi}{3}} = \sqrt[3]{12}e^{i\frac{25\pi}{18}}$

6. Řešení rovnic v množině všech komplexních čísel

V této kapitole se budeme zabývat postupy řešení algebraických rovnic v množině všech komplexních čísel.

Definice. *Algebraická rovnice n-tého stupně s neznámou $x \in \mathbb{C}$ je rovnice, kterou lze převést na tvar*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,\ a_n \neq 0,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pokud navíc $a_n = 1$, pak se jedná o algebraickou rovnici v normovaném tvaru.

Pro $n = 1$ se jedná o lineární rovnici, pro $n = 2$ o kvadratickou rovnici a pro $n = 3$ o kubickou rovnici.

O důležité vlastnosti algebraických rovnic pojednává Základní věta algebry.

Věta (Základní věta algebry)**.** *Každá algebraická rovnice má alespoň jeden komplexní kořen.*

Důsledkem této věty je následující poznatek.

Každá algebraická rovnice n-tého stupně má v množině $\mathbb{C}$ právě n kořenů (počítaných včetně násobnosti).

Důkaz Základní věty algebry je složitý a přesahuje rámec této práce, lze ho nalézt v literatuře (Schwarz (1958); Dlab a Bečvář (2016)).

6.1 Lineární rovnice

Lineární rovnice můžeme v množině všech komplexních čísel $\mathbb{C}$ řešit stejným způsobem jako v $\mathbb{R}$, využíváme při tom znalosti početních operací v množině všech komplexních čísel, abychom osamostatnili neznámou na jedné straně rovnice. Používáme přitom úpravy, které nemění množinu kořenů rovnice.

Mějme lineární rovnici $ax + b = 0,\ \ a, b \in \mathbb{C},\ \ a \neq 0$. Pak úpravami dojdeme k řešení rovnice $x = -\dfrac{b}{a}$.

Lineární rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$ má právě jedno řešení.

Příklad

Najděte řešení rovnice $\dfrac{5}{1+2i}x + 1 + 3i = \dfrac{5}{2+i}x$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Obě strany rovnice vynásobíme společným jmenovatelem výrazů v rovnici.

$$\frac{5}{1+2i}x + 1 + 3i = \frac{5}{2+i}x \qquad \Big|\cdot (1+2i)(2+i)$$

$5(2+i)x + (1+3i)(1+2i)(2+i) = 5(1+2i)x$

$(10+5i)x + (-15+5i) = (5+10i)x$

Rovnici upravíme pomocí ekvivalentních úprav tak, abychom na levé straně získali výrazy s neznámou x.

$$(10+5i)x + (-15+5i) = (5+10i)x \qquad \Big| - (5+10i)x - (-15+5i)$$

$(10+5i)x - (5+10i)x = -(-15+5i)$

$(5-5i)x = -(-15+5i)$

Rovnici dělíme nenulovým číslem $5 - 5i$.

$x = \dfrac{-(-15+5i)}{5-5i}$

$x = 2 + i$

Řešením rovnice je číslo $2+i$, tedy množina všech kořenů rovnice je $\mathbf{K} = \{\mathbf{2+i}\}$.

Pokud se v rovnici vyskytují komplexně sdružené neznámé x a $\bar{x}$, využijeme jejich vyjádření v algebraickém tvaru: $x = x_1 + x_2 i,\ \bar{x} = x_1 - x_2 i,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. V tomto případě se nejedná o algebraickou rovnici s jednou neznámou.

Příklad

Najděte řešení rovnice $3\bar{x} - (8 - 6i) = -5x$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Použijeme vyjádření neznámých x a $\bar{x}$ v algebraickém tvaru.

$x = x_1 + x_2 i$

$\bar{x} = x_1 - x_2 i$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Do rovnice za x dosadíme $x_1 + x_2 i$, za $\bar{x}$ dosadíme $x_1 - x_2 i$ a rovnici zjednodušíme.

$$3(x_1 - x_2 i) - (8 - 6i) = -5(x_1 + x_2 i) \qquad \Big| + 5(x_1 + x_2 i) + (8 - 6i)$$

$3(x_1 - x_2 i) + 5(x_1 + x_2 i) = 8 - 6i$

$3x_1 - 3x_2 i + 5x_1 + 5x_2 i = 8 - 6i$

$8x_1 + 2x_2 i = 8 - 6i$

Využijeme toho, že komplexní čísla v algebraickém tvaru jsou si rovna právě tehdy, když jsou si rovny jejich reálné i imaginární části.

$8x_1 = 8,\ 2x_2 = -6$

$x_1 = 1,\ x_2 = -3$

$x = 1 - 3i$

Řešením rovnice je číslo $1 - 3i$, tedy množina všech kořenů rovnice je

$\mathbf{K = \{1 - 3i\}}$.

Úlohy

1. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:
   - $\dfrac{1+7i}{5(2-i)}x + i(1-3i) = 2ix$

     $$\frac{1+7i}{5(2-i)}x + i(1-3i) = 2ix \qquad \Big| \cdot 5(2-i)$$

     $(1+7i)x + i(1-3i) \cdot 5(2-i) = 2ix \cdot 5(2-i)$

     $$(1+7i)x + (35-5i) = (10+20i)x \qquad \Big| - (10+20i)x - (35-5i)$$

     $(1+7i)x - (10+20i)x = -35 + 5i$

     $$(-9-13i)x = -35 + 5i \qquad \Big| : (-9-13i)$$

     $x = \dfrac{-35+5i}{-9-13i}$

     $x = 1 - 2i$

$\mathbf{K = \{1 - 2i\}}$

- $-1 - 4i + \frac{2}{i}x = -\frac{4+4i}{1-i}x - 3 + 4i$

$$-1 - 4i + \frac{2}{i}x = -\frac{4+4i}{1-i}x - 3 + 4i \qquad \Big| \cdot i(1-i)$$

$$(-1-4i)i(1-i) + 2(1-i)x = -(4+4i)ix + (-3+4i)i(1-i)$$

$$(3-5i)+(2-2i)x = -(-4+4i)x+(-7+i) \qquad \Big| +(-4+4i)x-(3-5i)$$

$$(-4+4i)x + (2-2i)x = (-7+i) - (3-5i)$$

$$(-2+2i)x = (-10+6i) \qquad \Big| : (-2+2i)$$

$$x = \frac{(-10+6i)}{(-2+2i)}$$

$$x = 4 + i$$

$\mathbf{K = \{4 + i\}}$

- $\left(\frac{1+3i}{-1+2i}\right)^2 + \frac{6}{x} = \frac{1}{i^3}$

Protože se neznámá nechází ve jmenovateli, musíme nejdříve určit podmínky, za kterých má rovnice smysl.

$x \neq 0$

Zjednodušíme první výraz na levé straně:

$$\left(\frac{1+3i}{-1+2i}\right)^2 = -2i$$

Zjednodušený výraz dosadíme do rovnice a vyjádříme neznámou x.

$$-2i + \frac{6}{x} = \frac{1}{i^3} \qquad \Big| \cdot i^3 x$$

$$-2i^4 x + 6i^3 = x$$

$$-2x - 6i = x$$

$$-6i = 3x$$

$$x = -2i$$

$\mathbf{K = \{-2i\}}$

- $\left(-\sqrt{3} + i\right)^3 + \left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^2 = (2+i)(2-i)ix + \frac{1}{i}$

Nejdříve zjednodušíme výrazy na obou stranách rovnice:

$\left(-\sqrt{3}+i\right)^3 = 8i$

$\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^2 = -4i$

$(2+i)(2-i)ix = 5ix$

$\frac{1}{i} = -i$

Zjednodušené výrazy dosadíme do rovnice a vyjádříme neznámou x.

$8i - 4i = 5ix - i$

$5i = 5ix$

$x = 1$

$\mathbf{K} = \{\mathbf{1}\}$

2. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:

- $(5-i)\bar{x} = 2x + 2 - 8i$

  Do rovnice dosadíme vyjádření neznámých x a $\bar{x}$ v algebraickém tvaru a následně rovnici upravíme.

  $x = x_1 + x_2 i$, $\bar{x} = x_1 - x_2 i$.

  $(5-i)(x_1 - x_2 i) = 2(x_1 + x_2 i) + 2 - 8i \qquad \Big| - 2(x_1 + x_2 i)$

  $(5-i)(x_1 - x_2 i) - 2(x_1 + x_2 i) = 2 - 8i$

  $(5x_1 - x_2 - 2x_1) + (-x_1 - 5x_2 - 2x_2)i = 2 - 8i$

  $(3x_1 - x_2) + (-x_1 - 7x_2)i = 2 - 8i$

  Z rovnosti komplexních čísel v algebraickém tvaru vyplývá:

  $3x_1 - x_2 = 2,\ -x_1 - 7x_2 = -8i$

  Tato soustava rovnic má řešení:

  $x_1 = 1,\ x_2 = 1$

  Řešením původní rovnice je tedy $x = 1 + i$.

  $\mathbf{K} = \{\mathbf{1 + i}\}$

- $-11 + 4i + x(\bar{x} - i) = 10 + i$

  $-11 + 4i + x \cdot \bar{x} - x \cdot i = 10 + i$

  Do rovnice dosadíme vyjádření neznámých x a $\bar{x}$ v algebraickém tvaru a dále využijeme toho, že platí $x \cdot \bar{x} = {x_1}^2 + {x_2}^2$. Následně rovnici upravíme.

$-11 + 4i + {x_1}^2 + {x_2}^2 - x_1 i + x_2 = 10 + i \qquad \Big| + 11 - 4i$

${x_1}^2 + {x_2}^2 - x_1 i + x_2 = 21 - 3i$

Z rovnosti komplexních čísel v algebraickém tvaru vyplývá:

${x_1}^2 + {x_2}^2 + x_2 = 21, \ -x_1 = -3$

Hodnota x_1 je zřejmá, dále musíme vypočítat x_2.

$x_1 = 3$

$9 + {x_2}^2 + x_2 = 21$

${x_2}^2 + x_2 - 12 = 0$

$(x_2 + 4)(x_2 - 3) = 0$

Číslo x_2 může nabývat hodnot -4 a 3.

Původní rovnice má tedy dva kořeny.

$\mathbf{K = \{3 - 4i; 3 + 3i\}}$

6.2 Kvadratické rovnice s reálnými koeficienty

Nejdříve si připomeneme, jak lze nalézt řešení kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v množině $\mathbb{R}$.

Mějme kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

Z rovnice vytkneme koeficient a:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

První dva členy uvnitř závorky doplníme na čtverec:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0$$

Označíme $D = b^2 - 4ac$:

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = 0$$

Rozložíme rozdíl čtverců na součin:

$$a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = 0$$

$$a\left(x + \frac{b + \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{D}}{2a}\right) = 0$$

Kořeny rovnice jsou tedy:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Poznámka. V této kapitole budou $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ označovat kořeny rovnice (nikoliv reálnou a imaginární část komplexního čísla).

V předchozím výrazu jsou x_1 a x_2 reálná čísla. Protože platí $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, jsou x_1 a x_2 zároveň komplexními čísly a jsou tedy i řešením rovnice v $\mathbb{C}$.

Uvedený výraz je vzorec, podle kterého lze vypočítat kořeny kvadratické rovnice. Aby vzorec dával v reálných číslech smysl, musí být diskriminant nezáporný. V opačném případě by neexistovala $\sqrt{D}$, a tudíž by rovnice neměla reálné kořeny.

Rovnice má dva různé reálné kořeny, pokud je diskriminant kladný, nebo jeden dvojnásobný reálný kořen, pokud je diskriminant roven nule.

Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, *kde* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac \geq 0$, *má v* $\mathbb{C}$ *právě dva kořeny či jeden dvojnásobný kořen*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Nyní se podíváme na řešení kvadratických rovnic s reálnými koeficienty se záporným diskriminantem. Řešení budeme hledat v $\mathbb{C}$.

Pokud je $D < 0$, pak $-D > 0$ a výraz $\sqrt{-D}$ má smysl. Opět upravíme kvadratickou rovnici tak jako v předchozím případě.

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = 0$$

Využijeme zjevné rovnosti $-\dfrac{D}{4a^2} = \dfrac{-D}{4a^2}$.

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a^2}\right) = 0$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-D}}{2a}\right)^2\right) = 0$$

V rovnici nám vznikl součet čtverců, který lze v oboru komplexních čísel rozložit: $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$.

$$a\left(x + \frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-D}}{2a}\right) = 0$$

$$a\left(x + \frac{b + i\sqrt{-D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - i\sqrt{-D}}{2a}\right) = 0$$

Součin dvou komplexních čísel je roven nule právě tehdy, když je alespoň jedno z nich rovno nule. Kořeny kvadratické rovnice se záporným diskriminantem jsou tedy:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$$

Můžeme si všimnout, že kořeny jsou komplexně sdružená čísla.

Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, *kde* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$, *má v* $\mathbb{C}$ *právě dva komplexně sdružené kořeny*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}.$$

Příklad

Najděte řešení rovnice $x^2 + 2x + 5 = 0$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Vypočítáme diskriminant rovnice:

$D = 2^2 - 4 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$

Diskriminant je záporný, kořeny jsou tedy komplexně sdružená čísla:

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm i\sqrt{16}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2}$

$x_{1,2} = -1 \pm 2i$

Množina všech kořenů rovnice je tedy

$\mathbf{K} = \{\mathbf{-1 + 2i}; \mathbf{-1 - 2i}\}$.

Ryze kvadratické rovnice

Speciálním případem kvadratické rovnice je ryze kvadratická rovnice, která má tvar $x^2 + c = 0$. Uvažujme ryze kvadratickou rovnici s reálným koeficientem c, kde $c > 0$. Taková rovnice má v množině $\mathbb{C}$ dva komplexně sdružené kořeny, které snadno nalezneme rozložením výrazu na součin:

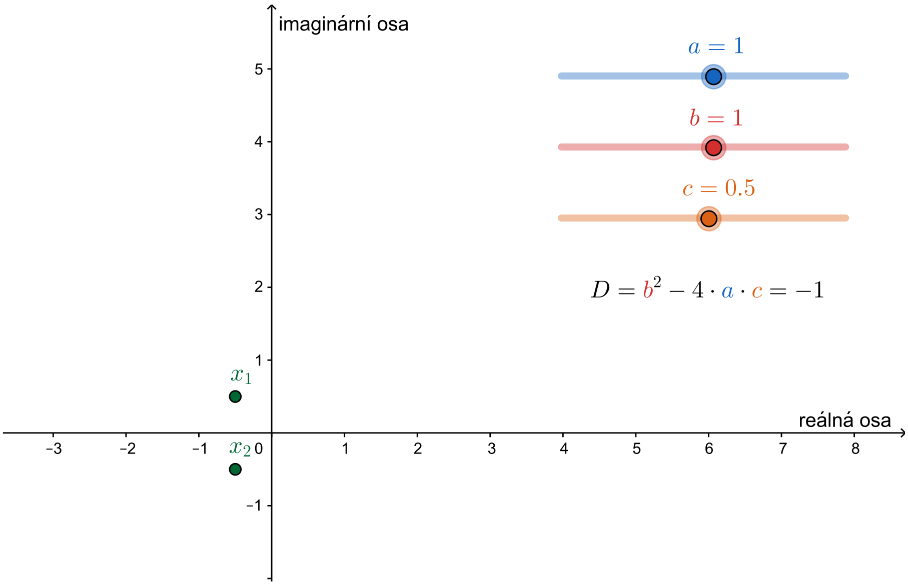
$$x^2 + c = (x + i\sqrt{c})(x - i\sqrt{c}) = 0$$

Kořeny ryze kvadratické rovnice s $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, jsou tedy $x_{1,2} = \pm i\sqrt{c}$.

Ryze kvadratická rovnice $x^2 + c = 0$, kde $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, má v $\mathbb{C}$ právě dva kořeny

$$x_{1,2} = \pm i\sqrt{c}.$$

Následující applet (obr. 6.1) zobrazuje v komplexní rovině obrazy kořenů kvadratické rovnice v závislosti na reálných koeficientech. Applet můžete také využít ke kontrole vypočítaných kořenů rovnic v následujících úlohách.



Obrázek 6.1: Řešení kvadratické rovnice s reálnými koeficienty

Úlohy

1. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:

   - $x^2 + 4x + 7 = 0$

     $$D = 4^2 - 4 \cdot 7 = 16 - 28 = -12$$

     $$x_{1,2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm i \cdot 2\sqrt{3}}{2}$$

     $$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}i$$

     $$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{-2 + \sqrt{3}i; -2 - \sqrt{3}i}\right\}$$

   - $x^2 - 3x + 9 = 0$

     $$D = (-3)^2 - 4 \cdot 9 = 9 - 36 = -27$$

     $$x_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{27}}{2} = \frac{3 \pm i \cdot 3\sqrt{3}}{2}$$

     $$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

     $$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}\right\}$$

   - $3x^2 + 2x + 2 = 0$

     $$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 - 24 = -20$$

     $$x_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{20}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm i \cdot 2\sqrt{5}}{2 \cdot 3}$$

     $$x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i$$

$$\mathbf{K} = \left\{ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{3}}\mathbf{i}; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} - \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{3}}\mathbf{i} \right\}$$

- $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$

  $D = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 = -2$

  $x_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$

  $x_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

  $\mathbf{K} = \left\{ \dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} + \dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; \dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} - \dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\mathbf{i} \right\}$

2. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:

- $x^2 + 4 = 0$

  $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i) = 0$

  $x_{1,2} = \pm 2i$

  $\mathbf{K} = \{\mathbf{2i}; -\mathbf{2i}\}$

- $x^2 + 50 = 0$

  $x^2 + 50 = (x + 5\sqrt{2}i)(x - 5\sqrt{2}i) = 0$

  $x_{1,2} = \pm 5\sqrt{2}i$

  $\mathbf{K} = \left\{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{2}}\mathbf{i}; -\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{2}}\mathbf{i}\right\}$

3. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:

- $x + 1 = \dfrac{2x - 8}{x - 3}$

  Určíme podmínky, za kterých má rovnice smysl:

  $x \neq 3$

  Rovnici vynásobíme společným jmenovatelem $(x - 3)$ a zjednodušíme:

  $(x + 1)(x - 3) = 2x - 8$

  $x^2 - 2x - 3 = 2x - 8$

  $x^2 - 4x + 5 = 0$

  $D = (-4)^2 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$

  $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm i\sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2i}{2}$

  $x_{1,2} = 2 \pm i$

  $\mathbf{K} = \{\mathbf{2} + \mathbf{i}; \mathbf{2} - \mathbf{i}\}$

- $\dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{x+6}{x+2}$

  Určíme podmínky, za kterých má rovnice smysl:

  $x \neq 1 \wedge x \neq -2$

  Rovnici vynásobíme společným jmenovatelem $(x-1)(x+2)$ a zjednodušíme:

  $(2x+3)(x+2) = (x+6)(x-1)$

  $2x^2 + 7x + 6 = x^2 + 5x - 6$

  $x^2 + 2x + 12 = 0$

  $D = 2^2 - 4 \cdot 12 = 4 - 48 = -44$

  $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm i\sqrt{44}}{2} = \dfrac{-2 \pm i \cdot 2\sqrt{11}}{2}$

  $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{11}i$

  $\mathbf{K} = \left\{\mathbf{-1 + \sqrt{11}i; -1 - \sqrt{11}i}\right\}$

4. Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty má kořen $3 + 2i$. Jaký je další kořen rovnice?

   Dalším kořenem je číslo komplexně sdružené k prvnímu kořenu, a sice $3 - 2i$.

5. Jaké vlastnosti musí mít koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, aby obrazy řešení ležely na imaginární ose? K pozorování použijte applet.

   Diskriminant musí být záporný, tedy $b^2 - 4ac < 0$, jinak by kořeny byly reálná čísla.

   Zároveň musí platit $b = 0$, aby byly kořeny $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$ ryze imaginární čísla, a tedy jejich obrazy ležely na imaginární ose.

   Tedy:

   $b = 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$

   $b = 0 \wedge -4ac < 0$

   $b = 0 \wedge ac > 0$

6.3 Kvadratické rovnice s komplexními koeficienty

Zatím jsme se setkali s kvadratickými rovnicemi s reálnými koeficienty. Nyní se podíváme, jak lze řešit v $\mathbb{C}$ kvadratické rovnice, jejichž koeficienty patří do množiny všech komplexních čísel.

Mějme kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$

Nejdříve provedeme umělý krok – rovnici vynásobíme číslem $4a$.

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + 4ac = 0$$

První dva členy na levé straně rovnice doplníme na čtverec.

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Použijeme substituce:

$$y = 2ax + b$$

$$t = b^2 - 4ac$$

Z rovnice $(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$ tedy vyplývá:

$$y^2 - t = 0$$

$$y^2 = t$$

Pro nalezení kořenů původní rovnice musíme nejdříve v $\mathbb{C}$ vypočítat kořeny rovnice $y^2 = t$, což jsou druhé odmocniny z komplexního čísla t, a následně provést zpětnou substituci.

$$y = 2ax + b$$

$$x = \frac{y - b}{2a}$$

Rovnice $y^2 = t$ má dva různé kořeny y_1, y_2, či jeden dvojnásobný kořen. Z toho plyne, že i původní kvadratická rovnice má dva různé kořeny x_1, x_2, či jeden dvojnásobný kořen.

Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, má v $\mathbb{C}$ právě dva kořeny, nebo jeden dvojnásobný kořen.

Poznámka. V této kapitole budeme dolními indexy číslovat kořeny rovnice a pomocné substituce (nikoliv reálnou a imaginární část komplexního čísla).

Příklad

Najděte řešení rovnice $x^2 + \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)x + \frac{3}{4}i = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Rovnici vynásobíme číslem $4a = 4$.

$$x^2 + \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)x + \frac{3}{4}i = 0 \qquad \Big| \cdot 4$$

$$4x^2 + 4\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)x + 3i = 0$$

$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right) + 3i = 0$$

První dva členy na levé straně rovnice doplníme na čtverec.

$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right) + \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^2 + 3i = 0$$

$$\left(2x + \sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^2 + 3i = 0$$

$$\left(2x + \sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^2 - 4i + 3i = 0$$

$$\left(2x + \sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^2 = i$$

Použijeme substituci $y = 2x + \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

$$y^2 = i$$

Kořeny této rovnice jsou druhé odmocniny komplexního čísla i.

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Zpětnou substitucí vypočítáme x.

$$x = \frac{y - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2}$$

$$x_1 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

$$x_2 = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4}i$$

Množina všech kořenů rovnice je tedy

$$\mathbf{K} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{i}; -\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\mathbf{i} \right\}.$$

Věta. *Mějme normovanou kvadratickou rovnici* $x^2 + bx + c = 0,\ b, c, x \in \mathbb{C}$.

Pokud některý z koeficientů b, c *není reálný, pak kořeny rovnice nejsou komplexně sdružené.*

Důkaz. Předchozí tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že některý z koeficientů b, c není reálný a zároveň kořeny kvadratické rovnice jsou komplexně sdružené.

Kořeny označíme $z_1 + z_2 i$ a $z_1 - z_2 i$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

Potom lze kvadratickou rovnici zapsat ve tvaru:

$(x - (z_1 + z_2 i))(x - (z_1 - z_2 i)) = 0$

Rovnici upravíme:

$x^2 - 2z_1 x + {z_1}^2 + {z_2}^2 = 0$

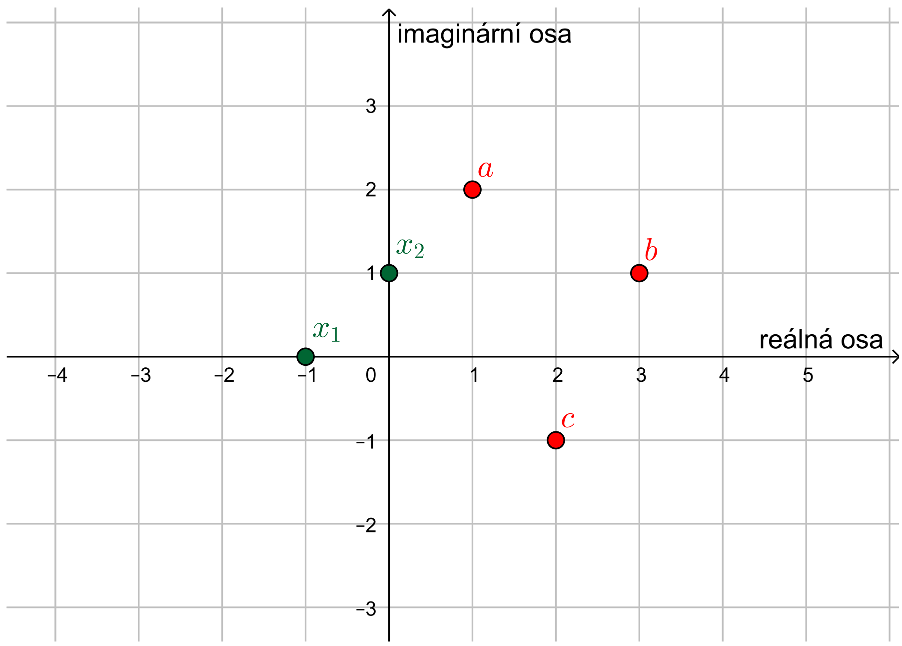
Tedy $b = -2z_1 \in \mathbb{R}$ a $c = {z_1}^2 + {z_2}^2 \in \mathbb{R}$.

Koeficienty rovnice jsou reálné, což je ve sporu s předpokladem.

Tvrzení tedy platí.

$\square$

V následujícím appletu (obr. 6.2) můžete měnit polohy obrazů komplexních čísel a, b, c a sledovat, jak ovlivňují řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Applet můžete také využít ke kontrole vypočítaných kořenů rovnic v následujících úlohách.



Obrázek 6.2: Řešení kvadratické rovnice s komplexními koeficienty

Úlohy

1. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:
   - $x^2 + (3-4i)x - 12i = 0$

     Rovnici vynásobíme číslem $4a = 4$.

     $4x^2 + 4(3-4i)x - 48i = 0$

     $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (3-4i) - 48i = 0$

     První dva členy na levé straně rovnice doplníme na čtverec.

     $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (3-4i) + (3-4i)^2 - (3-4i)^2 - 48i = 0$

     $(2x + 3 - 4i)^2 - (3-4i)^2 - 48i = 0$

     $(2x + 3 - 4i)^2 = -7 + 24i$

     Použijeme substituci $y = 2x + 3 - 4i$.

     $y^2 = -7 + 24i$

     $y_1 = 3 + 4i$

     $y_2 = -3 - 4i$

     Zpětnou substitucí vypočítáme x.

     $x = \dfrac{y - 3 + 4i}{2}$

     $x_1 = \dfrac{3 + 4i - 3 + 4i}{2} = 4i$

     $x_2 = \dfrac{-3 - 4i - 3 + 4i}{2} = -3$

     $\mathbf{K} = \{\mathbf{4i}; \mathbf{-3}\}$

   - $x^2 + x + 4 - 2i = 0$

     Rovnici vynásobíme číslem $4a = 4$.

     $4x^2 + 4x + (16 - 8i) = 0$

     $(2x)^2 + 2 \cdot 2x + (16 - 8i) = 0$

     První dva členy na levé straně rovnice doplníme na čtverec.

     $(2x)^2 + 2 \cdot 2x + 1 - 1 + (16 - 8i) = 0$

     $(2x + 1)^2 - 1 + (16 - 8i) = 0$

     $(2x + 1)^2 = -15 + 8i$

     Použijeme substituci $y = 2x + 1$.

     $y^2 = -15 + 8i$

     $y_1 = 1 + 4i$

     $y_2 = -1 - 4i$

Zpětnou substitucí vypočítáme x.

$x = \frac{y-1}{2}$

$x_1 = \frac{1+4i-1}{2} = 2i$

$x_2 = \frac{-1-4i-1}{2} = -1-2i$

$\mathbf{K} = \{\mathbf{2i}; -\mathbf{1} - \mathbf{2i}\}$

- $x^2 + \left(2\sqrt{2} - 2i\right) x + \left(-7 - 2\sqrt{2}i\right) = 0$

  Rovnici vynásobíme číslem $4a = 4$.

  $4x^2 + 4\left(2\sqrt{2} - 2i\right) x + \left(-28 - 8\sqrt{2}i\right) = 0$

  $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \left(2\sqrt{2} - 2i\right) + \left(-28 - 8\sqrt{2}i\right) = 0$

  První dva členy na levé straně rovnice doplníme na čtverec.

  $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \left(2\sqrt{2} - 2i\right) + \left(2\sqrt{2} - 2i\right)^2 - \left(2\sqrt{2} - 2i\right)^2 +$

  $+\left(-28 - 8\sqrt{2}i\right) = 0$

  $\left(2x + 2\sqrt{2} - 2i\right)^2 - \left(2\sqrt{2} - 2i\right)^2 + \left(-28 - 8\sqrt{2}i\right) = 0$

  $\left(2x + 2\sqrt{2} - 2i\right)^2 = 32$

  Použijeme substituci $y = 2x + 2\sqrt{2} - 2i$.

  $y^2 = 32$

  $y_1 = 4\sqrt{2}$

  $y_2 = -4\sqrt{2}$

  Zpětnou substitucí vypočítáme x.

  $x = \frac{y - 2\sqrt{2} + 2i}{2}$

  $x_1 = \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2i}{2} = \sqrt{2} + i$

  $x_2 = \frac{-4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2i}{2} = -3\sqrt{2} + i$

  $\mathbf{K} = \left\{\sqrt{\mathbf{2}} + \mathbf{i}; -\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{2}} + \mathbf{i}\right\}$

- $2x^2 + (-3+3i)x + (-3-i) = 0$

  Rovnici vynásobíme číslem $4a = 8$.

  $16x^2 + 8(-3+3i)x + (-24-8i) = 0$

  $(4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot (-3+3i) + (-24-8i) = 0$

První dva členy na levé straně rovnice doplníme na čtverec.

$(4x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3 + 3i) + (-3 + 3i)^2 - (-3 + 3i)^2 + (-24 - 8i) = 0$

$(4x + (-3 + 3i))^2 - (-3 + 3i)^2 + (-24 - 8i) = 0$

$(4x - 3 + 3i)^2 = 24 - 10i$

Použijeme substituci $y = 4x - 3 + 3i$.

$y^2 = 24 - 10i$

$y_1 = -5 + i$

$y_2 = 5 - i$

Zpětnou substitucí vypočítáme x.

$x = \dfrac{y + 3 - 3i}{4}$

$x_1 = \dfrac{-5 + i + 3 - 3i}{4} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

$x_2 = \dfrac{5 - i + 3 - 3i}{4} = 2 - i$

$\mathbf{K} = \left\{ -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; \mathbf{2} - \mathbf{i} \right\}$

- $x^2 + (-2 - 2i)x + 2i = 0$

  Rovnici vynásobíme číslem $4a = 4$.

  $4x^2 + 4(-2 - 2i)x + 8i = 0$

  $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-2 - 2i) + 8i = 0$

  První dva členy na levé straně rovnice doplníme na čtverec.

  $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-2 - 2i) + (-2 - 2i)^2 - (-2 - 2i)^2 + 8i = 0$

  $(2x + (-2 - 2i))^2 - (-2 - 2i)^2 + 8i = 0$

  $(2x - 2 - 2i)^2 - 8i + 8i = 0$

  $(2x - 2 - 2i)^2 = 0$

  $(2x - 2 - 2i)(2x - 2 - 2i) = 0$

  Rovnice má dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 1 + i$.

  $\mathbf{K} = \{\mathbf{1} + \mathbf{i}\}$

2. Jakou vlastnost mají kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0$, pokud $b = 0$? K pozorování použijte applet.

   Pro kořeny rovnice $ax^2 + c = 0,\ a, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0$ platí: $x^2 = -\dfrac{c}{a}$.

   Kořeny rovnice jsou tedy druhé odmocniny z komplexního čísla $-\dfrac{c}{a}$. Jsou to opačná čísla, jejich obrazy jsou středově souměrné podle počátku.

6.4 Binomické rovnice

Nyní se podíváme na další typ rovnic, a sice binomické rovnice.

Definice. *Binomická rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$ je rovnice tvaru $ax^n + b = 0$, kde $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.*

Pojem binomická rovnice pochází z latinského slova binom, které znamená dvojčlen. Tímto dvojčlenem je míněn výraz na levé straně rovnice $ax^n + b$.

Pokud binomickou rovnici vydělíme nenulovým číslem a, upravíme ji tím na normovaný tvar $x^n - c = 0$, kde $c = -\frac{b}{a}$. Kořenem rovnice je zjevně každé x, pro které platí $x^n = c$. To znamená, že x je n-tou odmocninou z čísla $c = -\frac{b}{a}$.

Kořeny binomické rovnice $ax^n + b = 0$, kde $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, jsou všechny n-té odmocniny z komplexního čísla $-\frac{b}{a}$.

Poznámka. V této kapitole budeme kořeny binomické rovnice označovat symboly $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Příklad

Najděte řešení rovnice $27x^3 + 8 = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Jedná se o binomickou rovnici $ax^n + b = 0$, kde $a = 27$, $b = 8$.

Rovnici upravíme na normovaný tvar vydělením číslem $a = 27$ a následně odečteme absolutní člen od obou stran rovnice.

$$27x^3 + 8 = 0 \quad \Big| : 27$$

$$x^3 + \frac{8}{27} = 0 \quad \Big| - \frac{8}{27}$$

$$x^3 = -\frac{8}{27}$$

Kořenem rovnice jsou všechny třetí odmocniny z komplexního čísla $-\frac{8}{27}$. Číslo $-\frac{8}{27}$ proto převedeme do goniometrického tvaru.

$$-\frac{8}{27} = \frac{8}{27}(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Všechny třetí odmocniny z tohoto čísla jsou:

$$x_k = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right),\ k \in \{0, 1, 2\}$$

$$x_0 = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$x_1 = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

Množina všech kořenů rovnice je tedy

$$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i}\right\}.$$

Rovnici je také možné vyřešit rozkladem součtu třetích mocnin na součin využitím vzorce $A^3 + B^3 = (A + B)\cdot(A^2 - AB + B^2)$.

Upravíme tedy rovnici $27x^3 + 8 = 0$ podle tohoto vzorce, kde $A = 3x$ a $B = 2$.

$(3x + 2)(9x^2 - 6x + 4) = 0$

Součin na levé straně rovnice je roven nule právě tehdy, když je roven nule alespoň jeden z výrazů v závorce.

Z podmínky $3x + 2 = 0$ plyne kořen $-\dfrac{2}{3}$.

Rovnice $9x^2 - 6x + 4 = 0$ je kvadratická rovnice s reálnými koeficienty a záporným D, z této podmínky tedy plynou další dva kořeny, a sice komplexně sdružená čísla $\dfrac{1}{3} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$.

Množina všech kořenů rovnice je tedy

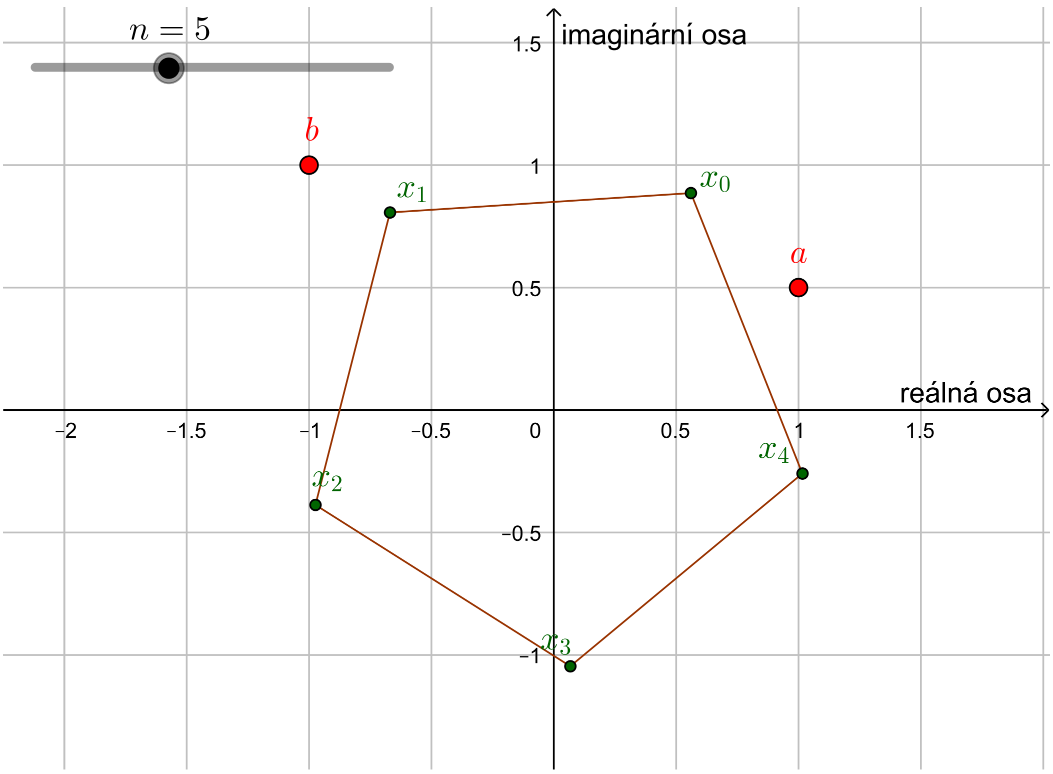
$$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{-\frac{2}{3}; \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i; \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i}\right\}.$$

Poznámka. Binomické rovnice lze řešit pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, tedy do libovolného stupně.

Na následujícím appletu (obr. 6.3) můžete měnit koeficienty a, b a exponent n a sledovat, jak ovlivňují řešení binomické rovnice $ax^n + b = 0$.

Můžeme si všimnout, že obrazy řešení této rovnice v komplexní rovině pro $n > 2$ jsou vrcholy pravidelného n-úhelníku se středem/těžištěm v počátku a poloměrem kružnice opsané rovným $\sqrt[n]{\left|-\dfrac{b}{a}\right|}$.

Dále si můžeme uvědomit, že velikost úhlu XOY, kde O je počátek a body X a Y jsou sousední vrcholy n-úhelníku, je roven $\dfrac{2\pi}{n}$. Toto číslo je zároveň rozdíl argumentů komplexních čísel, jejichž obrazy v komplexní rovině jsou sousední vrcholy n-úhelníku se středem/těžištěm v počátku.



Obrázek 6.3: Řešení binomické rovnice

Úlohy

1. Řešte binomické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:

   - $x^3 - 125 = 0$

     $x^3 = 125$

     $x^3 = 125(\cos 0 + i \sin 0)$

     $$x_k = 5\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right),\ k \in \{0, 1, 2\}$$

     $x_0 = 5(\cos 0 + i \sin 0) = 5$

     $$x_1 = 5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 5\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

     $$x_2 = 5\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 5\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

     $$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{5}; -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}\right\}$$

   - $x^4 + 80 = 0$

     $x^4 = -80$

     $x^4 = 80(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$x_k = 2\sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\ k \in \{0,1,2,3\}$$

$$x_0 = 2\sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt[4]{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt[4]{5}\sqrt{2}+\sqrt[4]{5}\sqrt{2}i$$

$$x_1 = 2\sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt[4]{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= -\sqrt[4]{5}\sqrt{2} + \sqrt[4]{5}\sqrt{2}i$$

$$x_2 = 2\sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sqrt[4]{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= -\sqrt[4]{5}\sqrt{2} - \sqrt[4]{5}\sqrt{2}i$$

$$x_3 = 2\sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\sqrt[4]{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{5}\sqrt{2} - \sqrt[4]{5}\sqrt{2}i$$

$$\mathbf{K} = \left\{\sqrt[4]{5}\sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt[4]{5}\sqrt{\mathbf{2}}\mathbf{i}; -\sqrt[4]{5}\sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt[4]{5}\sqrt{\mathbf{2}}\mathbf{i};\right.$$
$$\left. -\sqrt[4]{5}\sqrt{\mathbf{2}} - \sqrt[4]{5}\sqrt{\mathbf{2}}\mathbf{i}; \sqrt[4]{5}\sqrt{\mathbf{2}} - \sqrt[4]{5}\sqrt{\mathbf{2}}\mathbf{i}\right\}$$

- $4x^4 - 81 = 0$

  Binomickou rovnici upravíme na normovaný tvar a odečteme absolutní člen od obou stran rovnice.

  $$x^4 - \frac{81}{4} = 0$$

  $$x^4 = \frac{81}{4}$$

  $$x^4 = \frac{81}{4}(\cos 0 + i\sin 0)$$

  $$x_k = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}\right),$$

  $k \in \{0,1,2,3\}$

  $$x_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos 0 + i\sin 0) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

  $$x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

  $$x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{2} + i\sin\frac{2\pi}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

  $$x_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

$$\mathbf{K} = \left\{ \frac{\mathbf{3\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}; \frac{\mathbf{3\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; -\frac{\mathbf{3\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}; -\frac{\mathbf{3\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}\mathbf{i} \right\}$$

- $81x^3 + 64 = 0$

  Binomickou rovnici upravíme na normovaný tvar a odečteme absolutní člen od obou stran rovnice.

  $x^3 + \dfrac{64}{81} = 0$

  $x^3 = -\dfrac{64}{81}$

  $x^3 = \dfrac{64}{81}(\cos \pi + i \sin \pi)$

  $x_k = \dfrac{4}{3}\left(\cos \dfrac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \dfrac{\pi + 2k\pi}{3}\right), \ k \in \{0, 1, 2\}$

  $x_0 = \dfrac{4}{3}\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i \sin \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}i$

  $x_1 = \dfrac{4}{3}\left(\cos \dfrac{3\pi}{3} + i \sin \dfrac{3\pi}{3}\right) = \dfrac{4}{3}(\cos \pi + i \sin \pi) = -\dfrac{4}{3}$

  $x_2 = \dfrac{4}{3}\left(\cos \dfrac{5\pi}{3} + i \sin \dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}i$

  $$\mathbf{K} = \left\{ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{2\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}\mathbf{i}; -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}; \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{2\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}\mathbf{i} \right\}$$

2. Řešte binomické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:

   - $x^4 - 16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i = 0$

     Jedná se o binomickou rovnici v normovaném tvaru $x^4 + c = 0$, kde $c = -16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i$. Od obou stran rovnice odečteme komplexní číslo c.

     $x^4 = 16\sqrt{2} + 16\sqrt{2}i$

     Komplexní číslo na pravé straně rovnice převedeme do goniometrického tvaru:

     $x^4 = 32\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi}{4}\right)$

     Kořeny rovnice jsou všechny čtvrté odmocniny z komplexního čísla $32\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi}{4}\right)$.

     $x_k = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos \dfrac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \dfrac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right), \ k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$x_0 = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}}{4}\right) = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$x_1 = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{4}\right) = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$$

$$x_2 = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right)$$

$$x_3 = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+6\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+6\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$$

$$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{2}\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{\mathbf{16}} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{\mathbf{16}}\right); \mathbf{2}\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\mathbf{9}\pi}{\mathbf{16}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{9}\pi}{\mathbf{16}}\right);\right.$$
$$\left.\mathbf{2}\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\mathbf{17}\pi}{\mathbf{16}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{17}\pi}{\mathbf{16}}\right); \mathbf{2}\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\mathbf{25}\pi}{\mathbf{16}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{25}\pi}{\mathbf{16}}\right)\right\}$$

- $4x^3 + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i = 0$

  Binomickou rovnici upravíme na normovaný tvar a odečteme absolutní člen od obou stran rovnice.

  $x^3 + \frac{1}{16} - \frac{\sqrt{3}}{16}i = 0$

  $x^3 = -\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i$

  $x^3 = \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

  $x^3 = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

  Kořeny rovnice jsou všechny třetí odmocniny z komplexního čísla $\frac{1}{8}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

  $$x_k = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\right),\ k \in \{0,1,2\}$$

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$$

$$\mathbf{K} = \left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\cos\frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{9}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{9}}\right); \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\cos\frac{\mathbf{8}\pi}{\mathbf{9}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{8}\pi}{\mathbf{9}}\right); \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\cos\frac{\mathbf{14}\pi}{\mathbf{9}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{14}\pi}{\mathbf{9}}\right)\right\}$$

3. Binomická rovnice 5. stupně má kořen $7\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$. Jaké další kořeny rovnice má?

   Obrazy řešení binomické rovnice 5. stupně v komplexní rovině tvoří vrcholy pravidelného pětiúhelníku se středem v počátku. Rozdíl mezi argumenty dvou kořenů, jejichž obrazy jsou sousední vrcholy pětiúhelníku, je roven $\frac{2\pi}{5}$.

   Další kořeny binomické rovnice mají tvar:

   $$7\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right) =$$
   $$= 7\left(\cos\frac{3\pi + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi + 2k\pi}{5}\right),\ k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

   Dalšími kořeny binomické rovnice tedy jsou:

   $$7\left(\cos\frac{5\pi}{5} + i\sin\frac{5\pi}{5}\right) = 7\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$$
   $$7\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$$
   $$7\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right)$$
   $$7\left(\cos\frac{11\pi}{5} + i\sin\frac{11\pi}{5}\right) = 7\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

4. Binomická rovnice n-tého stupně, kde $n > 1$, má kořeny

   $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ a $\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$.

   Jaké další kořeny rovnice určitě má?

Obrazy řešení binomické rovnice v komplexní rovině tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníku se středem v počátku. Rozdíl mezi argumenty dvou známých kořenů je roven $\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{4\pi}{8}$. Tento výsledek použijeme pro nalezení dalších kořenů.

Další kořeny binomické rovnice mají tvar:

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi + 4k\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi + 4k\pi}{8}\right),\ k \in \{1, \dots\}$$

Dalšími kořeny binomické rovnice tedy jsou:

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$$

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right)$$

$$\sqrt{3}\left(\cos\frac{17\pi}{8} + i\sin\frac{17\pi}{8}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

Poslední vypočítaný kořen rovnice nám byl znám již ze zadání. Známe tedy celkem 4 kořeny rovnice.

Jedná se o binomickou rovnici n-tého stupně, kde $n \in \{4, 8, 12, \dots\}$.

6.5 Trinomické rovnice

Dalším typem rovnic, které budeme v množině všech komplexních čísel řešit, jsou rovnice trinomické.

Definice. *Trinomická rovnice s neznámou* $x \in \mathbb{C}$ *je rovnice tvaru* $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, *kde* $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Pojem trinomická rovnice pochází z latinského slova trinom, které znamená trojčlen. Tímto trojčlenem je míněn výraz na levé straně rovnice $ax^{2n} + bx^n + c$.

Pro speciální případ trinomické rovnice, kde $n = 2$, používáme název bikvadratická.

Definice. *Bikvadratická rovnice s neznámou* $x \in \mathbb{C}$ *je trinomická rovnice s* $n = 2$, *má tedy tvar* $ax^4 + bx^2 + c = 0$, *kde* $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$.

Poznámka. V této kapitole budeme dolními indexy číslovat kořeny rovnice a pomocné substituce (nikoliv reálnou a imaginární část komplexního čísla).

Nejdříve se podíváme na řešení trinomické rovnice, ve které je $c = 0$. Pak má rovnice tvar $ax^{2n} + bx^n = 0$. Výraz na levé straně můžeme rozložit na součin $x^n \cdot (ax^n + b)$. V tomto případě má rovnice n-násobný kořen $x = 0$ a dalších n kořenů vyplývajících z řešení binomické rovnice $ax^n + b = 0$.

Příklad

Najděte řešení trinomické rovnice $2x^6 + 6x^3 = 0$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Jedná se o trinomickou rovnici $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, pro kterou platí: $a = 2$, $b = 6$, $c = 0$, $n = 3$.

$2x^6 + 6x^3 = 0$

Výraz na levé straně rozložíme na součin.

$x^3(2x^3 + 6) = 0$

Součin na levé straně rovnice je roven nule právě tehdy, když platí:

$x^3 = 0 \vee 2x^3 + 6 = 0$

$x^3 = 0 \vee x^3 = -3$

Z podmínky $x^3 = 0$ plyne trojnásobný kořen:

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Z podmínky $x^3 = -3$ určíme další kořeny. Nejdříve vyjádříme číslo -3 v goniometrickém tvaru.

$x^3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$

Odtud plyne, že řešením jsou třetí odmocniny z komplexního čísla

$3(\cos \pi + i \sin \pi)$.

$$x_4 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}i$$

$$x_5 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{3}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt[3]{3}$$

$$x_6 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}i$$

Množina všech kořenů rovnice je tedy

$$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{0}; \frac{\sqrt[3]{3}}{\mathbf{2}} + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}\sqrt[3]{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; -\sqrt[3]{3}; \frac{\sqrt[3]{3}}{\mathbf{2}} - \frac{\sqrt{\mathbf{3}}\sqrt[3]{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}\right\}.$$

Nyní se podíváme na případ trinomické rovnice, kdy $c \neq 0$. Můžeme si všimnout, že trinomické rovnice nápadně připomínají rovnice kvadratické. Použijeme-li substituci $y = x^n$, dojdeme ke kvadratické rovnici $ay^2 + by + c = 0$. Tato rovnice má v $\mathbb{C}$ dva kořeny (či jeden dvojnásobný kořen) y_1 a y_2. Kořeny binomických rovnic $y_1 = x^n$ a $y_2 = x^n$ s neznámou x jsou zároveň kořeny původní trinomické rovnice.

Příklad

Najděte řešení trinomické rovnice $x^8 - 2x^4 + 2 = 0$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Jedná se o trinomickou rovnici $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, pro kterou platí: $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$, $n = 4$.

Použijeme substituci $y = x^4$.

$y^2 - 2y + 2 = 0$

Najdeme řešení kvadratické rovnice s neznámou y.

Určíme její diskriminant.

$D = 4 - 4 \cdot 2 = -4$

Rovnice získaná po substituci má záporný diskriminant, její řešení je:

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i$$

Nyní vyřešíme binomické rovnice $y_1 = x^4$ a $y_2 = x^4$, proto y_1 a y_2 převedeme na goniometrický tvar.

$$y_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

Nejdříve vyřešíme rovnici $y_1 = x^4$.

Z rovnice $x^4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ plynou řešení

$$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right), k\in\{0,1,2,3\}.$$

$$x_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}}{4}\right)=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$x_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{4}\right)=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$$

$$x_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{4}\right)=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right)$$

$$x_4=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+6\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+6\pi}{4}\right)=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$$

Dále vyřešíme rovnici $y_2=x^4$.

Z rovnice $x^4=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ plynou řešení

$$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4}\right), k\in\{0,1,2,3\}.$$

$$x_5=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}}{4}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}}{4}\right)=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right)$$

$$x_6=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{4}\right)=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16}+i\sin\frac{15\pi}{16}\right)$$

$$x_7=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+4\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+4\pi}{4}\right)=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16}+i\sin\frac{23\pi}{16}\right)$$

$$x_8=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+6\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+6\pi}{4}\right)=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{16}+i\sin\frac{31\pi}{16}\right)$$

Rovnice má celkem 8 řešení, množina všech kořenů rovnice je

$$\mathbf{K} = \left\{ \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{\mathbf{16}} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{\mathbf{16}}\right); \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\mathbf{9}\pi}{\mathbf{16}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{9}\pi}{\mathbf{16}}\right); \right.$$
$$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\mathbf{17}\pi}{\mathbf{16}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{17}\pi}{\mathbf{16}}\right); \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\mathbf{25}\pi}{\mathbf{16}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{25}\pi}{\mathbf{16}}\right);$$
$$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\mathbf{7}\pi}{\mathbf{16}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{7}\pi}{\mathbf{16}}\right); \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\mathbf{15}\pi}{\mathbf{16}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{15}\pi}{\mathbf{16}}\right);$$
$$\left. \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\mathbf{23}\pi}{\mathbf{16}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{23}\pi}{\mathbf{16}}\right); \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\mathbf{31}\pi}{\mathbf{16}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{31}\pi}{\mathbf{16}}\right) \right\}.$$

Poznámka. Trinomické rovnice lze řešit pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, tedy do libovolného stupně.

Příklad

Najděte řešení trinomické rovnice $x^4 + \left(3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right) x^2 + (-8 - 8i) = 0$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Jedná se o trinomickou rovnici $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, pro kterou platí: $a = 1$, $b = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$, $c = -8 - 8i$, $n = 2$.

Použijeme substituci $y = x^2$.

$y^2 + \left(3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right) y + (-8 - 8i) = 0$

Potřebujeme najít řešení kvadratické rovnice s neznámou y. Jde o kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty.

Rovnici vynásobíme číslem $4a = 4$ a upravíme.

$4y^2 + 4\left(3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right) y + (-32 - 32i) = 0$

$(2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot \left(3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right) + (-32 - 32i) = 0$

$(2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot \left(3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right) + \left(3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right)^2 - \left(3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right)^2 + (-32 - 32i) = 0$

$\left(2y + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right)^2 - \left(3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right)^2 + (-32 - 32i) = 0$

$\left(2y + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right)^2 = 18 + 80i$

Použijeme substituci $z = 2y + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ a získáme následující binomickou rovnici druhého stupně, jejíž řešení z_1 a z_2 určíme jako druhé odmocniny z komplexního čísla $18 + 80i$.

$z^2 = 18 + 80i$

$z_1 = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

$z_2 = -5\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

Ze substituce $z = 2y + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ vyjádříme neznámou y.

$$y = \frac{z - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i}{2}$$

Za z nejdříve dosadíme $z_1 = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ a získáme y_1, poté za z dosadíme $z_2 = -5\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$ a získáme y_2.

$$y_1 = \frac{5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}$$

$$y_2 = \frac{-5\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i}{2} = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i = 8\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

Vrátíme se k substituci $y = x^2$, kam za y postupně dosadíme $y_1 = \sqrt{2}$ a $y_2 = 8\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$, čímž získáme dvě binomické rovnice s neznámou x. Kořeny těchto binomických rovnic jsou zároveň kořeny původní trinomické rovnice.

Z rovnice $y_1 = x^2$, a tedy $x^2 = \sqrt{2}$, plynou řešení:

$$x_1 = \sqrt[4]{2}$$

$$x_2 = -\sqrt[4]{2}$$

Z rovnice $y_2 = x^2$, a tedy $x^2 = 8\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$, plynou řešení:

$$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right), k \in \{0, 1\}$$

$$x_3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$$

$$x_4 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right)$$

Rovnice má celkem 4 řešení, množina všech kořenů rovnice je

$$\mathbf{K} = \left\{\sqrt[4]{2}; -\sqrt[4]{2}; \mathbf{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{8}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{8}}\right); \mathbf{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\mathbf{13\pi}}{\mathbf{8}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{13\pi}}{\mathbf{8}}\right)\right\}.$$

Úlohy

1. Řešte trinomické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:
   - $16x^8 - x^4 = 0$

     Jedná se o trinomickou rovnici bez absolutního členu. Výraz na levé straně rovnice rozložíme na součin.

     $x^4(16x^4 - 1) = 0$

     Z toho vyplývá:

$x^4 = 0 \vee 16x^4 - 1 = 0$

$x^4 = 0 \vee x^4 = \dfrac{1}{16}$

$x^4 = 0 \vee x^4 = \dfrac{1}{16}(\cos 0 + i \sin 0)$

Z podmínky $x^4 = 0$ plyne čtyřnásobný kořen:

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

Z podmínky $x^4 = \dfrac{1}{16}(\cos 0 + i \sin 0)$ plynou kořeny:

$\dfrac{1}{2}\left(\cos \dfrac{2k\pi}{4} + i \sin \dfrac{2k\pi}{4}\right), k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$x_5 = \dfrac{1}{2}(\cos 0 + i \sin 0) = \dfrac{1}{2}$

$x_6 = \dfrac{1}{2}\left(\cos \dfrac{\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}i$

$x_7 = \dfrac{1}{2}(\cos \pi + i \sin \pi) = -\dfrac{1}{2}$

$x_8 = \dfrac{1}{2}\left(\cos \dfrac{3\pi}{2} + i \sin \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}i$

$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{0}; \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}\right\}$

- $x^4 + \left(\sqrt{3} + i\right)x^2 = 0$

  Jedná se o trinomickou rovnici bez absolutního členu. Výraz na levé straně rovnice rozložíme na součin.

  $x^2\left(x^2 + \sqrt{3} + i\right) = 0$

  Z toho vyplývá:

  $x^2 = 0 \vee x^2 + \sqrt{3} + i = 0$

  $x^2 = 0 \vee x^2 = -\sqrt{3} - i$

  $x^2 = 0 \vee x^2 = 2\left(\cos \dfrac{7\pi}{6} + i \sin \dfrac{7\pi}{6}\right)$

  Z podmínky $x^2 = 0$ plyne dvojnásobný kořen:

  $x_1 = x_2 = 0$

  Z podmínky $x^2 = 2\left(\cos \dfrac{7\pi}{6} + i \sin \dfrac{7\pi}{6}\right)$ plynou kořeny:

  $\sqrt{2}\left(\cos \dfrac{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi}{2} + i \sin \dfrac{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right), k \in \{0, 1\}$

  $x_3 = \sqrt{2}\left(\cos \dfrac{7\pi}{12} + i \sin \dfrac{7\pi}{12}\right)$

$x_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{0}; \sqrt{\mathbf{2}}\left(\cos\frac{\mathbf{7}\pi}{\mathbf{12}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{7}\pi}{\mathbf{12}}\right); \sqrt{\mathbf{2}}\left(\cos\frac{\mathbf{19}\pi}{\mathbf{12}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{19}\pi}{\mathbf{12}}\right)\right\}$

- $(\sqrt{2}+i)x^6 + (-2+2\sqrt{2}i)x^3 = 0$

  Jedná se o trinomickou rovnici bez absolutního členu. Výraz na levé straně rovnice rozložíme na součin.

  $x^3((\sqrt{2}+i)x^3 + (-2+2\sqrt{2}i)) = 0$

  Z toho vyplývá:

  $x^3 = 0 \,\vee\, (\sqrt{2}+i)x^3 + (-2+2\sqrt{2}i) = 0$

  $x^3 = 0 \,\vee\, x^3 = \dfrac{2-2\sqrt{2}i}{\sqrt{2}+i}$

  $x^3 = 0 \,\vee\, x^3 = -2i$

  $x^3 = 0 \,\vee\, x^3 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

  Z podmínky $x^3 = 0$ plyne trojnásobný kořen:

  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

  Z podmínky $x^3 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ plynou kořeny:

  $\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\}$

  $x_4 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}i$

  $x_5 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}i$

  $x_6 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}i$

  $\mathbf{K} = \left\{\mathbf{0}; \sqrt[3]{2}\mathbf{i}; -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}\sqrt[3]{2}}{\mathbf{2}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; \frac{\sqrt{\mathbf{3}}\sqrt[3]{2}}{\mathbf{2}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}\right\}$

2. Řešte trinomické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:

- $x^6 + x^3 - 12 = 0$

  Použijeme substituci $y = x^3$.

  $y^2 + y - 12 = 0$

  Najdeme řešení kvadratické rovnice s neznámou y, řešení vyjádříme v goniometrickém tvaru.

$y_1 = 3 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$

$y_2 = -4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

Vyřešíme binomické rovnice $y_1 = x^3$ a $y_2 = x^3$.

Z rovnice $x^3 = y_1$, a tedy $x^3 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$, plynou řešení:

$$\sqrt[3]{3}\left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{3}\right), k \in \{0, 1, 2\}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{3}\,(\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt[3]{3}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{3}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}i$$

$$x_3 = \sqrt[3]{3}\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}i$$

Z rovnice $x^3 = y_2$, a tedy $x^3 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$, plynou řešení:

$$\sqrt[3]{4}\left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}\right), k \in \{0, 1, 2\}$$

$$x_4 = \sqrt[3]{4}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{2}i$$

$$x_5 = \sqrt[3]{4}\left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3}\right) = -\sqrt[3]{4}$$

$$x_6 = \sqrt[3]{4}\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} - \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{2}i$$

$$\mathbf{K} = \left\{\sqrt[3]{3}; -\frac{\sqrt[3]{3}}{\mathbf{2}} + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}\sqrt[3]{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; -\frac{\sqrt[3]{3}}{\mathbf{2}} - \frac{\sqrt{\mathbf{3}}\sqrt[3]{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{i};\right.$$
$$\left.\frac{\sqrt[3]{4}}{\mathbf{2}} + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}\sqrt[3]{4}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; -\sqrt[3]{4}; \frac{\sqrt[3]{4}}{\mathbf{2}} - \frac{\sqrt{\mathbf{3}}\sqrt[3]{4}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}\right\}$$

- $x^8 - 4x^4 + 16 = 0$

  Použijeme substituci $y = x^4$.

  $y^2 - 4y + 16 = 0$

  Najdeme řešení kvadratické rovnice s neznámou y, řešení vyjádříme v goniometrickém tvaru.

  $$y_1 = 2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

  $$y_2 = 2 - 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$$

  Vyřešíme binomické rovnice $y_1 = x^4$ a $y_2 = x^4$.

  Z rovnice $x^4 = y_1$, a tedy $x^4 = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, plynou řešení:

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right), k\in\{0,1,2,3\}$$

$$x_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$x_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$x_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$x_4=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

Z rovnice $x^4=y_2$, a tedy $x^4=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$, plynou řešení:

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{4}\right), k\in\{0,1,2,3\}$$

$$x_5=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$x_6=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$x_7=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

$$x_8=\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

$$\mathbf{K}=\left\{\boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right);\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right);\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right);\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right);\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right);\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right);\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right);\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)}\right\}$$

- $x^6+\left(-4\sqrt{3}+5i\right)x^3+\left(-4-4\sqrt{3}i\right)=0$

  Použijeme substituci $y=x^3$.

  $y^2+\left(-4\sqrt{3}+5i\right)y+\left(-4-4\sqrt{3}i\right)=0$

  Potřebujeme najít řešení kvadratické rovnice s neznámou y. Jde o kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty.

  Rovnici vynásobíme číslem $4a=4$.

  $4y^2+4\left(-4\sqrt{3}+5i\right)y+\left(-16-16\sqrt{3}i\right)=0$

$$(2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot \left(-4\sqrt{3} + 5i\right) + \left(-16 - 16\sqrt{3}i\right) = 0$$

$$(2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot \left(-4\sqrt{3} + 5i\right) + \left(-4\sqrt{3} + 5i\right)^2 - \left(-4\sqrt{3} + 5i\right)^2 +$$

$$+ \left(-16 - 16\sqrt{3}i\right) = 0$$

$$\left(2y - 4\sqrt{3} + 5i\right)^2 - \left(-4\sqrt{3} + 5i\right)^2 + \left(-16 - 16\sqrt{3}i\right) = 0$$

$$\left(2y - 4\sqrt{3} + 5i\right)^2 = 39 - 24\sqrt{3}i$$

Použijeme substituci $z = 2y - 4\sqrt{3} + 5i$ a získáme následující binomickou rovnici druhého stupně, jejíž řešení z_1 a z_2 určíme jako druhé odmocniny z komplexního čísla $39 - 24\sqrt{3}i$.

$$z^2 = 39 - 24\sqrt{3}i$$

$$z_1 = -4\sqrt{3} + 3i$$

$$z_2 = 4\sqrt{3} - 3i$$

Ze substituce $z = 2y - 4\sqrt{3} + 5i$ vyjádříme neznámou y.

$$y = \frac{z + 4\sqrt{3} - 5i}{2}$$

Za z nejdříve dosadíme $z_1 = -4\sqrt{3} + 3i$ a získáme y_1, poté za z dosadíme $z_2 = 4\sqrt{3} - 3i$ získáme y_2.

$$y_1 = \frac{-4\sqrt{3} + 3i + 4\sqrt{3} - 5i}{2} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$y_2 = \frac{4\sqrt{3} - 3i + 4\sqrt{3} - 5i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

Vrátíme se k substituci $y = x^3$, kam za y postupně dosadíme $y_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ a $y_2 = 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$, čímž získáme dvě binomické rovnice s neznámou x. Kořeny těchto binomických rovnic jsou zároveň kořeny původní trinomické rovnice.

Z rovnice $y_1 = x^3$, a tedy $x^3 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, plynou řešení:

$$\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\}$$

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$x_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$x_3 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i$$

Z rovnice $y_2 = x^3$, a tedy $x^3 = 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$, plynou řešení:

$$2\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\}$$

$$x_4 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{18} + i\sin\frac{11\pi}{18}\right)$$

$$x_5 = 2\left(\cos\frac{23\pi}{18} + i\sin\frac{23\pi}{18}\right)$$

$$x_6 = 2\left(\cos\frac{35\pi}{18} + i\sin\frac{35\pi}{18}\right)$$

$$\mathbf{K} = \left\{\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; -\mathbf{i}; \mathbf{2}\left(\cos\frac{\mathbf{11}\pi}{\mathbf{18}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{11}\pi}{\mathbf{18}}\right); \right.$$
$$\left. \mathbf{2}\left(\cos\frac{\mathbf{23}\pi}{\mathbf{18}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{23}\pi}{\mathbf{18}}\right); \mathbf{2}\left(\cos\frac{\mathbf{35}\pi}{\mathbf{18}} + \mathbf{i}\sin\frac{\mathbf{35}\pi}{\mathbf{18}}\right)\right\}$$

3. Trinomická rovnice 6. stupně má kořeny $2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ a $5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Jaké další kořeny rovnice má?

   Množina kořenů trinomické rovnice 6. stupně je sjednocením množin kořenů dvou binomických rovnic třetího stupně. Obrazy řešení binomických rovnic 3. stupně v komplexní rovině tvoří vrcholy rovnostranných trojúhelníků s těžištěm v počátku. Rozdíl mezi argumenty dvou kořenů, jejichž obrazy jsou sousední vrcholy trojúhelníku, je roven $\frac{2\pi}{3}$.

   Další kořeny trinomické rovnice vypočítáme pomocí těchto vzorců:

$$2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 2\left(\cos\frac{7\pi + 8k\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi + 8k\pi}{12}\right),\ k \in \{1,2\}$$

$$5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 5\left(\cos\frac{3\pi + 4k\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi + 4k\pi}{6}\right),\ k \in \{1,2\}$$

   Dalšími kořeny trinomické rovnice tedy jsou:

$$2\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$
$$2\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

$$5\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$5\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

6.6 Reciproké rovnice

Podívejme se na řešení dalšího speciálního typu algebraických rovnic v $\mathbb{C}$, kterým se říká reciproké.

Definice. *Mějme rovnici* $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ *s neznámou* $x \in \mathbb{C}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Pokud $a_k = a_{n-k}$ *pro* $k = 0, \ldots, n$, *říkáme jí reciproká rovnice 1. druhu.*

Pokud $a_k = -a_{n-k}$ *pro* $k = 0, \ldots, n$, *říkáme jí reciproká rovnice 2. druhu.*

Poznámka. V této kapitole budeme dolními indexy číslovat kořeny rovnice a pomocné substituce (nikoliv reálnou a imaginární část komplexního čísla).

Uveďme si některé konkrétní příklady reciprokých rovnic 1. druhu:

$x^5 + (\sqrt{3} + i)x^4 - 2x^3 - 2x^2 + (\sqrt{3} + i)x + 1 = 0$

$-3x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x - 3 = 0$ nebo také $-3x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

Nyní si uvedeme konkrétní příklady reciprokých rovnic 2. druhu:

$ix^7 - 5x^6 + (3 - i)x^5 + x^4 - x^3 - (3 - i)x^2 + 5x - i = 0$

$-5x^4 + (-2+i)x^3 + 0x^2 + (2-i)x + 5 = 0$ nebo také $-5x^4 + (-2+i)x^3 + (2-i)x + 5 = 0$

Všimněme si, že v reciproké rovnici 2. druhu sudého stupně musí být prostřední koeficient $a_{\frac{n}{2}}$ roven 0, aby platilo $a_{\frac{n}{2}} = -a_{\frac{n}{2}}$.

Před řešením reciprokých rovnic se seznámíme s některými z jejich vlastností, které se nám budou při jejich řešení hodit.

Věta. *Reciproké rovnice nemají kořen* 0.

Důkaz. Mějme reciprokou rovnici $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ s neznámou $x \in \mathbb{C}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Víme, že $a_n = a_0$ (pro reciprokou rovnici 1. druhu), nebo $a_n = -a_0$ (pro reciprokou rovnici 2. druhu). Z toho plyne, že $a_0 \neq 0$.

Do výrazu na levé straně rociproké rovnice dosadíme číslo 0:

$a_n \cdot 0 + a_{n-1} \cdot 0 + \cdots + a_1 \cdot 0 + a_0 = 0$

$a_0 = 0$

Poslední rovnost neplatí, protože koeficient a_0 je nenulový.

Číslo 0 tedy není kořenem reciproké rovnice.

□

Nyní se dostaneme k důvodu, proč se těmto rovnicím říká reciproké.

Věta. *Pokud je* x_1 *kořenem reciproké rovnice, je také* $\dfrac{1}{x_1}$ *kořenem téže rovnice.*

Důkaz. Nejdříve uvažujme reciprokou rovnici $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ s neznámou $x \in \mathbb{C}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Něchť číslo x_1 je jedním z kořenů rovnice, pak platí:

$a_n {x_1}^n + a_{n-1} {x_1}^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = 0$

Něchť se jedná o reciprokou rovnici 1. druhu, pak $a_k = a_{n-k}$ pro $k = 0, \dots, n$.

Využijeme rovnost $a_k = a_{n-k}$, obě strany rovnosti vydělíme výrazem ${x_1}^n$ a upravíme. Výrazem ${x_1}^n$ můžeme dělit, protože $x_1 \neq 0$.

$$a_n {x_1}^n + a_{n-1} {x_1}^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = 0 \qquad \Big| : {x_1}^n$$

$$a_0 + a_1 \frac{1}{x_1} + \dots + a_1 \frac{1}{{x_1}^{n-1}} + a_0 \frac{1}{{x_1}^n} = 0$$

$$a_0 + a_1 \frac{1}{x_1} + \dots + a_1 \left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} + a_0 \left(\frac{1}{x_1}\right)^n = 0$$

Přeskládáme členy na levé straně rovnosti:

$$a_0 \left(\frac{1}{x_1}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{1}{x_1} + a_0 = 0$$

Použili jsme pouze ekvivalentní úpravy platné rovnosti, proto poslední rovnost platí. Výraz na levé straně odpovídá výrazu na levé straně původní reciproké rovnice po dosazení čísla $x = \dfrac{1}{x_1}$, proto je kořenem reciproké rovnice i číslo $\dfrac{1}{x_1}$.

Nyní uvažujme reciprokou rovnici 2. druhu, pak $a_k = -a_{n-k}$ pro $k = 0, \dots, n$.

Využijeme rovnost $a_k = -a_{n-k}$, obě strany rovnosti vydělíme nenulovým výrazem ${x_1}^n$ a upravíme.

$$-a_0 {x_1}^n - a_1 {x_1}^{n-1} - \dots + a_1 x_1 + a_0 = 0 \qquad \Big| : {x_1}^n$$

$$-a_0 - a_1 \frac{1}{x_1} - \dots + a_1 \frac{1}{{x_1}^{n-1}} + a_0 \frac{1}{{x_1}^n} = 0$$

$$-a_0 - a_1 \frac{1}{x_1} - \dots + a_1 \left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} + a_0 \left(\frac{1}{x_1}\right)^n = 0$$

Přeskládáme členy na levé straně rovnosti a vynásobíme obě strany rovnosti číslem -1:

$$a_0 \left(\frac{1}{x_1}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} + \ldots - a_1 \frac{1}{x_1} - a_0 = 0 \qquad \Big| \cdot (-1)$$

$$-a_0 \left(\frac{1}{x_1}\right)^n - a_1 \left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{1}{x_1} + a_0 = 0$$

Použili jsme pouze ekvivalentní úpravy platné rovnosti, proto poslední rovnost platí. Výraz na levé straně odpovídá výrazu na levé straně původní reciproké rovnice po dosazení čísla $x = \frac{1}{x_1}$, proto je kořenem reciproké rovnice i číslo $\frac{1}{x_1}$. $\square$

Poznámka. Čísla x a $\frac{1}{x}$ jsou navzájem převrácená neboli reciproká.

Dále si uvedeme další důležité vlastnosti reciprokých rovnic 1. druhu, které se nám budou hodit při řešení rovnic toho typu.

Věta. *Každá reciproká rovnice 1. druhu lichého stupně má kořen* -1.

Důkaz. Mějme reciprokou rovnici 1. druhu lichého stupně:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Využijeme toho, že platí $a_k = a_{n-k}$ pro $k = 0, \ldots, n$.

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Do rovnice dosadíme $x = -1$. Stupeň n je lichý, proto $(-1)^n = -1$.

Pokud je $\frac{n+1}{2}$ sudé číslo, pak $(-1)^{\frac{n+1}{2}} = 1$ a dojdeme k této rovnosti:

$$-a_0 + a_1 + \cdots + a_{\frac{n-1}{2}} - a_{\frac{n-1}{2}} + \ldots - a_1 + a_0 = 0$$

Pokud je $\frac{n+1}{2}$ liché číslo, pak $(-1)^{\frac{n+1}{2}} = -1$ a dojdeme k této rovnosti:

$$-a_0 + a_1 + \ldots - a_{\frac{n-1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} + \ldots - a_1 + a_0 = 0$$

V obou případech je na levé straně rovnice každé z čísel $a_0, \ldots, a_{\frac{n-1}{2}}$ jednou s kladným znaménkem a jednou se záporným znaménkem, rovnost tedy platí.

Číslo -1 je kořenem každé reciproké rovnice 1. druhu lichého stupně. $\square$

Věta. *Pokud vydělíme reciprokou rovnici 1. druhu lichého stupně výrazem* $(x+1)$, *vznikne reciproká rovnice 1. druhu sudého stupně.*

Důkaz. Větu dokážeme pro stupeň rovnice $n = 5$ a následně nahlédneme, že platí pro libovolné liché n.

Mějme reciprokou rovnici 1. druhu lichého stupně:

$$a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Využijeme toho, že pro tyto rovnice platí $a_k = a_{n-k}$ pro $k = 0, \ldots, n$.

$$a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Obě strany rovnice vydělíme výrazem $(x+1)$, využíváme přitom znalost dělení mnohočlenů. Na levé straně získáme výraz:

$$(a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) : (x+1) =$$

$$= a_0 x^4 + (a_1 - a_0) x^3 + (a_2 - a_1 + a_0) x^2 + (a_1 - a_0) x + a_0$$

Po vydělení původní rovnice výrazem $(x + 1)$ nám tedy vzniká reciproká rovnice 1. druhu sudého stupně:

$$a_0x^4 + (a_1 - a_0)x^3 + (a_2 - a_1 + a_0)x^2 + (a_1 - a_0)x + a_0 = 0$$

K podobnému závěru bychom došli při libovolném lichém n.

Pokud vydělíme reciprokou rovnici 1. druhu lichého stupně n výrazem $(x + 1)$, zjevně vznikne rovnice sudého stupně $n - 1$. U x^{n-1} a x^0 bude koeficient 1, u dalších mocnin x budou postupně koeficienty $(a_1 - a_0)$, $(a_2 - a_1 + a_0)$, $(a_3 - a_2 + a_1 - a_0)$ atd.

□

Nyní se podíváme na důležité vlastnosti reciprokých rovnic 2. druhu, které také následně využijeme při řešení rovnic toho typu.

Věta. *Každá reciproká rovnice 2. druhu má kořen* 1.

Důkaz. Nejdříve uvažujme reciprokou rovnici 2. druhu lichého stupně $n \in \mathbb{N}$.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{\frac{n+1}{2}}x^{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}}x^{\frac{n-1}{2}} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Využijeme toho, že pro reciproké rovnice 2. druhu platí $a_k = -a_{n-k}$ pro $k = 0, \ldots, n$.

$$-a_0x^n - a_1x^{n-1} - \ldots - a_{\frac{n-1}{2}}x^{\frac{n+1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}}x^{\frac{n-1}{2}} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Ověříme, zda číslo 1 je kořenem této rovnice, tj. dosadíme $x = 1$.

$$-a_0 - a_1 - \ldots - a_{\frac{n-1}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} + \cdots + a_1 + a_0 = 0$$

Na levé straně rovnice je každé z čísel $a_0, \ldots, a_{\frac{n-1}{2}}$ jednou s kladným znaménkem a jednou se záporným znaménkem, rovnost tedy platí.

Nyní uvažujme reciprokou rovnici 2. druhu sudého stupně $n \in \mathbb{N}$.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{\frac{n+2}{2}}x^{\frac{n+2}{2}} + a_{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n-2}{2}}x^{\frac{n-2}{2}} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Pro koeficienty reciproké rovnice 2. druhu platí $a_k = -a_{n-k}$, tedy $a_{\frac{n}{2}} = 0$.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{\frac{n+2}{2}}x^{\frac{n+2}{2}} + a_{\frac{n-2}{2}}x^{\frac{n-2}{2}} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Využijeme opět toho, že platí $a_k = -a_{n-k}$ pro $k = 0, \ldots, n$.

$$-a_0x^n - a_1x^{n-1} + \ldots - a_{\frac{n-2}{2}}x^{\frac{n+2}{2}} + a_{\frac{n-2}{2}}x^{\frac{n-2}{2}} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Ověříme, zda číslo 1 je kořenem této rovnice, tj. dosadíme $x = 1$.

$$-a_0 - a_1 - \ldots - a_{\frac{n-2}{2}} + a_{\frac{n-2}{2}} + \cdots + a_1 + a_0 = 0$$

Na levé straně rovnice je každé z čísel $a_0, \ldots, a_{\frac{n-2}{2}}$ jednou s kladným znaménkem a jednou se záporným znaménkem, rovnost tedy platí.

Číslo 1 je kořenem každé reciproké rovnice 2. druhu.

□

Věta. *Pokud vydělíme reciprokou rovnici 2. druhu lichého stupně výrazem* $(x-1)$, *vznikne reciproká rovnice 1. druhu sudého stupně.*

Důkaz. Větu dokážeme pro stupeň rovnice $n=5$ a následně nahlédneme, že platí pro libovolné liché n.

Mějme reciprokou rovnici 2. druhu pátého stupně:

$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Využijeme toho, že pro reciproké rovnice 2. druhu platí $a_k = -a_{n-k}$ pro $k = 0, \dots, n$.

$-a_0x^5 - a_1x^4 - a_2x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Rovnici vynásobíme číslem -1.

$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0$

Obě strany rovnice vydělíme výrazem $(x-1)$, využíváme přitom znalost dělení mnohočlenů. Na levé straně získáme výraz:

$(a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0) : (x-1) =$

$= a_0x^4 + (a_1 + a_0)x^3 + (a_2 + a_1 + a_0)x^2 + (a_1 + a_0)x + a_0$

Po vydělení původní rovnice výrazem $(x-1)$ nám tedy vzniká reciproká rovnice 1. druhu sudého stupně:

$a_0x^4 + (a_1 + a_0)x^3 + (a_2 + a_1 + a_0)x^2 + (a_1 + a_0)x + a_0 = 0$

K podobnému závěru bychom došli při libovolném lichém n.

Pokud vydělíme reciprokou rovnici 2. druhu lichého stupně n výrazem $(x-1)$, zjevně vznikne rovnice sudého stupně $n-1$. U x^{n-1} a x^0 bude koeficient 1, u dalších mocnin x budou postupně koeficienty $(a_1 + a_0)$, $(a_2 + a_1 + a_0)$, $(a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$ atd.

$\square$

Věta. *Pokud vydělíme reciprokou rovnici 2. druhu sudého stupně výrazem* $(x-1)$, *vznikne reciproká rovnice 1. druhu lichého stupně.*

Důkaz. Větu dokážeme pro stupeň rovnice $n=4$ a následně nahlédneme, že platí pro libovolné sudé n.

Mějme reciprokou rovnici 2. druhu čtvrtého stupně:

$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Využijeme toho, že pro reciproké rovnice 2. druhu platí $a_k = -a_{n-k}$ pro $k = 0, \dots, n$. Z toho důvodu musí platit $a_2 = 0$.

$-a_0x^4 - a_1x^3 + a_1x + a_0 = 0$

Rovnici vynásobíme číslem -1.

$a_0x^4 + a_1x^3 - a_1x - a_0 = 0$

Obě strany rovnice vydělíme výrazem $(x-1)$, využíváme přitom znalost dělení mnohočlenů. Na levé straně získáme výraz:

$(a_0x^4 + a_1x^3 - a_1x - a_0) : (x-1) =$

$= a_0x^3 + (a_1 + a_0)x^2 + (a_1 + a_0)x + a_0$

Po vydělení původní rovnice výrazem $(x-1)$ nám tedy vzniká reciproká rovnice 1. druhu lichého stupně:

$a_0x^3 + (a_1 + a_0)x^2 + (a_1 + a_0)x + a_0 = 0$

K podobnému závěru bychom došli při libovolném sudém n.

Pokud vydělíme reciprokou rovnici 2. druhu sudého stupně n výrazem $(x-1)$, zjevně vznikne rovnice lichého stupně $n-1$. U x^{n-1} a x^0 bude koeficient 1, u dalších mocnin x budou postupně koeficienty $(a_1 + a_0)$, $(a_2 + a_1 + a_0)$, $(a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$ atd.

$\square$

Řešení reciprokých rovnic 1. druhu

Při řešení reciprokých rovnic 1. druhu využijeme jejich výše uvedené vlastnosti:

- reciproké rovnice nemají kořen 0
- reciproké rovnice 1. druhu lichého stupně mají kořen -1
- vydělením reciproké rovnice 1. druhu lichého stupně výrazem $(x+1)$ vznikne reciproká rovnice 1. druhu sudého stupně

Je tedy klíčové umět řešit reciproké rovnice 1. druhu sudého stupně.

Příklad

Najděte řešení rovnice $4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4 = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Jedná se o reciprokou rovnici prvního druhu sudého stupně $n = 4$.

Rovnici vydělíme nenulovým výrazem $x^{\frac{n}{2}} = x^2$. Výraz x^2 je nenulový, neboť číslo 0 není kořenem žádné reciproké rovnice.

$4x^2 + 8x + 3 + 8\dfrac{1}{x} + 4\dfrac{1}{x^2} = 0$

Přemístíme k sobě členy s x a $\dfrac{1}{x}$, x^2 a $\dfrac{1}{x^2}$.

$4x^2 + 4\dfrac{1}{x^2} + 8x + 8\dfrac{1}{x} + 3 = 0$

$4\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 3 = 0$

Použijeme substituci:

$y = x + \dfrac{1}{x}$

A určíme také y^2.

$y^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$

S využitím této substituce dojdeme ke kvadratické rovnici:

$4(y^2 - 2) + 8y + 3 = 0$

$4y^2 + 8y - 5 = 0$

Došli jsme ke kvadratické rovnici. Nalezneme její řešení.

$D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot (-5) = 144$

$y_{1,2} = \dfrac{-8 \pm 12}{8}$

$y_1 = \dfrac{1}{2}$

$y_2 = -\dfrac{5}{2}$

Vrátíme se k substituci $y = x + \dfrac{1}{x}$, kam za y postupně dosadíme $y_1 = \dfrac{1}{2}$ a $y_2 = -\dfrac{5}{2}$, čímž vzniknou dvě kvadratické rovnice s neznámou x. Kořeny těchto kvadratických rovnic jsou zároveň kořeny původní reciproké rovnice.

Nejdříve za y dosadíme $y_1 = \dfrac{1}{2}$.

$y_1 = x + \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{1}{2} = x + \dfrac{1}{x}$

$x = 2x^2 + 2$

$2x^2 - x + 2 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -15$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{15}}{4} = \dfrac{1}{4} \pm \dfrac{\sqrt{15}}{4} i$

Nyní za y dosadíme $y_2 = -\dfrac{5}{2}$.

$y_2 = x + \dfrac{1}{x}$

$-\dfrac{5}{2} = x + \dfrac{1}{x}$

$-5x = 2x^2 + 2$

$2x^2 + 5x + 2 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$

$x_{3,4} = \dfrac{-5 \pm 3}{4}$

$x_3 = -\dfrac{1}{2}$

$x_4 = -2$

Množina všech kořenů původní reciproké rovnice je tedy

$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}i; \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}i; -\frac{1}{2}; -2}\right\}.$

Příklad

Najděte řešení rovnice $4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Jedná se o reciprokou rovnici prvního druhu lichého stupně, jedním z kořenů je tedy $x_1 = -1$. Dále rovnici můžeme vydělit výrazem $(x + 1)$.

$$4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0 \qquad \Big| : (x+1)$$

$4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4 = 0$

Došli jsme k rovnici stupně $n = 4$. Tuto rovnici jsme již řešili v předchozím příkladu.

Množina všech kořenů původní reciproké rovnice je tedy

$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{-1; \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}i; \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}i; -\frac{1}{2}; -2}\right\}.$

Postup řešení reciproké rovnice 1. druhu:

Mějme reciprokou rovnici 1. druhu n-tého stupně.

- *Pokud se jedná o rovnici lichého stupně, jedním z kořenů je číslo -1. Rovnici dělíme výrazem $x+1$, čímž vznikne reciproká rovnice 1. druhu sudého stupně $n-1$.*
- *Pokud se jedná o rovnici sudého stupně, můžeme rovnici vydělit výrazem $x^{\frac{n}{2}}$ a dále použít substituci $y = x + \dfrac{1}{x}$. Vznikne rovnice stupně $\dfrac{n}{2}$. Tu dále řešíme dostupnými metodami.*

Řešení reciprokých rovnic 2. druhu

Při řešení reciprokých rovnic 2. druhu využijeme jejich výše uvedené vlastnosti:

- reciproké rovnice 2. druhu mají kořen 1

- vydělením reciproké rovnice 2. druhu výrazem $(x - 1)$ vznikne reciproká rovnice 1. druhu

Příklad

Najděte řešení rovnice $2x^4 + (-3 + i)x^3 - (-3 + i)x - 2 = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Jedná se o reciprokou rovnici 2. druhu, jedním z kořenů je tedy $x_1 = 1$. Dále rovnici můžeme vydělit výrazem $(x - 1)$.

$$2x^4 + (-3 + i)x^3 - (-3 + i)x - 2 = 0 \qquad \Big| : (x - 1)$$

$$2x^3 + (-1 + i)x^2 + (-1 + i)x + 2 = 0$$

Došli jsme k reciproké rovnici 1. druhu lichého stupně, jedním z jejích kořenů je tedy $x_2 = -1$. Rovnici můžeme dále vydělit výrazem $(x + 1)$.

$$2x^3 + (-1 + i)x^2 + (-1 + i)x + 2 = 0 \qquad \Big| : (x + 1)$$

$$2x^2 + (-3 + i)x + 2 = 0$$

Došli jsme ke kvadratické rovnici s komplexními koeficienty, nyní najdeme její kořeny.

Rovnici vynásobíme číslem $4a = 8$ a první dva výrazy na levé straně doplníme na čtverec.

$$16x^2 + 8(-3 + i)x + 16 = 0$$

$$(4x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3 + i) + 16 = 0$$

$$(4x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3 + i) + (-3 + i)^2 - (-3 + i)^2 + 16 = 0$$

$$(4x - 3 + i)^2 - (-3 + i)^2 + 16 = 0$$

$$(4x - 3 + i)^2 = -8 - 6i$$

Po použití substituce $y = 4x - 3 + i$ získáme ryze kvadratickou rovnici s neznámou y. Vypočítáme její kořeny y_1 a y_2.

$$y^2 = -8 - 6i$$

$$y_1 = -1 + 3i$$

$$y_2 = 1 - 3i$$

Zpětnou substitucí $x = \dfrac{y + 3 - i}{4}$ vypočítáme kořeny kvadratické rovnice s neznámou x. Tyto kořeny jsou zároveň kořeny původní reciproké rovnice.

$$x_3 = \frac{-1 + 3i + 3 - i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$x_4 = \frac{1-3i+3-i}{4} = 1-i$$

Množina řešení původní reciproké rovnice je tedy

$$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{1}; -\mathbf{1}; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; \mathbf{1}-\mathbf{i}\right\}.$$

Postup řešení reciproké rovnice 2. druhu:

Mějme reciprokou rovnici 2. druhu n-tého stupně.

- *Jedním z kořenů rovnice je číslo* 1.
- *Rovnici dělíme výrazem $x-1$, čímž vznikne reciproká rovnice 1. druhu stupně $n-1$. Tuto rovnici dále řešíme způsobem uvedeným výše.*

Úlohy

1. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$:
   - $2x^4 - 3\sqrt{2}x^3 + 4x^2 - 3\sqrt{2}x + 2 = 0$

     Jedná se o reciprokou rovnici 1. druhu sudého stupně $n = 4$, kořenem tedy není číslo 1 ani -1. Rovnici dělíme výrazem $x^{\frac{n}{2}} = x^2$.

     $$2x^4 - 3\sqrt{2}x^3 + 4x^2 - 3\sqrt{2}x + 2 = 0 \quad \Big| : x^2$$

     $$2x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 - 3\sqrt{2}\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2} = 0$$

     $$2x^2 + 2\frac{1}{x^2} - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}\frac{1}{x} + 4 = 0$$

     $$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

     Použijeme substituci:

     $$y = x + \frac{1}{x}$$

     A určíme také y^2.

     $$y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

     S využitím této substituce dojdeme ke kvadratické rovnici:

     $$2\left(y^2 - 2\right) - 3\sqrt{2}y + 4 = 0$$

     $$2y^2 - 3\sqrt{2}y = 0$$

     Najdeme řešení kvadratické rovnice.

     $$y_1 = 0$$

$y_2 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Vrátíme se k substituci $y = x + \dfrac{1}{x}$, kam za y postupně dosadíme $y_1 = 0$ a $y_2 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, čímž vzniknou dvě kvadratické rovnice s neznámou x. Kořeny těchto kvadratických rovnic jsou zároveň kořeny původní reciproké rovnice.

Nejdříve za y dosadíme $y_1 = 0$.

$y_1 = x + \dfrac{1}{x}$

$0 = x + \dfrac{1}{x} \quad \Big| \cdot x$

$0 = x^2 + 1$

$0 = (x - i)(x + i)$

$x_1 = i$

$x_2 = -i$

Dále za y dosadíme $y_2 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ a získáme další dva kořeny původní reciproké rovnice.

$y_2 = x + \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{3\sqrt{2}}{2} = x + \dfrac{1}{x} \quad \Big| \cdot 2x$

$3\sqrt{2}x = 2x^2 + 2$

$2x^2 - 3\sqrt{2}x + 2 = 0$

$x_3 = \sqrt{2}$

$x_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Množina všech kořenů původní reciproké rovnice je tedy

$\mathbf{K} = \left\{ \mathbf{i}; -\mathbf{i}; \sqrt{\mathbf{2}}; \dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \right\}.$

- $3x^5 + 16x^4 + 29x^3 + 29x^2 + 16x + 3 = 0$

  Jedná se o reciprokou rovnici 1. druhu lichého stupně $n = 5$, jedním z kořenů je tedy $x_1 = -1$. Dále rovnici vydělíme výrazem $(x + 1)$.

  $3x^5 + 16x^4 + 29x^3 + 29x^2 + 16x + 3 = 0 \quad \Big| : (x + 1)$

$3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = 0$

Získali jsme reciprokou rovnici 1. druhu sudého stupně $n = 4$. Rovnici dále vydělíme výrazem $x^{\frac{n}{2}} = x^2$.

$$3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = 0 \qquad \Big| : x^2$$

$$3x^2 + 13x + 16 + 13\frac{1}{x} + 3\frac{1}{x^2} = 0$$

$$3x^2 + 3\frac{1}{x^2} + 13x + 13\frac{1}{x} + 16 = 0$$

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16 = 0$$

Použijeme substituci:

$$y = x + \frac{1}{x}$$

$$y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

S využitím této substituce dojdeme ke kvadratické rovnici:

$$3\left(y^2 - 2\right) + 13y + 16 = 0$$

$$3y^2 + 13y + 10 = 0$$

Najdeme řešení kvadratické rovnice.

$$y_1 = -1$$

$$y_2 = -\frac{10}{3}$$

Vrátíme se k substituci $y = x + \frac{1}{x}$, kam za y postupně dosadíme $y_1 = -1$ a $y_2 = -\frac{10}{3}$, čímž vzniknou dvě kvadratické rovnice s neznámou x. Kořeny těchto kvadratických rovnic jsou zároveň kořeny původní reciproké rovnice.

Nejdříve za y dosadíme $y_1 = -1$.

$$y_1 = x + \frac{1}{x}$$

$$-1 = x + \frac{1}{x}$$

$$-x = x^2 + 1$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Dále za y dosadíme $y_2 = -\frac{10}{3}$ a získáme další dva kořeny původní reciproké rovnice.

$y_2 = x + \frac{1}{x}$

$-\frac{10}{3} = x + \frac{1}{x}$

$-10x = 3x^2 + 3$

$3x^2 + 10x + 3 = 0$

$x_4 = -\frac{1}{3}$

$x_5 = -3$

Množina všech kořenů původní reciproké rovnice je tedy

$\mathbf{K} = \left\{ \mathbf{-1}; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}; \mathbf{-3} \right\}.$

- $4x^5 + (6-6i)x^4 - (2+9i)x^3 + (2+9i)x^2 - (6-6i)x - 4 = 0$

  Jedná se o reciprokou rovnici 2. druhu lichého stupně $n = 5$, jedním z kořenů je tedy $x_1 = 1$. Dále rovnici vydělíme výrazem $(x - 1)$.

  $$4x^5+(6-6i)x^4-(2+9i)x^3+(2+9i)x^2-(6-6i)x-4 = 0 \quad \Big| : (x-1)$$

  $$4x^4 + (10-6i)x^3 + (8-15i)x^2 + (10-6i)x + 4 = 0$$

  Získali jsme reciprokou rovnici 1. druhu sudého stupně $n = 4$. Rovnici dále vydělíme výrazem $x^{\frac{n}{2}} = x^2$.

  $$4x^4 + (10-6i)x^3 + (8-15i)x^2 + (10-6i)x + 4 = 0 \quad \Big| : x^2$$

  $$4x^2 + (10-6i)x + (8-15i) + (10-6i)\frac{1}{x} + 4\frac{1}{x^2} = 0$$

  $$4x^2 + 4\frac{1}{x^2} + (10-6i)x + (10-6i)\frac{1}{x} + (8-15i) = 0$$

  $$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + (10-6i)\left(x + \frac{1}{x}\right) + (8-15i) = 0$$

  Použijeme substituci:

  $y = x + \frac{1}{x}$

  $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

  S využitím této substituce dojdeme ke kvadratické rovnici:

  $4\left(y^2 - 2\right) + (10-6i)y + (8-15i) = 0$

$4y^2 + (10 - 6i)y - 15i = 0$

Najdeme řešení kvadratické rovnice.

$y_1 = -\frac{5}{2}$

$y_2 = \frac{3}{2}i$

Vrátíme se k substituci $y = x + \frac{1}{x}$, kam za y postupně dosadíme $y_1 = -\frac{5}{2}$ a $y_2 = \frac{3}{2}i$, čímž vzniknou dvě kvadratické rovnice s neznámou x. Kořeny těchto kvadratických rovnic jsou zároveň kořeny původní reciproké rovnice.

Nejdříve za y dosadíme $y_1 = -\frac{5}{2}$.

$y_1 = x + \frac{1}{x}$

$-\frac{5}{2} = x + \frac{1}{x}$

$-5x = 2x^2 + 2$

$2x^2 + 5x + 2 = 0$

$x_2 = -\frac{1}{2}$

$x_3 = -2$

Dále za y dosadíme $y_2 = \frac{3}{2}i$ a získáme další dva kořeny původní reciproké rovnice.

$y_2 = x + \frac{1}{x}$

$\frac{3}{2}i = x + \frac{1}{x}$

$3ix = 2x^2 + 2$

$2x^2 - 3ix + 2 = 0$

$x_4 = 2i$

$x_5 = -\frac{1}{2}i$

Množina všech kořenů původní reciproké rovnice je tedy

$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{1}; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \mathbf{-2}; \mathbf{2i}; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}\right\}.$

- $x^6 - \left(1 + \frac{3}{2}i\right)x^4 + \left(1 + \frac{3}{2}i\right)x^2 - 1 = 0$

Jedná se o reciprokou rovnici 2. druhu sudého stupně $n = 6$, jedním z kořenů je tedy $x_1 = 1$. Dále rovnici vydělíme výrazem $(x - 1)$.

$$x^6 - \left(1 + \frac{3}{2}i\right) x^4 + \left(1 + \frac{3}{2}i\right) x^2 - 1 = 0 \qquad \Big| : (x-1)$$

$$x^5 + x^4 - \frac{3}{2}ix^3 - \frac{3}{2}ix^2 + x + 1 = 0$$

Získali jsme reciprokou rovnici 1. druhu lichého stupně $n = 5$, jedním z kořenů je tedy $x_2 = -1$. Dále rovnici vydělíme výrazem $(x + 1)$.

$$x^5 + x^4 - \frac{3}{2}ix^3 - \frac{3}{2}ix^2 + x + 1 = 0 \qquad \Big| : (x+1)$$

$$x^4 - \frac{3}{2}ix^2 + 1 = 0$$

Došli jsme k trinomické rovnici stupně $n = 4$. Můžeme použít substituci $y = x^2$.

$$y^2 - \frac{3}{2}iy + 1 = 0$$

Najdeme řešení kvadratické rovnice.

$$y_1 = -\frac{1}{2}i$$

$$y_2 = 2i$$

Zpětnou substitucí dojdeme ke kořenům původní rovnice.

Nejdříve za y dosadíme $y_1 = -\frac{1}{2}i$.

$$y_1 = x^2$$

$$-\frac{1}{2}i = x^2$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Dále za y dosadíme $y_2 = 2i$ a dojdeme ke zbylým dvěma kořenům původní reciproké rovnice.

$$y_2 = x^2$$

$$2i = x^2$$

$$x_5 = 1 + i$$

$$x_6 = -1 - i$$

Množina všech kořenů původní reciproké rovnice je tedy

$$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{1}; \mathbf{-1}; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}; \mathbf{1} + \mathbf{i}; \mathbf{-1} - \mathbf{i}\right\}.$$

2. Reciproká rovnice má kořeny $10\sqrt{2}$ a $1+2i$. Jaké další kořeny rovnice určitě má?

   Pokud je x_1 kořenem reciproké rovnice, je také $\dfrac{1}{x_1}$ kořenem téže rovnice. Dalšími kořeny rovnice tedy jsou:

   $$\frac{1}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{20}$$

   $$\frac{1}{1+2i} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

6.7 Kubické rovnice s reálnými koeficienty

V této kapitole si přiblížíme postup řešení kubických rovnic (neboli algebraických rovnic třetího stupně) s reálnými koeficienty.

Poznámka. V této kapitole budeme dolními indexy číslovat kořeny rovnice a pomocné substituce (nikoliv reálnou a imaginární část komplexního čísla).

Nejdříve se podíváme na řešení kubické rovnice tvaru $x^3 + px + q = 0,\ p, q \in \mathbb{R}$ s neznámou $x \in \mathbb{C}$ a následně si ukážeme, jak k tomuto tvaru rovnice dojít z obecného tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

Kubické rovnice bez kvadratického členu

Mějme kubickou rovnici $x^3 + px + q = 0,\ p, q \in \mathbb{R}$ s neznámou $x \in \mathbb{C}$. Pokud $p = 0$, jedná se o binomickou rovnici, kterou již umíme řešit. Předpokládejme, že $p \neq 0$.

Použijeme substituci $x = u + v$, kde $u, v \in \mathbb{C}$, a rovnici poté upravíme.

$$x^3 + px + q = 0$$

$$\begin{aligned}(u + v)^3 + p(u + v) + q &= 0\\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q &= 0\\ u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q &= 0\\ u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q &= 0\end{aligned}$$

Máme zde dvě komplexní čísla u, v a pro ně jednu podmínku $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$. Této podmínce odpovídá nekonečně mnoho dvojic u, v. Můžeme tedy přidat druhou podmínku:

$$3uv = -p$$

Pak platí $3uv + p = 0$. První podmínku $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$ tedy zjednodušíme na tvar:

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

Druhou podmínku $3uv = -p$ můžeme úpravou a umocněním na třetí převést na tvar:

$$\begin{aligned}u^3v^3 &= -\frac{p^3}{27}\\ v^3 &= -\frac{p^3}{27u^3}\end{aligned}$$

Za komplexní číslo v^3 dosadíme $-\dfrac{p^3}{27u^3}$ do podmínky $u^3 + v^3 + q = 0$.

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0 \qquad \Big| \cdot u^3$$

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Vznikla nám trinomická rovnice s neznámou $u \in \mathbb{C}$. Použijeme substituci $k = u^3$, a tím získáme kvadratickou rovnici s neznámou $k \in \mathbb{C}$.

$$k^2 + qk - \frac{p^3}{27} = 0$$

Pokud bychom do podmínky $u^3+v^3+q = 0$ dosazovali $-\dfrac{p^3}{27v^3}$ za u^3, došli bychom po substituci k téže kvadratické rovnici.

Diskriminant této kvadratické rovnice je $D = q^2 + 4 \cdot \dfrac{p^3}{27} = \dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}$.

Pokud platí $D \geq 0$, pak jsou kořeny kvadratické rovnice

$$k_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{\dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{2^2 \cdot 27}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Pokud platí $D < 0$, pak jsou kořeny kvadratické rovnice

$$k_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}.$$

Kořeny kvadratické rovnice k_1 a k_2 jsou hledané hodnoty u^3 a v^3.

Čísla u a v jsou třetími odmocninami těchto čísel. Kořeny původní kubické rovnice vypočítáme ze vztahu $x = u + v$, přičemž musí platit $3uv = -p$. Stačí nám tedy vypočítat třetí odmocniny z komplexního čísla u^3 a pro každou z nich vypočítat v ze vztahu $v = -\dfrac{p}{3u}$.

Příklad

Najděte řešení kubické rovnice $x^3 - 6x + 4 = 0$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Použijeme substituci $x = u + v$, kde $u, v \in \mathbb{C}$.

$(u + v)^3 - 6(u + v) + 4 = 0$

$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 6(u + v) + 4 = 0$

$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) - 6(u + v) + 4 = 0$

$u^3 + v^3 + (3uv - 6)(u + v) + 4 = 0$

Pro dvojici u, v přidáme druhou podmínku $3uv = 6$. Pak platí:

$u^3 + v^3 + 4 = 0$

Z rovnosti $3uv = 6$ vyjádříme neznámou v a umocníme ji na třetí.

$$v = \frac{6}{3u}$$

$$v = \frac{2}{u}$$

$$v^3 = \frac{8}{u^3}$$

Výraz na pravé straně rovnosti dosadíme do rovnice $u^3 + v^3 + 4 = 0$.

$$u^3 + \frac{8}{u^3} + 4 = 0 \qquad \Big| \cdot u^3$$

$$u^6 + 4u^3 + 8 = 0$$

Vznikla nám trinomická rovnice s neznámou $u \in \mathbb{C}$. Použijeme substituci $k = u^3$, a tím získáme kvadratickou rovnici s neznámou $k \in \mathbb{C}$.

$$k^2 + 4k + 8 = 0$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je $D = 4^2 - 4 \cdot 8 = -16$.

Kořeny kvadratické rovnice jsou tedy:

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{16}}{2} = -2 \pm 2i$$

Zvolme $u^3 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.

Pak $u_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + i$. Další hodnoty u získáme tak, že vynásobíme u_1 třetí odmocninou z jedné.

$$u_2 = (1 + i) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i$$

$$u_3 = (1 + i) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i$$

K jednotlivým hodnotám u vypočítáme příslušné hodnoty $v = \frac{2}{u}$.

$$v_1 = \frac{2}{u_1} = 1 - i$$

$$v_2 = \frac{2}{u_2} = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i$$

$$v_3 = \frac{2}{u_3} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i$$

Nyní vypočítáme kořeny kubické rovnice ze vztahu $x = u + v$.

$$x_1 = u_1 + v_1 = 1 + i + 1 - i = 2$$

$$x_2 = u_2 + v_2 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i + \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}i\right) =$$

$$= -2\frac{\sqrt{3}+1}{2} = -\sqrt{3}-1$$

$$x_3 = u_3 + v_3 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i + \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i = 2\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{3}-1$$

Množina kořenů původní kubické rovnice je tedy

$\mathbf{K} = \left\{-\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}; \mathbf{2}; \sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}\right\}$.

Obecné kubické rovnice

Rovnici tvaru $\tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x + \tilde{d} = 0,\ \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \in \mathbb{R},\ \tilde{a} \neq 0$, převedeme snadno na normovaný tvar $x^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ b, c, d \in \mathbb{R}$, vydělením koeficientem $\tilde{a}$.

Nyní mějme normovanou kubickou rovnici tvaru

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Použijeme substituci $x = y - \dfrac{b}{3}$.

$$\left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d = 0$$

$$y^3 - by^2 + \frac{b^2}{3}y - \frac{b^3}{27} + by^2 - \frac{2b^2}{3}y + \frac{b^3}{9} + cy - \frac{bc}{3} + d = 0$$

$$y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)y + d - \frac{bc}{3} + \frac{b^3}{9} - \frac{b^3}{27} = 0$$

$$y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)y + \frac{2b^3 - 9bc + 27d}{27} = 0$$

Došli jsme ke kubické rovnici tvaru $y^3 + py + q = 0$, kde $p = c - \dfrac{b^2}{3}$ a $q = \dfrac{2b^3 - 9bc + 27d}{27}$.

Příklad

Najděte řešení kubické rovnice $3x^3 + 9x^2 - 9x - 3 = 0$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Rovnici vydělíme číslem $a = 3$.

$x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$

Použijeme substituci $x = y - \dfrac{b}{3} = y - 1$.

$$(y-1)^3 + 3(y-1)^2 - 3(y-1) - 1 = 0$$

$$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 3y^2 - 6y + 3 - 3y + 3 - 1 = 0$$
$$y^3 - 6y + 4 = 0$$

Došli jsme ke kubické rovnici tvaru $y^3 + py + q = 0$, kde $p = -6$ a $q = 4$.

Tuto rovnici jsme již řešili v předchozím příkladu, její kořeny jsou:

$y_1 = 2$

$y_2 = -\sqrt{3} - 1$

$y_3 = \sqrt{3} - 1$

S využitím původní substituce $x = y - 1$ dojdeme ke kořenům původní kubické rovnice $3x^3 + 9x^2 - 9x - 3 = 0$.

$x_1 = y_1 - 1 = 2 - 1 = 1$

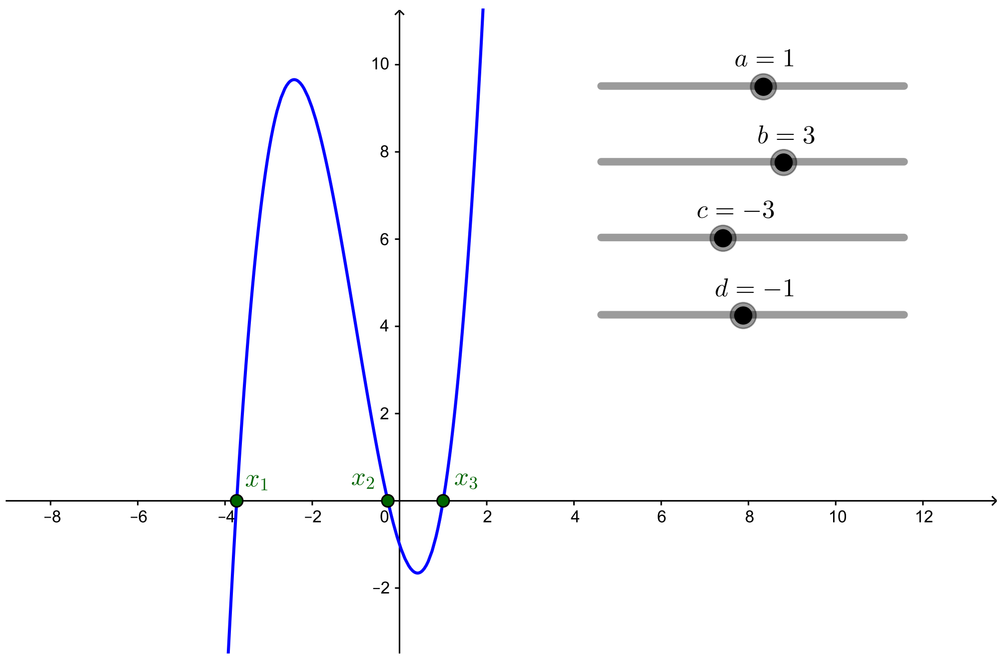
$x_2 = y_2 - 1 = -\sqrt{3} - 1 - 1 = -\sqrt{3} - 2$

$x_3 = y_3 - 1 = \sqrt{3} - 1 - 1 = \sqrt{3} - 2$

Množina kořenů původní kubické rovnice je tedy

$\mathbf{K} = \left\{-\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{2}; \mathbf{1}; \sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{2}\right\}$.

Na následujícím appletu (obr. 6.4) můžeme upravovat reálné koeficienty kubické rovnice pomocí posuvníků a sledovat, jak ovlivňují reálné kořeny rovnice.



Obrázek 6.4: Řešení kubické rovnice

Příklad

Najděte řešení kubické rovnice $x^3 - 9x + 28 = 0$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Řešení

Použijeme substituci $x = u + v$, kde $u, v \in \mathbb{C}$.

$(u+v)^3 - 9(u+v) + 28 = 0$

$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 9(u+v) + 28 = 0$

$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 9(u+v) + 28 = 0$

$u^3 + v^3 + (3uv - 9)(u+v) + 28 = 0$

Pro dvojici u, v přidáme druhou podmínku $3uv = 9$. Pak platí:

$u^3 + v^3 + 28 = 0$

Z rovnosti $3uv = 9$ vyjádříme neznámou v a umocníme ji na třetí.

$v = \dfrac{9}{3u}$

$v = \dfrac{3}{u}$

$v^3 = \dfrac{27}{u^3}$

Výraz na pravé straně rovnosti dosadíme do rovnice $u^3 + v^3 + 28 = 0$.

$$u^3 + \frac{27}{u^3} + 28 = 0 \qquad \Big| \cdot u^3$$

$u^6 + 28u^3 + 27 = 0$

Vznikla nám trinomická rovnice s neznámou $u \in \mathbb{C}$. Použijeme substituci $k = u^3$, a tím získáme kvadratickou rovnici s neznámou $k \in \mathbb{C}$.

$k^2 + 28k + 27 = 0$

Diskriminant této kvadratické rovnice je $D = 28^2 - 4 \cdot 27 = 676$.

Kořeny kvadratické rovnice jsou tedy:

$$k_{1,2} = \frac{-28 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{-28 \pm 26}{2} = -14 \pm 13$$

$k_1 = -1$

$k_2 = -27$

Zvolme $u^3 = -1$.

Pak $u_1 = -1$. Další hodnoty u získáme tak, že vynásobíme u_1 třetí odmocninou z jedné.

$$u_2 = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$u_3 = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

K jednotlivým hodnotám u vypočítáme příslušné hodnoty $v = \frac{3}{u}$.

$v_1 = \frac{3}{u_1} = -3$

$v_2 = \frac{3}{u_2} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$v_3 = \frac{3}{u_3} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

Nyní vypočítáme kořeny kubické rovnice ze vztahu $x = u + v$.

$x_1 = u_1 + v_1 = -1 - 3 = -4$

$x_2 = u_2 + v_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = 2 + \sqrt{3}i$

$x_3 = u_3 + v_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i = 2 - \sqrt{3}i$

Množina kořenů původní kubické rovnice je tedy

$\mathbf{K} = \left\{\mathbf{-4; 2 + \sqrt{3}i; 2 - \sqrt{3}i}\right\}$.

Úlohy

1. Najděte řešení kubické rovnice $2x^3 + 6x^2 + 3x - 2 = 0$ s neznámou $x \in \mathbb{C}$.

   Rovnici vydělíme číslem $a = 2$, čímž rovnici převedeme na normovaný tvar.

   $x^3 + 3x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$

   Použijeme substituci $x = y - \frac{b}{3} = y - 1$, abychom došli ke kubické rovnici bez kvadratického členu.

   $(y-1)^3 + 3(y-1)^2 + \frac{3}{2}(y-1) - 1 = 0$

   $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 3y^2 - 6y + 3 + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} - 1 = 0$

   $y^3 - \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} = 0$

   Došli jsme ke kubické rovnici tvaru $y^3 + py + q = 0$, kde $p = -\frac{3}{2}$ a $q = -\frac{1}{2}$.

   Použijeme substituci $y = u + v$, kde $u, v \in \mathbb{C}$.

   $(u+v)^3 - \frac{3}{2}(u+v) - \frac{1}{2} = 0$

   $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - \frac{3}{2}(u+v) - \frac{1}{2} = 0$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - \frac{3}{2}(u+v) - \frac{1}{2} = 0$$

$$u^3 + v^3 + \left(3uv - \frac{3}{2}\right)(u+v) - \frac{1}{2} = 0$$

Pro dvojici u, v přidáme druhou podmínku $3uv = \frac{3}{2}$. Pak platí:

$$u^3 + v^3 - \frac{1}{2} = 0$$

Z rovnosti $3uv = \frac{3}{2}$ vyjádříme neznámou v a umocníme ji na třetí.

$$v = \frac{1}{2u}$$

$$v^3 = \frac{1}{8u^3}$$

Výraz na pravé straně rovnosti dosadíme do rovnice $u^3 + v^3 - \frac{1}{2} = 0$ a rovnici upravíme.

$$u^3 + \frac{1}{8u^3} - \frac{1}{2} = 0 \qquad \Big| \cdot 8u^3$$

$$8u^6 - 4u^3 + 1 = 0$$

Vznikla nám trinomická rovnice s neznámou $u \in \mathbb{C}$. Použijeme substituci $k = u^3$, a tím získáme kvadratickou rovnici s neznámou $k \in \mathbb{C}$.

$$8k^2 - 4k + 1 = 0$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je $D = (-4)^2 - 4 \cdot 8 = -16$.

Kořeny kvadratické rovnice jsou tedy:

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm i\sqrt{16}}{16} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}i$$

Zvolme $u^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Neznámá u tedy nabývá hodnot

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{4}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi + 8k\pi}{12} + i\sin\frac{\pi + 8k\pi}{12}\right),\ k \in \{0, 1, 2\}.$$

Pro $k = 1$ jsme schopni komplexní číslo převést na algebraický tvar, zvolíme ho tedy za u_1.

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Další hodnoty u získáme tak, že vynásobíme u_1 třetí odmocninou z jedné.

$$u_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{4}i$$

$$u_3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$$

K jednotlivým hodnotám u vypočítáme příslušné hodnoty $v = \frac{1}{2u}$.

$$v_1 = \frac{1}{2u_1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$v_2 = \frac{1}{2u_2} = -\frac{\sqrt{3}-1}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4}i$$

$$v_3 = \frac{1}{2u_3} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$$

Nyní vypočítáme kořeny kubické rovnice $y^3 - \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} = 0$ ze vztahu $y = u + v$.

$$y_1 = u_1 + v_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -1$$

$$y_2 = u_2 + v_2 = -\frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{4}i - \frac{\sqrt{3}-1}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4}i = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$y_3 = u_3 + v_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i + \frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}i = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

S využitím původní substituce $x = y - 1$ dojdeme ke kořenům původní kubické rovnice.

$$x_1 = y_1 - 1 = -1 - 1 = -2$$

$$x_2 = y_2 - 1 = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - 1 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$x_3 = y_3 - 1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Množina kořenů původní kubické rovnice je tedy

$$\mathbf{K} = \left\{-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; -\mathbf{2}; \frac{\sqrt{\mathbf{3}}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right\}.$$

7. Souhrnný test

První souhrnný test obsahuje sedm úloh, které se náhodně generují z databáze čítající celkem 39 úloh. Otázky jsou zaměřeny na základní poznatky o komplexních číslech (absolutní hodnota, různé tvary komplexních čísel, převody mezi tvary, operace s komplexními čísly a odmocnina).

Následuje jedna možná podoba testu.

Úloha 1

Počet bodů za otázku: 1

Otázka

Seřaďte následující komplexní čísla podle jejich absolutní hodnoty **od nejmenší po největší**.

Možnosti

$\sqrt{2} + 5i$

$\sqrt{5} + 2i$

$5i$

$2 - 4i$

Poznámka

Seřadte možnosti uchopením a tažením myši.

Úloha 2

Počet bodů za otázku: 1

Otázka

Z následujících součinů vyberte ty, jejichž výsledkem je komplexní číslo $z = 16\sqrt{3} - 7i$.

Možnosti

- [ ] $(4 + 3\sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{3} - 4i)$
- [ ] $(4 - 3\sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{3} - 4i)$
- [ ] $i \cdot (-7 - 16\sqrt{3}i)$
- [ ] $i \cdot (-7 + 16\sqrt{3}i)$
- [ ] $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (48 - 7\sqrt{3}i)$

Úloha 3

Počet bodů za otázku: 1

Otázka

Vypočítejte mocninu x^3, kde $x = 4\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$.

Možnosti

- ○ $64\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
- ○ $64\left(\cos\frac{24\pi}{27} + i\sin\frac{24\pi}{27}\right)$
- ○ $64\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
- ○ $64\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

Úloha 4

Počet bodů za otázku: 1

Otázka

Vypočítejte součin $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, kde $\boldsymbol{x} = \sqrt{2}e^{i\,\frac{7\pi}{4}}$ a $\boldsymbol{y} = \frac{\sqrt{6}}{2}\, e^{i\,\frac{5\pi}{12}}$.

Možnosti

- ○ $\sqrt{3}e^{i\,\frac{\pi}{3}}$
- ○ $2\sqrt{3}e^{i\,\frac{\pi}{3}}$
- ○ $2\sqrt{3}e^{i\,\frac{\pi}{6}}$
- ○ $\sqrt{3}e^{i\,\frac{\pi}{6}}$

Úloha 5

Počet bodů za otázku: 1

Otázka

Vyberte všechna komplexní čísla, která jsou rovna komplexnímu číslu $z = 2\pi\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Možnosti

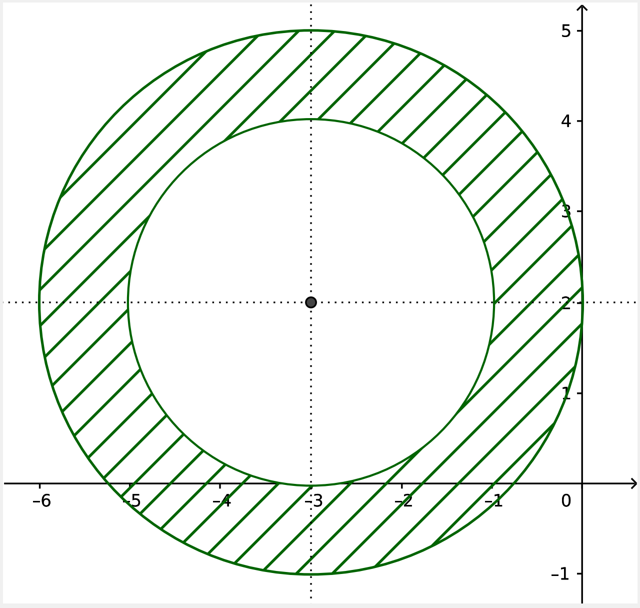
- ☐ $2\pi e^{i\,\frac{2\pi}{3}}$
- ☐ $-\pi + \sqrt{3}\pi i$
- ☐ $8\pi\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right)$
- ☐ $2\pi\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right)$
- ☐ $2\pi e^{i\,\frac{5\pi}{3}}$

Úloha 6

Počet bodů za otázku: 1

Otázka

Z následujících podmínek vyberte tu, které odpovídá zeleně vyznačená množina bodů v komplexní rovině:



Možnosti

- $2 \leq |z - 3 + 2i| \leq 3$
- $2 \leq |z + 3 - 2i| \leq 3$
- $4 \leq |z - 3 + 2i| \leq 9$
- $4 \leq |z + 3 - 2i| \leq 9$

Úloha 7

Počet bodů za otázku: 1

Otázka

Vyberte komplexní čísla, která jsou třetími odmocninami z komplexního čísla $z = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$.

Možnosti

- $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
- $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
- $2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$
- $2\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$

Souhrnný test zahrnuje otevřené i uzavřené úlohy. Mezi uzavřené úlohy patří otázky s právě jednou správnou odpovědí (zde Úloha 3, Úloha 4 a Úloha 6), otázky s více správnými odpověďmi (Úloha 2, Úloha 5 a Úloha 7), seřazovací úlohy (Úloha 1) a přiřazovací úlohy.

8. Souhrnný test z rovnic

Druhý souhrnný test obsahuje šest úloh, které se náhodně generují z databáze čítající celkem 30 úloh. Otázky jsou zaměřeny na řešení rovnic.

Následuje jedna možná podoba testu.

Úloha 1

Počet bodů za otázku: 1

Otázka

Najděte řešení rovnice $\frac{4-i}{6}x + 2 + i = \frac{x}{2i}$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Odpověď

Poznámka

Do pole odpovědi můžete psát i jednoduché aritmetické výrazy. Můžete používat sčítání (+), odčítání (-), násobení (*), dělení (/) a kulaté závorky.

Úloha 2

Počet bodů za otázku: 1

Otázka

Uveďte, jako reálnou část mají řešení rovnice $x + 1 = \frac{2x - 11}{x - 3}$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Odpověď

Poznámka

Do pole odpovědi můžete psát i jednoduché aritmetické výrazy. Můžete používat sčítání (+), odčítání (-), násobení (*), dělení (/) a kulaté závorky.

Úloha 3

Počet bodů za otázku: 1

Otázka

Vyberte komplexní čísla, která jsou kořenem rovnice $x^2 + (-5 - 4i)x + (1 + 13i) = 0$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Možnosti

- ☐ $4 - i$
- ☐ $4 + i$
- ☐ $1 + 3i$
- ☐ $-1 - 3i$

Úloha 4

Počet bodů za otázku: 1

Otázka

Vyberte množinu všech kořenů rovnice $2x^3 - 54 = 0$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Možnosti

- ○ $$\left\{-3; \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i; \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i\right\}$$
- ○ $$\left\{-3; \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,i; \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,i\right\}$$
- ○ $$\left\{3; -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i; -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i\right\}$$
- ○ $$\left\{3; -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,i; -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,i\right\}$$

Úloha 5

Počet bodů za otázku: 1

Otázka

Vyberte komplexní čísla, která jsou kořenem rovnice $x^8 + 8x^4 + 32 = 0$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Možnosti

- ☐ $$\sqrt{2}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{16} + i\sin\frac{19\pi}{16}\right)$$
- ☐ $$\sqrt{2}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\right)$$
- ☐ $$\sqrt{2}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16} + i\sin\frac{23\pi}{16}\right)$$
- ☐ $$\sqrt{2}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$$
- ☐ $$\sqrt{2}\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{27\pi}{16} + i\sin\frac{27\pi}{16}\right)$$

Úloha 6

Počet bodů za otázku: 1

Otázka

Vyberte komplexní čísla, která jsou kořenem rovnice
$4x^5 - 2ix^4 - (11+3i)x^3 + (11+3i)x^2 + 2ix - 4 = 0$, kde $x \in \mathbb{C}$.

Možnosti

- ☐ -1
- ☐ 1
- ☐ $1-i$
- ☐ $1+i$
- ☐ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
- ☐ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Souhrnný test zahrnuje otevřené (zde Úloha 1 a Úloha 2) i uzavřené úlohy. Mezi uzavřené úlohy patří otázky s právě jednou správnou odpovědí (Úloha 4) a otázky s více správnými odpověďmi (Úloha 3, Úloha 5 a Úloha 6).

Závěr

Cílem práce bylo vytvořit webové stránky pro výuku algebraických rovnic v oboru komplexních čísel a zpřístupnit tak volně dostupný výukový materiál žákům i učitelům středních škol. Stránky budou po obhajobě umístěny na Portál středoškolské matematiky vytvářený Katedrou didaktiky matematiky MFF UK, kde budou veřejně dostupné.

Tato práce navazuje na bakalářskou práci, která zahrnovala zavedení komplexních čísel včetně jejich různých tvarů, převody mezi těmito tvary, operace s komplexními čísly a množiny bodů daných vlastností v komplexní rovině.

Diplomová práce rozšiřuje bakalářskou práci o zavedení odmocniny z komplexního čísla v algebraickém, goniometrickém a exponenciálním tvaru a o řešení rovnic v oboru komplexních čísel. Práce zahrnuje rovnice lineární, kvadratické, kubické, binomické, trinomické a reciproké. K jednotlivým kapitolám jsou přiřazeny úlohy na procvičení, které jsou završeny závěrečným souhrnným testem. Diplomová práce tak pokrývá nejen učivo o komplexních číslech vyučované na středních školách, ale výrazně ho rozšiřuje v oblasti řešení rovnic, což může být využito například v matematickém semináři.

Seznam použité literatury

Blažek, J. (1983). *Algebra a teoretická aritmetika I.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha.

Dlab, V. a Bečvář, J. (2016). *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* vydali V. Dlab a J. Bečvář vlastním nákladem, Praha. ISBN 978-80-260-9838-6.

Kořínek, V. (1953). *Základy algebry.* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha.

Polák, J. (2015). *Přehled středoškolské matematiky.* 10. vydání. Prometheus, Praha. ISBN 978-80-7196-458-2.

Robová, J., HÁLA, M. a CALDA, E. (2013). *Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika: matematika pro střední školy.* Prometheus, Praha. ISBN 978-80-7196-425-4.

Schwarz, Š. (1958). *Základy náuky o riešení rovnic.* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha.

Šisler, M. (1966). *O řešení algebraických rovnic.* Mladá fronta, Praha.

Seznam obrázků