Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Úvod do problematiky proměnné ve výuce učitelů využívajících metody výuky založené na budování schémat

Introduction to variables in the teaching of teachers using the method of building schemes in mathematics

Anežka Smutná

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Studijní program: Učitelství pro střední školy
Studijní obor: N M

Praha 2020

Odevzdáním této diplomové práce na téma Úvod do problematiky proměnné ve výuce učitelů využívajících metody výuky založené na budování schémat potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V .... dne ....

Podpis autora

Chtěla bych touto cestou poděkovat učitelům, kteří byli ochotni podílet se na výzkumu. Děkuji též vedoucí mé práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za náměty, podnětné připomínky a rady.

Název práce: Úvod do problematiky proměnné ve výuce učitelů využívajících metody výuky založené na budování schémat

Autor: Anežka Smutná

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D., Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá úvodem do problematiky proměnné. Jejím cílem bylo porovnat různé přístupy k výuce úvodu do proměnné u učitelů, kteří učí metodou založenou na budování schémat (známou jako Hejného metoda). V teoretické části práce je rešerše odborné literatury k tématu úvodu do proměnné a teoretické pozadí metody výuky založené na budování schémat. Část práce se věnuje analýze řady učebnic umožňující výuku touto metodou se zaměřením na úlohy důležité pro propedeutiku proměnné. Samotný výzkum sestával z rozhovorů se čtyřmi učiteli a z náslechů na jimi vyučovaných hodinách v 7. a 8. ročnících základní školy, jejichž tématem byl úvod do „jazyka písmen“. Celkem byly u těchto čtyř učitelů provedeny náslechy patnácti vyučovacích hodin v šesti třídách (v každé třídě 2–3 hodiny). Data byla analyzována kvalitativními metodami. Ačkoliv sledovaní učitelé vyučují stejnou metodou, lze u nich pozorovat odlišnosti v přístupu k zavedení proměnné a ve stylu jejich výuky. V jejich výuce jsem identifikovala rozdíly v organizaci hodiny, ve volbě úloh a jejich stylu zadávání žákům, ve výukových formách i způsobech, jakým učitelé komunikují se žáky. Na momentu vstupu proměnné do žákovského řešení úloh a jejich následné diskusi lze spatřit souvislost jak s poznávacím procesem dle teorie generických modelů, tak s historickým vývojem algebraické symboliky.

Klíčová slova: proměnná, propedeutika, výuka matematiky, Hejného metoda, vyučování matematiky založené na budování schémat, zkoumání výuky matematiky

Title: Introduction to variables in the teaching of teachers using the method of building schemes in mathematics

Author: Anežka Smutná

Department: Department of Mathematics and Mathematical Education

Supervisor: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D., Department of Mathematics and Mathematical Education

Abstract: This thesis deals with an introduction to variables. The aim of the thesis was to compare different approaches to teaching the introduction to variables in teachers who teach a method based on building schemes (known as Hejny method). The theoretical part of the thesis is a search of literature on the topic of introduction to variables and the theoretical background of teaching methods based on building schemes. Further, the thesis analyses textbooks designed for this method with a focus on tasks important for the propaedeutics of the variables. The research itself consisted of interviews with four teachers and observations of the lessons they taught in the 7th and 8th grades of secondary school, the topic of which was an introduction to the „language of letters". In total, there were fifteen lessons taught by these teachers in six classes (2–3 lessons in each class). Data were analyzed by qualitative methods. Although the observed teachers taught using the same method, I identified differences in the approach to the introduction of the variables and in the style of their teaching. There were differences in the organization of the lesson, in the selection of tasks and their style of assignments to pupils, teaching methods and ways in which teachers communicate with pupils. At the moment of entering the variable into the pupil's solution of problems and their subsequent discussion, a connection can be seen both with the cognitive process according to the theory of generic models and with the historical development of algebraic symbolism.

Keywords: variable, propaedeutics, mathematics education, Hejny method, teaching mathematics based on building schemes, research of mathematics teaching

Obsah

Úvod

Proměnná je významným pojmem algebry, se kterým se setkávají žáci od druhého stupně základní školy. Z prvního výskytu proměnné v matematice bývají žáci leckdy zmateni a nevědí, jak ji uchopit, vždyť „písmena přeci patří do češtiny, co najednou dělají v matematice?“ Algebra je spolu s posloupnostmi (zobecňováním) a geometrií označována jako kritické místo matematiky u českých žáků (Rendl a Vondrová, 2014), přičemž proměnná se vyskytuje ve všech těchto oblastech.

Jelikož vnímám proměnnou jako klíčový pojem matematiky a zároveň si jsem vědoma toho, že se nemůže objevit v matematice bez důkladné přípravy žáků na její příchod, rozhodla jsem se na ni zaměřit ve své diplomové práci. Práce se věnuje úvodu do proměnné ve výuce učitelů, kteří vyučují metodou založenou na budování schémat. Cílem práce je zjistit, jakým způsobem tito učitelé úvod do proměnné vyučují.

Metoda výuky založená na budování schémat je v českém prostředí známá jako Hejného metoda a je v souladu s poznávacím procesem žáka dle teorie generických modelů (Hejný, 2004). Vychází z toho, že poznatky vznikají v mysli žáka a tvoří sítě matematických schémat (schéma je v tomto významu souhrn propojených souvisejících znalostí). Hejného metoda stojí na dvanácti klíčových principech, ale jak vypadá výuka, záleží na konkrétních učitelích. To, že učitelé vyučují stejnou metodou, totiž neznamená, že vyučují stejně – jejich přístupy k výuce se mohou lišit. Právě to ve své práci zkoumám na příkladu úvodu do proměnné.

Kromě již zmíněné důležitosti pojmu proměnná je mým dalším motivačním faktorem pro téma práce to, že díky analýze učebnic získám dobrý přehled o propedeutice proměnné. Navíc se dostanu do kontaktu se zkušenými učiteli a budu mít možnost vidět a analyzovat, jak k problematice proměnné přistupují oni, což mi může být inspirací pro budoucí praxi.

Práce čtenáři umožňuje získat přehled o úlohách, které jsou důležité pro propedeutiku proměnné. Inspirativní mohou být i příklady konkrétních situací, na nichž jsou ukázány rozdíly v pojetí výuky proměnné u několika učitelů. Práce se nesnaží učitele a jejich přístupy nijak srovnávat ve smyslu „který z nich je lepší“, ale jejím cílem je získat hlubší vhled do procesů, které probíhají při vyučování.

V teoretické části práce se zaměřuji na vymezení proměnné jako jedné z rolí písmene v matematice, na historii vývoje algebraického zápisu a tzv. genetickou paralelu. Dále popisuji jazyk písmen, jeho tzv. hladiny a jeho síly. Popisuji tři pilíře výuky algebry – geometrii, aritmetiku číselných výrazů a zobecňování. Dále jsou shrnuty výzkumy týkající se algebry coby kritické oblasti matematiky v českém prostředí, které vyplývají z analýzy mezinárodního šetření TIMSS a z rozhovorů s učiteli. Na závěr teoretické části je popsána metoda založená na budování schémat – z jaké teorie vychází a jaké jsou její principy.

Pro uchopení pojmu proměnná je velmi důležitá jeho propedeutika. Na tu se zaměřuji ve druhé části práce, a to konkrétně na základě analýzy řady učebnic, které jsou určeny pro výuku Hejného metodou. Podrobně jsem analyzovala řadu učebnic vydavatelství H-mat, o. p. s. (Hejný a kol., 2015c,b, 2016; Hejný a Šalom, 2017a,b, 2018), v nichž jsem vyhledala úlohy, které žákům umožní se připravit na příchod proměnné. Cíleně proměnná vstupuje do matematiky ve třetí z řady učebnic (Matematika C) v kapitole *Jazyk písmen I* (Hejný a kol., 2016, str. 36–

37), kdy už žáci mají dostatek zkušeností k tomu, aby proměnnou přirozeně přijali. Výskyt úloh týkajících se proměnné v následujících třech učebnicích uvádím jen stručně.

Za účelem získání informací o přístupu učitelů k výuce proměnné jsem sledovala výuku kapitoly *Jazyk písmen I* u čtyř učitelů celkem v šesti třídách 7. nebo 8. ročníků základních škol, o čemž pojednává třetí kapitola práce. Nejprve v ní popisuji metodologii výzkumu, v níž si kladu cíle, formuluji výzkumné otázky a popisuji způsob sběru a zpracování dat. Jádrem práce je oddíl věnovaný výsledkům náslechů a rozhovorů, kde na konkrétních ukázkách z hodin učitelů ukazuji jejich přístupy k výuce na příkladu výuky proměnné. Na závěr třetí kapitoly srovnávám jednotlivé přístupy učitelů k výuce proměnné a jejich styly výuky.

1. Teoretická část

1.1 Vymezení pojmů

Proměnná hraje klíčovou roli v matematickém zápise. Vymezení tohoto pojmu není v literatuře úplně jednotné, jelikož někdy termín proměnná označuje jakékoli použití písmene v matematice. Písmena v matematice mohou mít více rolí:

- Písmeno v roli **neznámé** vystupuje v rovnici. Má konkrétní, avšak zatím neznámou hodnotu. Zastupuje jedno či více čísel, jejichž hodnoty lze z dané rovnice zjistit. Žáci se mohou s neznámými setkávat již na 1. stupni základní školy při řešení aritmetických úloh, jako jsou např. úlohy typu „Myslím si číslo...“ či „7 a kolik je 15“. Na druhém stupni se pak s neznámými setkají např. při řešení úloh o úměrnostech, lineárních a kvadratických rovnic, rovnic, které matematizují slovní úlohy, apod.[1]

- Písmeno jako **proměnná** „zastupuje dosud nespecifikované hodnoty, které se na rozdíl od neznámé mohou měnit. Např. v rovnici $y = x - 5$ jsou x i y proměnné, hodnota y se mění v závislosti na hodnotě x. Pokud jedno z nich určíme, pak se z druhého stane neznámá“ (Vondrová, 2019, str. 117). Proměnné vystupují například ve vzorcích a algebraických výrazech.

- Písmeno v roli **parametru** vystupuje např. v rovnicích jako zástupce hodnot, tedy odkazuje na celý soubor rovnic. Například $y = 2x + p$, kde p je reálný parametr, odkazuje na soubor všech přímek rovnoběžných s přímkou $y = 2x$.

- Písmeno jako **zobecněné číslo** se používá mimo jiné v identitách a rovnostech. Ať dosadíme za písmeno libovolnou hodnotu, výrok zůstane pravdivý (např. $3k + 4k + 2 = 7k + 2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$). Zobecněná čísla se používají i pro vyjádření charakteristiky nějaké množiny čísel, např. čísla dělitelná třemi lze vyjádřit jako $3n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

- Písmeno může být i v roli **jednotky**. Např. 10 m, 5 l, 8 J apod. V momentě, kdy se žáci začínají setkávat s proměnnými, můžou nastat nejasnosti v tom, kdy písmeno vnímat jako proměnnou a kdy jako jednotku. U jednotek, jejichž značení je vícepísmenné, je navíc nutné je chápat jako jeden znak.

- Písmeno jako **předmět** (zkratka předmětu) se nejčastěji objevuje v úvodu do algebraických výrazů, kdy učitelé ve víře, že žákům usnadní pochopení proměnných, používají metodu tzv. „jablíčka a hruštičky“, anglicky zvanou „fruit salad“. Například 5 banánů a 3 citrony zapíšeme jako $5b + 3c$. Tato „pomůcka“ však není příliš výhodná pro uchopení pojmu proměnná (více k tomuto problému je v oddílu 1.6), jelikož má blíže k jednotkám než k proměnným.

[1] Neznámá bývá někdy považována za speciální případ proměnné, jindy stojí zvlášť.

- Písmeno v roli **konstanty** je pevně dané číslo, jehož hodnota může i nemusí být známa. V matematice jsou to např. π a e, u nichž je zápis pomocí písmene vhodný kvůli jejich iracionalitě a nekonečnému desetinnému rozvoji. Konstanty se používají např. ve fyzikálních vzorcích, kde je nutné je umět rozlišit od proměnných.

Tato práce se zaměřuje na cestu k objevení proměnné, jejíž hodnota se mění. Případy, kdy písmeno má jiné role, proto zmíníme jen tehdy, pokud v nich spatříme význam pro pochopení proměnné.

1.2 Historický vývoj algebraického jazyka

Tato sekce vychází zejména z kapitoly Ladislava Kvasze *Historické aspekty vyučování algebry* v knize (Rendl a kol., 2013, kapitola 8).

Vznik algebry nelze přesně datovat, jelikož k algebře lze přistupovat z několika stran. Podle toho, zda je algebra vnímána jako zobecněná aritmetika, nástroj k řešení problémů, jako abstrakce struktur nebo proces zobecňování (zpředmětňování), je i různě datován počátek jejího vývoje a jsou také odlišně vnímány klíčové momenty didaktiky algebry.

Algebraické uvažování se objevovalo už v Babylonii a v Egyptě, avšak chyběla obecnost, symbolika a důkazy. Ve starověkém Řecku k tomu přibyla obecnost (úsečka může reprezentovat libovolné číslo, pokud nezadám jednotkovou délku) a důkaz. První variantu algebraické symboliky přinesl Diofantos ve 3. století, který přinesl sbírky triků, jak počítat rovnice, avšak bez obecných vhledů.

První kniha věnovaná algebře je *Krátká kniha o počtu algebry a al-muqábaly*, kterou napsal Al-Chwárizmí na počátku 9. století. Kniha byla určena pro právníky a kupce jako učebnice, pojednává o řešení rovnic, ale nevyskytuje se v ní symbolický zápis – všechny postupy jsou popsány slovy. Jako „algebrování" (*al-džabr*) byla označována úprava rovnice, kdy k oběma stranám rovnice přičítáme totéž (tedy „převádění" na druhou stranu rovnice s opačným znaménkem). Dnešní x bylo pojmenováno *šai* (věc), x^2 jako *mál* (majetek) a x^3 jako *káb* (krychle). V Al-Chwárizmího práci existuje jen jedna neznámá, a není tudíž možnost substituovat. Pravidla pro řešení jsou napsána slovy a na konkrétních číslech, ale postup je dokázán.

Symbolický algebraický zápis vznikal zejména v průběhu renesance. Do Evropy se matematika Arabů dostala na počátku 13. století. Arabská pojmenování neznámých byla doslovně přeložena do latiny jako *res*, *census* a *cubus* a ve 14. století je matematici v textech zkracovali písmeny r, z, c (*census* se zkracoval písmenem z). Na přelomu 15. a 16. století shrnul Luca Pacioli matematické poznání 15. století. Symbolické značení se vyvíjelo a rozhodně nebylo jednotné u různých matematiků. Písmena však měla smysl spíše zkratek než algebraických objektů. Začala se též objevovat druhá neznámá – například zkrácením přeložených slov „věc", „majetek" a „krychle" do dalších jazyků, nebo použitím celých, nezkrácených slov. Algebra byla stále popisována dlouhými texty běžného jazyka, byť s použitím zkratek, a byla souborem triků.

Na konci 16. století Francois Viète napsal knihu *Úvod do analytického umění*, v níž označoval neznámé velkými samohláskami a jejich rozměr psal slovně za ně (např. *A-planum* je v dnešní symbolice A^2, *E-longitudo* E, *O-solidum* je O^3, *I-plano-planum* I^4 atd.). V rovnicích platil princip homogenity, tedy bylo možno sčítat pouze veličiny stejné dimenze. Díky několika neznámým A, E, I, O, U, jejichž dimenze byly odděleny od symbolu identity neznámé, bylo možné zavést substituční pravidla. Neznámé byly vždy kladné a měly nějakou dimenzi. Souhláskami B, C, D atd. značil Viète parmetry, což umožnilo zápis obecné rovnice.[2]

René Descartes v první polovině 17. století zavedl ve spisu Geometrie (Descartes, 2010) symboliku již velmi podobnou té, co známe dnes. Pro neznámé vyhradil malá písmena z konce abecedy (x, y, z, u, v, ...) a písmena z počátku abecedy tak mohla značit parametry (a, b, c, ...). Mocniny neznámých i parametrů značil pravým horním indexem tak, jak se značí dodnes – to je důležité proto, aby písmeno, jež je nositelem identity neznámé, nebylo závislé na rozměru. Descartes rovněž zavedl symbol pro odmocninu v dnešní podobě, byť se inspiroval prací starších matematiků a propojil několik jejich myšlenek do symbolu $\sqrt{}$. Mocniny neznámých Descartes nově vnímal jako čísla (tedy x^2 pro něj nebyl obsah, ale úsečka délky x^2), což umožnilo opuštění principu homogenity, a tedy sčítání různých mocnin.

Operace byly rovněž zpočátku popisovány slovně, pak se používaly zkratky (např. Regiomontanus v roce 1463 značil plus jako „et“, minus jako „ig“, rovnost značil delší vodorovnou čarou, Nicolas Chuquet působící ve 2. polovině 15. století pro sčítání měl značku $\tilde{p}$, pro odečítání $\tilde{m}$ a rovnost značil „egaulx“). Znaménka $+$ a $-$ pocházejí od Johanna Widmanna, který jimi na konci 15. století Chuquetovy $\tilde{p}$ a $\tilde{m}$. Descartes používal symboly $+$ a $-$, ale rovnost značil jiným symbolem (zrcadlově převrácený symbol $\propto$). Zavedením jiných symbolů pro operace písmenům zbyla jediná úloha, a to označovat neznámé a parametry, což umožnilo zápis algebraických výrazů a v důsledku toho mohl přijít v 17. století rozvoj infinitezimálního počtu a analytické geometrie.

1.2.1 Paralela historie a učebního procesu

Teze, že z fylogeneze matematického myšlení můžeme získat představu o tom, jak se myšlení vyvíjí ontogeneticky, se nazývá *genetická paralela* (Hejný a kol., 1990, str. 25).

Vývoj algebraické symboliky a matematického myšlení trval dlouhá staletí. V případě, že se žáci potkají s algebrou jako s „písmeny, se kterými se počítá“, tedy již s hotovou, vyvinutou symbolikou, přeskakují tak stádia uchopování pojmů z hlediska fylogeneze, a je tudíž možné, že jejich znalosti budou formální (viz oddíl 1.7.1). V knize (Rendl a kol., 2013, str. 302) je vyslovena domněnka, že původ kritických míst při vyučování algebry lze hledat ve skutečnosti, že stádia, která ve vývoji trvala několik století, se ve vyučování algebry přeskakují. Vždyť i netriviální algebraické problémy (např. rovnice 3. stupně) byly ve své době řešeny slovně bez rozvinuté symboliky.

I v době, kdy matematické texty byly ještě psané slovně, se však rozvíjelo algebraické myšlení, což umožňovalo vývoj aritmetiky a elementární geometrie. Od pouhé práce s čísly (přirozenými) se aritmetika proměňovala k používání

[2] Řešení rovnic 3. stupně byla objevena v první polovině 16. století a tehdy byla algebra ještě popisována verbálně. Ačkoli je řešení kubických rovnic netriviální, bylo popsáno slovy jako návod dnes známý jako Cardanův vzorec. Pro řešení kubické rovnice je nezbytné rozvinuté algebraické myšlení, avšak k objevu postupu nebylo třeba symbolického jazyka.

formálních manipulací s výrazy, která reprezentují jiné druhy čísel (zlomky, desetinná čísla, záporná čísla). „Pokud se vyučování algebry namísto rozvoje algebraického myšlení soustředí na rozvoj práce s algebraickou symbolikou, zlomky, desetinná čísla a záporná čísla tím ztrácejí půdu, z níž vyrostly.“ (Rendl a kol., 2013, str. 323)

Geometrii algebra umožnila efektivní zápis vlastností geometrických útvarů. Geometrické vlastnosti však nejsou na algebře závislé, jen je možné je algebraicky zapsat. Z historického pohledu byly geometrické vztahy známy dávno před algebraickou symbolikou (například přikládání ploch v Eukleidových *Základech* se týká kvadratických rovnic, které jsou řešeny obrázkem). Pokud je ve výuce kladen příliš velký či předčasný důraz na vyjadřování geometrických vztahů pomocí algebry, může to vést k formalismům a tedy menší efektivitě při řešení úloh jak geometrických, tak algebraických (Rendl a kol., 2013, str. 324).

1.3 Tři hladiny jazyka písmen

Jazyk písmen můžeme rozdělit do tří úrovní (Hejný a kol., 1990, str. 144). Nejnižší je *modelování*, tedy převádění textu do symbolického jazyka (např. sudá čísla lze symbolicky psát jako $2n; n \in \mathbb{Z}$). Další úrovní je *standardní manipulace* se symboly, tedy úprava algebraických výrazů dle pravidel (např. roznásobování závorek, umocňování dvojčlenu, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ atd.). Nejvyšší úrovní je *strategická manipulace* se symboly, kde již nestačí naučené postupy, ale je třeba objevit strategii postupu k cíli. Jedná se například o úlohy, v nichž je třeba dokázat nějaké tvrzení. Standardní manipulace a strategická manipulace mezi sebou nemají jasnou hranici, protože závisí na úrovni řešitele – jedna úloha může být pro někoho náročným problémem vyžadujícím strategickou manipulaci, ale pro jiného může být pouhou manipulací, jelikož postupy nutné pro řešení již má osvojené.

Na základní škole se algebra často drží v úrovni standardní manipulace (učitelé v souvislosti s algebrou uvádějí jako kritické místo nejčastěji úpravu výrazů, viz oddíl 1.6), tedy algebra je pro žáky souborem pravidel, jak upravovat výrazy zapsané symbolickým jazykem. V symbolickém zápisu je však skryto naráz mnoho myšlenek, které v průběhu vývoje symboliky vznikaly postupně, což může být pro žáky obtížné a matoucí. Za výrazem totiž nevidí představu toho, co je jím matematizováno, tedy kontext situace nebo geometrie. Hladina strategické manipulace, v níž je třeba chápat kontext (tedy umět modelovat), ovládat standardní manipulaci a navíc dostat nápad, je proto pro žáky příliš obtížná, jelikož hladina modelování bývá upozaděna a algebra se tak smršťuje na soubor formálně nacvičených úprav výrazů.

> Většina žáků si osvojí pouze manipulativní dovednosti a standardní použití písmen v nacvičených situacích. Jen málo žáků si uvědomí obrovskou sílu tohoto jazyka a bude schopno tímto jazykem „mluvit s matematikou“, řešit pomocí tohoto jazyka složité úlohy. Příčinu vidíme ve snaze nás, učitelů, dávat žákům tento silný nástroj poznávání matematiky příliš brzo, bez toho, aby žáci cítili potřebu tohoto jazyka. Přitom naše edukační strategie zdůrazňuje nácviky úprav algebraických výrazů a zanedbává to podstatné – schopnost jazyka rozumně uchopovat nejrůznější situace. (Hejný, 2016, str. 58)

1.4 Síly jazyka písmen

Jazyk písmen jako nástroj pro řešení matematických problémů ale též nástroj porozumění matematice lze rozdělit na šest položek, jež podle Hejného nazveme *síly* (Hejný, 2016). První čtyři síly žáci potkávají již na prvním stupni základní školy, poslední dvě obvykle až na druhém. Síly jsou potence jazyka, ale lze je vnímat i jako mentální potence.

Síla kódovací: *Kódy* nazýváme taková písmena, která jsou vložena do zadání úlohy či do obrázku. Žákův úkol je za kódy dosadit čísla či je pouze evidovat. Kódy přispívají k řešení úlohy kódovací silou (Hejný, 2016, str. 59). Kódy mohou řešitelům pomoci, avšak v některých případech mohou být matoucí (jsou nabídnuté až vnucené, nepochází z potřeby řešitele označovat).

Síla uchopovací: Uchopovací síla má roli v rozhodování, zda pro řešení úlohy bude použit jazyk písmen. Tedy zda například uchopíme úlohu označením neznámé veličiny písmenem x. Sama o sobě tato síla nestačí k vyřešení úlohy, je potřeba spolu se silou vyjadřovací. Pokud žák nedokáže uchopit úlohu pomocí jazyka písmen, volí alternativní metodu – úlohu vyřeší, avšak ne obecně. K rozvoji uchopovací síly písmen nejvíce přispívá to, když žák vidí řešení pomocí x a souběžně s ním i jiná řešení (Hejný, 2016, str. 69).

Síla vyjadřovací: Vyjadřovací síla umožňuje vyjádřit písmeny danou situaci, matematizovat ji užitím algebry. Pomocí písmen lze popsat neznámé vztahy a objekty.

Síla transformační: Algebraicky vyjádřené vztahy je možné transformovat, upravovat do tvaru, z něhož zjistíme číslo x.

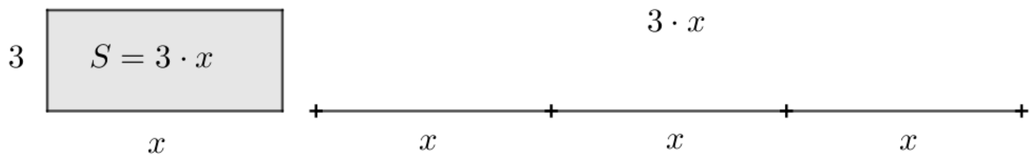
Síla argumentační: Jazyk písmen má významnou argumentační sílu – pomocí algebry lze zdůvodňovat tvrzení. Mnoho úloh, které rozvíjejí či vyžadují argumentační sílu jazyka písmen, lze najít v tematickém celku dělitelnost.

Síla objevitelská: Jazyk písmen umožňuje objevovat zákonitosti přímo, bez předchozího postupu od izolovaných modelů přes generické modely po abstraktní znalosti. Jazykem písmen je možné získat odůvodněné abstraktní vyjádření.

Síly uchopovací a vyjadřovací odpovídají hladině modelování. Transformační síla odpovídá hladině standardní manipulace a argumentační síla spolu s objevitelskou odpovídají hladině strategické manipulace.

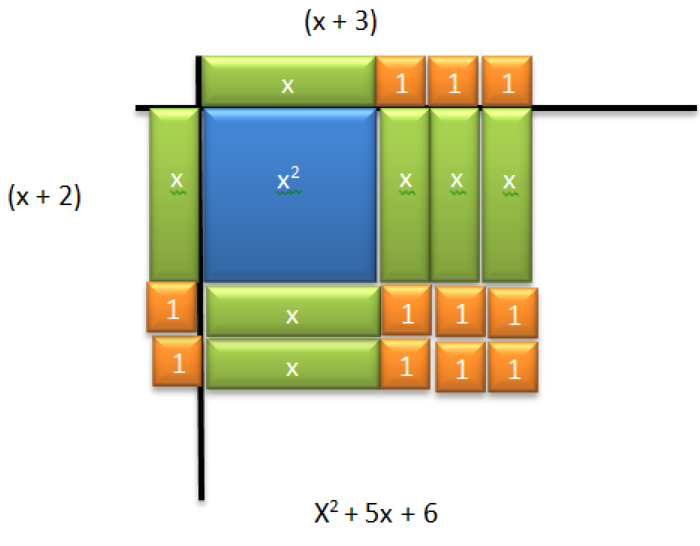
1.5 Pilíře výuky algebry

Algebra na základních školách stojí na třech pilířích (Vondrová, 2019). Prvním pilířem algebry je **geometrie**. Práci s proměnnými, které znamenají délky úseček, žáci znají z geometrie. Při počítání obsahů či obvodů útvarů jsou proměnné používány pro zápis vzorce. Například součin dvou proměnných $a \cdot b$ lze chápat jako obsah obdélníka o stranách a a b, součin $3x$ lze vnímat jako obsah obdélníka, jenž má jednu stranu délky 3 a druhou délky x, ale rovněž lze $3x$ interpretovat jako délku úsečky (tři úsečky délky x za sebou), jak možno nahlédnout na obrázku 1.1. Výraz x, resp. x^2 pak lze vnímat jako délku úsečky, resp. obsah čtverce, x^3 jako objem krychle.



Obrázek 1.1: Vlevo výraz $3x$ jako obsah obdélníka, vpravo jako délka úsečky.

Geometrický význam algebraických výrazů může pomoci žákům v pochopení distributivního zákona, jelikož roznásobování lze vnímat jako určení obsahu obdélníku, rozklad mnohočlenu na součin pak jako hledání obdélníku s daným obsahem. Názornou pomůckou pro takovéto souvislosti mezi algebrou a geometrií jsou tzv. algebraické dlaždice (anglicky Algebra Tiles). Součin $(x+3)\cdot(x+2)$ znázorněn pomocí algebraických dlaždic je na obrázku 1.2.[3] Pomocí algebraických dlaždic lze snadno modelovat například umocnění dvojčlenu, tedy abstraktní vzorec může nabýt vizualizace, nebo může být pomocí geometrické interpretace dokonce objeven či odvozen.



Obrázek 1.2: Součin $(x+3)\cdot(x+2)$ vyjádřen pomocí algebraických dlaždic. Zdroj: `http://systry.com/algebra-tiles/multiply-binomials/`

Dalším z pilířů algebry je **aritmetika číselných výrazů** – z tohoto úhlu pohledu lze pohlížet na algebru jako na zobecněnou aritmetiku, ovšem s určitými rozdíly. Například roznásobování závorek se v aritmetice téměř nepoužívá, jelikož si je možno vystačit pouze s předností operací, tedy nejdříve provést operaci

[3] Více se algebraickými dlaždicemi zabývá např. diplomová práce *Výrazy s proměnnou v učivu základní školy* (Pokorný, 2017).

v závorce, poté násobit (např. $9 \cdot (4+2) = 9 \cdot 6$). U výrazů s proměnnými je nutno roznásobit závorku, jelikož provést operaci v závorce nelze (např. $3 \cdot (2b + 3)$). Dalším rozdílem je totiž různé pojetí znamének operací – znaménko + v aritmetice značí pokyn „sečti“, tedy u některých žáků může jít o procesuální vnímání součtu, a nikoli o součet jako koncept, tedy jeho výsledek. V algebře + rovněž nese význam součtu, avšak zde je nutno jej brát jako koncept, jelikož dokud nejsou známy hodnoty proměnných, nelze je sečíst. Žákům však dosazování různých hodnot do algebraických výrazů může přiblížit pojem proměnné jako „schránky“, do níž lze dosazovat různá čísla, jelikož si aritmeticky mohou ověřovat správnost úprav výrazů, musí si však uvědomovat význam znaménka = jako ekvivalence výrazů.[4]

Třetím pilířem algebry je **zobecňování**, tedy úlohy, v nichž je úkolem odhalit pravidelnost v nějaké řadě prvků (obrázků, čísel apod.), určit několik dalších členů a následně vyjádřit pravidelnost obecně pomocí proměnných. Úlohy na zobecňování jsou u českých žáků problémové (viz oddíl 1.6 týkající se posloupností v šetření TIMSS). Že je možné u žáků schopnost zobecňovat a využívat algebru cíleně rozvíjet, ukázala tři roky trvající studie (Rivera a Becker, 2011, str. 330). V ní byl u žáků 6. až 8. ročníku každý rok proveden výukový experiment zaměřený na zobecňující úlohy. Zatímco na začátku žáci řešili úlohy na zobecňování zejména vizuálně, postupně začali více využívat numerické řešení a provádět zobecnění, které zapisovali jazykem algebry. Jednodušší pro ně byly úlohy, kde čísla reprezentovaná vzory narůstala, než úlohy, kde se čísla snižovala. Některé z úloh, které se v této studii objevily, je možné najít i v učebnicích H-mat (např. úloha uvedená v mé práci pod číslem 34).

V učebnicích analyzovaných v kapitole 2 se úlohy na zobecňování vyskytují. Učebnice využívají jejich potenciálu, aby se žáci s proměnnou seznámili přirozeně a pochopili její sílu.

1.6 Algebra jako kritické místo matematiky

Kritická místa matematiky jsou oblasti, v nichž žáci často a opakovaně selhávají (Rendl a kol., 2013, str. 7). V těchto oblastech se matematická gramotnost nemůže produktivně rozvíjet a žáci učivo neovládají natolik, aby jej mohli užívat v situacích běžného života. Kritická místa byla identifikována z rozhovorů s učiteli, což je popsáno v knize (Rendl a kol., 2013), a z mezinárodního šetření TIMSS 2007, o čemž pojednává článek (Rendl a Vondrová, 2014).

Jako kritická místa matematiky týkající se algebry nejčastěji zmiňují čeští učitelé úpravy algebraických výrazů a operace s nimi (Rendl a kol., 2013, str. 88). Matematizaci situace, tedy algebraický zápis slovně zadané úlohy či situace, učitelé v souvislosti s algebrou nezmiňují – řadí ji do širokého tématu „slovní úlohy“, které bývá ve výuce oddělené od algebry. Podle autorů je otázkou, nakolik je toto oddělování úloh s kontextem od úloh algebraických příčinou selhávání žáků v obou oblastech (Rendl a kol., 2013, str. 90). Dosazování do výrazů a určování jejich hodnoty učitelé jako problematické místo nepopisují, pokud se však nejedná

[4] Výzkum (Demby, 1997) ukázal, že žáci neberou výraz před úpravami a po úpravách jako ekvivalentní, tedy že když za proměnnou dosadí danou hodnotu do původního výrazu, neberou v potaz, že jim musí vyjít stejná hodnota výrazu, jako když za proměnnou dosadí tutéž hodnotu do upraveného (zjednodušeného) výrazu.

o dosazování do vzorců v geometrii, což ovšem může souviset s příliš rychlou algebraizací geometrických vzorců na úkor uchopení principů, jak se vzorce tvoří (Rendl a kol., 2013, str. 49 a 88).

V analýze kritických míst vyplývajících z šetření TIMSS 2007 (Rendl a Vondrová, 2014) se autoři zaměřují na jednotlivé úlohy, u nichž porovnávají průměrnou úspěšnost českých žáků při jejich řešení s mezinárodním průměrem a s jejich vlastním průměrem dosaženým v dalších úlohách testu. Jako slabé oblasti byly identifikovány Algebra, Posloupnosti a Obrazce a tělesa.[5]

Z oblasti Algebry čeští žáci v šetření TIMSS dosahovali nejhorších výsledků v úlohách týkajících se funkcí a substituce (Rendl a Vondrová, 2014, str. 32). Z oblasti funkcí si čeští žáci nevedli dobře v úloze o pohybu, kde měli vybrat vzorec pro ujetou vzdálenost d v závislosti na čase t při zadané průměrné rychlosti. Podobné úlohy, které však byly zadané číselně, žáci řešili nadprůměrně dobře (Rendl a Vondrová, 2014, str. 33), tedy problém zde patrně byl v abstraktním zadání pomocí písmen d a t, přičemž v českém prostředí se obvykle namísto písmene d používá s. Úlohy, které autoři článku zařadili do oblasti substituce, nemají v oficiální analýze svoji skupinu. V těchto úlohách jde o dosazení číselné hodnoty, proměnné nebo výrazu za jinou proměnnou. Problémy měli žáci např. s úlohou, v níž měli zjistit, zda je daná dvojice hodnot řešením rovnice se dvěma neznámými. V jiné úloze měli žáci problém s dosazením hodnoty $b = -1$ do výrazu $-b$. Čeští žáci řešili pod mezinárodním průměrem dvě úlohy, v nichž bylo třeba do algebraického výrazu dosadit za každou z dvojice proměnných algebraický výraz složený z čísla a proměnné (Rendl a Vondrová, 2014, str. 37).

Učiteli zmiňované kritické úpravy výrazů dopadly u českých žáků v TIMSS 2007 standardně (tedy 9,4 % nad mezinárodním průměrem), byly zde však nějaké slabší úlohy. V jedné z nich měli žáci vyjádřit obsah obdélníku, jehož jedna strana je x a druhá strana $x + 2$ (Rendl a Vondrová, 2014, str. 40), tedy jde o propojení oblastí Obrazce a tělesa a Algebra. Podobně slabá úloha vyžadovala od žáků geometrickou interpretaci daného algebraického výrazu $2x + 3x$, přičemž byly nabízeny 4 možnosti odpovědi (Rendl a Vondrová, 2014, str. 40). Problém žáci měli i s řešením úlohy typu *Jaký výraz odpovídá jedné devítině z a?* (Rendl a Vondrová, 2014, str. 41), kde jde o matematizaci slovního vyjádření.

Oblast Posloupnosti s algebrou velmi souvisí, jelikož jde o zobecňování (především skládání grafických prvků do složitějších). Čeští žáci řeší nadprůměrně první úroveň takových úloh, která spočívá v určení počtu prvků u následujících několika obrazců. Větší problém mají s určením počtu prvků vzdálenějších, složitějších obrazců, tedy s nalézáním pravidelností. Nejvíce problematické je pak zobecnění a vyjádření pravidelnosti pomocí proměnných, v této úrovni dosahují čeští žáci průměrných až podprůměrných výsledků (Rendl a Vondrová, 2014, str. 43). Zde lze spatřit paralelu s poznávacím procesem podle teorie generických modelů (Hejný a Kuřina, 2001, str. 104) – čeští žáci dosahují dobrých výsledků v hladině izolovaných modelů (konkrétních případů, které lze modelovat), první abstrakční zdvih do hladiny generických modelů (nalezení pravidelností) jich zvládá méně a druhého abstrakčního zdvihu do hladiny abstraktní znalosti (zobecnění a jeho algebraické vyjádření) již dosáhne jen malá část žáků.

Oblast Obrazce a tělesa stojí na pomezí algebry a geometrie. Tuto oblast

[5]TIMSS dělí úlohy do jiných oblastí než autoři článku, např. Posloupnosti jsou v TIMSS zařazeny do Algebry, Obrazce a tělesa jsou začleněny v oblasti Geometrie

zmiňují jako problematickou i učitelé, a to již na prvním stupni základní školy (Rendl a kol., 2013, str. 45), na druhém stupni zmiňuje problémy s výpočty v geometrii téměř polovina učitelů (Rendl a kol., 2013, str. 113). Jako možnou příčinu spatřují autoři příliš rychlou algebraizaci či úplné ztotožnění budování konceptu obvod a obsah s jejich vzorci. Žáci pak příliš spoléhají na vzorce a chybí jim představy pojmů (Rendl a kol., 2013, str. 114). Algebraické vyjádření vzorců tak předbíhá vyvolání potřeby popsat obecnou situaci. Vzorec pro objem krychle je tedy ztotožňován se samotným objemem a je vnímán jako návod pro výpočet konkrétních hodnot, nikoli jako vztah mezi několika parametry (Rendl a kol., 2013, str. 46). Problémové úlohy TIMSS 2007 byly v naprosté většině založeny na chápání vzorce jako vztahu parametrů, což však souvisí i s problémovou oblastí Algebra, kde se ukazuje, že žáci nevidí souvislosti mezi algebraickým výrazem a jeho významem.

Co se týče pochopení proměnné coby symbolu (obvykle písmene), je učiteli často používána metoda v zahraničí nazývaná „fruit salad“, česky překládaná jako „hruštičky a jablíčka“. Abstraktní proměnné označované písmeny zde dostávají význam konkrétního předmětu. Proměnná se tak stává pouhou zkratkou pro předmět. Pro žáky je dle učitelů snazší s výrazy s proměnnými manipulovat, lépe se sžijí s tím, že např. $5c+2d$ nelze sečíst (Rendl a kol., 2013, str. 92). Avšak proměnná jako symbol pro neznámé číslo zde ztrácí svůj význam. Tomuto problému se věnuje studie (McNeil a kol., 2010), kde byla žákům 6., 7. a 8. ročníků položena otázka: „Koláč stojí k korun a sušenka stojí s korun. Řekněme, že si koupím 4 koláče a 3 sušenky. Co vyjadřuje $4k + 3s$?“[6] Žáci byli rozděleni do tří skupin – první skupina řešila úlohu pro cenu vyjádřenou proměnnými odpovídajícími počátečním písmenům slov (k jako koláče a s jako sušenky), druhé skupině bylo zadáno, že cena koláčů, resp. sušenek je x, resp. y korun a třetí skupina úlohu řešila s proměnnými ϕ a ψ. Úspěšnost žáků v určení významu výrazu byla nejnižší v první skupině žáků, a to ve všech ročnících, jejich úspěšnost rostla s věkem. V šestých ročnících byla nejúspěšnější druhá skupina, v sedmých a osmých ročnících třetí skupina. Při zkoumání jednotlivých žákovských řešení autoři zjistili, že písmena k a s žáci zaměňují s objekty, tedy s znamená sušenka a $4s$ čtyři sušenky, nikoli s jako cena za sušenku a $4s$ jako cena za 4 sušenky. Skupiny, které úlohu řešily pro x a y či pro ϕ a ψ, častěji problém nahlížely strukturálně. Ze závěrů studie lze usuzovat, že žáky používání písmen coby „zkratek“ spíše mate, než že by jim to pomáhalo k porozumění situace, což je v kontrastu s výpověďmi některých českých učitelů (Rendl a kol., 2013, str. 89 a 92).

1.7 Metoda výuky založená na budování schémat

Metoda výuky orientované na budování schémat, ve veřejnosti známá jako Hejného metoda, vychází z poznávacího procesu žáka na základě teorie generických modelů. Hejného metoda je založena na předpokladu, že se v mysli žáka tvoří sítě matematických schémat, a to prostřednictvím řešení podnětných úloh a dis-

[6]Původní zadání v angličtině: Cakes cost c dollars each and brownies cost b dollars each. Suppose I buy 4 cakes and 3 brownies. What does $4c + 3b$ stand for?” (McNeil a kol., 2010, str. 627)

kuse jejich řešení s vrstevníky. Schématem je míněn souhrn vzájemně propojených znalostí, které se týkají daného prostředí.

1.7.1 Teorie generických modelů

Poznání se rodí v žákově mysli jako struktura poznatků. Vzniká tak, že nejprve člověk porozumí několika konkrétním případům, v nichž najde určité podobnosti, a na základě toho objeví obecnější poznatky (Hejný a Kuřina, 2001), (Hejný, 2004). Poznávací proces lze pak rozdělit do tří hladin, mezi nimiž jsou dva zdvihy. Dále je uveden popis poznávacího procesu doplněn grafickým znázorněním na obrázku 1.3.

1. **Motivace** hraje důležitou roli jako východisko pro jakékoli učení.

2. **Hladina izolovaných (separovaných) modelů** je etapa, v níž se žák seznamuje s konkrétními situacemi, které zkoumá, všímá si souvislostí mezi jednotlivými případy, shlukuje je na základě souvislostí. V této hladině jsou hledány, sbírány, poznávány a tříděny zkušenosti.

3. **Hladina generických (univerzálních) modelů** je etapa nalézání společné podstaty izolovaných modelů a jejich souvislostí. Mezi hladinou izolovaných a generických modelů je tzv. první abstrakční zdvih neboli zobecnění. Univerzální model je návodem pro řešení všech úloh v hladině separovaných modelů.

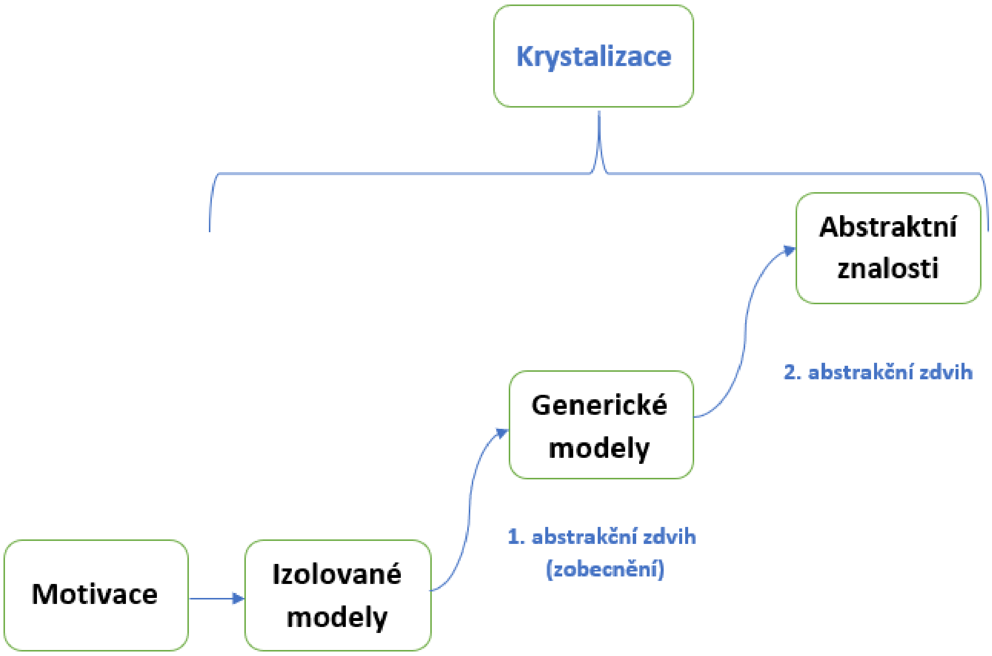
4. **Hladina abstraktních znalostí** přichází po druhém abstrakčním zdvihu. Modely (separované i univerzální) jsou restrukturovány a znalost je reprezentována symbolickým zápisem.

5. **Krystalizace** se vyznačuje propojováním nově nabytých poznatků s dřívějšími zkušenostmi. Probíhá po celou dobu poznávacího procesu, jelikož každý nový poznatek (nejen ten abstraktní) je krystalizací umístěn do kognitivní struktury, a ovlivňuje tak již dříve nabyté znalosti.

Abstrakční zdvihy bývají provázeny „AHA-efektem“ a často přinášejí radost. Některé poznatky mohou být v průběhu poznávacího procesu v několika hladinách současně (generický model jednoho poznatku může být současně izolovaným modelem nového poznatku apod.).

Poznatek, který nevychází z generických modelů, se nazývá formální. Obvykle přichází do paměti zvenčí transmisí jako informace, tedy není zkonstruován v mysli žáka na základě jeho zkušeností a neopírá se o ně. Příkladem může být např. vzorec $o = 2(a + b)$ pro obvod obdélníku, který si žák zapamatuje, ale neporozumí jeho významu, tudíž nemá propojené zkušenosti se vzorcem. Nápravou formalizmů je dobudování generických modelů do té míry, aby žák zživotnil svoje původně formální znalosti. Toho lze nejlépe dosáhnout zkoumáním daného problému v jiném kontextu (Hejný, 2004, str. 41).

Hejného metoda výuky matematiky, která se objevuje na českých základních školách, je koncipována v souladu s poznávacím procesem žáka v takovémto smyslu.



Obrázek 1.3: Schéma znázorňující poznávací proces dle teorie generických modelů

1.7.2 Hejného metoda

Hejného metoda vznikla z dlouholetých zkušeností a experimentů Milana Hejného a jeho otce Víta Hejného. Stojí na dvanácti principech (H-mat, o. p. s., 2014):

1. **Budování schémat:** *Dítě ví i to, co jsme ho neučili.* V jeho mysli se tvoří soubory propojených poznatků, které jsou nazývány schémata. Tvorba schémat vychází z potřeby člověka, obvykle spontánně. Jelikož je schéma pouze v mysli jedince, mají různí lidé různá schémata téže situace. Proto je velmi důležitá diskuse, jelikož sdílením se mohou schémata všech zúčastněných vylepšovat.

2. **Práce v prostředích:** *Učení se opakovanou návštěvou prostředí.* Některá prostředí vycházejí ze zkušenosti dětí, jiná z oblíbených činností. Prostředí umožňují žákům zkoumání situace bez formálních znalostí, motivují k němu. Ve známém prostředí se žáci orientují, a je tudíž jednodušší zadávat jim úlohy.

3. **Prolínání témat:** *Matematické zákonitosti nejsou izolované.* Matematické jevy a pojmy nejsou oddělené. V daném prostředí se objevuje obvykle několik matematických oblastí a daný matematický jev se obvykle objevuje ve více prostředích – to umožňuje žákovi více úhlů pohledu, tudíž lepší podmínky pro uchopení pojmu a pro nalezení vhodných řešitelských strategií.

4. **Rozvoj osobnosti:** *Podpora samostatného uvažování dětí.* Učitel není nositelem poznatků, ale dává prostor žákům k argumentaci, ke vzájemnému

naslouchání a pochopení řešení v diskuzi. Tím se přirozeně kultivují společenské a pracovní návyky žáků. Žáci mají možnost se lépe poznat a zjistit, v čem jsou dobří.

5. **Skutečná motivace:** *Když dítě „neví“ a „chce vědět“.* Úlohy jsou vytvořené tak, aby žáky bavilo je řešit. Největší radost, a tudíž i motivace, přichází z vlastních objevů.

6. **Reálné zkušenosti:** *Stavění na vlastních zážitcích dítěte.* Opravdové zkušenosti předcházejí těm matematickým. Matematické zkušenosti lze získat pouze řešením úlohy, není přitom tolik podstatné, zda ji žák vyřeší úspěšně.

7. **Radost z matematiky:** *Výrazně pomáhá při další výuce.* Radost z vyřešeného vhodně obtížného[7] úkolu je hlavní motivační silou. Pokud žák úspěšně vyřeší úlohu, má z toho dobrý pocit, který mu dodává motivaci pro řešení dalších úloh. Žák se raduje nejen z vlastního pokroku, ale i z uznání spolužáků či učitele.

8. **Vlastní poznatek:** *Má větší váhu než ten převzatý.* Žák matematiku objevuje – nejprve získává zkušenost (modelováním, zkoumáním problému atd.), na základě čehož vzniká v jeho mysli pojem, vztah apod. (pojem zatím nemusí umět pojmenovat správným termínem). V každé fázi objevování ale žák rozumí tomu, co dělá, a to i v případě, že neobjeví vztah či pojem sám a nechá si jej vysvětlit od spolužáka, protože o něm přemýšlí, a tak jej může s porozuměním převzít.

9. **Role učitele:** *Průvodce a moderátor diskuzí.* Učitel nevykládá a nevysvětluje, ale organizuje hodinu, zadává žákům diferencované úlohy a vyzývá žáky k práci. Učitel dává všem žákům prostor prezentovat jejich řešení v bezpečném prostředí. Učitel se stará o pracovní klima ve třídě, ale není hlavním aktérem vyučovací hodiny – minimalizuje svoji akustickou přítomnost na hodině.

10. **Práce s chybou:** *Předcházení zbytečnému strachu u dětí.* Chyba je přirozenou součástí učení a její analýza vede k hlubším poznatkům. Žáci si objevují chyby sami, učitel se však zaměřuje na jejich příčiny, aby žákům pomohl chyby odstranit. Učitel také volí a tvoří takové úlohy, aby žáci nahlédli nesprávnost svého řešení.

11. **Přiměřené výzvy:** *Pro každé dítě zvlášť podle jeho úrovně.* Díky gradovaným úlohám[8] má každý žák možnost kognitivně růst. I slabí žáci vyřeší alespoň nějaké úlohy, čímž se posiluje jejich motivace a předchází se úzkosti. Současně rychlí žáci mohou prohlubovat svoje znalosti řešením obtížných úloh.

[7] Úkol musí být tak lehký, aby ho mohl žák vyřešit, ale současně tak náročný, aby při řešení musel vynaložit úsilí.

[8] Gradované úlohy jsou stavěné od nejsnazších po obtížné tak, aby si každý žák mohl najít svoji obtížnost. Série gradovaných úloh díky vzrůstající obtížnosti vedou plynule žáka k novým objevům a poznatkům.

12. **Podpora spolupráce:** *Poznatky se rodí díky diskuzi.* Žáci mají volbu, zda pracovat samostatně, ve dvojicích nebo ve skupinkách, důležitá však je diskuse a obhajoba různých řešení. Učitel neříká, které řešení je správné, nechává žáky jej obhájit. V hodině je žádoucí, aby se žáci radili a spolupracovali při řešení úloh.

Záleží ovšem na učiteli, jak metodu uchopí a jak bude její principy aplikovat ve výuce. V této práci jde právě o toto uchopení metody učitelem, které bude zkoumáno na konkrétním případu úvodu do algebry.

2. Analýza učebnic

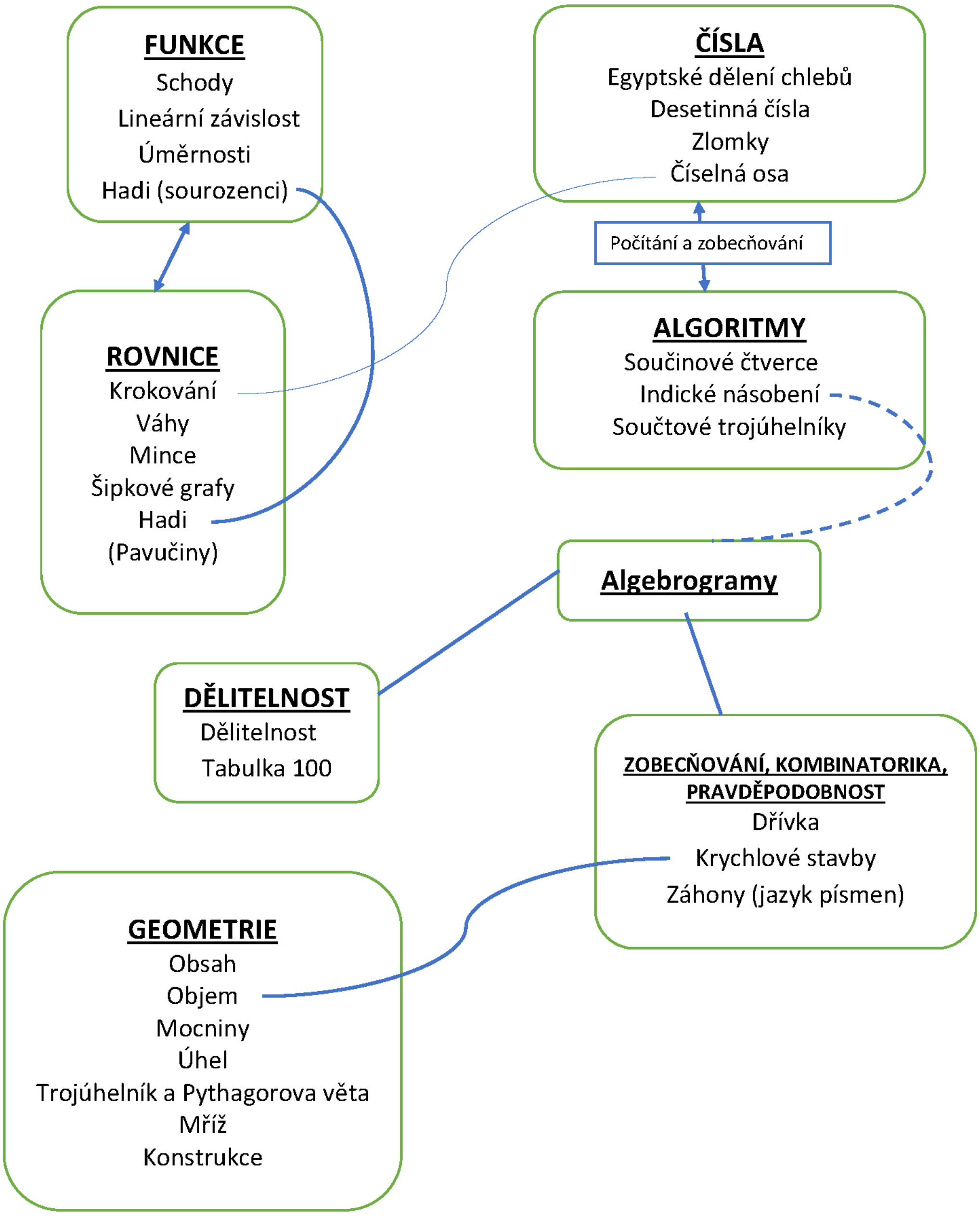
Výuku matematiky založenou na budování schémat umožňuje zejména řada učebnic vydávaná společností H-mat. Existuje šest dílů učebnic pro 2. stupeň ZŠ, jsou označeny písmeny A, B, C, D, E a F, přičemž díly A–E pokrývají učivo dané Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání a díl F obsahuje rozšiřující učivo nad rámec rámcového vzdělávacího programu a zabývá se i přípravou na přijímací zkoušky na střední školy (Hejný a kol., 2015c,b, 2016; Hejný a Šalom, 2017a,b, 2018). Učebnice jsou určeny pro výuku matematiky tzv. Hejného metodou, která je založena na budování schémat. K učebnicím též vznikly pracovní sešity, které nabízejí jednodušší úlohy, více úloh na procvičení i náročnější a rozšiřující úlohy. Pro metodickou a didaktickou podporu učitelům vyšly k učebnicím i příručky učitele (Hejný a kol., 2015a, 2017, 2019). V příručkách učitele jsou například vysvětlena jednotlivá prostředí, žákovská řešení v modelových třídách, návrh tematického plánu, principy konstruktivistického přístupu a zasazení do kontextu jednotlivých prostředí.

Učebnice pracují s tzv. *prostředími*, podle nichž mohou být členěny i kapitoly. Prostředí, která se týkají propedeutiky či zavádění proměnné, budou v této kapitole stručně přiblížena. Některá matematická témata se objevují v několika prostředích, díky čemuž mohou žáci objevit schémata ve více kontextech.

Kapitoly na sebe přímo nenavazují, prostředí se střídají buď v rámci jedné kapitoly, kdy prostředí sdružuje nějaký tematický celek, a na základě různých přístupů k tematice tak dostává žák více příležitostí k uchopení daného tématu, nebo se celá kapitola věnuje jednomu prostředí, v němž žák prohlubuje poznatky. To, co žák objeví v jedné kapitole či prostředí, se může ukázat užitečné v jiném prostředí či tematickém celku. Vědomosti a dovednosti žáci tedy nabývají na jakési pomyslné spirále či šroubovici. Cesta k objevení proměnné je tudíž obtížně popsatelná, jelikož není přímá. Většina prostředí dojde v nějakém bodě k zobecnění, které bude časem vyjádřeno algebraicky pomocí proměnné. K tomu je však potřeba hluboká znalost daných prostředí a souvislostí mezi nimi. Souvislosti, které shledávám podstatnými vzhledem k proměnné, jsou graficky znázorněny na obrázku 2.1.

Na cestě k poznání a pochopení proměnné budou vyhledány v učebnicích propedeutické úlohy a shrnuty důležité milníky, které by žáci měli objevit před zaváděním proměnné. Jelikož spolu různá prostředí a různá témata souvisí, je obtížné je seřadit, proto budou popsána v pořadí, v jakém je objevují žáci, tedy chronologicky podle výskytu v řadě učebnic.

Úlohy, které vedou k porozumění písmenu jako neznámé (tedy rovnice a podobně), budou zmíněny jen okrajově a jen tehdy, když se například v úloze vyskytne parametr či proměnná. Jde sice o důležitou roli písmene v matematice, avšak tato práce se zaměřuje na písmeno v roli proměnné.



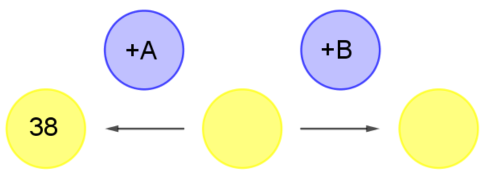
Obrázek 2.1: Skupiny souvisejících prostředí, které jsou významné pro objevení proměnné

2.1 Matematika A

Učebnice Matematika A (Hejný a kol., 2015c) je určena pro žáky 6. ročníku ZŠ či odpovídajícího ročníku osmiletého gymnázia. U úloh, v nichž spatřuji jistou souvislost s algebrou a zejména proměnnou, tuto souvislost popíši a následně úlohy analyzuji z hlediska toho, jak potenciálně přispějí k pochopení proměnné, algebraických výrazů a případně jejich úprav.

Hadi. Hned druhá úloha v učebnici je úloha rozvíjející algebraické myšlení, a dokonce pro zadání úlohy využívá písmen coby proměnných, za něž má žák dosazovat. Jedná se o úlohu z prostředí *Hadi*, které je cílené na porozumění řešení lineárních rovnic a jejich soustav, na operace s racionálními čísly, na řetězení operací a vizualizaci složitějších číselných výrazů a na odhalování zákonitostí metodou uvolňování parametru. Dále umožňuje seznámení se s lineárními funkcemi a je propedeutikou pro lineární závislosti, inverzní funkce, úpravy algebraických výrazů a aritmetické posloupnosti (Hejný a kol., 2015a, str. 39).

<u>Úloha 1</u>: *Zápisy nad šipkami v obrázku 2.2 říkají, jakou operaci a s jakým číslem provádíme ve směru šipky. Vyřešte hada, jestliže víte, že:* ***a)*** $A = 18$, $B = 34$ *(tj. místo písmene* A *napište* 18 *a místo* B *napište* 34*);* ***b)*** $A = 10$, $B = 3 \cdot A$ *(tj. místo písmene* A *napište* 10*);* ***c)*** $A + B = 27$ *a v pravém kolečku je číslo* 39. (Hejný a kol., 2015c, str. 5)



Obrázek 2.2: Zadání úlohy 1 (překresleno z (Hejný a kol., 2015c, str. 5))

Úloha má tři úrovně obtížnosti. V úrovni a) žáci dosazují čísla za písmena, a jelikož jde o první úlohu takového typu, je zde uvedena „rada“, že za písmena je třeba dosadit čísla. Tato substituce pak vede na jednoduchou soustavu lineárních rovnic.[1] V úrovni b) se vyskytuje vztah mezi hodnotami A a B, tedy je třeba dvakrát dosazovat – nejprve hodnotu 10 čísla A do výrazu $B = 3 \cdot A$ a poté hodnoty čísel A a B do hada. V úrovni c) je opět dán vztah A a B, dále je dána hodnota pravého kolečka. Ačkoliv jde o úlohu vedoucí na soustavu lineárních rovnic, žáci ji nejspíše řeší metodou pokus-omyl bez potřeby algebraického zápisu. V úrovních a) a b) vystupují písmena A a B jako proměnné (kódovací síla jazyka písmen), v úloze c) jako neznámé.

Mince. Prostředí, resp. kapitola *Mince* (Hejný a kol., 2015c, str. 19–20) se týká řešení lineárních rovnic a jejich soustav. Ve třetí úloze kapitoly se navíc dává toto prostředí do souvislosti s váhovými rovnicemi. Záhy je v modrém rámečku

[1] K neznámému číslu přičtu 18 a dostanu 38, když pak k tomuto číslu přičtu 34, jaké číslo dostanu?

nabízen způsob zápisu pomocí písmene x. Jelikož x zde vystupuje jako neznámá a nikoli jako proměnná, nebudou podobné úlohy více popisovány.

Egyptské dělení chlebů I. Prostředí *Egyptské dělení chlebů* (Hejný a kol., 2015c, str. 21) je zaměřené na budování představy zlomku. Například zlomek $\frac{7}{5}$ představuje spravedlivé dělení sedmi chlebů mezi pět podílníků. Podmínkou je kromě spravedlivého dělení i to, že každý z podílníků dostane stejné kusy chleba. Existuje-li více řešení, považuje se za „hezčí“ to s menším počtem řezů. Pracuje se zde tedy s kmenovými zlomky $\frac{1}{n}$, podobně jako se tomu dělo v historii.

Druhá úloha této kapitoly je gradací první úlohy.[2]

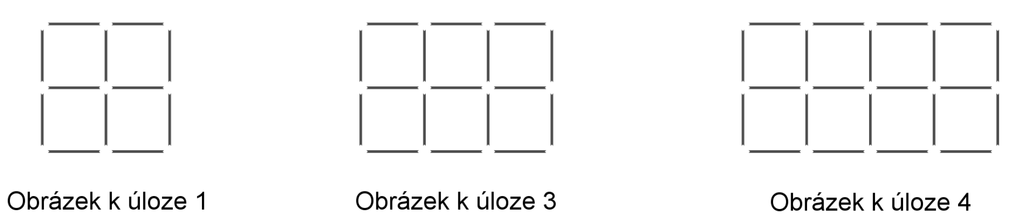
Úloha 2: *Egyptským způsobem rozdělte:* ***a)*** *4 chleby mezi 7 podílníků;* ***b)*** *5 chlebů mezi 9 podílníků;* ***c)*** *7 chlebů mezi 11 podílníků;* ***d)*** *7 chlebů mezi 13 podílníků.*

V obou úlohách této kapitoly jde o vyvolání diskuse nad tím, jak libovolný počet chlebů rozdělit mezi libovolný počet podílníků – tedy o vytvoření generického modelu. Tento vztah lze slovy popsat například takto: „Počet podílníků je o jednu menší než dvojnásobek chlebů. Každý podílník pak dostane $\frac{1}{2}$ a 1/(dvojnásobek počtu podílníků).“ Zápisem pomocí jazyka písmen vzniká vztah $\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot(2n-1)}$. Je pravděpodobné, že jazykem písmen to žáci psát nebudou, avšak je to zobecnění, které pomocí jazyka písmen zapsat lze, a to třeba někdy později.

Dřívka I. V prostředí, resp. kapitole *Dřívka I* (Hejný a kol., 2015c, str. 23–24) se pomocí dřívek staví obrazce na základě určitého vzoru. Je to ideální prostředí pro úlohy na zobecňování, což se objevuje již ve čtvrté úloze zmíněné kapitoly, která však navazuje na předchozí tři úlohy:

Úloha 3: *Obrazec v úloze 1) je složen ze 2 „dvojoken“. Obrazec v úloze 3) ze 3 dvojoken. Přidáním dalšího dvojokna vznikne obrazec vytvořený ze 4 dvojoken (obr. 2.3) Tabulkou evidujte spotřebu dřívek. Zjistěte, kolik dřívek je potřeba na vytvoření* ***a)*** *5;* ***b)*** *7;* ***c)*** *16;* ***d)*** *50 dvojoken.* (Hejný a kol., 2015c, str. 23)

dvojokna	2	3	4	5	6	7	...	16	...	50
dřívka										



Obrázek 2.3: Zadání úlohy 3 (překresleno z (Hejný a kol., 2015c, str. 23))

[2] V první úloze se dělí 2 chleby mezi 4 podílníky, 3 chleby mezi 4 podílníky, 4 chleby mezi 6 podílníků a 5 chlebů mezi 6 podílníků (Hejný a kol., 2015c, str. 21).

Úloha vede žáka k tomu, aby přes konkrétní dvojokna, která si může vymodelovat pomocí dřívek, přišel na princip, jak pro daný počet dvojoken zjistit počet dřívek. První čtyři sloupce tabulky může snadno modelovat či vyčíst z obrázku, další si musí vymodelovat či nakreslit sám. Tím získává potřebné izolované modely, aby mohl najít generický model. Pro 16 dvojoken už je modelování zdlouhavější a pro nalezení počtu dřívek pro 50 dvojoken je již jistě výhodnější najít nějaké pravidlo (generický model), jímž lze počet dřívek určit bez nutnosti modelování či obrázku. Generickým modelem je v tomto případě uvědomění si vztahu „počet dřívek je pětinásobek počtu dvojoken plus dva".

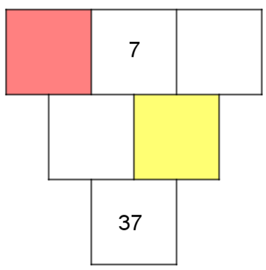
Tato úloha se sice týká zobecňování, avšak nevyžaduje po žákovi abstrakci v podobě použití jazyku písmen čili algebry. Učitel v hodině však může nastínit, jak by šla situace popsat jazykem písmen. V příručce učitele (Hejný a kol., 2015a, str. 66) je dokonce přímo navrhováno, aby učitel řekl například: „Číslo nahoře označíme n, číslo dole označíme d. Když vám řeknu číslo n, jak najdete číslo d?"

V šesté úloze téže kapitoly je pak podobné zobecňování, kdy má žák určit počet obdélníků sestavených ze dřívek (tedy s celočíselnými délkami stran), které mají daný obvod **a)** 14; **b)** 18; **c)** 122 dřívek (Hejný a kol., 2015c, str. 24). Počet dřívek odpovídajících obvodu obdélníku je roven čtyřnásobku počtu obdélníků plus dva, což lze odvodit např. z tabulky, do níž jsou zaznamenávány jednotlivé případy. Algebraicky by tento vztah šel zapsat jako $d = 4 \cdot o + 2$ či alternativně $o = (d-2) : 4$, kde o je počet možných obdélníků a d je počet dřívek odpovídající obvodu.[3]

Téměř každá úloha v prostředí *Dřívka* však může být učitelem modifikována tak, že ji někteří žáci zobecní – najdou generický model či abstraktní vyjádření pomocí jazyka písmen.[4]

Součtové trojúhelníky. Prostředí *Součtové trojúhelníky* je obvykle zaměřené zejména na procvičování sčítání a odčítání, ale v úloze 6) zde jedno pole vybarveno červeně a vystupuje v podstatě jako proměnná (Hejný a kol., 2015c, str. 30).

Úloha 4: *Vyřešte trojúhelník, jestliže červené číslo je **a)** 5; **b)** 6. K zadání patří obr. 2.4.*



Obrázek 2.4: Zadání úlohy 4 (překresleno z (Hejný a kol., 2015c, str. 30))

[3] Úloha zároveň umožňuje žákům objevit, kolika způsoby lze přirozené číslo rozložit na součet přirozených čísel.

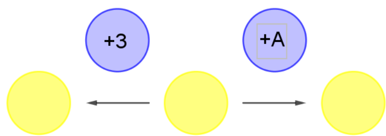
[4] Toto prostředí využil učitel **V** v pracovním listu pro druhou pozorovanou hodinu (viz oddíl 3.2.2). Použil však ještě jednodušší úlohy, než jsou tyto, čímž žáci snadno našli a zobecnili vztah pro n dřívek.

Dále je v učebnici prostřednictvím postaviček Ariany, Kiry a Elmara, jež v učebnici vystupují jako další žáci, nastíněno, jak zjistit číslo ve žlutém poli v závislosti na poli červeném. Arianu napadne si udělat tabulku, k čemuž jsou tak nepřímo vedeni i žáci. K použití tabulky jako nástroje pro odhalení nějakých pravidel navádějí tyto učebnice často. V úloze se tedy v podstatě jedná o funkci, kde červené číslo je nezávislá a žluté číslo závislá proměnná a úkolem je odhalit vztah *červená* + *žlutá* = 30, případně jeho obdoby.

Toto prostředí se objevuje i v kapitole *Jazyk písmen I* v učebnici C (Hejný a kol., 2016, str. 36–37). Aby žáci mohli úlohu řešit s proměnnými, musí dobře znát prostředí a vidět v něm určité struktury.

Za kapitolou *Součtové trojúhelníky* je několik úloh navíc. Ty jsou v učebnicích značeny modrými čísly, proto budou nadále nazývány *modré úlohy*. Jedna z nich používá v zadání písmeno jako proměnnou (nebo parametr). Je to opět úloha z prostředí Hadi (Hejný a kol., 2015c, str. 32).

Úloha 5: *Najděte hada, ve kterém všechna tři čísla ve žlutých polích dávají součet 30. Číslo A je:* ***a)*** *12; . . .* ***g)*** *-6.*[5] *K zadání patří i obr. 2.5.*



Obrázek 2.5: Zadání úlohy 5 (překresleno z (Hejný a kol., 2015c, str. 32))

Na úlohu je možné nahlédnout jako na lineární rovnici s parametrem A:

$$\begin{aligned}(x+3)+x+(x+A) &= 30\\ 3x &= 27-A\\ x &= 9-\frac{A}{3}\end{aligned}$$

Žákovská řešení by patrně vypadala jinak. Byla by nejspíše konkrétní pro zadaná čísla A a případné pravidlo pro výpočet libovolného A by bylo vyřčeno slovně, například: „Když sečtu modrá čísla, odečtu to od 30 a pak to vydělím třemi, získám prostřední číslo.“

Dřívka II. V kapitole *Dřívka II* sice není žádná úloha na zobecňování, ale je zde potenciál, jak učitel může snadno zadat rozšiřující úlohy na zobecnění rychlejším žákům. Zobecňování druhé úlohy kapitoly je však vcelku obtížné a dle Příručky učitele (Hejný a kol., 2015a, str. 80) je výzvou pro špičkové žáky. I těm však může trvat, než přijdou na řešení, a je možné, že úloha zůstane po nějakou dobu nevyřešená.

[5] Všechna zadání **a)** – **g)** není třeba uvádět, jedná se však o celá čísla dělitelná třemi.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Obrázek 2.6: Tabulka 100

Tabulka 100. *Tabulka 100* (obr. 2.6) je prostředí, které má za cíl rozvíjet porozumění desítkové soustavě (Hejný a kol., 2015c, str. 50). Jde o tabulku, v níž je šipkami zaznamenáván pohyb a určován součet čísel, kterými cesta prochází.

V tomto prostředí se objevuje písmeno jako proměnná, jsou zde i jakési výrazy, např. výraz $S(n \downarrow) - S(n \uparrow) + n$ odpovídá rozdílu součtu čísla n a čísla vyskytujícího se o řádek pod ním a součtu čísla n a čísla vyskytujícího se o řádek nad ním. Tedy když $n = 63$, pak hodnota výrazu je $(63 + 73) - (63 + 53) = 73 - 53 = 20$.

Dvě úlohy se zaměřují zejména na orientaci v tabulce a na porozumění desítkové soustavě. Další čtyři úlohy jsou zadané pomocí písmene n, další pak pomocí písmene z (v té je třeba najít takové z, aby byla po dosazení z do výrazu hodnota výrazu co největší). Ve dvou z nich je třeba za n dosadit ve výrazech dané číslo a vypočítat výraz (a hledat v tabulce určité zákonitosti), jazyk písmen zde má kódovací sílu. V dalších dvou úlohách má jazyk písmen kromě kódovací síly i sílu uchopovací a vyjadřovací – žák je může řešit tak, že si součet cesty vyjádří pomocí neznámého výchozího čísla a čísel, které k němu přičítá (např. $S(n \downarrow) = n + (n + 10)$), pravděpodobně však bude takové úlohy řešit metodou pokus-omyl.

Z hlediska práce s proměnnou je zajímavá poslední úloha kapitoly (Hejný a kol., 2015c, str. 51), jelikož zde lze použít jazyk písmen k argumentaci a využít všech jeho sil (viz oddíl 1.4).

<u>Úloha 6</u>: *Najděte všechna n, pro která dává číslo $S(n \rightarrow\rightarrow)$ zbytek* 1 *po dělení* 3.

Žáci jsou tímto způsobem vedeni k objevení toho, že tři za sebou jdoucí čísla jsou dělitelná třemi, tudíž takové n nelze najít. Ačkoli jazyk písmen žáci nemusí použít, měli by toto být schopni zdůvodnit. Pokud se žák rozhodně úlohu uchopit pomocí jazyka písmen, vede ho k tomu uchopovací síla jazyka písmen. A pokud bude schopen užít vyjadřovací a transformační sílu tak, aby zdůvodnil, že $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$ je číslo dělitelné třemi pro libovolné n,[6] objeví zákonitost, a tak v této úloze použil všechny síly jazyka písmen.

Egyptské dělení chlebů II. Kapitola *Egyptské dělení chlebů II* (Hejný a kol., 2015c, str. 58) navazuje na předchozí poznatky žáků z tohoto prostředí. Opět zde jsou dvě úlohy, které vedou na určité vazby, které by šly jazykem písmen vyjádřit. Žáci však k tomuto zobecnění učebnicí nejsou přímo vedeni.

Krokování. V kapitole *Krokování II* (Hejný a kol., 2015c, str. 61) se objevuje nový pokyn, a to „čelem vzad“, který z matematického hlediska představuje minus před závorkou. To je důležitá propedeutika pro úpravu algebraických výrazů, jelikož právě minus před závorkou může být při nástupu proměnných problémové, tedy čím více zkušeností žáci budou mít, tím snáz objeví generický model, který uplatní při úpravách algebraických výrazů.

Kromě odečítání závorky je prostředí Krokování nástrojem pro výpočty a pro řešení rovnic s jednou i se dvěma neznámými. Též umožňuje žákům získat představy o záporných číslech. Děti, které jsou vyučovány metodou založenou na budování schémat od prvního stupně, se s krokováním setkaly nejspíše už v první třídě, kdy se pomocí krokování učily sčítat a odčítat.

Váhy. V kapitole Váhy (Hejný a kol., 2015c, str. 67) se objevují balíčky, v nichž je zabaleno závaží a předmět. Pokud jsou na jedné straně váhy dva balíčky, při přepisu do rovnice se jedná o roznásobení závorek. Ačkoli jsou váhy prostředím, které spíše spadá do oblasti rovnic, roznásobování závorek se žákům hodí při zkoumání proměnných a při zjišťování, zda různé výrazy mohou být ekvivalentní.[7]

Číselná osa. V tomto prostředí jsou propojována čísla s geometrií a později i s algebrou (Hejný a kol., 2015c, str. 69). Na číselné ose leží všechna reálná čísla, žáci před začátkem této kapitoly však znají jen čísla celá (se zlomky počítají, ale zatím je nechápou jako racionální čísla, která lze umístit na číselnou osu). V této kapitole na číselnou osu umisťují i zlomky. Pro nás je zajímavá pátá úloha kapitoly.

<u>Úloha 7</u>: *Na číselné ose jsou vyznačena dvě čísla. Číslo* 1 *a zatím neznámé číslo* a. *Vzdálenost mezi nimi je* 30 *mm. Zjistěte* a, *když víte, že:* ***a)*** *číslo* 1 *je střed úsečky tvořené čísly* 0 *a* a; ***b)*** *číslo* a *je střed úsečky tvořené čísly* 0 *a* 1; ***c)*** *vzdálenost mezi čísly* 0 *a* 1 *je* 20 *mm.*

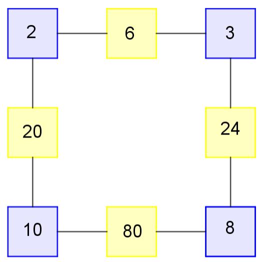
[6] V Tabulce 100 však nemusí mít výraz $n \to\to$ smysl (např. pro $n = 29$), jelikož z pole 29 nelze jít dva kroky napravo.

[7] Díky této kapitole znali žáci učitelů **P** a **V** roznásobování závorek, což jim pomohlo při zdůvodňování ekvivalence různých vyjádření v úloze 34. Viz kapitola 3.

Písmeno a zde vystupuje jako parametr, o němž nevíme, zda je menší či větší než 1 ani zda je kladný. Z těchto možností může plynout víc řešení, což se zde děje v úloze c).

Součinové čtverce. V prostředí *Součinové čtverce* (Hejný a kol., 2015c, str. 71–72) jde obvykle o procvičování početních operací $(+, -, \cdot, :)$. Ve vyřešeném součinovém čtverci (obr. 2.7) je násobkem sousedních rohových čísel číslo středové.

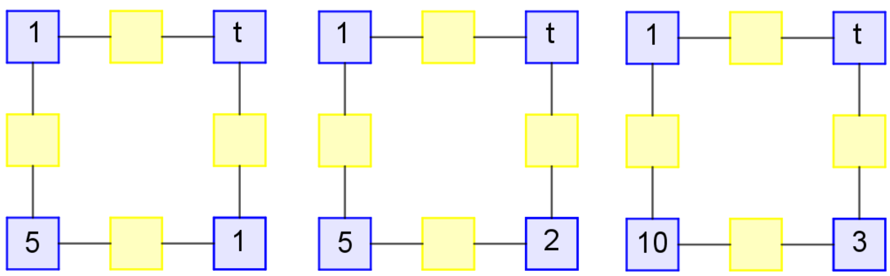
V součinovém čtverci je jednak třeba doplnit chybějící čísla (jsou obvykle zadaná jen nějaká z nich) a jednak lze počítat součet S všech středových čísel. V našem případě by $S = 20 + 6 + 24 + 80 = 130$.



Obrázek 2.7: Vyřešený součinový čtverec

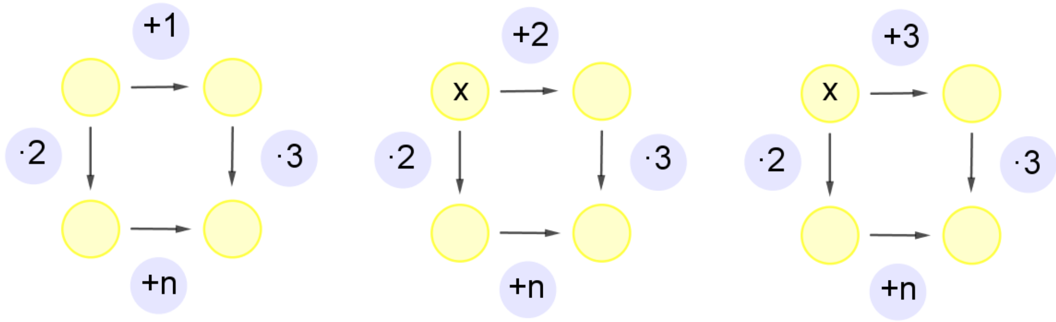
Toto prostředí se primárně algebry netýká, avšak v zadání jedné úlohy se vyskytuje proměnná t (kódovací síla jazyka písmen).

<u>Úloha 8</u>: *Vyřešte a určete součet S čtyř středových čísel (obr. 2.8). Za t zvolte postupně čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 18 a 25. Výsledky zapište do tabulky.*



Obrázek 2.8: Zadání úlohy 8 (překresleno z (Hejný a kol., 2015c, str. 72))

Šipkové grafy II. Toto prostředí je jednou z možných vizualizací lineárních rovnic (Hejný a kol., 2015c, str. 75–76). Šipkový graf je v podstatě dvojice *Hadů*, které mají stejný začátek a konec. V učebnici již byla dříve jedna kapitola, v níž žáci šipkové grafy řešili, avšak až ve druhé úloze této kapitoly vystupuje n jako proměnná a v dalších dvou úlohách vystupují písmeno n jako nezávislá a písmeno x jako závislá proměnná funkce.



Obrázek 2.9: Zadání úloh 9 vlevo, 10 uprostřed, 11 vpravo (překresleno z (Hejný a kol., 2015c, str. 75 a 76))

Úloha 9: *U dolní šipky (obr. 2.9 vlevo) je písmeno n. Když za toto písmeno dosadíme číslo, dostaneme šipkový graf. Vyřešte tento šipkový graf, jestliže n je:* ***a)*** *5;* ***b)*** *4;* ***c)*** *3;* ***d)*** *2;* ***e)*** *1. (Hejný a kol., 2015c, str. 75)*

Tato úloha vede žáky k objevení vztahu, že číslo v levém rohu grafu klesá, resp. roste stejně jako n. Některý žák možná objeví i souvislost, že toto číslo je o 3 menší než n. Tedy pokud číslo v levém horním rohu je označeno x, tak $x = n - 3$. Učitel však dle příručky žákům nemá ani naznačit, že tento vztah mají hledat, jelikož k tomu navádí další dvě úlohy.

Úloha 10: *V grafu (obr. 2.9 uprostřed) máme již dvě písmena: n a x. Když zvolíme $n = 8$, najdeme $x = 2$. Výsledek jsme zapsali do prvního sloupce tabulky. Doplňte scházející čísla x do dalších sloupců tabulky.*

n	8	9	10	26	6	5	2	0	-1
x	2								

V této úloze se ukazuje funkční závislost proměnných x a n. Žáci volí číslo n a na základě toho spočítají hodnotu čísla x. Žáci jsou rovnou vyzváni k zapisování výsledků do tabulky. Z ní může vyplynout vztah $x = n - 6$. Písmeno n je zde v roli nezávislé proměnné a písmeno x v roli závislé proměnné.

Na rozdíl od předchozí úlohy zde vzrůstá „horní modré číslo“ o 1 – v předchozí úloze bylo přičítáno číslo 1, zde číslo 2.

Úloha 11: *Když zvolíme v grafu (obr. 2.9 vpravo) $n = 11$, najdeme $x = 2$. To je zapsáno v prvním sloupci tabulky. Doplňte scházející čísla x do dalších sloupců tabulky.*

n	11	10	9	8	2	1	0	-1	-6
x	2								

V této úloze dochází opět k drobné obměně zadání, horní modré číslo je nyní +3. Opět je žákovi nabídnuta tabulka, jež má doplnit. Z tabulky plyne vztah $x = n - 9$. Někteří žáci možná uvidí souvislost mezi všemi třemi úlohami. Je však možné, že žádný ze vztahů děti nevyjádří pomocí písmen.

Zlomky II. V této kapitole se objevují proměnné x a y, které jsou svázány vztahem $y = 2x$ a je rovněž dán jejich součet (Hejný a kol., 2015c, str. 77).

Úloha 12: *Najděte přirozená čísla x a y taková, aby bylo $\frac{1}{2} = \frac{x}{y}$ a navíc aby:* ***a)*** *$x + y = 6$;* ***b)*** *$x + y = 9$, ...* ***f)*** *$x + y = 100$.*

2.2 Matematika B

Učebnice Matematika B (Hejný a kol., 2015b) navazuje na učebnici Matematika A. Jelikož však záleží zejména na žácích, jak rychle zvládnou vyřešit úlohy z učebnice A, nelze obecně říci, pro jaké ročníky je učebnice B určena. Pokud třída již zná metodu založenou na budování schémat z prvního stupně, bude pro ně učebnice A spíše jednodušší – úlohy vyřeší rychleji než žáci tříd, v nichž se s metodou a s jednotlivými prostředími žáci setkávají poprvé. Obvykle však na učebnici B dojde v druhém pololetí 6. ročníku s tím, že se dodělá v prvním pololetí 7. ročníku.

V této učebnici se již jazyk písmen používá více, například při zavádění různých domluv. Zadání mnoha úloh již míří na používání písmen. Zatím však k aktivnímu používání jazyku písmen není vedena celá třída – spíše se předpokládá, že k němu dojdou rychlejší žáci. Postupně jsou však písmena žákům předkládána, aby si na ně mohli zvyknout.

Desetinná čísla. V kapitole *Desetinná čísla* (Hejný a kol., 2015b, str. 9) se písmena vyskytují v zadání první úlohy. Tato písmena zde ale vystupují v roli jednotky, nikoli proměnné.

Obsah I. Hned na další straně, v kapitole *Obsah I* (Hejný a kol., 2015b, str. 10), se opět objevují jednotky. Rovněž je zde domluvou zavedena druhá mocnina, a to jak na příkladu čísel, tak obecně jazykem písmen.

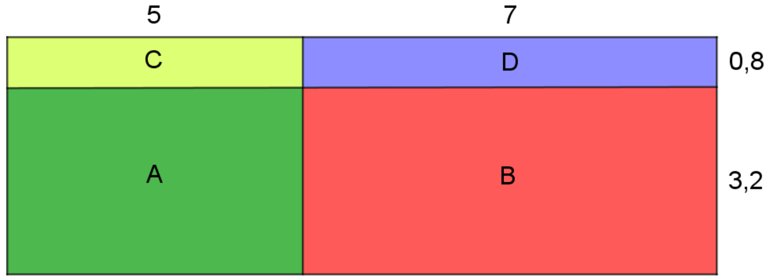
Domluva: *Zápis* $5 \cdot 5$ *píšeme krátce* 5^2 *(čteme* pět na druhou*). Podobně píšeme* $17 \cdot 17 = 17^2$*, ale též* $t \cdot t = t^2$ *nebo* $dm \cdot dm = dm^2$*.*

Mocnina je zde uvedena jako schéma, které neplatí pouze pro čísla, ale i pro písmena, ať už jsou v roli proměnné (např. t) nebo v roli jednotky (např. dm). Písmena zde mají kódovací sílu.

Konstrukce. Následující kapitola *Konstrukce* (Hejný a kol., 2015b, str. 12) je čistě geometrická. Jelikož je však geometrie jedním z pilířů algebry, považuji za patřičné ji zde zmínit. Geometrické objekty zde dostávají písmenné názvy, které jsou používány k lepší orientaci v konstrukci a k jejímu zápisu. V zápisu konstrukce vystupují velká a malá písmena jako symboly zastupující dané geometrické objekty. Hned první úloha kapitoly pracuje se zápisem konstrukce a jeho „překladu“ do symbolického jazyka.

Obsah II. V kapitole *Obsah II* (Hejný a kol., 2015b, str. 15) jde o prohloubení znalostí o obsahu obdélníku, rovněž jde o počítání s desetinnými čísly. Druhá úloha kapitoly však užívá písmen jako parametrů či neznámých (podle toho, zda obrázek je či není součástí zadání).

Úloha 13: *Obdélník na obrázku 2.10 má rozměry* 12×4 *a je rozdělený na čtyři obdélníky A, B, C a D. Obsah zeleného obdélníku je* $|A| = 16$. ***a)*** *Zjistěte obsahy* $|B|$, $|C|$, $|D|$. ***b)*** *Najděte číslo* p *tak, aby* $|B| = p \cdot |D|$. ***c)*** *Najděte číslo* q *tak, aby* $|D| = q \cdot |C|$.



Obrázek 2.10: Obrázek k zadání úlohy 13 (překresleno z (Hejný a kol., 2015b, str. 15))

Další úloha vyzývá žáky, aby překreslili obrázek 2.10 a změnili čísla u délek tak, aby obsahy menších obdélníků splňovaly dané vztahy. Tedy za p a q z předchozí úlohy jsou dosazována konkrétní čísla, avšak není to patrné na první pohled, tedy předpokládám, že to ani žáci tak vnímat nemají. Navíc tato úloha má mnoho řešení, záleží na poměrech stran, nikoli pouze na jejich konkrétních délkách.

V „modrých" úlohách za touto kapitolou jsou navíc úlohy na zobecňování. První z těchto úloh je z prostředí *Egyptského dělení chlebů*.

Úloha 14: *Honza tvrdí, že když se čtyři chleby egyptsky dělí mezi 6, 9, 12, 15, 18, ... podílníků, tak každý může dostat dva kousky. Má Honza pravdu?*

Úloha přímo míří na hledání nějakého vztahu. Podílníků je zde $3n$, děleny jsou čtyři chleby, tedy hledaný vztah lze pomocí jazyka písmen vyjádřit jako $\frac{4}{3n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n}$. V příručce učitele však je upozornění, že od žáků tuto odpověď učitel nevyžaduje (Hejný a kol., 2015a, str. 137).

Další dvě úlohy navazují na úlohu 12 v učebnici A. Z hlediska jazyka písmen nepřináší nové poznatky, cílí na ekvivalenci zlomků.

Objem. V kapitole *Objem* (Hejný a kol., 2015b, str. 21–22) se žáci setkávají s krychlí o hraně 1 dm v souvislosti s jejím objemem 1 l. Stejně jako v kapitole *Obsah I* je v domluvě v červeném rámečku zavedena druhá mocnina, je zde třetí mocnina zavedena jak pomocí čísla, tak pomocí písmene jako jednotky (dm) i jako zobecněného čísla (t).

Dělitelnost. Téma dělitelnosti prostupuje několik ročníků druhého stupně ZŠ, avšak v díle B se objevuje nejčastěji.

V kapitole *Dělitelnost I* (Hejný a kol., 2015b, str. 23–25) se objevuje symbolický zápis dělitelnosti hned na začátku, a to včetně zápisu pomocí jazyka písmen. V červeném rámečku je připomenutí: *Při dělení se zbytkem platí, že* $14 : 4 = 3$ *(zb 2). Pomocí písmen to zapíšeme* $m : n = p$ *(zb* q*),* $0 \leq q < n$.

Druhá úloha této kapitoly umožňuje zapsat výsledky pomocí písmen.

Úloha 15: ***a)*** *Pěti různými způsoby doplňte dělení se zbytkem* $\square : \square = 2$ *(zb 1). Stejnou úlohu řešte pro:* ***b)*** $\square : \square = 5$ *(zb 2);* ***c)*** $\square : \square = 4$ *(zb 0);* ***d)*** $\square : \square = 3$ *(zb 5).*

Jelikož má tato úloha mnoho řešení, je jazyk písmen vhodný pro zápis všech řešení najednou. Například v úloze **a)** by výsledek zapsaný pomocí jazyka písmen mohl vypadat například $(2a + 1) : a$. Učitel může takový shrnující zápis žákům nabídnout, avšak nevyžaduje ho.

Brzy na to následuje kapitola *Dělitelnost II* (Hejný a kol., 2015b, str. 28–29), v níž je hned na začátku zavedeno označení dělitele, a to pomocí písmen.

Označení: *Zápisem* $5 \mid 15$ *označujeme výrok „číslo 5 je dělitel čísla 15“ nebo „číslo 15 je dělitelné číslem 5“. Toto značení můžeme zapsat pomocí písmen takto: Nechť* $p, n \in \mathbb{N}_0, p \neq 0$. *Zápisem* $p \mid n$ *označujeme výrok „číslo* p *je dělitel čísla* n*“ nebo „číslo* n *je dělitelné číslem* p*“. Zápisem* $p \nmid n$ *označujeme výrok „číslo* p *není dělitel čísla* n*“ nebo „číslo* n *není dělitelné číslem* p*“.*

Následující úlohy pak mají za cíl ověřit, zda žáci označení rozumí.

Čtvrtá a šestá úloha kapitoly je z prostředí **algebrogramů**, které s dělitelností souvisí a kde vystupují písmena na místě číslic v zápisu čísel, avšak jsou považována rovněž za čísla. Písmena jsou v roli neznámých či proměnných.

Úloha 16: *Najděte trojmístná čísla* ABA *a* BAB*, jejichž rozdíl je dělitelný osmi.*

Číslo ABA může být číslo 242, číslo BAB je potom 424. Žáci mají hledat rozdíl $|ABA - BAB|$ dělitelný osmi. Více o tomto prostředí v odstavci Algebrogramy níže.

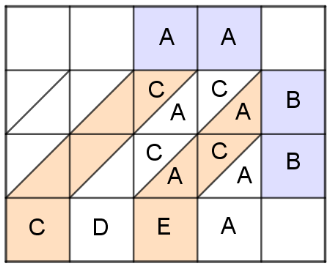
Indické násobení. Za kapitolou *Rodina* jsou dvě modré úlohy navíc (Hejný a kol., 2015b, str. 31). Druhá z nich je z prostředí *Indického násobení*, ale je velmi blízko též algebrogramům. Indické násobení je prostředí, které nabízí jiný algoritmus násobení, umožňuje žákům získat hlubší vhled do desítkové soustavy a do algoritmu samotného. „Klasický“ algoritmus násobení pod sebou je tomu indickému podobný, avšak v indickém násobení je všechno napsáno na papíře a není třeba si pamatovat čísla větší než deset a přidávat je k vyšším řádům. V prostředí indického násobení je možné zadat úlohy i tak, že nějaká čísla hotového výpočtu jsou zakryta a úkolem je ta čísla najít. Na tomto přístupu „z druhé strany“ se spojuje dělitelnost a kombinatorika.

V této úloze jsou neznámé všechny číslice, avšak jelikož je znám algoritmus, lze najít vztahy a podmínky, které musí číslice splňovat.

Úloha 17: *Na obrázku 2.11 jsou A, B, C, D, E navzájem různé, nenulové číslice. Najděte je.*

Písmena zde vystupují v rolích neznámých číslic, tedy v podobných rolích jako v algebrogramech. Jelikož je to „zašifrovaný“ výpočet, platí zde pravidla algoritmu – tedy víme, že $A \cdot B = CA$[8] a též $D = 2 \cdot C + A$ a $E = 2 \cdot A + C$. Pomocí těchto vztahů lze dojít k řešení lépe než metodou pokus-omyl.

[8]Zápisem CA se zde rozumí dvojciferné číslo, které má v řádu desítek číslici C a v řádu jednotek číslici A – tedy stejně jako v prostředí algebrogramů.



Obrázek 2.11: Obrázek k zadání úlohy 17 (překresleno z (Hejný a kol., 2015b, str. 31))

Tabulka 100. V celé kapitole *Tabulka 100* (Hejný a kol., 2015b, str. 34–35) vystupují písmena jako proměnné (obvykle k), neznámé (n) a operátory $S()$. Například v první úloze kapitoly je úkolem najít takové číslo k, aby **a)** $S(k \rightarrow\downarrow) = 24 \ldots$ **d)** $S(k \rightarrow\downarrow) = 72$ (Hejný a kol., 2015b, str. 34). Část úlohy d) je zajímavá proto, že ji lze řešit pomocí rovnice $k + (k + 1) + (k + 11) = 72$, po úpravách pak $k = 20$. To ale nemá řešení, jelikož z pole 20 nelze jít v Tabulce 100 doprava (viz tabulka 2.6).

Následující tři úlohy této kapitoly se týkají dělitelnosti číslem 3 v souvislosti s cestami v Tabulce 100. U všech tří úloh lze argumentovat pomocí jazyka písmen, avšak učebnice k tomu přímo nevyzývá.

Pátá úloha kapitoly je však zaměřená na to, aby žáky dovedla k používání písmen k uchopení obecných situací (Hejný a kol., 2015a, str. 157).

Úloha 18: *Mirka zvolila číslo n. Spočítala číslo $S(n \rightarrow)$ a číslo $S((n-1) \leftarrow)$. Zjistila, že pokud zápisy mají smysl, rozdíl těchto čísel je vždycky 4. Je zjištění Mirky správné?*

Žáci si zde pro konkrétní představu mohou dosazovat čísla za n, a tím si několika izolovanými modely utvrdit, co znamená výraz $(n - 1)$. Dále se pomocí písmen dají zapsat i součty $S(n \rightarrow) = n+(n+1)$ a $S((n-1) \leftarrow) = (n-1)+(n-2)$. Z toho pak lze najít rozdíl výrazů $2n + 1$ a $2n - 3$, který je 4. Samozřejmě pro některá čísla n nebudou mít některé výrazy smysl. Tato úloha dává námět k úpravám výrazů a k používání písmen jako obecných čísel.

Za touto kapitolou jsou tři modré úlohy (Hejný a kol., 2015b, str. 35). Třetí z nich se týká rozvinutého zápisu čísel.

Úloha 19: *Zvolte tři různé číslice od 1 do 9 a vytvořte z nich všechna trojciferná čísla. Čísla sečtěte. Součet vydělte ciferným součtem zvolených číslic. Co vyjde? Proč?*

Ze tří číslic lze utvořit šest trojciferných čísel. Číslice lze pro obecné řešení úlohy označit písmeny. Ze tří číslic A, B, C pak vznikne 6 čísel: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, která jsou chápána jako algebrogram, tedy A je v čísle ABC v řádu stovek, B v řádu desítek a C v řádu jednotek. Tedy $ABC = 100 \cdot A + 10 \cdot B + C$. Součet takto rozepsaných všech šesti čísel lze pak vyjádřit jako

$$200 \cdot (A + B + C) + 20 \cdot (A + B + C) + 2 \cdot (A + B + C) = 222 \cdot (A + B + C).$$

Tedy pro libovolné tři číslice vyjde po vydělení ciferným součtem 222. Samotné hrátky s číslicemi nevyžadují použití jazyka písmen, ale pokud je vyžadováno zdůvodnění, jsou písmena vhodnou volbou.

Kombinatorika. V kapitole *Kombinatorika* (Hejný a kol., 2015b, str. 36) vystupuje písmeno n v roli zobecněného čísla.

Úloha 20: *Zjistěte, kolik různých věží lze postavit z jedné modré a **a)** 2, **b)** 3, **c)** 5, **d)** 8, **e)** 20 bílých krychlí. **f)** Zjistěte, kolik různých věží lze postavit z jedné modré a n bílých krychlí.*

K písmenu n se zde žáci dopracují pomocí gradace. Už po prvních několika věžích najdou generický model, tedy že počet krychlí je o 1 menší než počet věží. V úloze f) pak tento generický model mají žáci zapsat jazykem písmen, tedy pro n bílých krychlí existuje $n + 1$ věží. Dle příručky učitele je tento vztah schopna vytvořit většina žáků (Hejný a kol., 2015a, str. 159). U dalších úloh této kapitoly se v učebnici po žácích zobecnění pomocí písmene n nepožaduje, avšak v příručce je uvedeno, že učitel může hloubavým žákům dát otázku, která na zobecnění pomocí písmen vede.

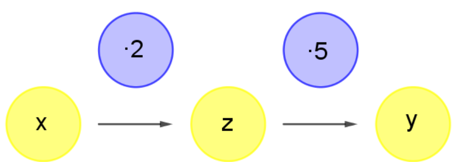
Dělitelnost III. Kapitola se zabývá ciferným součtem (Hejný a kol., 2015b, str. 40–41). Jeho zápis a definice jsou uvedeny na začátku kapitoly, přičemž je použit jazyk písmen.

Domluva: ***Ciferný součet*** *čísla* $n \in \mathbb{N}_0$ *je součet všech jeho cifer. Budeme jej označovat* $CS(n)$*. Např.* $CS(105) = 1+0+5 = 6$ *nebo* $CS(290) = 2+9+0 = 11$.

Úlohy, jež následují po definici ciferného součtu, jsou typu „kolik dvoumístných, resp. trojmístných čísel n má $CS(n) = \dots$“. Tedy využívají kódovací sílu písmene n. Podobně tomu je i v další kapitole o dělitelnosti na straně 52.

Dvě úlohy této kapitoly jsou z prostředí *Hadi*, přičemž jedna je gradací druhé (Hejný a kol., 2015b, str. 41). Úlohy cílí na dělitelnost čísel dvěma, pěti a deseti, avšak písmena x, y, z zde vystupují jako proměnné a neznámé.

Úloha 21: *Vyřešte hada z obrázku 2.12 pro: **a)*** $x = 18$; ***b)*** $y = 880$, … ***e)*** *Znáte číslo* y*. Jak zjistíte číslo* x*?*



Obrázek 2.12: Obrázek k zadání úlohy 21 (překresleno z (Hejný a kol., 2015b, str. 41))

V případě a) vystupuje x jako proměnná, za níž má být dosazeno číslo 18. Tím se písmena z a y stanou neznámými. V případě b) žáci obdobně dosazují za proměnnou y, čímž se z x a z stanou neznámé. V případě f) jde o vyslovení pravidla, nalezení vztahu, nepředpokládá se, že by žáci řešení zapsali algebraickým vztahem. S hadem z obrázku 2.11 pracuje i další úloha, kde je úkolem najít číslo y tak, aby písmena x, resp. z splňovala určité podmínky.

Úloha 22: *Jsou dány číslice 0, 0, 4 a 5. Zvolte tři z nich a sestavte trojmístné číslo y tak, aby v hadu (obr. 2.12):* ***a)*** *číslo x bylo celé;* ***b)*** *číslo z bylo celé, ale číslo x nebylo celé. Hledejte více řešení.*

Algebrogramy. Prostředí *Algebrogramy* (Hejný a kol., 2015b, str. 44) používá velká písmena. Písmeno značí číslici, ale zároveň je považováno i za číslo. Různá písmena představují různé číslice. Algebrogram je tedy zápis nějakého výpočtu, v němž jsou číslice „zašifrovány“ do písmen, např. $AB + B = 66$. To může být výpočet $58 + 8 = 66$ nebo $63 + 3 = 66$, tedy algebrogram má dvě řešení. Žáci si v tomto prostředí osvojují práci s písmeny ve výpočtech, je to tedy velmi významná propedeutika jazyka algebry. Zároveň toto prostředí vede k hlubšímu porozumění desítkové soustavě.

Triky, kouzla. V modré úloze za kapitolou *Osová souměrnost* (Hejný a kol., 2015b, str. 49) představuje postavička kouzlo.

Úloha 23: *Elmar přišel s kouzlem. „Myslete si dvoumístné číslo. Přičtěte k němu 1 a to pak vynásobte 2. Stejnou operaci udělejte ještě dvakrát. Od výsledku odečtěte 14 a toto číslo vydělte dvěma. Řekněte mi, kolik vám vyšlo, a já vám řeknu číslo, které jste si mysleli.“*

Žáci nejspíše Elmarův trik objeví pomocí izolovaných modelů, pokud však úloha žáky zaujme a budou chtít vymýšlet svá kouzla, jazyk algebry se jim bude hodit. Elmarovo kouzlo by šlo pomocí písmen zapsat jako

$$((((x + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 - 14) : 2,$$

což lze upravit na tvar

$$(((2x + 3) \cdot 2 + 1) \cdot 2 - 14) : 2 = ((4x + 7) \cdot 2 - 14) : 2 = (8x + 14 - 14) : 2 = 4x.$$

Elmar tedy pouze vydělí čtyřmi to, co komu vyšlo, a uhodne tak, co si dotyčný myslel za číslo.

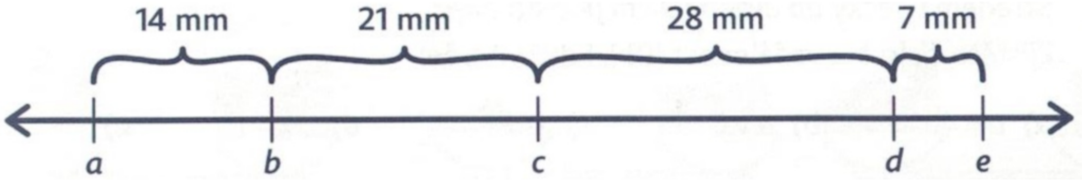
Prvočísla. V této kapitole jsou definovaná prvočísla, a to pomocí jazyka písmen (Hejný a kol., 2015b, str. 53).

Domluva: *Číslem budeme v této kapitole rozumět vždy přirozené číslo. Číslo m, které lze psát jako součin $m = a \cdot b, a > 1, b > 1$, nazýváme* ***číslo složené.*** *Číslo, které není složené a je větší než 1, nazýváme* ***prvočíslo.***

Dále se v této kapitole s proměnnými nesetkáme, kromě jedné úlohy, kde je úkolem najít čísla $n < 50$, která lze zapsat jako součin daného počtu prvočísel. Zde se však jedná spíše o úlohu na třídění dat, písmeno n v zadání zde nehraje důležitou roli.

Číselná osa. V kapitole *Číselná osa* (Hejný a kol., 2015b, str. 55) písmena a, b, c, d, e vystupují jako parametry a neznámé (po dosazení hodnoty za dvě z nich se ostatní stávají neznámými).

Úloha 24: *Na obrázku 2.13 je část číselné osy. Známe dvě z čísel a, b, c, d, e. Zjistěte zbývající tři čísla. Doplňte tabulku.*



Obrázek 2.13: Obrázek k zadání úlohy 24. Zdroj: (Hejný a kol., 2015b, str. 55)

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*f)*	*g)*	*h)*	*i)*	*j)*	*k)*	*l)*	*m)*	*n)*	*o)*
a	*0*			*-3*		*0*	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$				$-\frac{2}{3}$			
b			*3*	*-1*	*-5*			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	*0*			*2:3*
c		*1*			*1*	*5:2*			*1,8*		*5:3*		*5:6*	*1*	
d										*1,9*					$\frac{11}{6}$
e	*10*	*2*	*11*				$\frac{11}{2}$		*3,3*				$\frac{5}{3}$	$\frac{11}{6}$	

Žáci podle tabulky dosazují za písmena dané hodnoty a dopočítávají zbylé tři neznámé.

Podobného významu jsou písmena v dalších úlohách téže kapitoly. Ve dvou z nich jsou navíc dány vztahy, které musí parametry splňovat.

Dělitelnost V a VI. Ještě dvě kapitoly se zabývají dělitelností, jsou to kapitoly *Dělitelnost V* (Hejný a kol., 2015b, str. 59–61) a *Dělitelnost IV* (Hejný a kol., 2015b, str. 73–74). V první z nich je definován společný dělitel a největší společný dělitel, a to pomocí jazyka písmen. Sedmá úloha této kapitoly je rovněž zadaná jazykem písmen.

Úloha 25: ***a)*** *Miriam tvrdí, že když se číslo* $4 \cdot a$ *dá dělit číslem* 5*, tak i číslo* a *se dá dělit číslem* 5*. Stručně zapsáno:* $5|(4 \cdot a) \Rightarrow 5|a$*. Má Miriam pravdu?*
b) *Naomi tvrdí, že totéž platí i pro číslo* 6*. Tedy* $6|(4 \cdot a) \Rightarrow 6|a$*. Má Naomi pravdu?*

V této úloze žáci kromě ověřování hypotéz zapsaných pomocí jazyka písmen rozvíjejí porozumění výrokové logice a symbolickému zápisu. Proměnná a zde vystupuje jako zobecněné číslo.

V posledních dvou úlohách kapitoly je proměnná n použita podobně jako v předchozích kapitolách zabývajících se dělitelností.[9]

Ve druhé z těchto kapitol je definován společný násobek a nejmenší společný násobek, opět jazykem písmen. Poslední úloha kapitoly využívá jazyk písmen nejen pro zadání, ale žáci s písmeny již musí umět pracovat.

Úloha 26: *Nechť* a, b, c *jsou různá prvočísla. Označme* $m = a{\cdot}b$ *a* $n = a{\cdot}c$*. Pomocí čísel* a, b, c *zapište* $NSD(m,n)$ *i* $nsn(m,n)$*. Řešte nejprve pro:* ***a)*** $m = 6$, $n = 10$*;* ***b)*** $m = 6$, $n = 4$*;* ***c)*** $m = 15$, $n = 10$*;* ***d)*** $m = 35$, $n = 55$*;* ***e)*** $m = 143$, $n = 55$.

[9] Najděte číslo n, pro které platí ...

Tato úloha je náročná na pochopení, jelikož je zadaná pomocí několika proměnných, navíc některá písmena vystupují v roli operátorů (nsn, NSD). Cílem úlohy je podle příručky (Hejný a kol., 2015a, str. 195) dojít k abstraktnímu poznatku, že $nsn(m,n) = a \cdot b \cdot c$ a $NSD(m,n) = a$. Ukazuje se též souvislost rozkladu na součin prvočísel a největšího společného dělitele, respektive nejmenšího společného násobku.

Zlomky. Téma zlomků je v této řadě učebnic rozptýlené do více ročníků stejně jako jiná témata. Učebnice B se dostává v kapitole *Zlomky* (Hejný a kol., 2015b, str. 62–63) ke sčítání kmenových zlomků. Pomocí gradovaných úloh dostávají žáci dostatek izolovaných modelů k objevení pravidla, generického modelu či abstraktního poznatku. V jedné úloze jsou žáci vyzváni k objevení tohoto pravidla.

<u>Úloha 27</u>: *Najděte jednoduché pravidlo, jak je možné snadno najít součet* $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$, *kde* m *a* n *jsou přirozená čísla.*

Je možné, že žáci budou pravidlo formulovat slovně raději než pomocí jazyka písmen, nicméně někteří z nich by mohli být schopni pravidlo formulovat i symbolicky $\frac{m+n}{m \cdot n}$, Učitel je k tomu může pobídnout.

Úhel I. Kapitola *Úhel II* se zabývá úhly v trojúhelníku. Pomocí plného, přímého a pravého úhlu žáci odvozují velikosti úhlů v dalších trojúhelnících a vztahy dvojic vrcholových, souhlasných, střídavých a vedlejších úhlů. Do přehledu je tato kapitola zařazena proto, že ačkoli se zde pracuje s řeckými písmeny, která označují úhly, jedná se v podstatě o proměnné či neznámé. Vztahy mezi úhly lze zapisovat algebraicky, při vyšetřování např. podobnosti jsou pak tyto vztahy porovnávány.

2.3 Matematika C

Dle časového plánu v Příručce učitele (Hejný a kol., 2017, str. 16–18) přichází na řadu učebnice *Matematika C* (Hejný a kol., 2016) v rozmezí září až prosinec 7. ročníku.

V dílu C se na rozdíl od předchozích učebnic objevují náměty na témata ročníkových prací. To jsou náročnější úlohy, které vyžadují hlubší porozumění problematice, tudíž žákům zaberou více času a úsilí. Pro nadané žáky však mohou být ročníkové práce velmi motivující. Jelikož jde o náročnější úlohy, častěji se v nich objevuje zobecňování. Témata ročníkových prací často navazují na aktuálně probírané téma v učebnici, jsou jakýmsi rozšířením učiva.

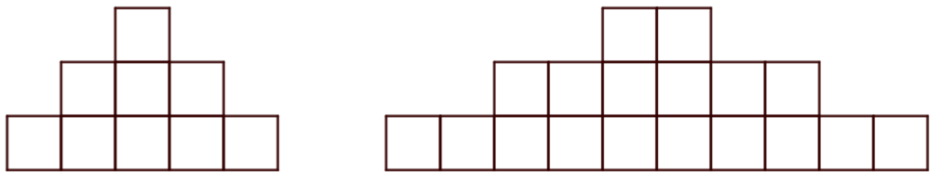
Kapitoly učebnice C už nejsou vždy nazvány jako prostředí, ale častěji jako daný tematický celek (např. lineární závislost, práce s daty apod.), ačkoli úlohy jsou stále zadávány v prostředích. V některých tematických celcích se potkává více různých prostředí, čímž žákům v mysli vznikají souvislosti mezi prostředími, a tak získávají možnost volby mezi nimi.

Schody. První úlohou, ve které se objevuje jazyk písmen, je téma ročníkové práce v první kapitole *Schody* (Hejný a kol., 2016, str. 5–6). Tato úloha shrnuje a zobecňuje předchozí úlohu. V následujícím odstavci jsou shrnuta zadání úloh (jak ročníkové práce, tak úloh předcházejících) a pravidla pohybu obou postav.

Úloha 28: *Irena a Juraj jsou na schodech, Irena chodí po jednom schodu nahoru nebo dolů, tedy její jeden krok je dlouhý jeden schod, Jurajův krok je dlouhý dva schody. Úkolem je vyřešit úlohu, kdy Irena stojí na schodu* 0 *a Juraj na schodu* k*, přičemž udělají dohromady* d *pohybů*[10] *a nakonec budou stát na sousedních schodech – Irena na schodu* i *a Juraj na schodu* j*.*

V této úloze se objevuje hned několik proměnných. Úkolem žáka je do hloubky prozkoumat takovou situaci. V procesu řešení se dostane k několika „kategoriím“ výsledků, jedna z nich má dokonce nekonečně mnoho případů, které lze popsat algebraickým vztahem.

V modrých úlohách za první kapitolou jsou dvě úlohy z prostředí *Krychlových staveb* (Hejný a kol., 2016, str. 6), přičemž poslední otázka míří na zobecnění.



Obrázek 2.14: Obrázek vlevo k zadání úlohy 29 a vpravo k zadání úlohy 30 (překresleno z (Hejný a kol., 2016, str. 6))

Úloha 29: *Schodiště „nahoru-dolů“ je postaveno z* 9 *krychlí. Výška tohoto schodiště je* 3*. Kolik krychlí bude třeba na postavení schodiště, jehož výška bude* ***a)*** 4*;* ***b)*** 5*;* ***c)*** 10*;* ***d)*** n*? (obr. 2.14 vlevo*[11]*)*

Úloha 30: *Podobnou úlohu jako 29 řešte pro „pomalé schodiště nahoru-dolů“ (obr. 2.14 vpravo).*

Obě úlohy v nejobtížnější variantě d) vyžadují zobecnění pomocí jazyka písmen a proměnné n. Řešení je vcelku překvapivé, jelikož výsledný počet krychlí je v úloze 29 druhou mocninou pater a v úloze 30 dvojnásobkem druhé mocniny, jelikož pomalé schody jsou dvojnásobné než ty „obyčejné“. Jinými slovy schodiště lze přeskládat na kvádr s jednou stěnou čtvercovou.

Modifikací úlohy 30, kde by bylo úkolem počítat potřebné krychle k vytvoření „pomalého schodiště pouze nahoru“, lze žáky dovést ke vztahu

$$2(1 + 2 + \cdots + n) = n(n + 1).$$

Běžné schodiště pouze nahoru pak může dovést ke vztahu popisujícímu součet $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, jelikož je to polovina pomalého schodiště.

[10] V předchozí úloze stojí Irena na schodu 5, Juraj na schodu 9 a udělají dohromady **a)** 3; **b)** 4; **c)** 5; **d)** 6; **e)** 7 pohybů.

[11] V originále je obrázek barevný, což může žáky navádět k různým úhlům pohledu, k různým řešením.

Zlomky. Téma ročníkové práce týkající se zlomků (Hejný a kol., 2016, str. 17) vyzývá k objevení pravidla sčítání kmenových zlomků tak, aby součtem byl rovněž kmenový zlomek. Nejprve má žák nalézt čtyři kmenové zlomky, jejichž součet je také kmenový zlomek. Pak má hledat 6 kmenových zlomků a na závěr obecně n kmenových zlomků, jejichž součet je kmenový zlomek.

Zřejmě se nevyžaduje, aby žák uměl zapsat řešení pomocí písmene n, ale aby nalezl podmínky, co musí sčítané zlomky splňovat.

Úměrnosti. V poslední úloze v kapitole *Úměrnosti* (Hejný a kol., 2016, str. 18–19) jde o rozlišování přímé a nepřímé úměrnosti. Je zde osm situací, u kterých má být závislost rozlišena. Poslední dvě situace mohou vést žáka k vyjádření závislosti pomocí písmen:
g) Plnou cisternu mléka rozléváme do n lahví, z nichž každá má objem p litrů.
h) Hromada cihel je uložena do tvaru hranolu. Obsah podstavy hranolu je S a jeho výška je v.

Ačkoli jsou tyto dvě situace zapsány obecně pomocí písmen, po žákovi je žádáno určení přímá vs. nepřímá úměrnost, nikoli řešení daných úloh a vyjadřování vztahů písmeny.

Mříž II. V kapitole *Mříž II* (Hejný a kol., 2016, str. 20) se proměnné vyskytují jako souřadnice bodů.

Úloha 31: *Narýsujte rovnoběžník* $ABCD$*, kde* $A(0;0)$*,* $B(n;1)$*,* $C(n;3)$*,* $D(0;2)$*. Každým bodem ležícím uvnitř rovnoběžníku nebo na jeho hranici veďte rovnoběžku s přímkou* AB*. Zjistěte, kolik přímek jste dokreslili, a ukažte, že společně s přímkami* AB *a* CD *tvoří osnovu. Řešte nejprve pro speciální případy* $n = 4, 5, 6, 7$ *a pak obecně pro libovolné přirozené* n*.*

Úloha je určena spíše rychlejším žákům, kteří by měli odhalit a zdůvodnit, že počet přímek je $(2n - 1)$. Náročná je úloha zejména tím, že vyžaduje myšlenku „dvojnásobného prodloužení" rovnoběžníku (tedy $2n$), nebo jinou myšlenku, která vztah odůvodní. Písmeno n zde vystupuje jako proměnná na pozici souřadnice. Dosazování zde získává vizuální podobu, což může být nápomocné pro následné zobecňování.

Lineární závislost. Kapitola *Lineární závislost* je spíše úvod do funkčních závislostí, a proto zde vystupují proměnné hned v několika úlohách.

Úloha 32: *Pan Novák chová pudly. Označme* k *počet konzerv, které potřebuje na* d *dní. Z tabulky vidíme, že na měsíc (30 dní) potřebuje 90 konzerv.* ***a)*** *Doplňte tabulku*

k			*90*	*120*	*150*	
d	*5*	*20*	*30*			*360*

b) *Zjistěte, jak ze znalosti čísla* d *určíte číslo* k*.* ***c)*** *Zjistěte, jak ze znalosti čísla* k *určíte číslo* d*.*

Žáci se s panem Novákem a jeho pudly setkávají již podruhé, o několik stran učebnice nazpět v kapitole *Úměrnosti* zkoumali tyto vztahy na konkrétních hodnotách počtu pudlů, dní i konzerv. Zde je úloha obecnější, avšak závěry z předchozí úlohy o panu Novákovi mohou žáci jistě využívat. Závislosti mohou formulovat slovně, avšak učitel by je měl směrovat k používání formálnějších zápisů vztahů.

Úloha a) je početní, slouží k nalezení generického modelu, poslední sloupec tabulky již vyžaduje hlubší pochopení situace. Úlohy b) a c) vedou žáka k formálnějším zápisům a k úpravám výrazů.

Další úlohy v této kapitole jsou o pohybu, navazují na sebe a směřují k závislosti $S = v \cdot t$ a k jejím obměnám. Po dvou číselně zadaných úlohách o běžci a cyklistovi následuje úloha na zobecnění vztahu pro cyklistu. Poslední úloha je o jejich vzájemném pohybu – kdy a kde se běžec a cyklista setkají apod.

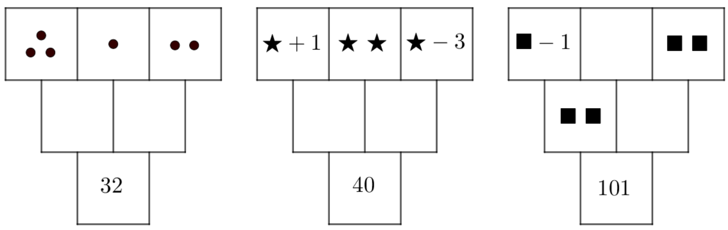
Písmena zde vystupují jako proměnné, mezi nimiž však platí určité vztahy, a ty je cílem objevit a popsat.

Kombinatorika a pravděpodobnost. V těchto dvou tématech jde o nalézání všech možností. Je třeba dbát na to, zda nebylo nic opomenuto a zda něco nebylo započítáno vícekrát. Kromě systematičnosti se žáci tímto učí i uchopování situací a strategie uspořádání souboru možností. V neposlední řadě dávají tato témata prostor k zobecňování.

Konkrétně v této kapitole k zobecňování učebnice nevyzývá, ale připravuje pojmy: v první úloze permutace a faktoriál $n!$, ve druhé úloze je možné objevit vztah $\frac{n(n-1)}{2}$ jako „všechny dvojice n-prvkové množiny“ (Hejný a kol., 2016, str. 24). S problematikou proměnné tedy souvisí jen nepřímo.

Součtové trojúhelníky. V modrých úlohách za kapitolou *Zlomky II* je úloha z prostředí součtových trojúhelníků, která přímo připravuje zavedení písmen (Hejný a kol., 2016, str. 32), zatím jsou však použity symboly.

Úloha 33: *Zjistěte, jakou hodnotu skrývá •, ★ a ■ na obrázku 2.15.*



Obrázek 2.15: Obrázek k zadání úlohy 33 (překresleno z (Hejný a kol., 2016, str. 32))

Úloha je zadaná pomocí symbolů, některý z žáků však již může použít pro zápis písmena. Ačkoli je úloha „modrá“, tedy je mezi úlohami navíc za kapitolou, v Příručce pro učitele je doporučení zadat ji celé třídě právě kvůli přípravě na zavedení písmen (Hejný a kol., 2017, str. 56).[12]

[12] Učitelka **L** zadává tyto úlohy jako snazší alternativu pro žáky při řešení úlohy 36 (viz oddíl 3.2.2).

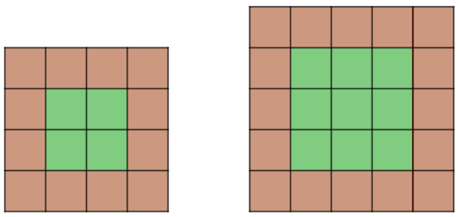
2.3.1 Jazyk písmen I

První kapitola v řadě učebnic, která se cíleně zaměřuje na zavedení a používání písmen, je *Jazyk písmen I* (Hejný a kol., 2016, str. 36–37). Doteď popisované úlohy byly více či méně přípravou na tuto kapitolu. V rámci náslechů na základních školách byla pozorována výuka právě této kapitoly (viz kapitola 3).

V Příručce pro učitele je doporučeno, aby učitel začal například otázkou, jak spočítat obvod obdélníka. Pokud žáci odpovídají celou větou, učitel po nich chce to zapsat a použít na to co nejméně písmen. Tím se žáci dostanou ke vztahu např. $o = (š+d) \cdot 2$. Písmena pak nejsou jen abstraktními novými prvky v matematice, ale mají význam – o je symbolem pro obvod, $š$ pro šířku apod. (Hejný a kol., 2017, str. 62).

První úloha kapitoly je z nového prostředí, které se pak v dalších dílech učebnic objevuje zejména v kapitolách *Jazyk písmen*.V přehledu souvislostí mezi prostředími na obrázku 2.1 je prostředí pojmenováno *Záhonky*, ačkoliv v učebnicích ani příručkách žádné jméno nemá.

Úloha 34: *Zahradník pokládá kolem čtvercového záhonu dlaždice. Kolem záhonu* 2×2 *potřebuje* 12 *dlaždic. Kolem záhonu* 3×3 *potřebuje* 16 *dlaždic (viz obr. 2.16). Kolik dlaždic bude potřebovat kolem záhonu o velikosti* ***a)*** 4×4*;* ***b)*** 5×5*;* ***c)*** 9×9*;* ***d)*** 18×18*;* ***e)*** $n \times n$*?*



Obrázek 2.16: Obrázek k zadání úlohy 34 (překresleno z (Hejný a kol., 2016, str. 36))

Úloha je cílena na zobecňování a hledání různých strategií k nalezení „obvodu“ záhonu. Pomocí gradace žáci objevují generický model a v této úloze jsou poprvé vedeni k abstraktnímu vyjádření pomocí písmene všichni žáci. Čím více úhlů pohledu a různých vyjádření se ve třídě vyskytne, tím lépe pro pochopení významu proměnné a následných úprav algebraických výrazů. Příručka učitele doporučuje, aby různost přístupů k úloze byla s žáky rozebrána např. na úloze d), tedy nikoli až v obecné úloze e). Tím se mohou žáci pustit do zobecňování různých přístupů a případně je porovnávat.

Příklady různých přístupů k úloze:

1. Počet potřebných dlaždic je roven obvodu záhonku plus čtyři rohové dlaždice. Algebraické vyjádření: $4n + 4$.

2. Počet potřebných dlaždic je roven rozdílu obsahu „hnědého“ čtverce (záhonek+dlaždice) a „zeleného“ čtverce (záhonek). Algebraické vyjádření: $(n + 2)^2 - n^2$

3. Chodník z dlaždic rozdělíme na čtyři shodné obdélníky – začneme-li v rohu, první obdélník skončí stejně se záhonkem, druhý obdélník začne dalším v rohu atd. Algebraické vyjádření: $(n+1)\cdot 4$.

4. Sečteme dlaždice na levé straně záhonku s dlaždicemi na pravé straně záhonku a poté přidáme zbylé horní a dolní dlaždice. Algebraické vyjádření: $(n+2)\cdot 2+2n$.

Další důležitou fází řešení úlohy ve třídě je porovnání a argumentace různých přístupů. Který z nich je správný? Lze mezi jednotlivá vyjádření napsat rovnost? To vede k myšlence ekvivalence výrazů a k jejich úpravám. Příručka dále uvádí, že ačkoli žáci ještě nemají zkušenost s upravováním výrazů, bývají schopni upravit výraz $4\cdot(n+1)$ do tvaru $4\cdot n+4$ (Hejný a kol., 2017, str. 63).

Druhá úloha je opačná k úloze 34.

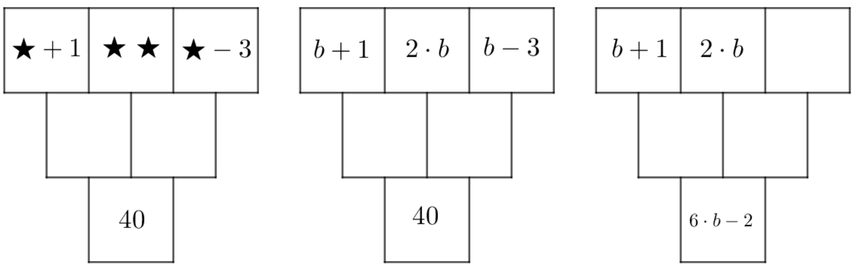
Úloha 35: *Jak velký byl záhon, na který zahradník spotřeboval **a)** 112; **b)** $4\cdot n$ dlaždic?*

Žáci nejspíše odhalí, že musí postupovat obráceně, podobně jako jsou zvyklí z prostředí *Myslím si číslo.*[13] Úloha a) je v podstatě úlohou na rovnice, protože je znám počet potřebných dlaždic a je úkolem zjistit, jak velký je záhonek, přičemž lze používat závěry úlohy 34. Žáci tak dostanou např. vztah $4n+4=112$ nebo $4\cdot(n+1)=112$, z něhož vyjádří n. Tak získají $n=\frac{112-4}{4}=27$ nebo $n=\frac{112}{4}-1$ atd.

V úloze b) je úprava trochu komplikovanější, protože zahradník nepoužil konkrétní počet dlaždic, ale $4\cdot n$ dlaždic, tedy při pouhém dosazení $4n$ do vztahu dojde k označení dvou různých počtů stejným písmenem n. Je tedy nutné přejmenovat jedno z nich, např. $4x+4=4n$, potom $x=\frac{4n-4}{4}$, což po zkrácení dá vztah $x=n-1$. Zahradník tedy při použití $4n$ dlaždic má záhon o straně $n-1$.

Třetí úloha kapitoly navazuje na úlohu 33 a řeší se v ní součtové trojúhelníky.

Úloha 36: *Vyřešte. Ve třetím trojúhelníku najděte b tak, aby součet všech šesti čísel trojúhelníku byl 48.*



Obrázek 2.17: Obrázek k zadání úlohy 35 (překresleno z (Hejný a kol., 2016, str. 36))

První součtový trojúhelník je totožný s druhým součtovým trojúhelníkem úlohy 33, tedy pokud žáci řešili úlohu 33, tak je pro ně první úloha pouze připomenutím. Hvězdička zde vystupuje jako neznámá, avšak aby se žáci dopočítali hodnoty hvězdičky, potřebují umět sečíst výrazy s hvězdičkami.

[13]Prostředí, které rozvíjí ekvivalentní úpravy při řešení rovnic.

Druhý trojúhelník je stejný jako ten první, avšak místo hvězdičky je použito písmeno b. Úloha je zařazena podle Příručky proto, aby se žáci, kteří se symboly, jako je např. $\star$, počítají suverénně, nebáli úprav s písmeny, jde pak jen o změnu v symbolu, který však má stejný význam.

Třetí trojúhelník je téměř stejný jako druhý. Vyřešený druhý trojúhelník však nesplňuje podmínku, že součet všech šesti čísel součtového trojúhelníku má být 48. Při řešení této úlohy žáci potřebují sčítat výrazy. Jedná se o tyto úpravy: $b+1+2b = 3b+1$, $(6b-2)-(3b+1) = 3b-3$, $3b-3-2b = b-3$ a pak součet všech šesti čísel v trojúhelníku $(b+1)+2b+(b-3)+(3b+1)+(3b-3)+(6b-2) = 16b-6$. Z toho pak jde dopočítat b splňující podmínku $16b - 6 = 48$, tedy $b = \frac{27}{8}$.

Gradace mezi druhým a třetím trojúhelníkem je celkem výrazná, třetí trojúhelník má nejen splňovat podmínku, ale navíc jeho řešením není celé číslo. Možná by bylo vhodné, aby učitel zařadil nějakou úlohu, která by gradaci zmírnila. Náročnost úlohy se dá modifikovat volbou hodnoty součtu všech šesti čísel. Pokud učitel zvolí čísla 42, 58, 74, 90, bude tato úloha jednodušší. Pro taková řešení však žáci mohou zvolit (zcela či částečně) metodu pokus-omyl. Řešení pak v případě, že součet není z této skupiny čísel mohou omezovat na interval, do něž řešení spadá, aniž by přitom upravovali výrazy. Metoda pokus-omyl však bude pro jiná čísla velmi pracná (Hejný a kol., 2017, str. 63).

Čtvrtá úloha se opět vrací k záhonkům. Nyní však záhon není čtvercový, ale obdélníkový s jednou stranou o 1 menší než druhou. Tato úloha nejde do zobecnění, ale to přichází až v páté úloze.

Úloha 37: *Zelený obdélník* 3×2 *je orámován* 14 *dlaždicemi. Dohromady tvoří obdélník* 5×4. *Podobně zelený obdélník* 4×3 *je orámován* 18 *dlaždicemi, čímž vytváří obdélník* 6×5. *Zjistěte, kolika dlaždicemi je orámován obdélník* ***a)*** 5×4; ***b)*** 6×5; ***c)*** 13×12; ***d)*** 100×99.

Tato úloha podobně jako úloha 34 míří na zobecňování a na různé možnosti v přístupu k situaci. Žáci zde získávají potřebné izolované modely k vytvoření generického modelu pro zjištění počtu potřebných dlaždic pro obložení záhonu, který má jednu stranu přesně o jednu dlaždici menší než druhou stranu. Úloha d) již vyžaduje zobecnění – žáci nebudou chtít kreslit obdélník 100×99 a počítat všechny potřebné dlaždice, ale raději hledají pravidlo, kterým tento počet zjistí.

Zobecňování, které je vyjádřené pomocí písmen, ale týká se stejné situace, přichází v páté úloze této kapitoly (Hejný a kol., 2016, str. 37).

Úloha 38: *Zelený obdélník o rozměrech* $k \times (k-1)$ *je orámován dlaždicemi.* ***a)*** *Zjistěte rozměry zeleného obdélníku i s rámem.* ***b)*** *Zjistěte, kolika dlaždicemi je tvořen rám.*

Úloha a) se týká vyjádření „o 1 větší“ a uvědomění si, co proměnná k vyjadřuje a jak pomocí ní vyjádřit ostatní rozměry záhonu. V úloze b) jde o zobecnění předchozí úlohy (37). Z různých přístupů žáků k úloze vzejdou různá vyjádření počtu dlaždic a obdobně jako v úloze 34 je žádoucí diskuse o jejich ekvivalenci, která se zde může rozvinout do diskutování výhodnosti daných přístupů – některé jsou představitelnější pro zdůvodnění, jiné umožňují snadnější počítání.

Poslední dvě úlohy kapitoly souvisejí s dělitelností a se zápisem sudých čísel jako $2n$ a se zápisem čísla dělitelného třemi jako $3n$ (Hejný a kol., 2016, str. 37). Písmena v nich tedy mají roli zobecněného čísla.

Úloha 39: *Kira tvrdí, že přirozené číslo je sudé tehdy, když ho lze zapsat ve tvaru* $2 \cdot n$ *pro nějaké* $n \in \mathbb{N}_0$. *Má pravdu?*

Úloha 40: *Rozhodněte, zda jsou pravdivá následující tvrzení:* ***a)*** *Každé liché číslo lze psát ve tvaru* $3 \cdot n$ *pro nějaké* $n \in \mathbb{N}_0$. ***b)*** *Každé číslo, které po dělení třemi dává zbytek* 1*, se dá napsat ve tvaru* $3 \cdot n + 1$ *pro nějaké* $n \in \mathbb{N}_0$. ***c)*** *Každé číslo, které se dá napsat ve tvaru* $3 \cdot n + 1$ *pro nějaké* $n \in \mathbb{N}_0$*, dává po dělení třemi zbytek* 1*.* ***d)*** *Pro každé* $n \in \mathbb{N}_0$ *je číslo* $n \cdot n + n + 11$ *prvočíslo.*

V Příručce je prostřednictvím zkušenosti jedné paní učitelky doporučeno, aby těmto úlohám předcházela aktivita, ve které žáci pocítí výrazněji potřebu sudá čísla charakterizovat jako $2n$, lichá čísla jako $2n \pm 1$. Aktivita probíhá následovně: Děti dostanou přidělena čísla[14] a mají se rozdělit na sudá a lichá. Poté mají za úkol vymyslet, jak by svoji skupinu popsali pomocí jazyka písmen. Popsaná zkušenost učitelky je taková, že skupina žáků se sudými čísly vymyslela svůj popis jako $2n$ rychle a potom bez problémů popsala lichá čísla jako $2n-1$. Skupině žáků s lichými čísly trvalo déle, než přišli se závěrem $2n+1$. Poté se obě skupiny dohodly, že lichá čísla lze popsaj jak výrazem $2n + 1$, tak výrazem $2n - 1$. Aktivita pokračovala rozdělením do tří skupin podle zbytků po dělení třemi, resp. pěti a následným charakterizováním skupiny pomocí jazyka písmen. (Hejný a kol., 2017, str. 64).

V dalších kapitolách učebnice se již jazyk písmen objevuje častěji.

Hadi. V kapitole *Hadi* (Hejný a kol., 2016, str. 42–45) se žáci učí práci s daty a ekvivalenci výrazů, hadi zde mají smysl funkcí. Je zde uvedeno, že matematici používají k popisu závislostí mezi vstupem a výstupem písmena, nejčastěji x a y. Kromě přepisu hada do jazyka písmen je zde zaveden pojem „sourozenci“ neboli ekvivalentní výrazy.[15] Vstup je zde tedy proměnnou nezávislou, výstup závislou, stejně jak je tomu ve funkcích. V úlohách pak žáci hledají k danému hadu jeho sourozence, čímž vytvářejí ekvivalentní výrazy a objevují, jak je poznat a co musí splňovat. Takoví hadi, resp. výrazy pak jsou sourozenci, resp. ekvivalentní pro libovolnou hodnotu vstupu.

Zlomky III. Kapitola *Zlomky III* (Hejný a kol., 2016, str. 48–49) rozvíjí porozumění zlomkům, jejich rozšiřování, krácení a ekvivalenci. Pro zadání úloh jsou použita písmena, která jsou však v roli neznámých.

Mocniny. V kapitole *Mocniny* (Hejný a kol., 2016, str. 52–53) se v Domluvě objevuje zápis 5^n a b^n. Je zde také připomenutí, že zápis $a + a + a$ lze zapsat jako $3 \cdot a$, na čemž je ukázána paralela s $b \cdot b \cdot b = b^3$ (mocnina coby zkrácený zápis součinu). Písmeno n zde vystupuje jako libovolné přirozené číslo, což pro žáky již není nová myšlenka, nové je pouze to, že se nyní vyskytuje v exponentu. V této kapitole však jsou dvě úlohy, jež pracují s proměnnou.

Úloha 41: *Ariana našla trik: „řekněte mi číslo* x *a já do tří vteřin vypočtu číslo* $y = (x + 1)^2 - x^2$*.“ Jak její trik vypadá?*

[14] Např. čísla $1 - k$, kde k je počet dětí ve třídě.

[15] Hadi jsou sourozenci, jestliže ke každému vstupu dávají stejný výstup (Hejný a kol., 2016, str. 43).

Ariana v podstatě žádá žáky, aby dosazovali za její proměnnou x čísla a ona má „náskok“ v úpravě výrazu $y = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$. Žáci pak mají odhalit její trik, přijít na ekvivalentní, avšak jednodušší výraz.

Úloha 42: *Zjistěte, pro které n padne číslo 2^n do intervalu* ***a)*** $(500, 1000)$*;* ***b)*** $(1000, 2000)$*;* ***c)*** $(2000, 4000)$*;* ***d)*** $(1000000, 2000000)$.

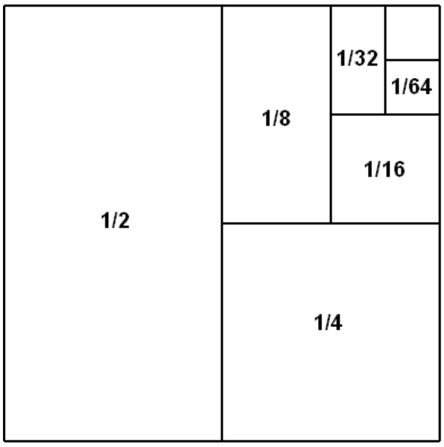
Úloha je v podstatě aplikací Domluvy na předchozí straně, avšak je cílena na poznání, že mocniny dvojky narůstají velmi rychle. Do každého z intervalů a)–d) padne jen jedna mocnina dvojky.

Zlomky IV. V kapitole *Zlomky IV* (Hejný a kol., 2016, str. 63–64) je několik úloh na zobecňování, které vrcholí tématem ročníkové práce, v níž jde o nalezení generického modelu takovýchto zobecňování.

Úloha 43: *Najděte součty.* $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$*;* $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$*; ...* $S_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$.

Úloha 44: *Zjistěte, jak pokračuje posloupnost součtů, a najděte číslo* S_{10} *i číslo* S_n.

Žáci zde hledají generický model pro sčítání řady $\sum_1^n \frac{1}{2^n}$. Nejspíše úlohu řeší výpočtem či graficky krájením chleba či čokolády. Generickým modelem je vztah $S_n = \frac{2^n - 1}{2} = 1 - \frac{1}{2^n}$, tedy $S_2 = \frac{3}{4}$, $S_3 = \frac{7}{8} \ldots S_7 = \frac{127}{128}$. V Příručce je uveden generický model a předpokládá se, že ho žáci při řešení úlohy 43 odvodí.



Obrázek 2.18: Grafické znázornění součtu řady převrácených hodnot mocnin dvojky. Zdroj: `https://theedge.com.hk/wp-content/uploads/2016/08/Eye_of_Horus_square.png`

Součet této řady lze znázornit i graficky (obr. 2.18). Na obrázku je dobře vidět, že při sčítání této řady až do nekonečna by byl výsledek 1. Zde již žáci s proměnnými pracují celkem na vysoké úrovni, pokud jsou schopni vyjádřit obecný vztah pro součet řady, ovšem nemusí to ovládat všichni žáci třídy.

Další dvě úlohy v učebnici jsou analogické k těmto, avšak jde o součet řady převrácených hodnot mocnin trojky. V tématu ročníkové práce nabízené v této kapitole jsou pak žáci tázáni i na součet řad převrácených hodnot mocnin čtyřky, pětky a šestky.

Konstrukce. Kapitola *Konstrukce* (Hejný a kol., 2016, str. 65–67) je čistě geometrická, ale objevují se zde konstrukce trojúhelníku, které nejsou metrické a jsou zadané obecně. Např. sestrojit trojúhelník ze znalosti dvou stran a, b a úhlu γ apod. Toto v přehledu uvádím proto, že myšlenka obecné geometrické konstrukce má k myšlence libovolného čísla neboli proměnné velmi blízko. V algebře i v geometrii je nutné dodržet určité postupy a pravidla i přesto, že nejsou známy konkrétní hodnoty.

Jazyk písmen II. Souvislost geometrie a algebry prostupuje i kapitolu *Jazyk písmen II* (Hejný a kol., 2016, str. 70–72). Kapitola má 12 úloh, z nichž prvních pět pracuje se třemi typy dlaždic (a^2, b^2, $a \cdot b$), z nichž se skládají pravoúhelníky. Pomocí dlaždic žáci odhalují distributivitu, násobení mnohočlenů a rozklad na součin. Úlohy s dlaždicemi se týkají spíše úprav výrazů než porozumění proměnné. Novým poznatkem zde však jsou dvě proměnné v jednom výrazu, např. $b^2 + 2ab$. Šest úloh navazuje na úlohy z kapitoly *Zlomky IV*, v nichž se počítá součet řad. V jedné z nich žáci zjišťují hodnoty zlomků typu $\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+1}$, pomocí gradace přijdou na hodnotu $\frac{n}{2}$. Další úloha míří k objevení vztahu pro součet řady $1+2+3+\cdots+n$, k čemuž může napomoci předchozí úloha nebo úlohy 29 a 30, které se týkají stejného vztahu, avšak v prostředí schodů. Vztah $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ je dále užíván v dalších úlohách této kapitoly.

Pravoúhlý trojúhelník. Zobecňování, vyjadřování vztahů jazykem písmen a úprava výrazů předchází v učebnici cestě k objevení Pythagorovy věty. V kapitole *Pravoúhlý trojúhelník* (Hejný a kol., 2016, str. 73) žáci pomocí metody uvolňování parametru[16] dojdou ke vztahu, který je znám jako Pythagorova věta, avšak ta v učebnici není uvedena jako poučka, pouze se „schovává“ v řešení úloh a je zde krátký komentář k Pythagorovi, k jeho objevu a k některým jeho myšlenkám.

Šipkové grafy. V kapitole *Rovnice* (Hejný a kol., 2016, str. 76–78) je definován tzv. záměnný graf a je znázorněn obrázkem 2.19 (vlevo). Záměnný graf je takový, v němž y lze vypočítat cestou $x \rightarrow\downarrow y$, nebo cestou $x \downarrow\rightarrow y$ a v obou případech vyjde stejné y pro libovolné x, jinak řečeno jde o hady-sourozence (viz oddíl 2.3.1), kteří „se drží hlavami a ocasy“ či o ekvivalenci dvou výrazů.

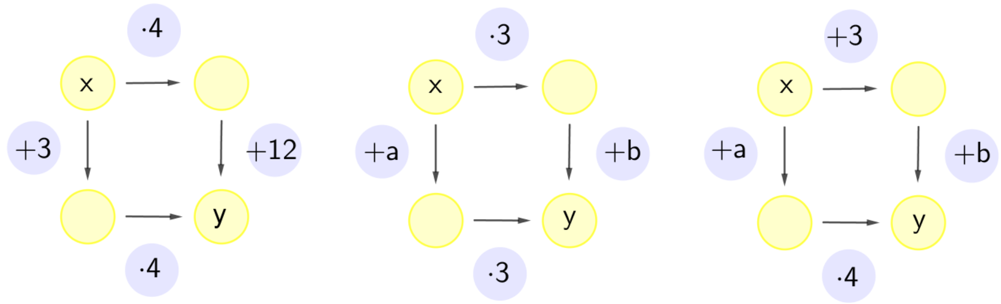
V dalších úlohách žáci hledají záměnné grafy.

<u>Úloha 45</u>: *V šipkovém grafu na obrázku 2.19 (uprostřed) zvolte $a = 1$ a najděte b tak, aby byl záměnný. Řešte ještě pro $a = 2$, $a = 3$, $a = 7$.*

Šipkový graf lze matematicky vyjádřit jako $3x + b = (x + a) \cdot 3$ z čehož plyne $b = 3a$. Žáci to mohou odhalit pomocí několika izolovaných modelů ($a = 1; 2; 3; 7$), avšak někteří mohou objevit i tento obecný vztah.

<u>Úloha 46</u>: *V tomtéž grafu (obr. 2.19 uprostřed) zvolte $b = 3$ a najděte číslo a tak, aby graf byl záměnný. Řešte ještě pro $b = 30$, $b = 36$, $b = 1$.*

[16] Tato metoda umožňuje systematické objevování vzorce. Pokud je cílem objevit Pythagorovu větu, která dává do vztahu tři parametry, zafixují se nejprve dvě proměnné, třetí postupně probíhá několik hodnot, z nichž lze utvořit vzorec pro tuto jednu proměnnou. Poté je uvolněn další parametr, který probíhá potřebné množství hodnot, dokud není odhalen vzorec pro dva parametry. Pak je totéž zopakováno pro třetí parametr, a tak lze dospět k obecnému vztahu. Metoda uvolňování parametru je stručně popsána v knize (Hejný a kol., 1990, str. 404).



Obrázek 2.19: Zleva: Příklad záměnného grafu. Zadání úloh 45 a 46. Zadání úlohy 47 (obě zadání překreslena z (Hejný a kol., 2016, str. 77 a 78))

Tato úloha je inverzní k úloze 45, jelikož je voleno číslo b a hledáno a. Hledaný vztah je $a = \frac{b}{3}$.

Další zobecnění situace přichází s následující úlohou.

Úloha 47: ***a)*** *Jak máme k číslu a volit b, aby graf na obrázku 2.19 vpravo byl záměnný?*
b) *Stejnou úlohu řešte pro graf, ve kterém místo obou čísel 4 budou čísla 5.*
c) *Stejnou úlohu řešte pro graf, ve kterém místo obou čísel 4 bude písmeno p.*

Úlohy a) a b) jsou gradací úlohy 45 a úloha c) je jejich zobecněním. Je-li šipkový graf zapsán jazykem písmen, vznikne vztah $px + b = (x + a) \cdot p$, z něhož lze vyjádřit $b = pa$. To je již práce s proměnnou či parametrem p na celkem vysoké úrovni, zvlášť s ohledem na to, že žáci, kteří tuto úlohu řeší, jsou obvykle ve druhém pololetí 7. ročníku ZŠ. Úloha, která v učebnici navazuje, je soustava dvou lineárních rovnic s parametrem, avšak žáci jsou tázáni na řešení rovnice pro čtyři konkrétní hodnoty parametru. V Příručce učitele je úloha označena jako úroveň 3 či E (tedy pro vynikající až expertní žáky).

Úloha 48: *Řešte soustavu pro* ***a)*** $p = 4$; ***b)*** $p = 3$; ***c)*** $p = 2$; ***d)*** $p = 1$.

$$\begin{aligned}(p-3)x - y &= p - 1\\ 2x + py &= p - 4\end{aligned}$$

Parametr p zde je proměnnou, za níž žáci dosazují konkrétní hodnoty. Žáci tím získávají zkušenost s tím, že soustava rovnic má právě jedno, nekonečně mnoho, nebo žádné řešení, a to v závislosti na zvoleném parametru p.

2.4 Matematika D, E, F

V dalších třech dílech řady učebnic se symbolický jazyk i proměnná používají čím dál častěji v zadáních i v řešeních úloh. Pro častější výskyt používání proměnných uvedeme jen nejvýraznější momenty poznávání a používání proměnných.

V kapitole *Dělitelnost* v učebnici D (Hejný a Šalom, 2017a, str. 20–22) se nadále používá dříve zavedená symbolika, která používá písmeno n coby proměnnou, k jako zobecněné číslo, další písmena jako zkratky (např. $CS(546)$ je ciferný součet čísla 546 atd.), v *algebrogramech* pak velká písmena zastupují číslice (slouží pro odhalení pravidel dělitelnosti). V učebnici E (Hejný a Šalom, 2017b, str. 45–47 a 57–59) je rozvíjen symbolický zápis tvrzení a jsou zde též základy dokazování pomocí symbolického zápisu (např. tvrzení „součet čísla, které dává po dělení číslem šest zbytek 4, a čísla, které dává po dělení šesti zbytek 2, je dělitelný šesti," lze zapsat jako $(6k + 4) + (6l + 2) = 6k + 6l + 6 = 6(k + l) + 6 = 6(k + l + 1)$). V další kapitole zabývající se dělitelností je pomocí diagramu a symbolického jazyka předveden Eukleidův algoritmus.

Obdobně jako v kapitolách o dělitelnosti jsou písmena používána i v kapitole *Prvočísla.*

V kapitolách zabývajících se mocninami (počínaje kapitolou *Mocniny* v učebnici D (Hejný a Šalom, 2017a, str. 55–56)) se žáci postupně dostávají k práci s exponenty, a to včetně případů, kdy je v exponentu proměnná či neznámá.

Kapitoly *Jazyk písmen* v učebnicích D a E obsahují zejména úlohy na zobecňování, úlohy na vyjádření neznámých ze „vzorců",[17] odhalování triků, jež vede na úpravu výrazů (např. úloha 7 kapitoly *Jazyk písmen I* učebnice D: *Kouzelník na tabuli napsal zlomek* $\frac{n^2-1}{n-1}$ *a pochlubil se: „Když vy řeknete číslo n, já do dvou sekund řeknu výsledek." Jak kouzlo funguje?* (Hejný a Šalom, 2017a, str. 26)), a v neposlední řadě algebraické dlaždice, které vizualizují úpravy algebraických výrazů. Pomocí algebraických dlaždic se žáci učí práci s mnohočleny, jako je vytýkání,[18] rozklad mnohočlenu na součin a roznásobování závorek.

Algebraický zápis a práci s proměnnými a neznámými dále rozvíjejí též kapitoly zabývající se rovnicemi, nerovnicemi, závislostmi a funkcemi a další. Jednotlivá prostředí rovněž umožňují objevit v nich zobecnění, matematizovat je a zapsat pomocí symbolického jazyka. V učebnici F navíc přibývají kapitoly *Výrazy*, v nichž se kromě mnohočlenů objevují i lomené výrazy.

2.5 Shrnutí analýzy řady učebnic

Řada učebnic tedy dovede žáka k používání algebraického jazyka při řešení matematických problémů. Žák rozlišuje různé role písmene v matematice a používá je pro matematizaci úloh a jejich řešení. Proměnné používá pro vyjádření vztahů, závislostí či pro zobecnění situací. Cíleně zjednodušuje algebraické výrazy pomocí ekvivalentních úprav (vytýkání, roznásobování, dělení trojčlenu dvojčlenem), pracuje s dvojčleny a trojčleny, kvadratický trojčlen upraví na čtverec. Pro řešení úloh užívá lineárních rovnic a jejich soustav. Geometrické a aritmetické vztahy vyjádří pomocí symbolického zápisu. Čte symbolický zápis a rozumí mu.

Proměnná postupně vstupuje do jednotlivých prostředí, tedy žáci mají možnost ji uchopit z několika stran. Neznámá je žákům známa už z prvního stupně, popřípadě se s ní setkají již v učebnici A. Propedeutice proměnné a rozvoji algebraického myšlení a jazyka je v řadě učebnic věnováno mnoho úloh. Kódovací síla jazyka písmen je v učebnicích přítomna již od prvních úloh, uchopovací sílu žáci používají brzy při řešení rovnic (x jako neznámá). Uchopovací a vyjadřovací síla získává na svém významu nejvíce v učebnici C v kapitole *Jazyk písmen*,

[17]Nejedná se přímo o vyjádření ze vzorce, jelikož učebnice se vzorci přímo nepracuje. Jde spíše o vyjádření neznámé v situaci, kdy ostatní informace jsou zadány pouze pomocí proměnných.

[18]Termín vytýkání je však zaveden až v učebnici F (Hejný a Šalom, 2018, str. 38).

na níž jsem zaměřila svůj výzkum. Dále se objevují i další síly jazyka algebry (transformační, argumentační, objevitelská).

Propedeutiku je poměrně obtížné uchopit a popsat celou, jelikož každý nový poznatek, který žákům přinese větší jistotu a orientaci v daném prostředí, připravuje půdu pro úspěšnější uchopení pojmu proměnná, jelikož to, co žáci dobře znají, snáze zobecní. Výše jsou popsány takové úlohy, které podle mého názoru nejvíce přispívají k propedeutice pojmu proměnná. Jsem si vědoma toho, že některé úlohy jsem v analýze učebnic mohla opomenout, a nebo v některých spatřovat větší význam pro uchopení proměnné, než reálně mají. To, jak bude výuka probíhat, však záleží především na učiteli a jeho pojetí výuky. Na to se zaměřuji ve svém výzkumu, který je popsán v následující kapitole.

3. Náslechy na hodinách učitelů

3.1 Metodologie

3.1.1 Cíle a otázky výzkumu

Cílem práce je popsat a porovnat přístupy k zavedení proměnné několika učitelů, kteří používají metodu výuky založenou na budování schémat. S učiteli budou vedeny rozhovory a budou provedeny náslechy v jejich vyučovacích hodinách, na základě čehož budou charakterizovány odlišnosti a podobnosti v jejich přístupech k výuce úvodu do proměnné.

Hlavní otázkou je, jakým způsobem vstupuje do světa žáků proměnná. Abych mohla tento moment lépe uchopit, pokusím se pomocí odpovědí na následující dílčí otázky získat představu o přístupech a postojích vybraných učitelů k výuce proměnné:

1. Jaké problémy učitel spatřuje ve výuce proměnné? Nakolik se již v dané třídě problematiky proměnné dotkli dříve?
2. Jakým způsobem jsou zadávány úlohy? Používá učitel učebnice nebo spíše vytváří vlastní materiály (pracovní listy, zadání úlohy slovně, na tabuli)? Jak dlouho se žáci věnují úlohám?
3. Jak učitel strukturuje a organizuje hodinu? Jaké jsou významné a typické interakce v hodině? Jak učitel klade otázky?
4. Nakolik učitel řídí žáky a proces jejich učení? Jak učitel pracuje s chybou žáka? Jak učitel ověřuje, že žáci látce rozumí?
5. Jak různí učitelé řeší situaci, kdy se při řešení úloh objeví proměnná?

První otázku budu zkoumat prostřednictvím rozhovoru, další prostřednictvím vlastních náslechů na hodinách.

3.1.2 Výběr učitelů

V rámci přípravné fáze jsem hledala učitele, u nichž by bylo možné provést náslechy v hodinách, kdy budou probírat úvod do proměnné, a provést s nimi rozhovory. Jelikož bylo třeba porovnávat učitele používající metody založené na budování schémat, potřebovala jsem učitele vyučující Hejného metodou. Zároveň bylo třeba, aby v čase, v němž jsem mohla provádět náslechy, vyučovali kapitolu *Jazyk písmen I* v učebnici C, kde se poprvé cíleně objevuje proměnná.

Jedna z učitelek (zde označena zkratkou **P**) byla u zrodu tématu této práce, proto jsem mohla počítat s její účastí. **P** mne dokonce pomohla najít dalšího učitele (zde označeného zkratkou **V**), který byl ochotný se mnou spolupracovat. Oslovila jsem mnoho učitelů a učitelek na Letní škole Hejného metody, avšak spolupráce byla realizovatelná jen s jednou učitelkou (zde označenou zkratkou **L**). Poslední učitelku (označenou zkratkou **M**) jsem sehnala přes facebookovou skupinu učitelů vyučujících Hejného metodou. Celkem jsem tedy navázala spolupráci se čtyřmi učiteli (3 učitelky, 1 učitel), přičemž tři z nich jsou z Prahy a jedna z malého města (přibližně 4500 obyvatel) ve Středočeském kraji.

3.1.3 Sběr dat

P vyučovala *Jazyk písmen I* na konci 7. ročníku ve dvou třídách (označených 7.A, 7.B). **V** a **L** vyučovali tuto kapitolu v listopadu v 8. ročnících, přičemž **V** učil v jedné třídě a **L** ve dvou třídách. **M** je současně učitelkou fyziky a kvůli potřebě používání proměnných pro fyzikální výpočty zařadila úvod do proměnné již na listopad v 7. ročníku.

V, **L** a **M** plánovali *Jazyk písmen I* na stejný týden, což by bylo nerealizovatelné kvůli přejíždění mezi školami a rozvrhům. Byli však ochotní plán pozměnit tak, abych stihla provést co nejvíce náslechů.

U **P** jsem provedla náslechy šesti vyučovacích hodin ve dvou paralelních třídách (v každé třídě tři hodiny). Mezi druhou a třetí hodinou uplynuly tři týdny kvůli několika školním akcím ze strany učitelky či školy a státním zkouškám z mé strany. Další náslechy nebyly možné, jelikož byl konec školního roku a ve třídách **P** odpadly další hodiny. Náslechy proběhly mezi 17. 5. 2019 a 10. 6. 2019. V jedné třídě bylo možné pořizovat videozáznamy i audiozáznamy. Ve druhé třídě během první hodiny vyšlo najevo, že dva žáci nesouhlasili s tím, abych je natáčela. Jelikož zároveň patří mezi ty, kteří mívají často nové objevy a rádi je sdílí se spolužáky, byla pro ně i pro dynamiku kolektivu kamera v místnosti velmi rušivým elementem i přes to, že jsme byli domluveni, že kameru zakryji, budou-li chtít něco přednést třídě. Proto byl od druhé vyučovací hodiny v této třídě pořizován pouze audiozáznam, fotografie tabule a žákovských řešení a mé terénní poznámky.

U **V** jsem provedla náslechy dvou hodin v jedné třídě. Mezi těmito vyučovacími hodinami byla ještě jedna, v níž ale **V** v kapitole *Jazyk písmen I* s žáky nepokračoval. Náslechy proběhly 20. a 25. 11. 2019. Nebylo zde možné pořizovat videozáznamy, v hodině jsem tedy pořídila dva audiozáznamy, fotografie žákovských sešitů a své poznámky.

L učila dvě třídy (označené 8.B a 8.D) a v každé z nich jsem provedla náslechy dvou hodin. Celkem tedy čtyři vyučovací hodiny ve dnech 21. a 22. 11. 2019. Všechny čtyři vyučovací hodiny byly zaznamenány na video a audio a opatřeny mými poznámkami.

M jsem pozorovala tři vyučovací hodiny v jedné třídě ve dvou dnech. První pozorovací den (26. 11. 2019) šlo o dvě bezprostředně na sebe navazující hodiny, druhý den (27. 11. 2019) proběhl náslech ještě jedné vyučovací hodiny. Všechny tři vyučovací hodiny byly zaznamenány na video, audio a mými poznámkami.

Během všech náslechů jsem si psala poznámky, do nichž jsem zaznamenávala některé výroky žáků, které by ze záznamů nemusely být srozumitelné a zajímavé momenty dění ve třídě. Také jsem si zapisovala či zakreslovala to, co se vyskytlo na tabuli či v sešitech žáků. U zaznamenaných událostí jsem si psala přibližný čas hodiny či záznamu pro snadnější orientaci mezi záznamy. Ve své práci tedy vycházím z náslechů na 15 vyučovacích hodinách.

Co se týče rozhovorů s učiteli, většina jich proběhla na půdě školy o přestávkách ve dnech, kdy probíhaly i náslechy. Během rozhovorů jsem pořizovala audiozáznamy. S **P** jsem provedla celkem šest rozhovorů (4 min, 5 min, 5 min, 15 min, 2 min, 11 min), které byly podle časových možností vedeny o přestávkách po násleších či v hodinách, kdy **P** neučila.[1] S **V** jsem provedla krátký rozhovor bezprostředně po prvním náslechu (necelé 2 minuty, **V** neměl více času), po druhém náslechu proběhl delší rozhovor (40 minut), který byl zároveň jediný z rozhovorů, který proběhl mimo půdu školy. S **M** jsem provedla jeden rozhovor (11 minut) před prvním náslechem, druhý rozhovor (9 minut) mezi první a druhou pozorovanou hodinou, třetí rozhovor (15 minut) po druhé sledované hodině a na závěr krátký reflektivní rozhovor po třetím náslechu (4 minuty). S **L** jsem provedla dva rozhovory, dohromady přibližně 12 minut, přičemž oběma bezprostředně předcházely náslechy v hodinách.

Při vedení rozhovorů jsem se musela přizpůsobit časovým možnostem učitelů. Rozhovory zkrátka probíhaly, když to bylo možné.

Měla jsem připravených několik otázek, na něž jsem chtěla v rozhovorech nalézt odpovědi (např. nakolik se žáci setkali s proměnnou, zda žáci používají pro argumentaci jazyk písmen, v čem spatřují problémy ve výuce algebry apod.). Často se však stalo, že učitelé o tématu začali hovořit dříve, než jsem se jich na to přímo zeptala. V rozhovoru jsem se potom k již zodpovězeným otázkám nevracela.

3.1.4 Analýza dat

Data jsem vyhodnocovala kvalitativními metodami (Strauss a Corbinová, 1999). Zdrojem dat byly výše zmíněné záznamy z náslechů vyučovacích hodin a audiozáznamy rozhovorů s učiteli. Na první výzkumnou otázku jsem hledala odpovědi zejména v rozhovorech s učiteli, zdrojem pro zodpovězení dalších otázek byly zejména náslechy v hodinách. Všechny audio a videozáznamy byly přepsány. V přepisech jsou zaznamenány přibližné časy jednotlivých záznamů, interakce mezi učitelem a žáky, stručně je zaznamenáno, kdo a co píše na tabuli, v několika případech je popsáno, co má žák v sešitě. Ojediněle se v přepisech vyskytují poznámky, což je záznam mých myšlenek k dané situaci. Jména žáků jsem anonymizovala použitím písmen H (holka) a K (kluk) a čísel (tedy např. H3, K2, K11 apod.)

Do záznamů jsem nezařadila části hodin, kdy učitel s žáky řeší třídnické věci, a to kvůli citlivosti údajů. Byť jsou přepisy anonymizované, nechtěla jsem zmiňovat pro moje potřeby irelevantní a současně citlivé údaje o třídě či žácích.

Přepis ze záznamů nelze považovat za dokonalou rekonstrukci hodiny, jelikož zaznamenat mnoho pracujících a komunikujících žáků a s nimi interagujícího učitele by bylo možné snad jen s mnohem lepší technikou, než jsem měla k dispozici (mikrofony pro každého ze zúčastněných, několik kamer zabírajících celou místnost apod.). Zároveň však by taková technika mohla být rušivým elementem, díky němuž by třída nefungovala běžně, a pozorování by tudíž nebylo relevantní. Na druhou stranu přepisy umožňují lépe analyzovat data.

Pro lepší srozumitelnost výroků učitele a žáků jsem v přepisech upravila hovorovou češtinu na spisovnou. Některé číslovky jsou zapsané číslicí, stejně jako jsou některé výroky přepsané pomocí matematických symbolů. Vzhledem k tomu, že

[1] V obou třídách jsem však v předchozím semestru plnila asistentskou praxi, tedy některé informace o třídách nepochází ze zaznamenaných rozhovorů, ale ze spolupráce s učitelkou během praxí.

však v práci jde o obohacení symbolického jazyka o proměnnou, jsou některé výroky ponechané v původním znění, aby bylo patrné žákovské uchopování pojmu proměnná, popřípadě je použit takový tvar, aby nedošlo ke změně významu, přitom však byl zápis srozumitelný (např. $strana \cdot 4$).

Během analýzy dat k zodpovězení otázek jsem se zaměřila na to, jak učitelé organizují svoji hodinu. Sledovala jsem, kdy žáci pracují samostatně či skupinově a kdy třída pracuje kolektivně, a zaznamenávala časy. Dále jsem se zaměřila na to, kolik času žáci dané třídy strávili řešením kterých úloh. Sledovala jsem interakce mezi učitelem a žáky, abych mohla lépe analyzovat učitelovo pojetí výuky a organizaci hodiny. Rozlišovala jsem interakce učitel → třída, učitel ↔ žák (soukromě), učitel ↔ žák (veřejně), žák → třída, žák ↔ žák a sledovala jsem, které interakce v daných chvílích převažují. Zaměřila jsem se i na to, jak učitelé získávají zpětnou vazbu o tom, zda žáci rozuměli řečenému, přičemž jsem si všimla opakujících se jevů *hlášení* (přihlaste se ten, kdo...), *individuální rozhovory* při samostatné či skupinové práci žáků, *reflexe* (ve smyslu dotazování se konkrétních žáků, co bylo pro ně těžké, co považují za důležité apod.). Při analýze momentu, kdy se objevuje proměnná, jsem sledovala způsob zadání úlohy, formy výuky a strategie řešení, které žáci objevili, a která řešení zobecnili.

Data jsem zapisovala do tabulek, kam jsem rovněž zaznamenávala časy jednotlivých jevů, či zakreslovala do obrázků a schémat.

Audiozáznamy rozhovorů s učiteli byly rovněž přepsány. Byly v nich dále vyhledány momenty, kdy se rozhovor dotýká sledovaného tématu (např. propedeutice proměnné, problémů ve výuce proměnné apod.). Rozhovory se často stočily k reflexi vyučovací hodiny – takové úryvky pak byly použity i pro analýzy vyučovacích hodin.

3.2 Výsledky

Níže uvedené výsledky budu ilustrovat situacemi, jichž jsem byla svědkem při hodinách, a originálními výroky učitelů (ty budou zapsány v uvozovkách).

3.2.1 Přístupy učitelů k výuce proměnné

Všichni učitelé vyučují Hejného metodou na státních základních školách. Samotný fakt, že vyučují dle stejné metody, však neznamená, že mají stejný styl výuky nebo že pokládají za podstatné totéž. V následujících odstavcích jsou shrnuty jejich přístupy k výuce proměnné a stručný popis jejich stylu výuky. Informace jsem získala z rozhovorů s učiteli a z pozorování jejich výuky ve třídách.

P

P již mnoho let učí Hejného metodou na základní škole v Praze a je lektorkou této metody. V jejích hodinách mají žáci prostor prezentovat svoje řešení a vzájemně je diskutovat. Učitelka moderuje diskuse žáků, opakuje či parafrázuje jejich výroky, zajišťuje prostor, aby mohli promluvit ti, kteří se sami neprojevují. Klade mnoho otázek, které nejčastěji cílí na celou třídu. Díky takovému dotazování jsou žáci vybízeni k důkladnější argumentaci a přesnějšímu vyjadřování. V případě, že byla řečena zásadní myšlenka, která nebyla dostatečně vysvětlena, staví se učitelka do role slabého žáka a klade takové otázky, aby žáci myšlenku lépe vysvětlili. Často se v její komunikaci se žáky objevují techniky aktivního naslouchání (Gordon a Žemlová, 2015).

Pozorovala jsem práci **P** ve dvou třídách, které byly velmi odlišné klimatem, tudíž učitelka záměrně volila mírně odlišný styl výuky.

7.A. Ve třídě je aktivních několik chlapců, kteří přicházejí se svými řešeními, prezentují je, reagují na sebe, argumentují a diskutují. Jejich komunikace bývá velmi energická, vyhrocená a emotivní. Dívky jsou ve třídě jen čtyři, přičemž dvě jsou cizinky, jedna má LMD a jedna bývá velmi často nemocná, žádná z nich se neúčastní diskusí. Pro cizince a dívku s LMD jsou ve třídě dvě asistentky pedagoga. Cizinci však nerozumí česky natolik, aby stíhali diskuse energických chlapců a zapojovali se do nich. Kvůli pasivitě části třídy v diskusích se učitelka velmi často ujišťuje, zda všichni rozuměli řečené myšlence, řešení nebo zápisu. Někteří z chlapců se připravovali na přijímací zkoušky na šestiletá gymnázia, a tak některé postupy a vztahy znají dříve než zbytek třídy (např. roznásobování a vytýkání, násobení zlomků atd.). Významným prvkem pro klima třídy je přítomnost dvou bratrů, kteří jsou v neustálé opozici. Oba se však aktivně zapojují do diskusí a jejich přednesená řešení bývají díky jejich vyostřenému vztahu vzájemně pečlivě přezkoumána. Učitelka podle svých slov kvůli „klučičímu charakteru“ třídy nechává atmosféru agresivnější, než by dovolila v jiných třídách, jelikož vztahy v převážně chlapecké skupině tak fungují, kluci si „jako predátoři budují svoji pozici“.

7.B. Ve třídě je přibližně stejně dívek jako chlapců, přičemž v diskusích komunikuje téměř celá třída. Učitelka se často ujišťuje, zda si žáci vzájemně rozumí. Během vyučovacích hodin zde panuje pracovní atmosféra. Jeden chlapec se připravoval na přijímací zkoušky na šestileté gymnázium a má velmi vyspělé matematické myšlení. Má sice trpělivost a vůli spolužákům vysvětlovat svá řešení, avšak jeho mluva a myšlenkové pochody jsou úrovní natolik odlišné od zbytku třídy, že se jeho výklad příliš neliší od frontální výuky učitele a málokdo mu rozumí.

Propedeutiku proměnné tak, jak je v učebnicích či podobnou, považuje **P** za stěžejní. Žáci musí mít dostatek zkušeností k tomu, aby proměnnou objevili a začali používat. Ve výuce však **P** musí ošetřit, aby ti, co proměnné již znají z doučování na přijímací zkoušky, nechali ostatní žáky přijít s objevem a rovněž aby dobudovali své generické modely, aby jejich znalost proměnné nebyla formální. Je si vědoma i toho, že nadaní žáci, kteří zvládnou v učebnicích úlohy vyřešit do nejobtížnější gradace, se častěji setkávají se zobecňováním, a tak mají před svými spolužáky náskok, co se zkušeností týče.

V

V učí Hejného metodou mnoho let na pražské základní škole a je jejím lektorem. Pozorovala jsem jeho výuku dvou hodin v jedné třídě. **V** dbal na to, aby ve třídě panovala pracovní atmosféra. Žáci buď řešili úlohy samostatně či ve dvojici se sousedem v lavici, přičemž je učitel obcházel a diskutoval s nimi, nebo se žáci střídali u tabule s prezentací svých výsledků, vzájemně je u toho diskutovali a učitel jejich diskusi moderoval. Tyto dvě fáze byly učitelem jednoznačně odlišeny, bylo jasně dáno, kdy je prostor pro samostatnou práci a kdy pro společnou diskusi.

Podle slov učitele část třídy nechce objevovat a chce pouze návody, což on respektuje. Z těch žáků, kteří se do objevování zapojují, je vždy jeden ze dvojice v lavici matematicky dominantnější. V zobecňování žáci písmena nepoužívají, avšak generické modely najdou. V jiných situacích (např. rovnice) žáci písmena používají. Již se setkali s roznásobováním závorek, a to v prostředí Hadi, kde měli hledat sourozence, a v prostředí Vah s balíčky.

V v hodinách téměř nepoužívá učebnice, raději vytváří pracovní listy s gradací na míru svým žákům, k čemuž ovšem využívá i učebnice a systém H-edu.[2] Přípravám věnuje čas a zamýšlí se nad gradací úloh. Míní, že právě proto je učitelem, aby žákům mohl zadat správně gradované úlohy. Je potřeba dělat si diagnostiky a vycházet z nich při plánování výuky.

Ve srovnání s jinými třídami se učiteli v této třídě učí nejhůř, což je dáno částí žáků, která nechce objevovat, a tím, že ne vždy mají i ti ostatní potřebu diskutovat a přicházet s objevy. Učiteli pak připadá, že se v této třídě v hodinách akusticky projevuje více, než by chtěl, a dodává, že však ne víc, než by měl. Snaží se minimalizovat svůj akustický projev na hodině (ve smyslu hovoření k celé třídě), nechává práci na žácích, avšak tvoří jim k tomu vhodné podmínky. Zastává názor, že je některé žákovské objevy nutné pojmenovat a zdůraznit, aby nezapadly, jen je potřeba ohlídat, aby se to nedělo moc často. Považuje za podstatné, jak se učitel na metodu vnitřně nastaví, tedy nakolik ji přijme za svou.

V propedeutice proměnné považuje zkušenosti s různými prostředími za naprosto stěžejní. Úlohám, které mohou být propedeutické pro algebru, je nutné věnovat náležitý prostor a péči. **V** je toho názoru, že učitel by měl na tento moment myslet dopředu a nezanedbávat úlohy, které přináší byť jen malé objevy na cestě k proměnné.

M

M učí na základní škole v Praze. Vedení školy ji nepodporuje v rozhodnutí učit Hejného metodou, tudíž žáci nemají učebnice z nakladatelství H-mat. Žáci mají učebnice nakladatelství Prometheus autorské dvojice Odvárko – Kadleček, které učitelka částečně využívá, ale často zařazuje do výuky prostředí z Hejného metody. **M** se připravuje na hodiny a přemýšlí nad zadáními úloh a jejich gradacemi. Úlohy, které bude v hodině žákům zadávat, pečlivě vybírá a spolu s poznámkami je vypisuje na papír, z něhož čerpá v průběhu vyučování. Výuka **M** je jakýmsi kompromisem výuky v souladu s principy metody založené na budování schémat a s ohledem na žákův poznávací proces v prostředí, které ji v tom nepodporuje.

Pozorovala jsem výuku v jedné třídě 7. ročníku. Tuto třídu učí **M** první školní rok, tedy v době pozorování (listopad) spolu pracovali necelé tři měsíce. Ve třídě je několik žáků, jejichž rodiny nemluví česky nebo se o studium a školu dětí nezajímají. Dle slov **M** „je to třída s problematickými rodiči, ale žáci jsou celkem v pohodě.“ Matematiku se žáci Hejného metodou nikdy předtím neučili, tudíž si teprve zvykají na různá prostředí a na metodu výuky. Protože žáci nemají své vlastní učebnice, učitelka jim zadává úlohy na tabuli či ústně. Během ná-

[2] Online systém se všemi materiály z učebnic, pracovních sešitů a příruček učitele, v němž se dají snadno tvořit pracovní listy. `https://www.h-edu.cz/`

slechů jsem si ale všimla, že se žáci, kteří mají úlohy rychle vypracované, nudí z nedostatku zadaných úloh.

M nechává žáky volně pracovat, ať už ve skupinkách, ve dvojicích nebo samotné. Ve třídě je velký ruch, zdaleka ne všichni žáci pracují na zadaných úkolech. Učitelka chodí mezi žáky a individuálně s nimi konzultuje jejich řešení či vyjasňuje zadání. Tím získává dobrý přehled o tom, jak na tom žáci s řešením jsou. Když **M** uzná, že je třeba zadat další úlohu, tak ji zadá buď od tabule všem žákům, nebo individuálně jednotlivcům. V hodinách, které jsem viděla, nedocházelo ke společné diskusi nad řešením úloh, a úlohy tak byly z pohledu pozorovatele neuzavřené.

S žáky **M** komunikuje zejména individuálně, když mluví na kolektiv třídy, nedostává se jí pozornosti všech žáků.

Podle svých slov potřebuje **M** proměnnou do výuky zavést co nejdříve, aby ji mohla využívat ve fyzice. Jako problém spatřuje to, že v této třídě žáci nemají propojený vztah sčítání a násobení, tedy nepovažují násobení za opakované sčítání ($4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4$). K zobecňování se sice již několikrát s žáky dostali, avšak ti skončili právě u toho, že nebyli schopni vyjádřit opakované sčítání jako součin. Generický model žáci v úlohách najdou, ale neumí ho tímto způsobem zestručnit. Dřívka, coby prostředí umožňující zobecňování, **M** s žáky nedělala, a to jednak kvůli nedostatečné materiální výbavě školy a jednak kvůli tomu, že by z nich prý žáci stavěli něco jiného.

L

L učí na základní škole v malém městě. Ve městě je to jediná základní škola,[3] v níž se všechny ročníky učí matematiku Hejného metodou (Školní vzdělávací program platný od začátku tohoto školního roku obsahuje v učivu prostředí, která jsou pro Hejného metodu specifická). Hejného metodou učí třetím rokem, přičemž kapitolu *Jazyk písmen I* učí poprvé. V jejich škole byla Hejného metoda na prvním stupni nařízena, druhý stupeň se přidal dobrovolně. Učí výhradně podle učebnic a spoléhá na správnost gradace úloh.

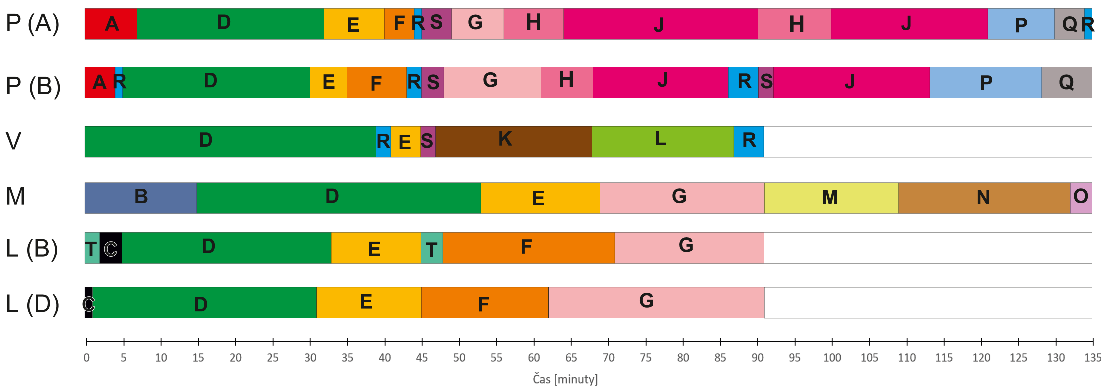
Při výuce klade **L** důraz na samostatnou práci žáků, žáci spolu v hodině nekomunikují kromě úseků hodiny, kdy jsou úlohy řešeny společně na tabuli. Žáci k tabuli téměř nechodí, diktují učitelce, co má na tabuli napsat. Během samostatné práce učitelka chodí mezi žáky, čte jejich zápisy v sešitě, reaguje na ně doplňujícími otázkami a hledá v zápisech chyby. **L** se v hodině projevuje vcelku akusticky, dává žákům pokyny, vyvolává je, vyzývá k práci, napomíná. Otázky směřuje často na konkrétní žáky, ačkoli je pronáší tak hlasitě, aby je slyšela celá třída. V hodinách žáci pracují samostatně nebo odpovídají učitelce, jen zřídka na sebe vzájemně reagují. V hodinách panuje klid.

L jsem pozorovala ve dvou třídách, v obou byl její přístup i metody podobné. Ve třídách jí dle jejích slov „chybí chytré děti, kterým to pálí, a ten jeden, co tam je, je líný“. Ve víře, že svým žákům pomůže, dává jim občas rady a tipy na strategie řešení.

[3]Ve městě je ještě jedna základní škola malotřídního typu, která se specializuje na žáky se speciálními vzdělávacími potřebami.

3.2.2 Úlohy a jejich zadávání

Každý z učitelů přistoupil k zavedení proměnné pomocí jiného sledu úloh, ačkoli stěžejní k objevení proměnné byla ve všech hodinách jedna z nich (úloha 34), které se budu věnovat podrobněji v oddíle 3.2.5.



Obrázek 3.1: Graf popisující časové rozložení jednotlivých úloh a aktivit v pozorovaných vyučovacích hodinách

Aktivita A: Jde o aktivitu (viz dále), pomocí které **P** uvedla v obou třídách jazyk písmen. V Příručce učitele (Hejný a kol., 2017, str. 62) je doporučeno začít kapitolu podobnou aktivitou, například obvodem obdélníku. **P** se zeptala žáků, jakým způsobem se vypočítá obsah čtverce. Úloha byla zadaná ústně, žáci v obou třídách vysvětlili, že je to „strana krát strana“, a že je možné to zapsat jako $a \cdot a$, což lze zjednodušit na a^2. Následovala otázka, jak se vypočítá obsah obdélníku. Opět žáci došli ke vzorci, bylo znát, že rozumí pojmu obsah, že ho nevnímají pouze jako vzorec, ale že vzorec vychází z pojmu. V 7.A proběhla diskuse nad tím, jak by šel zjednodušit zápis $a \cdot b$. Padaly návrhy na ab^2 či $a^2 + b^2$ (žáky nejspíše cosi pudilo k podobnému zápisu pomocí mocnin, jako je v obsahu čtverce), dosazením konkrétních čísel pak ověřili, že výrazy nejsou ekvivalentní. Po diskusi učitelka zakončila aktivitu takto:

> **P**: Vy jste mi napřed řekli, že je to strana krát strana ty obsahy, a pak jste to dali do nějakých písmenek. My se dneska budeme zabývat jazykem písmen, jak spolu ta písmena v matematice souvisí a co se s nimi všechno dá dělat. Takže si otevřete sešit, kam si napište nadpis Pracuji s jazykem písmen. A zapište si to, co jste tady teď společně odvodili.

Na žákovském uchopování vztahů pro obsahy čtverce a obdélníku lze spatřovat genetickou paralelu – na základě konkrétních zkušeností s útvarem je vztah popsán slovy a následně částečně či úplně symbolickým zápisem, který může být ještě upravován na základě pravidel symbolického zápisu ($a \cdot a = a^2$).

Aktivita B: **M** na úvod první hodiny zařadila jinou aktivitu:

M: Dáme si takovou hru. Takže, vemte si to ve dvojicích a dáme takovou hru. Vy si vymyslíte x a já vám k tomu řeknu y. A vy budete hádat, jak já jsem na to y přišla. Vaším úkolem je odhalit ten trik, jakým já z toho x dostanu to y. Jo? Já vám řeknu dvě čísla, ale pak si můžete říkat vlastní, kdybyste chtěli. Tohle budou společná dvě čísla, ale pak si každá dvojice může říkat o vlastní čísla. Pro čtyřku to vychází 18 a pro šestku 22. Tohle si napište a pak si můžete klidně vymyslet další číslo, já vám řeknu výsledek.

Učitelka pak chodila mezi žáky a na žádost jim řekla k libovolnému x patřičné y. Bohužel v zadání měla chybu, pro šestku to mělo vycházet 28, jelikož ten „trik" byl $y = 5x - 2$, což objevil žák, který si řekl o více hodnot, z nichž trik odhalil. Úvod do proměnné pojala tedy **M** pomocí funkcí.

Aktivita C: V obou třídách nechala **L** v úvodu hodiny žáky sbírat a sdílet myšlenky, v jakých oblastech matematiky se už setkali s písmeny. Žáci vzpomněli např. rovnice a neznámá čísla, geometrii, algebrogramy, práce s daty, zapisování vzorečků, římské číslice, slovní úlohy.

Aktivita D: U všech učitelů šlo o stěžejní úlohu pro objevení proměnné (viz oddíl 3.2.5). Jednalo se o výše popsanou úlohu 34 z učebnice C. **P** a **L** promítaly v obou třídách úlohu na tabuli. Kromě třídy **M** měli žáci vlastní učebnice. **V** a **P** nechali nejprve žáky úlohu přečíst a vyzvali někoho, aby ji přečetl nahlas (kvůli uchopení úlohy více smysly a také, jak řekla **P**, kvůli žákům s dyslexií). Ve třídách **L** si žáci měli úlohu nejprve sami přečíst, po chvíli **L** vyvolala někoho, kdo měl ostatním vysvětlit, co se má dělat, a proběhla krátká diskuse nad zadáním. **L** pak chodila mezi žáky a vyjasňovala jim zadání individuálně. Třída **M** nemá učebnice, tak **M** zadávala úlohu ústně a na tabuli. Upravila ji do pro žáky atraktivního prostředí hry Minecraft:

M: Máme Pedra, který si dělá záhon v Minecraftu.
K6 : *(Ožije)* Minecraft!
M: A když si Pedro udělá takovýhle záhon, tak on ho chce mít hezký a vždycky si ho orámuje. Vezme třeba nějaké plochy dřeva, kterými to orámuje. A protože si ty plochy dřeva na to musí připravit, tak se podívejme, když máme nějaké rozměry toho záhonu, tady mám třeba 2×2. Chápete to? Že jsou 2 bloky tady a 2 bloky tady, takže ten můj záhon je 2×2 veliký. Tak, kolik bloků dřeva Pedro potřebuje na to, aby orámoval záhon 2×2? *(**M** k tomu na tabuli maluje obrázek záhonu 2×2 a dlaždic kolem něj.)*
K3: Podle mě čtyři asi.
K2: 12.
M: Kolik jich tam mám?
K3: 16.
M: Pojď je spočítat. Vždyť jsou tam namalovaný.
K3: Jo takhle, jsou tam čtyři.

M: Tohleto je záhon, ty jsou šrafovaný, a tohleto jsou dřeva, která ho rámují. Kolik jich tam je?

K7: 12.

M: 12, spočítal jsi to? Tak když si uděláme záhon 3×3, nebudu ho malovat na tabuli, to si namalujte případně vy, tak řekněte mi, kolik bloků dřeva potřebuji. 4×4. 5×5. 6×6, a pak už čekám, že přijde ten trik, jak to spočítat, třeba si dáme 9×9, 10×10 a jakékoli jiné číslo, třeba 20×20. Jasný?

Aktivita E: Jde o úlohu 35 a). Všechny třídy kromě **M** stihli úlohu řešit na konci první hodiny. **M** ji zařadila do druhé hodiny. **P** zadávala jednodušší gradace vedoucí k této úloze už během Aktivity D.

Aktivita F: Jedná se o úlohu 35 b). Tuto úlohu neřešili žáci všech tříd, dořešili ji pouze ve třídách **L** a **P**.[4]

Aktivita G: Jedná se o první součtový trojúhelník z úlohy 36. Tuto úlohu řešili žáci všech tříd, kromě třídy **V** (ten měl tuto úlohu na pracovním listu nachystanou, ale žáci se k ní během hodiny nedostali). **L** spolu se zadáním této úlohy zadala snazší úlohu 33 pro žáky, kterým by považovali úlohu 36 za příliš těžkou (lehčí variantu volila vždy přibližně polovina třídy). V hodině **M** nebyla zadaná varianta s písmenem, ani třetí součtový trojúhelník. Žáci tuto úlohu většinou řešili metodou pokus-omyl, k hledání nějakého systému je přiměl až třetí trojúhelník. V hodině **L** byla úloha žákům zadána pouze jako odkaz na číslo úlohy v učebnici, nedošlo ke společnému uchopování zadání.

Aktivita H: Jde o druhý součtový trojúhelník z úlohy 36. Žáci obvykle velmi rychle zjistili, že je totožný s předchozím trojúhelníkem, jen je symbol $\star$ nahrazen písmenem b. V hodinách **L** nebyla tato úloha řešena společnou diskusí, ale jelikož žáci měli zadanou úlohu 36 jako celek, je možné, že se k jejímu řešení někteří žáci dostali, ačkoli to není zaznamenáno v grafu 3.1.

Aktivita J: Jde o třetí součtový trojúhelník úlohy 36. Diskusi řešení této úlohy jsem měla možnost vidět pouze v hodinách **P** (v hodinách **L** se k jejímu řešení dostali jen někteří žáci a úloha nebyla prodiskutována), přičemž v obou třídách zabralo řešení této úlohy velmi mnoho času. U této úlohy dochází k velkému gradačnímu skoku, úloha má totiž od předchozích trojúhelníků mírně odlišné zadání v tom, že hledáme součet všech políček trojúhelníku. Aby takový součet žákům vycházel, musí za proměnnou b dosadit zlomek $\frac{27}{8}$. Ve třídě 7.A. se žáci při řešení vraceli k předchozí úloze, aby lépe pochopili, jak se obecně součtový trojúhelník řeší a na základě toho mohli vyřešit třetí trojúhelník. Žáci tuto úlohu obvykle nejprve řešili tak, že zužovali interval, v němž musí správná hodnota b ležet. Až na výzvu **P** přišli žáci na zápis pomocí rovnice a následně na přesné vyjádření hodnoty b pomocí zlomku.

[4] **V** vytvořil na druhou vyučovací hodinu pro žáky pracovní list a v první hodině tuto úlohu obecně vyřešit nestihli.

Aktivita K: Jedná se o první úlohu z pracovního listu, který připravil **V** na druhou vyučovací hodinu. Je to úloha z prostředí *Dřívka* a je podobná úloze 3, avšak nejde o skládání dvojoken, ale pouze „obyčejných“ oken:

Úloha 49: *Na obrázku 3.2 jsou čtyři okna. Kolik dřívek na jejich vytvoření bude potřeba? Doplň tabulku.*[5]

okna	2	3	4	5	6	7	...	16	...	50	...	n
dřívka												

Obrázek 3.2: Zadání úlohy 49

Po rozdání pracovních listů učitel jinými slovy popsal, o co v úloze jde. Zobecnění této úlohy není těžké, tudíž na něj přišli žáci bez velkých obtíží. První obecné vyjádření jsem v sešitech žáků objevila už po přibližně pěti minutách od rozdání pracovních listů. Při řešení této úlohy se odehrála zajímavá situace, kdy žákyně objevila vyjádření „o jedno menší než n“ pomocí písmen:

H3: Pane učiteli, já to nechápu.
V: Už jsem tady. No to je to enko, to hledáme, kdyby to bylo nějaké n. To n může být $1, 2, 3\ldots$ A my hledáme nějaké to vyjádření, aby když se to číslo tam dosadí, tak abychom to rychle věděli. Což je takové zobecnění té úlohy.
H3: Ale já to nechápu...
V: A jak to máš?
H3: $n \cdot 3 + 4$. Pro tři to bude $2 \cdot 3 + 4$. Pro čtyři to bude $3 \cdot 3 + 4$. Pro pět to bude $4 \cdot 3 + 4$.
V: A kdyby to byla šestka?
H3: Tak $5 \cdot 3 + 4$. Takže to odečtu.
V: A pro enko?
H3: $n \cdot 3 + 4$.
V: A pro sedmičku jsi udělala co?
H3: Ajo. Nojo, ale to musím jít dozadu v abecedě!
V: *(se smíchem)* Jo, jako že bychom šli dozadu v abecedě?
H3: A nebo počkat, stačilo by $n - 1$ krát 3 plus 4.
V: No.

V této úloze žáci objevili dvě možná vyjádření, a to $(n-1)\cdot 3+4$ a $n\cdot 3+1$, načež si pak ukázali ekvivalenci těchto dvou výrazů (oba vyjadřují stejnou situaci a roznásobením[6] jednoho získáme druhý). Generický model našli v této úloze

[5] Nevím, zda učitel úlohu vymýšlel, či odněkud převzal. Vzhledem k tomu, že je úloha jednodušší, než první úloha z prostředí Dřívka v učebnici A, je možné, že se vyskytuje v učebnicích pro první stupeň.

[6] S roznásobováním se již žáci setkali, a to v úlohách o hadích sourozencích a ve vahách

všichni, a tak pro ně abstrakční zdvih do jazyka písmen, který objevilo několik žáků, byl přirozený.

Žákům, kteří byli s řešením rychle hotovi, učitel zadával další gradaci úlohy – měli namísto čtvercových oken stavět pětiúhelníková.

Altivita L: Je to opět úloha z pracovního listu **V**.

Úloha 50: *Zjistěte, jaké číslo vyjde, když do výrazu* $3 \cdot (a + 2b) - 1 - 6b$ *dosadíme:* ***a)*** $a = 5$, $b = 3$; ***b)*** $a = 5$, $b = 4$; ***c)*** $a = -3$, $b = 5$; ***d)*** $a = 5$, $b = -2$; ***e)*** $a = 10$, $b = \frac{1}{2}$; ***f)*** $a = 100$, $b = 77$.

Ačkoli tato úloha vypadá jako „obyčejné dosazování do výrazu", umožňuje žákům objevit smysl zjednodušování výrazů. Žáci objeví, že výsledná hodnota výrazu nezáleží na hodnotě proměnné b a lze ji vypočítat jednodušším způsobem jako $3a - 1$ (k této úloze patří ukázka v oddíle 3.2.3).

Aktivita M: Tuto aktivitu zadala **M** v úvodu třetí hodiny.

M: Budeme mít číslo n, n je přirozené číslo. Co to znamená, že je něco přirozené číslo?
K3: Normální číslo.
M: No, jaké?
K10: Vzniklo přirozeně.
K2: Číslo, celé číslo. Akorát nemůže být záporné.
M: Nemůže být záporné, je celé. Většinou buď začínají od nuly nebo od jedničky. Proto se značí n, zvykněte si na to, že když je n, tak je tím myšleno to přirozené číslo. (*(**M** píše na tabuli tabulku, v prvním řádku je n, druhý je zatím prázdný.)*
M: A máme to opačně, vy jste včera měli x a y a hádali jste, jaký byl postup, teď to máme opačně. Já ten postup vím, tady třeba napíšu postup $4 \cdot n - 3$ a zajímá mě, jaká všechna čísla tímhle postupem můžu dostat. Tak, K5! Jaká všechna čísla můžu tímhle postupem dostat? Jestli libovolná, nebo jestli mě to nějak omezuje. *(Učitelka do druhého řádku tabulky píše* $4 \cdot n - 3$.*)*

V podstatě se v této úloze rovněž jedná o dosazování do výrazu. Zároveň žáci mají zjišťovat souvislost mezi různými hodnotami výrazu. Pro ty žáky, kteří již mají dost zjištěných hodnot, přidává **M** další řádek tabulky s výrazem $6 \cdot n + 1$. V hodině nedošlo k diskusi nad řešením této úlohy.

Aktivita N: Jedná se opět o aktivitu ze třetí hodiny **M**. Žáci měli vyjádřit šířku $š$ obdélníku pomocí jeho obvodu o a délky d. Proměnné $š$ a d tedy značí délky stran obdélníku. Někteří žáci na vyjádření přišli (např. K1 měl v sešitě $o : 2 - d$), jiní znali postup, jak na $š$ rychle přijít, ale neměli to zapsané v jednom vzorci. Právě s takovým objevem „triku" se mi chtěla jedna žačka pochlubit:

---

s balíčky.

H2: Moc paní učitelce nejde mě obelhat, prostě to vždycky vypočítám.
Já: Jak jako obelhat?
H2: No, jakékoli číslo nám zadá, tak ho dokážu vypočítat díky tomuhle.
Já: Jo tak, že už jsi přišla na ten trik!
H2: Jo.
Já: A co kdybychom místo nějaké délky měli jenom...
H2: Písmenko? Tam může být vlastně hodně výsledků, jak se to dá vypočítat, jak jsem měla třeba 6 a 10.
Já: A dokázala bys pomocí toho písmenka napsat ten svůj postup?
H2: No tady jsem to už psala s těmi písmenky, bez těch čísel. *(V sešitě má $d \cdot 2 = 40$, $o - 40 = 8 : 2 =$š).*
Já: Takže to $o - d$ krát dva?
H2: Jo, a to je 8. A to pak vydělím dvěma a vyjde mi *š*.

Aktivita O: Na konci třetí hodiny **M** zadala žákům *Sčítací čtverec*. Do tabulky se vpisují součty krajních zadaných čísel, což je velmi jednoduchá aktivita. Učitelka žákům zadala pokračování, aby sečetli políčka označená tečkou, políčka označená hvězdičkou a políčka označená trojúhelníkem:

+	13	3	8
4	★	•	▲
9	•	▲	★
10	▲	★	•

Ke společnému řešení úlohy nedošlo, byla zadaná za domácí úkol.

Aktivita P: Jedná se o úlohu 37. Viděla jsem ji pouze ve výuce P. V 7.A byli s úlohou žáci hotovi velmi rychle (přibližně za deset minut včetně diskuse nad řešením). Učitelka v rámci pokládání otázek zadávala i obrácený způsob. V 7.B řešení trvalo déle, jelikož žáci objevili více strategií, jak úlohu vyřešit a jak ji těmito různými způsoby zobecnit.

Aktivita Q: Je to úloha 38. V hodině v 7.B po diskusi padlo správné řešení, avšak diskuse nebyla dotažená do konce v tom smyslu, že by všichni žáci odsouhlasili, že tomu rozumí. Hodina pak končila tím, že byli zmatení i ti žáci, kteří v průběhu diskuse přišli s nějakým klíčovým objevem. Tato úloha nebyla dořešena ani v 7.A, kde na řešení přišel žák, který zná výrazy z přípravy na přijímací zkoušky. Nestihl však spolužákům vysvětlit, jak na to přišel a jak by to měli správně řešit.

Aktivita R: Tak jsem označila čas, který učitelé věnují reflexi. Hromadnou reflexi používají **P** a **V** (viz oddíl 3.2.4).

Aktivita S: Jedná se o připomínání událostí a objevů minulé hodiny.

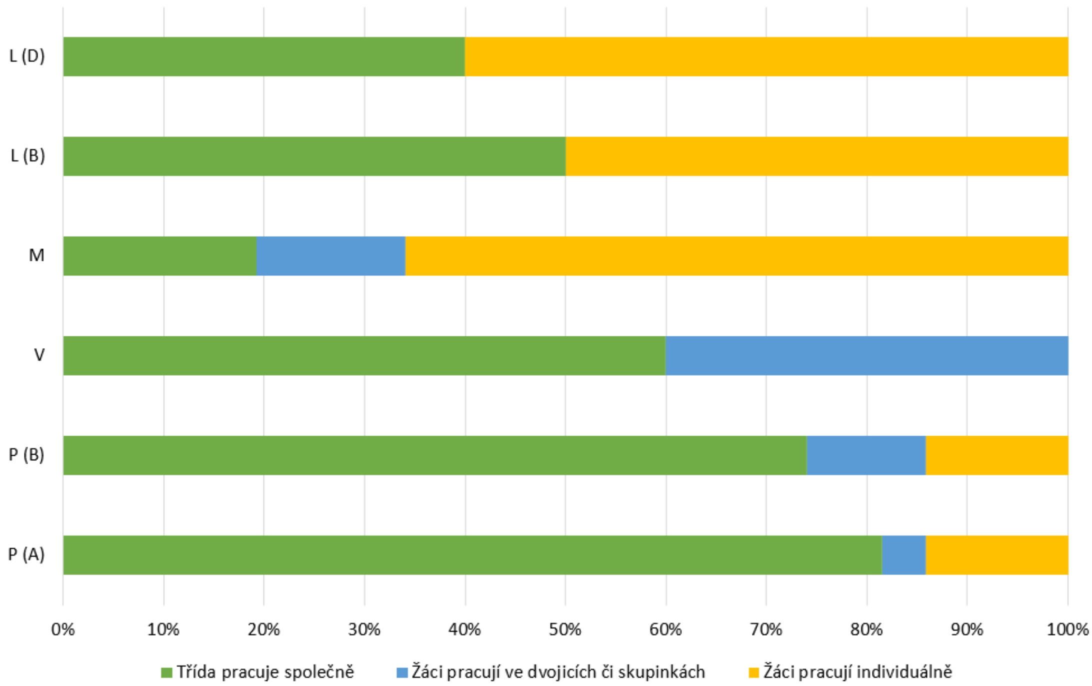
Aktivita T: **L** řešila na začátku hodin v 8.B třídnické záležitosti, které však nejsou relevantní pro můj výzkum.

3.2.3 Organizace hodiny

V průběhu náslechů v hodinách a během následných analýz dat jsem zkoumala a porovnávala, jak učitelé organizují hodinu. Jakým způsobem zadávají úlohy? Převládá společná práce celé třídy, skupinová práce, nebo žáci pracují individuálně? Na koho učitel směřuje otázky?

Formy výuky

Každý z učitelů, které jsem pozorovala, volil odlišné formy výuky. Během analýz jsem zkoumala, kolik času tráví žáci samostatnou prací, skupinovou prací či společnou prací celé třídy. Protože jsem nebyla u všech učitelů stejný počet hodin, vyjádřila jsem tyto poměry procentuálně (viz obr. 3.3).



Obrázek 3.3: Graf popisující procentuální zastoupení individuální, skupinové a společné práce žáků v pozorovaných vyučovacích hodinách

Do společné práce jsem započítávala i momenty, kdy dva či více žáků diskutují před třídou svá řešení, dohadují se o správnosti výsledků apod. U **P**, **V** a **M** mají žáci možnost při řešení úloh spolupracovat. Proto je rozdělení na samostatnou a skupinovou práci žáků u těchto učitelů rozlišeno podle toho, jakou možnost žáci v danou chvíli převážně volili.

P: **P** pracuje většinu času s celým kolektivem žáků, a to v obou třídách. Během samostatné či skupinové práce v 7.A žáci obvykle zprvu řešili úlohy samostatně a poté ve skupince konzultovali svá řešení. Do této skupinky se přidávali další žáci, kteří již přišli na nějaké řešení a chtěli si jej porovnat se spolužáky. Ve třídě 7.B více konzultovali sousedé v lavicích, ačkoli se občas pohybovali po třídě, aby konzultovali i s ostatními spolužáky. I v částech hodiny, které jsou na grafu 3.3 zahrnuty v části skupinové práce, pracovalo několik žáků samostatně. V obou třídách učitelka za samostatně (či skupinově) vyřešenou úlohu rozdává „razítka“, což žáky (zejména chlapce ze 7.A) motivuje k samostatné práci.[7] Například ve třetí hodině náslechů v 7.B ve společné diskusi přišli žáci na to, že v úloze 36 je v třetím trojúhelníku $b = 3\frac{3}{8}$, na což učitelka reagovala následovně:

P:	Takže vy jste došli k tomu, že b je 3 a $\frac{3}{8}$. Pojďme ověřit, že to vyjde. Ten, kdo ověří, ať už je to pravda, nebo ne, má u mě razítko.

Při společné diskusi řešení učitelka oslovuje všechny žáky, ti jí odpovídají dobrovolně, učitelka je nevyvolává. Na konci hodiny **P** dělá s žáky zpětnou vazbu (viz oddíl 3.2.4).

V: V hodinách **V** mírně převládá společná práce (60%) nad skupinovou (40%). Čas, kdy žáci řeší úlohy, je učitelem zřetelně oddělen od času, který tráví společnou diskusí úloh. Po zadání úlohy žáci řeší samostatně či ve dvojici v rámci lavice (dle jejich volby), učitel je obchází a hovoří s nimi o jejich nápadech na řešení. Po nějakém čase se učitel ptá, zda již žáci chtějí prodiskutovat svá řešení společně. Pokud odpoví, že ještě chtějí pracovat sami, učitel jim řekne, kolik času jim zbývá. Žáci pracují téměř výhradně ve dvojicích, proto v hodinách **V** převládá skupinová práce žáků a samostatnou práci jsem neidentifikovala. Během společné diskuse o řešeních úloh mají hlavní slovo žáci, učitel je jen moderuje. Ovšem na závěr nějakého podstatného objevu **V** dbá na to, aby žáci rozuměli, proč je daný objev důležitý, což jsem u jiných vyučujících nepozorovala. Níže uvedená situace se udála po důkladném prodiskutování řešení úlohy 34 na konci první hodiny. V této hodině žáci objevili celkem tři různá zobecnění ($4n + 4$, $(n + 1) \cdot 4$ a $(n + 2)^2 - n^2$), na něž **V** v ukázce odkazuje, a ujišťuje se, že žáci vnímají smysl proměnné a zobecnění:

V:	Vnímáte tedy, že se hodí občas nějaké to zobecnění?
Žáci:	Jo.
V:	Že vám to může někdy jako urychlit... Kdybychom třeba teď řekli 1000×1000, že je ten záhon. Tak mám tři možnosti, jak bych to mohl spočítat. Dám sem, nebo sem, nebo sem za n. *(Ukazuje na různá zobecnění, k nimž dospěli.)*
H3:	Jo, třeba $1000 + 1$ je 1001, krát 4 je 4004.

M: **M** se v hodinách věnuje žákům převážně individuálně. Zadá úlohu a poté obchází třídu a hovoří s žáky. Žáci si mohou vybrat, zda chtějí řešit úlohy samostatně, nebo skupinově. Ačkoli je ve třídě značný hluk, žáci pracují převážně samostatně, jinými slovy řešení a diskutování soukromých záležitostí podle mých

[7] Původně učitelka k dobře vyřešeným úlohám dala obrázkové razítko, avšak nyní žákům obvykle pastelkou nakreslí jednoduchý obrázek (kytičku, domeček apod.), jelikož razítka jsou „dávno poztrácená“. Je-li úloha „na razítko“, znamená to pro žáky pokyn k samostatné práci. Razítko je tedy jakýsi symbol pro samostatnou práci.

zkušeností z hodin převažuje u žáků nad matematikou. Někteří žáci sice spolupracují, avšak až na pobídku učitelky. Společné řešení úloh se v hodinách **M** vyskytlo jen ojediněle (dvakrát, oba případy nastaly v první hodině a jeden z nich je popsán v ukázce níže) a nebylo dotažené do konce. Poté, co učitelka uznala, že část žáků potřebuje nové úlohy, zadala nové, avšak nedošlo k diskusi nad předchozími – diskuse probíhala mezi učitelkou a jednotlivými žáky v průběhu celé hodiny. V hodině jako kdyby nebyly zřejmé hranice jednotlivých aktivit. Učitelce dělalo potíže mluvit na celou třídu, jelikož musela hlasem přebít hlučící žáky. Ukázka níže je z první poloviny první hodiny, kdy žáci na základě známých hodnot hádají trik (předpis), který ze znalosti jedné hodnoty určí druhou (funkce $y = 5x - 2$).[8]

M: Tak co? *(minuta ruchu)*
Žáci: *(hluční, nevěnují učitelce pozornost)*
M: Ještě nic? *(**M** dál odpovídá individuálně na dotazy hlásícím se žákům, chodí k nim, další minuta ruchu.)*
M: Tak co, má někdo nějaký návrh? Pokud ne, tak to odložíme. *(minuta ruchu)*
M: Tak prosimvás, možná to odložíme a vrátíme se k tomu. Nechte si to takhle jako bublat v hlavách.
K2: A jak to bude pro jedenáctku?
M: Pro jedenáctku to je 53.
K2: Tak jsem na to přišel.
M: Tak jsi na to přišel? Nojo, já to vidím. Myslíš, že dokážeš říct, jak jsi na to přišel?
K2: Ano, dokážu.
M: Tak počkejte! Tak pojď, K2. K2 na to přišel a možná pro vás ostatní bude zajímavé zjistit, jak na to přišel. *(K2 jde k tabuli.)*
K2: Já jsem to zkoušel a nakonec jsem zjistil, že všechna ta čísla … vždycky když se to vynásobí pěti a odečtou se dva, tak to vyjde. Takže třeba 10, protože se tam asi odhalí, co se s tím stane. *(K2 píše do tabulky* $10|48$ *a za to* $10 \cdot 5 - 2 = 48$.*)*

L: V hodinách **L**, které jsem pozorovala, nedošlo ke skupinové práci žáků. V jedné třídě strávili žáci polovinu času samostatnou prací a polovinu času společnou prací, ve druhé třídě převažovala samostatná práce (60%) nad společnou (40%). Žáci řešili úlohy převážně samostatně, nesměli během samostatné práce sdílet svoje nápady a řešení, a to ani se sousedem v lavici. V rozhovoru to **L** zdůvodnila takto:

L: Někdy je nechávám pracovat ve skupinách, jindy ne, jeden pracuje a druhý to po něm opisuje. Některý je prostě líný a vybírá nápady od toho druhého.

Společné řešení úloh vypadá v hodinách **L** tak, že žáci diktují své výsledky

[8] V oddíle 3.2.2 je tato úloha popsána jako Aktivita B.

a myšlenky učitelce, a ta je píše na tabuli. Občas při tom dochází k tomu, že učitelka za žáky dopoví řešení či „uhádne“ jejich myšlenku jinak, než by ji vyslovili, čímž v hodinách zaznívá žákovská argumentace méně, než by podle mého názoru mohla. **L** oslovuje během společného řešení konkrétní žáky, tudíž se stává, že vyvolá někoho, kdo si s úlohou neporadil. Společné řešení je pak jakýmsi veřejným dialogem učitelky a žáka. Žáci mezi sebou na sebe reagují minimálně, jejich komunikace jde přes učitelku.

Interakce

P: **P** klade velmi mnoho otázek. V jejím stylu komunikace se žáky jsem si všimla prvků aktivního naslouchání. Pobízí žáky ke zdůvodňování, klade otázky, které rozvíjejí žákovské výpovědi, parafrázuje myšlenky žáků (čímž jim dává okamžitou zpětnou vazbu, že jim rozumí), ověřuje, zda třída rozumí, co bylo řečeno. Jedinečnou frází, kterou **P** používá je „Dokážete někdo vysvětlit, jak to myslel?“, což žáky jednak vede k tomu, aby neztráceli pozornost, snažili se pochopit své spolužáky a jejich nápady, a jednak si tím učitelka ověřuje, že si žáci vzájemně rozumí. Někdy tuto (či podobnou) otázku pokládá tehdy, kdy žákova myšlenka nebyla správná a učitelka chce po žácích, aby nejasnost či chybu objevili. **P** vyzývá žáky ke vzájemnému ověřování, potvrzování či vyvracení tvrzení. Otázky klade na celou třídu, kdo z žáků chce odpovědět, mluví – **P** nikoho nevyvolává ani nenutí mluvit. Učitelka nesděluje fakta, ani nerozhoduje o správnosti výsledku, ale moderuje a podněcuje žákovskou diskusi a směřuje ji ke správnému řešení.

Co se týče ostatní komunikace v hodinách **P**, je třeba rozlišit navštívené třídy. V 7.A komunikuje jen několik žáků, kteří diskutují svá řešení, vyvracejí a potvrzují vzájemně svá tvrzení a sdílí své postupy. Část třídy je však velmi pasivní. Aktivní část třídy spolu navíc komunikuje velmi emotivně, někdy až z mého pohledu agresivně, což může odrazovat od diskuse matematicky slabší či méně komunikačně zdatné jedince. Aby učitelka korigovala rychlost, s jakou aktivní část třídy řeší úlohy, vstupuje podle svých slov do role slabé žákyně a klade otázky, které vyžadují jiné zdůvodnění či podrobnější vysvětlení myšlenky či postupu. Individuálně (soukromě) učitelka s žáky hovoří jen zřídka, a to v momentě, kdy žáci samostatně řeší úlohu „na razítko“. Jednak obchází pasivnější žáky, aby zjistila, jak si vedou, a jednak uděluje razítka, což obnáší kontrolu a konzultaci žákovských řešení. Interakce mezi žáky probíhá zejména veřejně, při společných diskusích. Žáci (i několik naráz) stojí u tabule a řeší se zápalem úlohu. Ostatní sedí v lavicích, aktivnější se zapojují do dění u tabule a přispívají svými myšlenkami, pasivnější opisují z tabule nebo počítají svým tempem. Mezi aktivní žáky není žádná dívka. V následující ukázce lze spatřit mnoho různých interakcí (učitel → třída, učitel ↔ žák (veřejně), žák → třída, žák → žák (veřejně), žák → žák (soukromě)). Situace se odehrála v první hodině v 7.A, kdy **P** zadává úlohu 35.

P:	Můj příští dotaz bude, co když budeme vědět, že máme záhon, kolem kterého je 112 dlaždiček. A já chci vědět, z kolika čtverečků se skládá záhon?
K1:	24.
P:	K5?

K5:	27.
P:	K5, pojď to zkusit vysvětlit.
K5:	Né, pardon.
P:	Aha, ještě 22 tady je názor. K5, pojď zkusit obhájit ten svůj názor. Aha, ještě počítáš. A K7 říká 26. *(**P** píše pod sebe výsledky, které jí žáci diktují –* 22, 24, 26, 27. *K5 se zvedá a jde k tabuli.)*
K5:	Tak od 112 odečtu čtyři, to je 108. Děleno čtyřmi je 27.
K2:	Ne, nerovná. *(Někteří žáci se smějí, jakoby se K5 posmívali.)*
K5:	Rovná.
P:	K5, nenech se zviklat, proč je to 27? Jak jsi to počítal?
K5:	Tak $4 \cdot 25 = 100$ a $4 \cdot 2 = 8$, takže $2 + 25 = 27$.
P:	Dává to smysl, co K5 říkal?
K4 ke K2:	Já myslel, že tam jsou čtyři dvacítky.
K1:	*(Jde k tabuli obhájit svůj výsledek* 24*)* Tak já si prostě 112 vydělím čtyřmi, což je 28, a potom se odečtou 4, takže 24.
K4:	Souhlasím s K1, protože když to máme, tak nejdřív to násobíme, a potom až to odečítáme.
K1:	Prostě rovnice, to dává smysl, protože $a \cdot 4 \ldots$
P:	A prosimvás, jaký rovnice a jak jste přišli na ty myšlenky, achjo, já tomu zase nerozumim.*(Učitelka mírně změněným hlasem vstupuje do role slabé žačky.)*
K4:	Se zeptejte Alfonse.
P:	Alfonse si mám zavolat? *(Alfons je fiktivní spolužák, kterému občas „volají“, když potřebují rozřešit nějakou hádku, s něčím poradit apod.)*

V 7.B se do společných diskusí zapojuje velká část třídy. Během samostatné práce spolu komunikují sousedé v lavicích, během společných částí hodin na sebe reaguje plynule mnoho žáků – společně vymýšlejí strategie řešení a dobírají se k výsledkům. Diskuse jsou oproti 7.A mnohem méně vyhrocené, žáci komunikují z mého pohledu vstřícněji.. Ačkoli v 7.B mluví mnoho lidí najednou, panuje ve třídě pracovní klid. Učitelka je v této třídě zejména v roli moderátorky diskusí.

V: **V** v hodinách nemluví moc hlasitě, a přesto je zřetelně slyšet, jelikož je ve třídě pracovní klid. Žáci tiše v lavicích řeší zadané úlohy, učitel chodí mezi nimi a polohlasem s nimi diskutuje. Při hromadném sdílení vyzývá žáky, o kterých ví, že mají nějaké řešení, aby ho šli předvést. Ve společných diskusích na sebe žáci přirozeně reagují a učitel jejich diskusi moderuje, přičemž se čas od času ujišťuje, zda třída rozumí tomu, co bylo řečeno (o tom více v oddíle 3.2.4). Následující ukázka je z druhé hodiny, kdy žáci řešili úlohu, v níž měli dosazovat hodnoty do výrazu.[9] Výraz byl záměrně takový, aby na jedné ze dvou hodnot nezáleželo. Tento objev žáci diskutují v ukázce, v níž jsou zároveň vidět různé interakce (učitel → třída, učitel ↔ žák (veřejně), žák → třída, žák → žák (veřejně)).

V:	H6 nabízela nějaký objev. H6, máš nějaký? Tak pojď, tak nám ukaž objev. Třeba u céčka.

[9] V oddíle 3.2.2 je úloha popsána jako Aktivita L.

H6:	Ono to vlastně vždycky vyjde tak, že to je $a \cdot 3 - 1$. Protože to béčko prostě vždycky zmizí.
H9:	Ajo!
V:	Je to pravda?
K3:	Mně to vyšlo u toho f).
V:	U f) to vychází, jo?
H6:	No mně to vyšlo takhle u všech, protože se to tam jakoby vyškrtá. Protože tady třeba to vyšlo $+30$ a -30, takže tohle by se prostě vyškrtalo a je to prostě jen $3 \cdot (-3) - 1$.
V:	A jak se to tak může stát, že vlastně na tom béčku to vůbec nezáleží, jak říká H6. A proč?
H6:	Ono jakoby tohle se vynásobí třemi, takže $+30$ a tady zase -30, prostě tyhle dvě čísla jsou vždycky stejná. Vyjde to u jakéhokoli.
V:	Co ostatní? Co tomu říkáte?
Žáci:	Jo, je to pravda.
V:	Že to vlastně je to samé, jako že vezmu $3 \cdot a - 1$. A teď H6, jak jsi k tomu došla?

M: **M** komunikuje s žáky zejména individuálně, kdy obchází jejich lavice a diskutuje s nimi jejich řešení. Individuálně žákům případně zadává vhodnější gradace úloh. Jen minimum času hovoří k celé třídě, většinou jde pouze o zadávání úloh. Žáci spolu interagují téměř bez ustání, a to včetně chvil, kdy **M** promlouvá k celé třídě. Jejich interakce se však ve velké míře netýkají matematiky, ti, kteří řeší úlohy, je většinou řeší samostatně. **M** je na žáky velmi milá, směje se s nimi. Ukázka jediné hromadné diskuse v hodině **M** je uvedena výše, na následující ukázce je moment, kdy učitelka v druhé polovině první hodiny individuálně zadává dvěma nadaným žákům, aby zobecnili úlohu 34.

M k K2:	K2, kolik ti to vychází pro 9×9?
K2:	40.
M k K2:	Tak to máte s K1 stejně. Jděte si porovnat výsledky. A mám pro vás úkol, kluci. Kdybych tady napsala $n \times n$, tak jestli to zvládnete pod to napsat jen s tím enkem. *(Učitelka odchází k dalším žákům.)*
K2 k K1:	$(n+2) \cdot (n+2) - n \cdot n =$ množství dřeva.
K1 k K2:	Když máš 3×3 a teď to rozšíříš, tak tam máš 3, 3, 3, 3 a ty čtyři rohy. *(Chlapci dál konzultují svá řešení, zjišťují, že každý má jiný přístup, a vysvětlují si je.)*

V hodinách **M** se kromě jedné výjimky nevyskytla interakce žák $\rightarrow$ třída. Interakce učitel $\rightarrow$ třída byla zastoupena minimálně. Stěžejní byly v hodině individuální (soukromé) rozhovory učitel $\leftrightarrow$ žák a žák $\leftrightarrow$ žák.

L: V hodinách **L** probíhala většina interakcí veřejně, interakce žák $\leftrightarrow$ žák se nevyskytovaly, jelikož je **L** zakazovala. Žáci byli opakovaně vyzýváni k samostatné práci, jak dokládá následující ukázka.

L na H2:	Na co čekáš? *(Učitelka mluví směrem k H2, ale nahlas.)*
H2:	Já přemýšlím.
L na H2:	Nepřemýšlej, dosaď tam čísla a spočítej to. Jak to spočítat jsme si říkali včera. Není moc nad čím přemýšlet. *(Učitelka usedne za katedru.)* A sama, ne že zase budeš opisovat od H1.

Ve všech pozorovaných hodinách učitelka nejčastěji mluvila k celé třídě, často také probíhaly interakce učitel ↔ žák, a to veřejné i soukromé s podobnou četností. Žáci míří své otázky na učitelku, ta jim odpovídá. Učitelka vyvolává žáka, ten jí odpovídá. Často učitelka pronáší rady, tipy na strategie a další poznámky k celé třídě či nahlas k jednotlivým žákům během jejich samostatné práce. Při individuálních rozhovorech se žáky učitelka buď odpovídá na dotazy žáků, nebo reaguje na jejich zápis v sešitě. Ze zápisu učitelka hádá, jak to žák myslí, a žák nemá velký prostor myšlenku vysvětlit. Odpovědi žáků na otázky jsou většinou krátké.

L :	Tak, my jsme měli záhon o straně 4 kostičky. Kolik jsme potřebovali těch dlaždic na obestavění? H5?
H5:	20.
L:	Souhlas? Já jsem si na to napsala tabulku, abych to měla přehledné. Když jsme měli stranu 5?
Žáci:	24.
L:	A když 9?
Žáci:	40.
H5:	Paní učitelko, já to mám jinak.
L:	A kde to máš jinak?
H5:	To 9×9 mám 36.
K3:	Já 38.
L:	Kdo má všechno 40? *(Jen málo žáků se hlásí.)* Tak se asi zastavíme u toho, jak jsme to počítali. Tak, někdo už přišel na to n a někdo měl způsob, jak postupně, kdybych tam přidala 6, 7. Jak jste to počítali takhle popořadě, kdo tam měl nějaký nápad?
K2:	Jde to o čtyři.
K4:	Je to po čtyřech.
H8:	No že se to násobí čtyřmi.
L:	H8?
H8:	No, jde to vždycky o čtyři.
L:	Všimli jste si, že se to vždycky zvětšuje o čtyři? Takže 6 by bylo? *(Společně dopočítávají po čtyřech až ke čtyřiceti.)* Jo, H5, někde jsi musela udělat chybku. Tys to taky přičítala po těch čtyřech? *(H5 přikyvuje)*. Tak jsi tam musela asi nějaký číslo vypustit, to tak vypadá.

3.2.4 Ověřování porozumění

P se při každé nové myšlence táže žáků, zda všichni porozuměli. Chce po žácích, aby vysvětlovali výroky svých spolužáků, k čemuž žáci potřebují pochopit a přeformulovat tvrzení spolužáků. Na konci hodiny se učitelka ptá konkrétních žáků, kteří se v dané hodině příliš nezapojovali, na zpětnou vazbu.

P: A protože tady dva lidi dneska nepromluvili, tak se jich zeptám, co bylo pro ně v dnešní hodině nejdůležitější.
K8: Nevím.
K9: To jak jsme počítali obsah té zahrádky.
P: A porozuměl jsi tomu?
K9: Tak z poloviny. Ale tohle na konci jsem nechápal.
P: Já taky neříkám, že tohle na tabuli je správně, od toho se odpíchneme v pondělí. Takže děkuji vám, mějte se hezky.

V získává dobrý přehled o práci žáků při jejich samostatné práci – chodí mezi lavicemi a diskutuje s žáky v tichosti jejich řešení. Po objevu nějaké klíčové myšlenky se táže žáků na smysl toho objevu, aby ho uměli zařadit do již existujících zkušeností (podporuje krystalizaci poznatků). Žáků se ke konci hodiny ptá, co považují za důležité, co pro ně bylo náročné, v čem se „chytali“ a v čem se „ztráceli“. **V** dává po prezentaci různých řešení úlohy hlasovat, kdo řešil úlohu jakou strategií („Přihlásí se ti, kteří to řešili tímto způsobem.“ nebo „Přihlásí se ti, kteří to dopočítali celé, kromě poslední gradace, alespoň jeden případ...“ apod.). Jen málo žáků se hlásí. V následující ukázce najdeme jednak jeho rozhovory s jednotlivými žáky či dvojicemi, tak „hlasování“. Situace se odehrává přibližně v polovině první hodiny, kdy žáci řeší úlohu 34. Do této chvíle řešili samostatně, resp. skupinově, nyní je učitel svolává ke společnému sdílení strategií řešení.

V: Tak, zeptám se, jak jste na tom. Chcete už jít dohromady? Přišli jste na nějaké věci? Chcete je spolu sdílet? Nebo chcete ještě chviličku sami? Ještě chvilku? No, někdo k tomu už má nakročeno. Dobrá. (*Žáci na učitele reagují, ale nijak hlasitě, spíše gesty, někteří jsou zabráni do práce. Učitel jde mezi žáky.)*
V k H5: *(H5 píše všechny případy* $1\times1, 2\times2$*, v sešitě to má předepsané až do* 100×100*.)* A když ti dám 15×15, tak mi třeba do deseti vteřin řekneš, protože už víš, jak to funguje?
H5: Asi jo. Jedu po čtyřkách.
V k H5: A co kdybych chtěl vědět 200 × 200?
H5: Tak tam dojdu časem. *(Učitel se usměje a jde dál.)*
V: Tak jo, tak já vyhlásím poslední třeba čtyři minutky a půjdeme se podívat společně, co jste objevili. *(Další čtyři minuty individuálně tiše hovoří se žáky.)*

V: Tak jo, tak asi můžeme. Tak já vás poprosím, abychom se teď soustředili. Pojďme na to společně, zkusíme to. Nejdřív se zeptám, komu se povedlo vyřešit ty čtyři úlohy konkrétní, bez toho n? Komu se povedlo vyřešit ty čtyři úlohy, ať mám představu? *(Hlásí se téměř všichni žáci.)* Tak jo, tak to je vás většina. Komu se povedla jenom jedna vyřešit? *(Hlísí se dva chlapci, kteří vyřešili jen* 4×4.*)* Kdo si poradil nějakým způsobem s tím enkem, že mu to dávalo smysl? *(Objevilo se asi 6 nejistých rukou.)* Holky si poradily s enkem?

H3: Tak nějak.

M získává informace o žácích výhradně z individuálních rozhovorů se žáky v jejich lavicích, když je obchází během jejich samostatné práce.

L během samostatné práce obchází žáky a čte jejich zápisy v sešitě. Když v nich vidí chybu, upozorní žáka a případně mu i poví, co je to za chybu a proč ji udělal. Občas dává **L** žákům hlasovat, kdo už má úlohu vyřešenou, případně v jaké fázi se v řešení nachází.

3.2.5 Objev proměnné

V hodinách učitelek **P** a **M** žáci nejprve řešili úvodní aktivitu, která již souvisela s jazykem písmen (viz oddíl 3.1). V hodině **P** se jednalo o odvození vzorců pro obsah čtverce a obdélníku, v hodině **M** šlo o hledání předpisu lineární funkce ze známých hodnot.

Klíčový moment pro objev proměnné ve všech sledovaných třídách však nastal při řešení úlohy 34, a to mezi 20. a 35. minutou první hodiny.

Intervence učitele

P v obou třídách téměř po celou dobu řešení této úlohy řídila diskusi. Žáci tedy celou tuto úlohu řešili kolektivně, střídali se u tabule, kde představovali své nápady. Na konci diskuse se v obou třídách stočila řeč k tomu, zda n může být desetinné číslo nebo zlomek. Žáci ověřili, že ano, připustí-li řezání dlaždic.

V nechal po uchopení úlohy řešit žáky samostatně (ve dvojicích) a diskutoval s nimi. Tím získal přehled o tom, kdo jaké volí strategie, a žáci si tak mohli svá řešení důkladně rozmyslet. Při společné diskusi pak využíval toho, že znal řešení jednotlivých žáků, k tomu, aby je k tabuli zval ve vhodném pořadí. Když žáci dospěli ke generickému modelu všech tří strategií, které objevili, vyzval je učitel k tomu, aby nějaký z nich zobecnili. Poté proběhla krátká diskuse nad smyslem proměnné a následně žáci hledali další dvě zobecnění. Tímto došli k ekvivalenci výrazů (tři různá vyjádření pro stejnou věc).

M po zadání a krátkém společném uchopování úlohy pracovala s žáky individuálně. U některých žáků však došlo k zobecnění, ty vyzvala, ať si spolu sednou a sdílí své výsledky (každý volil jiný postup). Nedošlo ke kolektivní diskusi, proto mnoho žáků k proměnné nedošlo.

L po krátkém společném uchopování zadání nechala žáky řešit úlohu přibližně deset minut samostatně (bez možnosti konzultace se spolužáky). Během samostatné práce někteří žáci na zobecnění přišli. Při společném řešení učitelka psala na tabuli, co jí žáci diktovali. Kladla žákům otázky, vyvolávala je a ti jí odpovídali, na co během samostatné práce přišli. Po vyřešení a)–d) ve třídě 8.D měli žáci řešit případ $n \times n$, kdy je učitelka upozornila, že nechceme žádné x, y, či jiné písmenko, že zkrátka chceme n tak, jak je zadané. Proběhla krátká diskuse nad tím, jaká písmena se v matematice používají k různým vyjádřením. Poté, co žáci navrhli několik možných vyjádření, je učitelka vyzvala, aby dosazením ověřili, které jsou správně. Vysvětlila jim pak, proč tomu tak je. Na závěr označila správné výrazy a naznačila, že se rovnají („jiný vzoreček, ale hází nám stejnou věc“). Rychle pak zadala další úlohu. V 8.B se v hromadném řešení objevila dvě vyjádření, která na závěr hodiny učitelka rovněž označila za „to samé, takže se to rovná“.

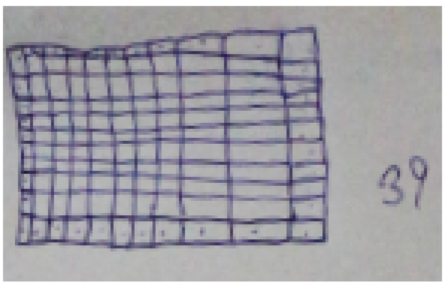
Strategie řešení

V různých třídách se objevovaly různé strategie řešení úlohy 34 (tabulka 3.17).

Tabulka 3.17: Výskyt různých strategií řešení úlohy 34 v jednotlivých třídách.

strategie	**P** (A)	**P** (B)	**V**	**M**	**L** (B)	**L** (D)
obrázek	•	•	•	•	•	•
o 4 větší	•	•	•	•	•	•
$n \cdot 4 + 4$	•	•	•	•	•	•
obvod +4			•			
$(n+1) \cdot 4$	•		•			•
obsahy			•	•		
$2(n+2) + 2n$					•	•

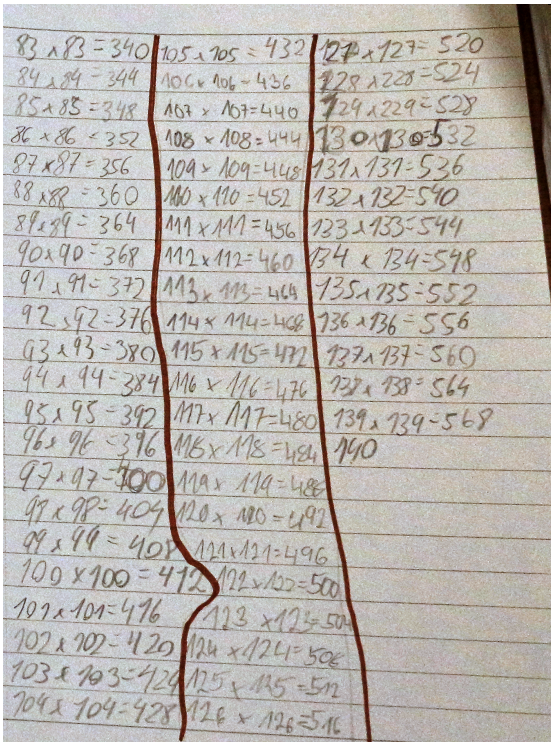
Žáci úlohu vždy nejprve uchopovali pomocí obrázku, kdy si nakreslili záhon, kolem něj dlaždice, a ty po jedné spočítali. Někteří žáci takto počítali i případ 18×18, dokonce zkoušeli i 100×100. Kvůli nepřesnému kreslení dělali často žáci v takových výpočtech chyby (viz obr. 3.4).



Obrázek 3.4: Strategie řešení pomocí obrázku v sešitě žáka s nesprávným výpočtem počtu dlaždic pro záhon 9×9

Ve všech třídách si žáci všimli, že když se záhon zvětší o jedna, počet dlaždic vzroste o čtyři (viz obr. 3.5). Některým žákům tato strategie připadala dostatečně obecná a tvrdili, že již nepotřebují další, že jim to stačí.

V: A co kdybych chtěl vědět 200×200?
H5: Tak tam dojdu časem.



Obrázek 3.5: Strategie řešení přičítáním čtyřky

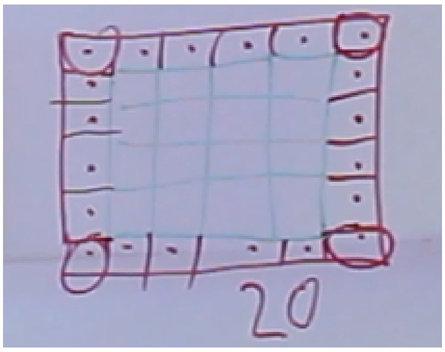
V některých třídách (**P** (A), **L** (B) a individuálně žáci v dalších třídách) žáci objevili, že když se zdvojnásobí velikost záhonu, tak to neznamená, že se zdvojnásobí počet potřebných dlaždic.

Ve všech třídách se objevila strategie $strana \cdot 4 + 4$. Dalo by se říct, že byla dokonce ve všech třídách dominantní. Žáci na ni obvykle přišli z obrázku, kdy označili rohové dlaždice, které musí přičíst ke čtyřem stranám záhonu[10] (viz obr. 3.6). V hodině **V** byla tato strategie prezentována na závěr při prezentaci generických modelů, ale byla zároveň první, kterou žáci zobecnili pomocí n. Ve třídě **P** (A) vznikla tato strategie spontánně bez výzvy učitelky na zobecnění, proto v této třídě použili proměnnou a namísto zadané n (mohlo to být ovlivněno úvodní aktivitou, kde žáci odvozovali obsah čtverce a používali rovněž proměnnou a) a proběhla diskuse nad tím, zda platí rovnost $4 \cdot a + 4 = 4a + 4$. Ve třídě **P** (B) se neobjevila žádná další strategie, ale proběhla diskuse nad ekvivalentností různých výrazů (co by který nesprávně sestavený výraz mohl vyjadřovat).

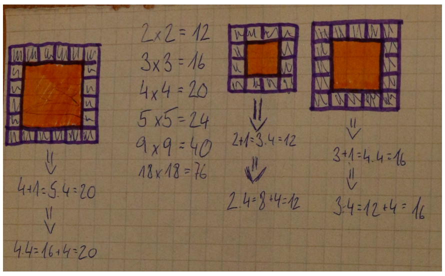
Další strategie je podobná, vychází z toho, že se rohové dlaždice přičtou k jedné z přilehlých stran. Pak je počet dlaždic možné vyjádřit jako $(n + 1) \cdot 4$. Tato strategie se objevila ve dvou třídách (**P** (A) a **V**) a je zobrazena na obrázku 3.7. V obou třídách došlo na diskusi o ekvivalenci tohoto vyjádření s výrazem $4 \cdot n + 4$.

Ve dvou třídách (**V**, **M**) se objevila též strategie odečítání obsahů. Strana čtverce, který je tvořen záhonem včetně chodníku, je o dvě jednotky větší než strana záhonu, tedy chodník lze spočítat jako $(n + 2) \cdot (n + 2) - n \cdot n$. K tomuto zápisu dospěli žáci ve třídě **V**. Ve třídě **M** tuto strategii zvolil jeden nadaný žák, který ji měl obecně již během asi čtyř minut. V sešitě měl zápis $x + 2 = y$; $y^2 - x^2 = množství\ dřeva$.

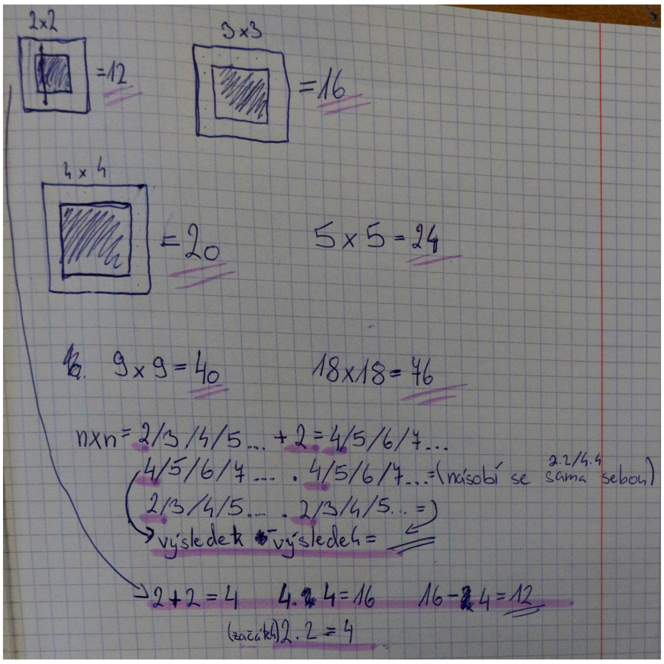
[10]Ve třídě **V** se objevilo i vyjádření *obvod*+4



Obrázek 3.6: Snímek tabule se strategií řešení pomocí obrázku s vyznačením čtyř rohových dlaždic



Obrázek 3.7: Strategie řešení $(n + 1) \cdot 4$



Obrázek 3.8: Sešit se strategií odečítání obsahů

Ve třídách **L** se ještě objevila strategie, spočívající v tom, že nejdříve spočítáme horní a dolní dlaždice, připočteme boční, ale musíme si dávat pozor, abychom něco nepočítali dvakrát. Ve třídě **L** (B) byla diskuse nad tím, co musíme odečítat, aby se nám rohové dlaždice nekryly, z mého pohledu zmatená a nevedla ke správnému výsledku. Výraz, který učitelka nakonec označila za správný, měl špatné uzávorkování. Na tabuli na konci diskuse byla rovnost $n \cdot 4 + 4 = (2 \cdot n + 2) + 2 \cdot n$ namísto správného vyjádření $n \cdot 4 + 4 = 2 \cdot (n + 2) + 2 \cdot n$. Ve třídě **L** (D) měl tuto strategii jeden žák v sešitě, ale při společné prezentaci řešení ji neuvedl.

Ve všech třídách bylo uchopování problému ve shodě s myšlenkou genetické paralely a s teorií generických modelů. Nejprve si žáci kreslili jednotlivé případy a po jedné počítali dlaždice (hladina izolovaných modelů). Začali objevovat určité souvislosti mezi počty potřebných dlaždic, jako *jde to po čtyřech, zvětšuje se o čtyři* apod. případně si všimli nějakého vzoru či struktury v obrázku, z čehož odvodili „trik“, jak rychle počet dlaždic vypočítat. Například *to krát čtyři plus čtyři, obvod plus čtyři* nebo *velký čtverec (záhon i s chodníkem dohromady je o dva větší než záhon) bez záhonu je chodník*. V historické paralele by tento moment byl na úrovni rétorické algebry. Někteří žáci na této úrovni skončili, objevili generický model, jak spočítat libovolný záhon (např. pro 20×20 dostáváme výpočet $20 \cdot 4 + 4$ či $21 \cdot 4$ nebo $22^2 - 20^2$). V tomto stádiu žáci zjistili, že vztah není přímo úměrný, tedy že např. na záhon 3×3 nepotřebujeme polovinu dlaždic, které jsou třeba pro záhon 6×6.

Na některé žáky zapůsobila uchopovací síla jazyka písmen (často na výzvu učitele, ať už veřejnou, nebo soukromou) a rozhodli se vztah vyjádřit pomocí písmen. Nejprve žáci začali zkracovat či jinak symbolicky zaznamenávat svůj objev, nejprve za použití slov, postupně i čistě symbolicky ($strana \cdot 4 + 4$ nebo $o \cdot 4$, kde o je o jedno písmeno v abecedě před písmenem n, tedy $(n + 1) \cdot 4$). V historii tato etapa odpovídá renesančnímu vývoji algebraické symboliky. Takto žáci kultivovali svůj algebraický zápis do podoby, která je dnes standardní, tedy $4n + 4$, $(n + 1) \cdot 4$, $(n + 2) \cdot (n + 2) - n \cdot n$ apod., čímž dosáhli hladiny abstrakce. Pokud se ve třídě objevilo více různých zobecnění, vznikl prostor pro transformační sílu jazyka písmen – jeden výraz šlo převést na druhý, např. $(n + 1) \cdot 4 = n \cdot 4 + 4$.

V některých třídách byl tento proces sledovatelný u celého kolektivu třídy (**P**, **V**, částečně **L**), ve třídě **M** procházeli tímto procesem jednotliví žáci různým tempem, tudíž na konci pozorování byli rozprostřeni po celé škále poznávacího procesu vzhledem k poznávání proměnné (někteří stále kreslili, jiní přičítali po čtyřkách, jiní objevili generický model a někteří ho zapsali symbolicky). Neznamená to však, že ve třídách, kde proběhla diskuse a sdílení poznatků, dosáhli všichni žáci úrovně abstrakce. Mohli však nahlédnout, co zobecnění znamená, jak „vypadá“, a tak si uvědomit, čemu ještě nerozumí. Mnou dotazovaní učitelé se však shodují na tom, že ne všichni žáci abstrakci proměnné pochopí, vstřebají a budou ji umět používat.

3.3 Shrnutí výzkumu

V následujících odstavcích shrnu nejvýraznější rozdíly a podobnosti ve výuce čtyř sledovaných učitelů.

Největší kontrasty v organizaci hodiny spatřuji mezi výukou **L** a **P** ve smyslu kladení otázek – **L** otázky klade hlavně konkrétním žákům, **P** míří otázky nejčastěji na všechny žáky.

Další kontrast spatřuji ve výuce **V** a **M** z hlediska „čitelnosti situace“ – žáci v hodině **V** vědí, kdy je prostor pro řešení a kdy pro hromadné sdílení, v hodinách **M** je kvůli rušným žákům špatně slyšet učitelku hovořící k celé třídě. Tutéž dvojici lze porovnat ještě z hlediska ochoty žáků pracovat společně – žáci **V** pracují ve dvojicích se sousedem v lavici, žáci **M** tíhnou k samostatné práci a nechtějí sdílet své objevy.

M ve srovnání s **P** pracuje s žáky převážně individuálně, **P** pracuje většinu hodin s celým kolektivem žáků.

M a **L** píší na tabuli převážně samy. U těchto dvou učitelek v podstatě neprobíhá společná diskuse nad řešeními (ve třídách **L** sice používá hromadnou výuku, avšak je jejím hlavním aktérem, žáci na sebe přímo téměř nereagují). **M** podporuje komunikaci žáků během samostatné práce, **L** individuální komunikaci žákům nedovoluje. U obou těchto učitelek dochází jen ke krátkému společnému uchopování úloh, žákům dovysvětlují zadání individuálně.

Ačkoli **P** a **V** používají podobné techniky moderování diskuse žáků, nemluví **V** tak hlasitě jako **P** (zejm. v 7.A). Tyto dva učitelé ve výuce využívají prolínání témat a prostředí a se žáky na konci vyučovací hodiny reflektují, co se naučili. **V** na rozdíl od **P** se více času žákům věnuje individuálně během jejich samostatné či skupinové práce. Oba nechávají psát na tabuli převážně žáky a žáci mají v jejich hodinách velký prostor k rozvoji argumentace a k společné diskusi.

Na **V** a **L** v hodině žáci „nezapomínají“, jsou si stále vědomi jejich přítomnosti, s tím, že u **L** je to jejím výrazným akustickým projevem, u **V** jaksi přirozeně. Na **M** a **P** občas žáci jakoby „zapomněli“, ať už z důvodu ruchu ve třídě **M**, nebo z důvodu vášnivé diskuse **P**.

P a **L** učí zejména podle H-mat učebnic a zadání rovněž promítají, **V** vytváří pracovní listy a **M** zadává žákům vybrané úlohy ústně či na tabuli.

V hodinách všech sledovaných učitelů tvořil výklad jen zanedbatelnou část, jádrem všech hodin byla aktivita žáků.

Z vypozorovaných výsledků lze usuzovat že, různí učitelé se řídí jednotlivými principy Hejného metody různou měrou.

Závěr

Cílem práce bylo zjistit, jakým způsobem učitelé, kteří vyučují metodou založenou na budování schémat, přistupují k výuce úvodu do proměnné. Pro naplnění cíle jsem nejprve provedla rešerši odborné literatury, kde jsem se zaměřila jednak na výzkumy a knihy zabývající se problematikou proměnné a jednak na teoretické pozadí metody výuky založené na budování schémat (v českém prostředí známé jako Hejného metoda).

Učitelé, u nichž jsem prováděla náslechy, se shodli, že propedeutika je pro uchopení proměnné klíčová – jakmile není proměnná opřena o zkušenosti žáků, může být pouze formálním, abstraktním poznatkem, což žákům způsobuje v algebře další problémy. Abych získala přehled o propedeutice pojmu proměnná, provedla jsem analýzu řady učebnic, která je určena pro výuku Hejného metodou, a vyhledala takové úlohy, jejichž řešení žákům usnadní uchopení tohoto pojmu. Propedeutika proměnné je klíčovým předpokladem pro její správné pochopení – žák musí mít dostatek zkušeností. Do těch spadají například izolované modely výskytu písmen v matematice, které mají kódovací sílu, dále zkušenosti se zobecňováním a s aritmetickými operacemi. Z analýzy řady učebnic jsem zjistila, že propedeutice proměnné je věnována řada úloh, které postupně umožňují získat žákům dostatek zkušeností pro přirozený vstup proměnné do matematiky.

Provedla jsem náslechy celkem patnácti vyučovacích hodin u čtyř učitelů v šesti třídách, kde jsem sledovala výuku kapitoly *Jazyk písmen I* (Hejný a kol., 2016, str. 36–37), což je kapitola, v níž se poprvé v řadě učebnic cíleně objevuje proměnná. Náslechy jsem kromě svých terénních poznámek zaznamenávala na audio a ve třídách, kde to bylo možné, i na video. Záznamy jsem následně přepsala a analyzovala.

V některých pozorovaných třídách žáci znali roznásobování závorek, ale pro zobecňování proměnnou před kapitolou *Jazyk písmen I* nepoužívali, ačkoli generický model objevili běžně. Žáci, kteří se připravovali na přijímací zkoušky na šestiletá gymnázia, měli obvykle s proměnnými a s úpravami výrazů již nějaké zkušenosti.

Ukázalo se, že zmíněné učebnice používají dva ze čtyř učitelů. Učitel **V** obvykle vytváří pracovní listy a učitelka **M** zadává žákům úlohy ústně nebo na tabuli. I proto učitelé ve výuce úvodu do proměnné nepoužívali tytéž úlohy. Klíčová úloha pro objev proměnné (v práci označená jako úloha 34) se však vyskytla ve výuce všech tříd, které byly pozorovány.

Co se týče organizace hodiny, bylo jádro výuky učitelky **P** ve společné diskusi, kdy učitelka třídě kladla otázky a moderovala žáky při diskusi nad řešeními úloh, argumentaci a dohadech o správnosti jednotlivých postupů. V kontrastu s **P** pracovala **M** s žáky společně jen minimálně, a to výhradně při zadávání úloh, většinou s žáky hovořila individuálně. Ve třídě **V** žáci pracovali buď skupinově nebo společně diskutovali, přičemž během skupinové práce učitel chodil mezi skupinkami a diskutoval s nimi jejich řešení, během společné diskuse žáky moderoval. Jedinečným prvkem ve výuce **V** byla diskuse nad smyslem proměnné. V hodinách **L** byl čas pro samostatnou a společnou práci přibližně stejný, přičemž žáci neměli možnost během samostatné práce jakkoli komunikovat, což bylo u ostatních tří učitelů naopak vítáno.

Interakce ve třídách jsem rozlišovala na „veřejné“ a „soukromé“ a na to, zda probíhají mezi učitelem a třídou, učitelem a žákem, žákem a třídou či žákem a žákem. V hodinách **P** a **L** probíhala naprostá většina interakcí veřejně, přičemž u **P** na sebe mnohem více reagovali žáci vzájemně (žák vysvětluje třídě svůj postup a spolužáci na něj reagují), kdežto u **L** měli žáci soukromou komunikaci zakázanou, na druhou stranu s nimi občas soukromě diskutovala učitelka. V hodinách **L** byla jen minimálně zastoupena interakce, kdy žák hovoří k celé třídě (žáci však veřejně odpovídali učitelce). **V** měl v hodinách zastoupeny všechny sledované typy interakcí. V hodinách **M** probíhaly zejména soukromé interakce a při zadávání úloh mluvila učitelka ke třídě.

Nejvýraznější rozdíl v kladení otázek jsem zaznamenala mezi **P** a **L**. Zatímco **P** klade otázky celé třídě, **L** otázky cílí na konkrétní žáky.

Moment, kdy se žáci setkali při řešení úlohy 34 s proměnnou, přišel u všech učitelů v podobném čase. Ve všech třídách bylo možné sledovat, jak je možné popsat uvažování žáků pomocí teorie generických modelů a jak částečně sledují historický vývoj algebraického zápisu. Ve všech třídách žáci objevili několik strategií pro zobecnění úlohy. Ve dvou třídách se žáci dostali i k ekvivalenci výrazů jako různých vyjádření téže situace.

Omezení výzkumu spatřuji v subjektivnímu výběru relevantních ukázek výuky a v jejich interpretaci. Dalším omezením je malý vzorek čtyř učitelů, který je však pro kvalitativní studii, jejímž cílem je získat hlubší vhled do procesů probíhajících při výuce, dostatečný. Pro získání informací o účinnosti přístupů jednotlivých učitelů k výuce proměnné by bylo nutné nějakým způsobem testovat žáky (testy, hloubkové rozhovory) zaměřené na ověřování porozumění proměnné. To může být námětem pro další zkoumání.

Při výzkumu s podobnou metodologií sběru dat by bylo užitečné si už během náslechů do poznámek zaznamenat zasedací pořádek žáků a kódy, které jim při přepisu přiřadit. Tím by se zjednodušila rekonstrukce žákovských odpovědí a celkové zpracovávání dat. Mohu také doporučit záznam na více videokamer, pokud je to možné z organizačního hlediska.

Analýzu učebnic považuji za přínosnou pro svoji praxi – důkladné studium jednotlivých úloh a toho, jak jsou důležité pro rozvoj algebraického myšlení, považuji za velmi užitečné. Pozorovat zkušené učitele při jejich práci a podrobně se zabývat jejich přístupy k výuce proměnné bylo pro mne, začínající učitelku, velmi přínosné a inspirativní.

Seznam použité literatury

DEMBY, A. (1997). Algebraic procedures used by 13-to-15-year-olds. *Educational studies in mathematics*, **33**(1), s. 45–70.

DESCARTES, R. (2010). *Geometrie*. Oikoymenh, Praha. ISBN 978-80-7298-313-3.

GORDON, T. a ŽEMLOVÁ, J. (2015). *Škola bez poražených: praktická příručka efektivní komunikace mezi učitelem a žákem*. Malvern, Praha. ISBN 978-80-7530-006-5.

H-MAT, O. P. S. (2014). 12 klíčových principů. [online; cit. 14. 3. 2020]. Dostupné z: `https://www.h-mat.cz/principy`.

HEJNÝ, M. (2004). Mechanizmus poznávacího procesu. In HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J. a STEHLÍKOVÁ, N., editors, *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, pages s. 23–42. PedF UK, Praha. ISBN 80-7290-189-3.

HEJNÝ, M. (2016). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. PedF UK, Praha. ISBN 978-80-7290-911-7.

HEJNÝ, M. a ŠALOM, P. (2017a). *Matematika D, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* 1. vydání. H-mat, o.p.s., Praha. ISBN 978-80-905756-8-4.

HEJNÝ, M. a ŠALOM, P. (2017b). *Matematika E, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* 1. vydání. H-mat, o.p.s., Praha. ISBN 978-80-88247-00-5.

HEJNÝ, M. a ŠALOM, P. (2018). *Matematika F, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* 1. vydání. H-mat, o.p.s., Praha. ISBN 978-80-88247-06-7.

HEJNÝ, M. a KUŘINA, F. (2001). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* 1. vydání. Portál, Praha. ISBN 80-7178-581-4.

HEJNÝ, M., BENEŠOVÁ, M., BEREKOVÁ, H., BERO, P., HRDINA, U., REPÁŠ, V. a VANTUCH, J. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2.* 2. vydání. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava. ISBN 80-08-01344-3.

HEJNÝ, M., ŠALOM, P., JIROTKOVÁ, D., HANUŠOVÁ, J. a SUKNIAK, A. (2015a). *Matematika AB, příručka učitele pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* 1. vydání. H-mat, o.p.s., Praha. ISBN 978-80-905756-2-2.

HEJNÝ, M., ŠALOM, P., JIROTKOVÁ, D., HANUŠOVÁ, J. a SUKNIAK, A. (2015b). *Matematika B, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* 1. vydání, 3. dotisk. H-mat, o.p.s., Praha. ISBN 978-80-905756-1-5.

HEJNÝ, M., ŠALOM, P., JIROTKOVÁ, D., HANUŠOVÁ, J., SUKNIAK, A. a BOMEROVÁ, E. (2015c). *Matematika A, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* 1. vydání, 3. dotisk. H-mat, o.p.s., Praha. ISBN 978-80-905756-0-8.

HEJNÝ, M., ŠALOM, P., JIROTKOVÁ, D., HANUŠOVÁ, J. a SUKNIAK, A. (2016). *Matematika C, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* 1. vydání, 2. dotisk. H-mat, o.p.s., Praha. ISBN 978-80-905756-3-9.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J. a Sukniak, A. (2017). *Matematika CD, příručka učitele pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* 1. vydání. H-mat, o.p.s., Praha. ISBN 978-80-905756-9-1.

Hejný, M., Šalom, P., Hanušová, J. a Sukniak, A. (2019). *Matematika EF, příručka učitele pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* 1. vydání. H-mat, o.p.s., Praha. ISBN 978-80-88247-09-8.

McNeil, N. M., Weinberg, A., Hattikudur, S., Stephens, A. C., Asquith, P., Knuth, E. J. a Alibali, M. W. (2010). A is for apple: Mnemonic symbols hinder the interpretation of algebraic expressions. *Journal of Educational Psychology*, **102**(3), s. 625–634.

Pokorný, A. (2017). *Výrazy s proměnnou v učivu základní školy.* [Diplomová práce]. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Rendl, M. a Vondrová, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*, **24**(1), s. 22–57.

Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová, E. a Žalská, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* 1. vydání. PedF UK, Praha. ISBN 978-80-7290-723-6.

Rivera, F. a Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. In Cai, J. a Knuth, E., editors, *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, pages s. 323–366. Springer.

Strauss, A. a Corbinová, J. (1999). *Základy kvalitativního výzkumu: postupy a techniky metody zakotvené teorie.* 1. vydání. Sdružení Podané ruce, Brno. ISBN 80-85834-60-X.

Vondrová, N. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice.* 1. vydání. PedF UK, Praha. ISBN 978-80-7603-109-8.

Seznam obrázků

Seznam tabulek