MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kateřina Marková

Zrcadlení v lineární perspektivě

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Deskriptivní geometrie se zaměřením na vzdělávání – Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Děkuji vedoucí mé práce RNDr. Janě Hromadové, Ph.D. za cenné rady, ochotu, trpělivost a čas věnovaný konzultacím.

Název práce: Zrcadlení v lineární perspektivě

Autor: Kateřina Marková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Text je určen zejména učitelům, žákům a studentům středních a vysokých škol se zájmem o deskriptivní geometrii. Práce, jejímž tématem je zrcadlení v lineární perspektivě, předpokládá znalost základů lineární perspektivy. Obsahuje stručný úvod do lineární perspektivy, zavedení základních pojmů, vysvětlení principu zrcadlení a objasnění konstrukcí potřebných při řešení úloh. Hlavní částí této práce je sbírka řešených úloh zrcadlení v lineární perspektivě pro všechny základní polohy zrcadla. Příklady jsou doplněny krokovaným řešením v softwaru GeoGebra a formátu PDF. Součástí práce jsou rovněž fotografie, na kterých lze pozorovat různé polohy zrcadla v reálných situacích.

Klíčová slova: Lineární perspektiva, zrcadlení, svislé, vodorovné, šikmé zrcadlo

Title: Mirroring in a linear perspective

Author: Kateřina Marková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This text is intended especially for teachers and students of high schools and colleges who are interested in descriptive geometry. The thesis on the topic of mirroring in linear perspective presupposes basic knowledge of linear perspective. It includes short introduction into the topic of linear perspective and its basic terms, explanation of the principle of mirroring and clarification of constructions that are needed to solve tasks. Main part of the thesis is a problem book with solution. It contains examples on the topic of mirroring in linear perspective for all the basic mirror positions. Every task is supplied with step-by-step solution in the GeoGebra software and a PDF file. Another part of the thesis are photographs of different mirror positions in real life situations.

Keywords: Linear perspective, mirroring, vertical, horizontal, sloping mirror

Obsah

Úvod

Se situacemi zrcadlení se setkáváme každý den, proto nám pojmy zrcadlo, rovina zrcadla či zrcadlový obraz jistě nejsou cizí a intuitivně chápeme princip zrcadlení. Díky zrcadlení můžeme dokonce spatřit svůj vlastní obraz, čímž jsou někteří lidé skutečně fascinováni. To ale není vše, co nám zrcadlení může nabídnou. Když odvrátíme zrak od své vlastní podoby a rozhlédneme se kolem, uvidíme mnoho zajímavých obrazů, které tento jev demonstrují. Ač je zrcadlení samo o sobě jednoduchým zobrazením, konstrukce zrcadlových obrazů v lineární perspektivě se mohou lišit změníme-li polohu roviny zrcadla. Cílem této práce je zaměřit se na odlišnosti při sestrojování zrcadlových obrazů pro roviny v různých polohách a objasnit postup konstrukce pro všechny základní polohy roviny zrcadla.

První kapitola obsahuje úvod do lineární perspektivy a zavedení základních pojmů, se kterými se v lineární perspektivě setkáváme. Následující kapitola se věnuje zrcadlení. Zahrnuje vysvětlení principu rovinové souměrnosti, obecnou konstrukci zrcadlového obrazu a postup konstrukce zrcadlení v lineární perspektivě rozlišený podle polohy roviny zrcadlení. Hlavní částí práce je sbírka řešených příkladů pro všechny základní polohy zrcadla. Postup řešení příkladů je slovně okomentován. Každý příklad je doplněn krokovaným řešením ve formátu PDF a také ve formě appletů vytvořených v softwaru GeoGebra. Tyto soubory jsou připojeny jako přílohy. V závěrečné kapitole je zrcadlení demonstrováno na situacích z běžného života. Tato kapitola také obsahuje ukázky optických klamů využívajících principu zrcadlení.

Perspektivní průměty bývají nejčastěji označovány horním, nebo dolním indexem p. Pro větší přehlednost je v této práci použito značení perspektivních průmětů, jak jej zavádí např. [2], tedy bez indexu p.

1. Lineární perspektiva

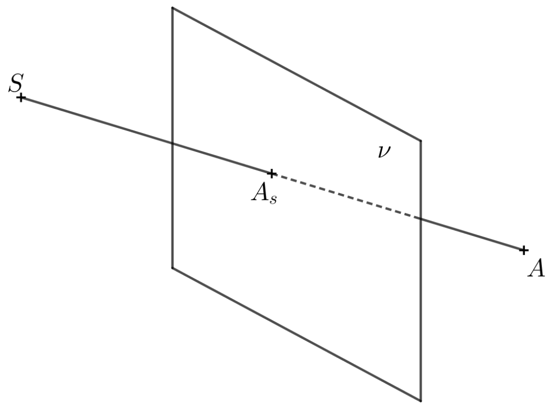
1.1 Úvod do lineární perspektivy

Lineární perspektiva je speciálním případem středového promítání. Přednost tohoto promítání spočívá především v jeho názornosti, jelikož výsledný obraz se blíží lidskému vidění (pro zjednodušení uvažujeme pohled pouze jedním okem).

Vývoj lineární perspektivy je úzce spjat s výtvarným uměním. Největší posun lze spatřit u umělců navracejících se k realistické malbě v období renesance. Snaha zobrazovat objekty tak, jak je vidíme, vedla k postupnému objevování pravidel platných pro lineární perspektivu.

1.2 Vlastnosti a prvky lineární perspektivy

Středové promítání je určeno *průmětnou* (obvykle rovina, ale lze promítat na obecnou plochu) a *středem promítání* S. *Středovým obrazem* A_s bodu A je průsečík *promítacího paprsku* (přímka SA) s průmětnou (viz obr. 1.1).



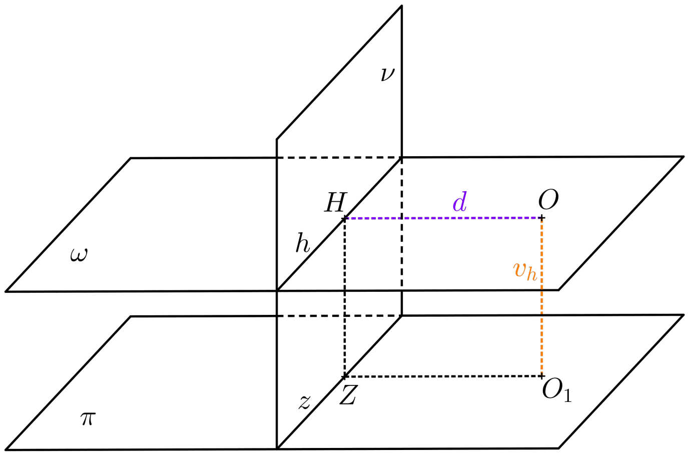
Obrázek 1.1: Středové promítání.

Středovým průmětem přímky AB je přímka A_sB_s. Obraz nevlastního bodu přímky (jejího směru) nazýváme *úběžník*. Jedná se o průsečík promítacího paprsku daného směru (směr přímky AB) s průmětnou. Z toho je patrné, že středové promítání na rozdíl od promítání rovnoběžného nezachovává rovnoběžnost, jelikož rovnoběžné přímky mají ve středovém promítání společný bod – úběžník. Rovnoběžnost je zachována pouze v případě, kdy je úběžník rovnoběžných přímek nevlastní bod, což je v případě, kdy je směr přímek rovnoběžný s průmětnou.

Rovina α je ve středovém promítání dána stopou a úběžnicí. Stopa n je průsečnice roviny s průmětnou ν a úběžnice u je množina středových obrazů všech nevlastních bodů roviny čili průsečnice průmětny a roviny rovnoběžné s rovinou α procházející středem promítání. Z toho plyne, že stopa a úběžnice roviny jsou rovnoběžné přímky.

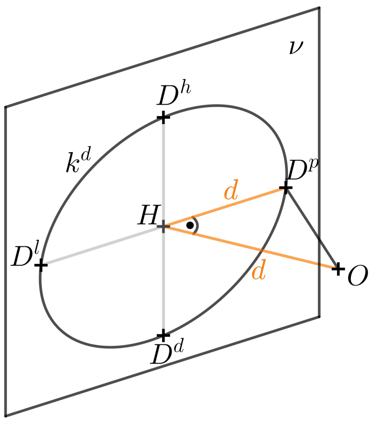
V případě lineární perspektivy značíme střed promítání zpravidla O a nazýváme jej *okem perspektivy*. Zjednodušeně řečeno se jedná o oko pozorovatele stojícího na *základní rovině* π. Za *průmětnu* volíme rovinu ν kolmou k základní rovině. Vzdálenost bodu O od ν nazýváme *distancí* (viz obr. 1.2).

Pravoúhlým průmětem bodu O do roviny ν je tzv. *hlavní bod* H. Body O a H náleží *obzorové rovině* ω, která je rovnoběžná se *základní rovinou*. Průsečnicí obzorové roviny s průmětnou je *horizont* h. *Výškou horizontu* v_h rozumíme vzdálenost horizontu od základní roviny. Pravoúhlým průmětem hlavního bodu do základní roviny je *základní bod* Z. Tento bod leží na *základnici* z, která je průsečnicí rovin ν a π. Přímka HZ se nazývá *hlavní vertikála*.



Obrázek 1.2: Základní prvky lineární perspektivy.

Lineární perspektivu jednoznačně určují horizont, hlavní bod, výška horizontu a distance. Pro znázornění distance v nárysně používáme *distanční kružnici* k^d, což je kružnice se středem H a poloměrem d (viz obr. 1.3). Libovolný bod, který náleží této kružnici, nazýváme *distančník*. Speciálně používáme označení *horní distančník* D^h a *dolní distančník* D^d pro průsečíky distanční kružnice s hlavní vertikálou a *levý distančník* D^l a *pravý distančník* D^p pro průsečíky distanční kružnice a horizontu.

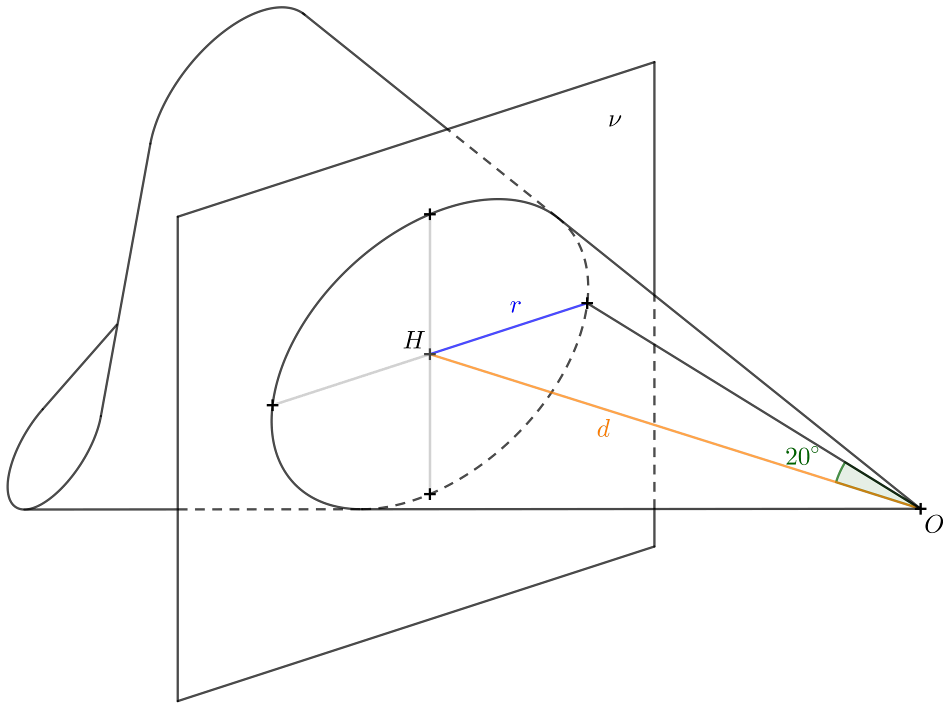


Obrázek 1.3: Distanční kružnice.

Nyní se zaměříme na podmínky lineární perspektivy, které jsou odvozeny od optických vlastností lidského oka.

První podmínka se týká distance – aby odpovídala vzdálenosti, na kterou je lidské oko schopno zaostřit, musí být minimálně 20 cm.

Dále nesmíme opomenout skutečnost, že lidské oko má omezené zorné pole. Pokud se nepohybujeme, jsme schopni spatřit pouze část prostoru. V lineární perspektivě zorné pole idealizujeme – viditelná část prostoru je vymezena tzv. *zorným kuželem* (viz obr. 1.4). Jedná se o část prostoru omezenou rotační kuželovou plochou s vrcholem v bodě O a osou kolmou k průmětně ν.



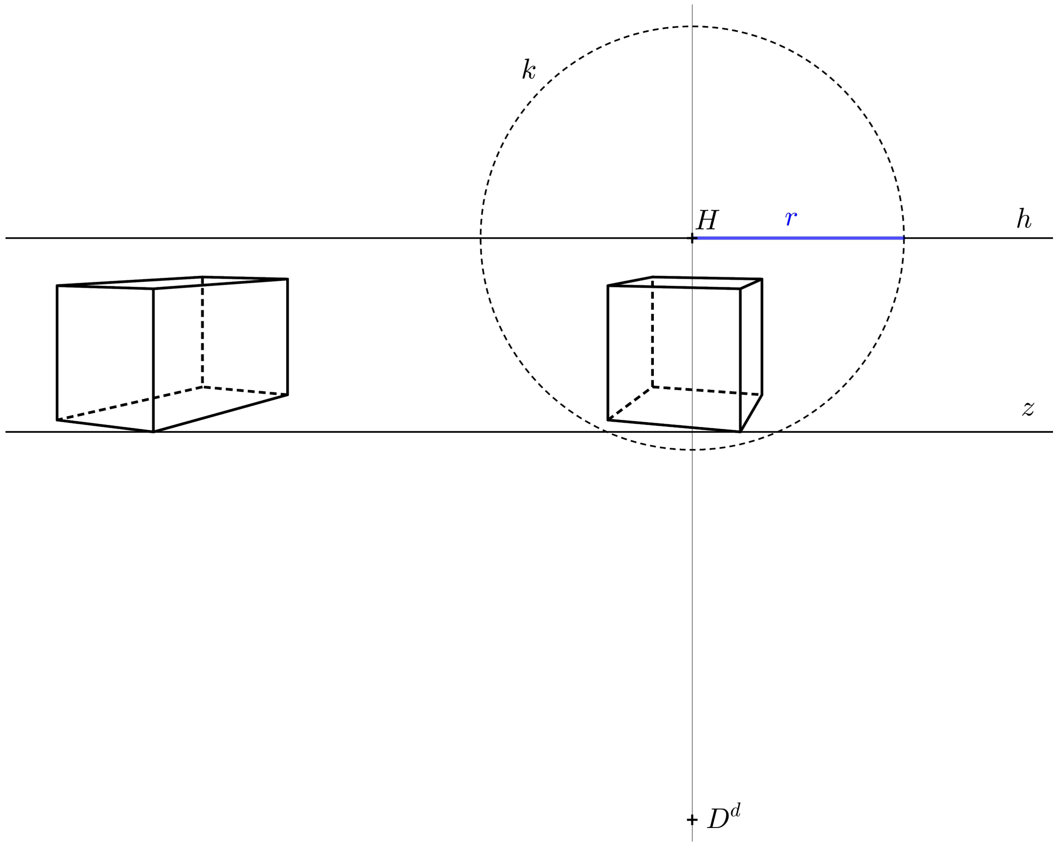
Obrázek 1.4: Zorný kužel.

Uvažujeme pouze oblast „před pozorovatelem“ (pozorovatel nevidí za sebe). Površky této části kuželové plochy jsou polopřímky s počátečním bodem O protínající rovinu ν a s osou svírají úhel 20° až 25°. Objekty se nachází v zorném kuželu, pokud leží uvnitř této části rotační kuželové plochy.

Pojmem *zorné pole* v lineární perspektivě označujeme kruh, který je průnikem zorného kuželu s průmětnou. Jeho středem je hlavní bod a poloměr je roven přibližně jedné třetině distance:

$$r = d \cdot \tan 20° \doteq d \cdot 0{,}36 \doteq \frac{1}{3}d.$$

V případě, že je zobrazovaný předmět umístěn mimo zorný kužel, dochází k výraznému zkreslení. Příkladem je zkreslení krychle na obrázku 1.5.



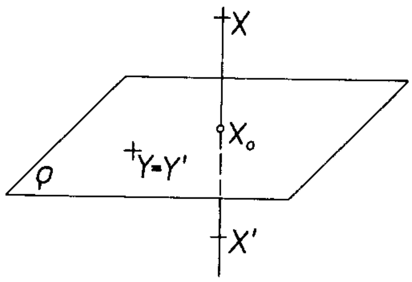
Obrázek 1.5: Krychle mimo zorný kužel.

2. Zrcadlení

2.1 Úvod do zrcadlení

Zrcadlení neboli rovinová souměrnost je zobrazení v prostoru. Ačkoli jeho název je velmi výstižný, následující definice upřesní o jaký typ zobrazení se jedná.

Definice ([1], str. 105). *Je dána rovina ρ. Souměrnost podle roviny ρ (rovinová souměrnost, obr. 111a* [zde obrázek 2.1]*) je shodné zobrazení $S(\rho)$, které přiřazuje:*
1. každému bodu $X \notin \rho$ bod X tak, že přímka XX' je kolmá k rovině ρ a střed úsečky XX' leží v rovině ρ,
2. každému bodu $Y \in \rho$ bod $Y = Y'$.



Obrázek 2.1: Obrázek 111a z učebnice ([1], str. 105).

Rovina ρ se nazývá *rovina souměrnosti* a body náležící této rovině, které se rovinovou souměrností zobrazí samy na sebe, jsou *samodružné body*.

Zrcadlení řadíme mezi zobrazení shodná, jelikož zachovává vzdálenosti. Pokud shodné zobrazení zachovává také orientaci transformovaných objektů, mluvíme o přímé shodnosti. V případě rovinové souměrnosti se ovšem orientace zobrazovaných objektů mění, proto je zrcadlení nepřímou shodností.

Na obrázku 2.2 je princip nepřímé shodnosti zřetelně viditelný – zrcadlový odraz nápisu není snadné přečíst, protože je text převrácený.

V některých situacích se naopak využívá zrcadlení k tomu, aby byl text lépe čitelný. Například nápis „ambulance" na přední části vozů zdravotnické záchranné služby je psán zrcadlově, aby byl čitelný pro řidiče aut, která sanitka předjíždí, jelikož ti vidí sanitku pouze ve zpětném zrcátku.

Obrázek 2.2: Nepřímá shodnost.

2.2 Konstrukce zrcadlového obrazu

V této části si ukážeme, jakým způsobem lze sestrojit obraz bodu v rovinové souměrnosti.

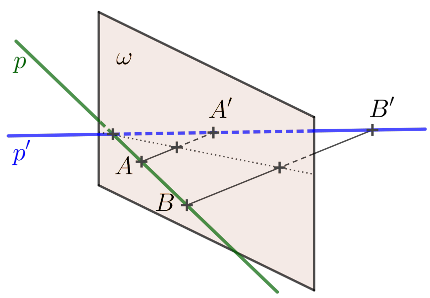
Pro body náležící rovině souměrnosti ω ($B \in \omega$) je postup triviální. Z definice víme, že v tomto případě platí $B = B'$, tedy obraz bodu je identický se svým vzorem.

Pokud bod v rovině ω neleží ($A \notin \omega$), postupujeme následovně:

1. bodem A vedeme kolmici k k rovině ω,
2. nalezneme průsečík A^ω kolmice s rovinou ω,
3. na přímce k sestrojíme bod A', který leží ve stejné vzdálenosti od bodu A^ω jako bod A (A^ω je střed úsečky AA').

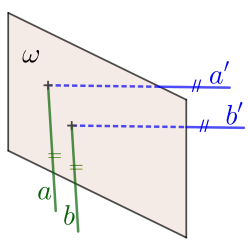
Zmíněný obecný postup lze aplikovat na všechny body, jejichž obrazy hledáme. Ovšem zrcadlit složitější objekty bod po bodu by bylo příliš komplikované. Vhodnější je využívat vlastností rovinové souměrnosti, které nám práci usnadní.

Jak již víme, zrcadlení je shodné zobrazení, což mimo jiné znamená, že zachovává incidenci. Toho lze využít například při konstrukci zrcadlového obrazu přímky. Na obr. 2.3 vidíme body A, B náležící přímce p. Protože je zachována incidence, leží rovněž body A', B' na přímce p'. Chceme-li tedy zkonstruovat obraz p' přímky p, stačí sestrojit obrazy A', B' bodů A, B. Jimi je přímka p' jednoznačně určena.



Obrázek 2.3: Incidence.

Další užitečnou vlastností zrcadlení je zachování rovnoběžnosti. Např. přímky a, b na obr. 2.4 jsou rovnoběžné, proto jsou rovnoběžné také jejich obrazy a', b'.



Obrázek 2.4: Rovnoběžnost.

2.3 Zrcadlení v lineární perspektivě

Obecný postup sestrojení zrcadlového obrazu bodu (viz. 2.2) lze využít při řešení příkladů zrcadlení v lineární perspektivě. Prvním krokem řešení je sestrojení přímky kolmé k rovině. Jelikož je tato konstrukce pro zrcadlení klíčová, následně si ji připomeneme. Důležitou konstrukcí je rovněž sestrojení úseček stejné délky na zmíněné kolmici.

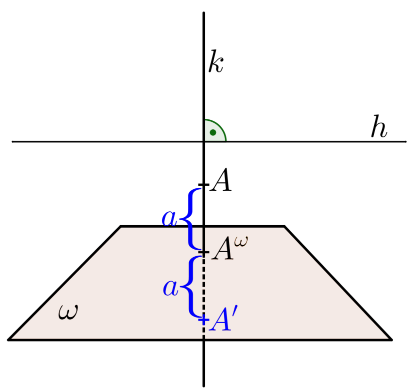
Konstrukce se liší podle toho, jak je umístěna rovina souměrnosti. Na základě vzájemné polohy roviny souměrnosti a základní roviny π lze odlišit tři různé situace – vodorovné, svislé a šikmé zrcadlo. O vodorovné poloze zrcadla mluvíme v případě, kdy je tato rovina rovnoběžná se základní rovinou π. Pokud je rovina souměrnosti kolmá k π, jedná se o svislé zrcadlo. Jestliže jsou roviny různoběžné, ale ne kolmé, nazýváme zrcadlo šikmé.

V příslušných podkapitolách připomeneme zmíněné klíčové konstrukce podle polohy roviny zrcadla. Nejprve však zavedeme značení perspektivních průmětů, které bude jednotné pro celou práci. K označení perspektivního průmětu se obvykle používá horní, nebo dolní index p. Pokud bychom využívali tohoto značení, perspektivní průmět bodu A bychom značili A_p, průmět jeho zrcadlového obrazu A'_p, průmět kolmice k_p, průmět průsečíku kolmice s rovinou zrcadla A_p^ω atd. Některá literatura ovšem zavádí značení perspektivních průmětů bez indexu p. Tímto značením se budeme řídit i v této práci. Tím se sníží počet indexů ve značení perspektivních průmětů, což napomůže zpřehlednění situací. Ponecháváme tedy označení A pro průmět bodu A atd.

2.3.1 Vodorovné zrcadlo

Víme, že kolmice k rovině souměrnosti je rovněž kolmicí k základní rovině, tedy přímka rovnoběžná s hlavní vertikálou. V lineární perspektivě se zobrazí jako kolmice na horizont h (viz obr. 2.5).

Kolmice k a tudíž i úsečka AA^ω je rovnoběžná s průmětnou ν. Přenesení vzdálenosti $|AA^\omega|$ a sestrojení bodu A' bude proto v tomto případě triviální, jelikož perspektivní obrazy shodných úseček na kolmici k π mají stejnou délku.



Obrázek 2.5: Vodorovné zrcadlo.

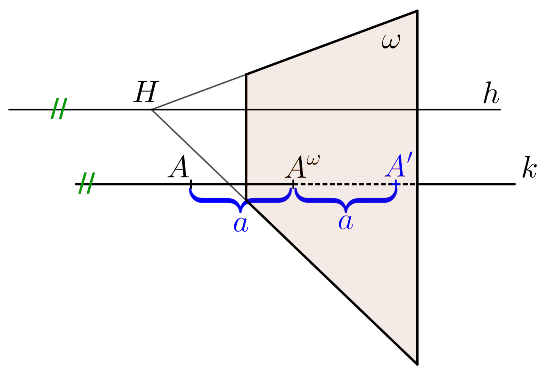
2.3.2 Svislé zrcadlo

Konstrukce se u svislého zrcadla mírně liší podle postavení roviny zrcadla vůči průmětně ν. Postup je snazší, pokud je rovina souměrnosti kolmá k ν, nebo rovnoběžná s ν.

Rovina zrcadla kolmá na průmětnu

V tomto případě je kolmice k rovině zrcadla přímka rovnoběžná s horizontem, poněvadž rovina je zároveň kolmá k ν i π (viz obr. 2.6).

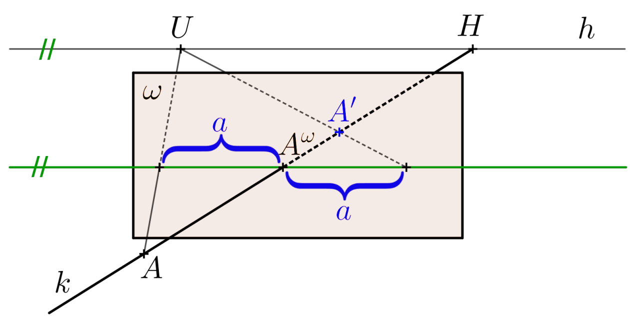
Kolmice k je stejně jako u vodorovného zrcadla rovnoběžná s průmětnou ν. Perspektivní obrazy shodných úseček náležících kolmici k mají tudíž i pro tuto polohu zrcadla stejnou délku.



Obrázek 2.6: Rovina zrcadla kolmá na průmětnu.

Rovina zrcadla rovnoběžná s průmětnou

Protože je rovina zrcadla rovnoběžná s průmětnou, kolmice k této rovině je přímka kolmá k průmětně čili hloubková přímka. Úběžníkem hloubkových přímek je hlavní bod H. Kolmice k rovině je tudíž libovolná přímka s úběžníkem H. Na obrázku 2.7 je to přímka $k = \leftrightarrow HA$.



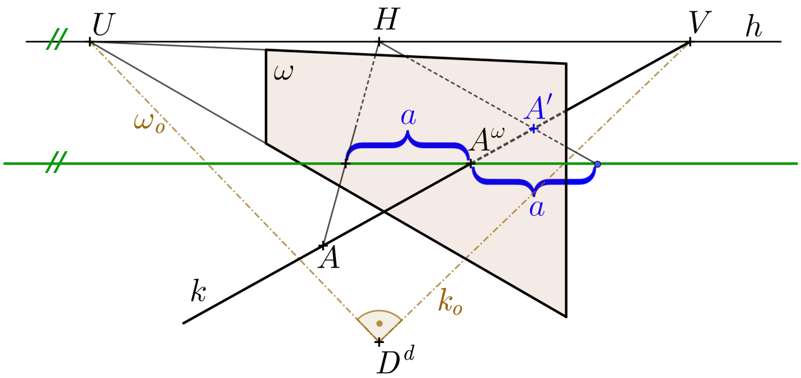
Obrázek 2.7: Rovina zrcadla rovnoběžná s průmětnou.

Kolmice k není rovnoběžná s průmětnou, tudíž poměry délek na této přímce nejsou zachovány. Pro sestrojení úseček stejné délky na kolmici využijeme přímku, která je rovnoběžná s horizontem h. Body kolmice k rovnoběžně promítáme na přímku rovnoběžnou s horizontem procházející bodem A^ω (směr rovnoběžného promítání je dán úběžníkem U). Na perspektivním průmětu této přímky se poměry velikostí úseček zachovávají, snadno tedy přeneseme příslušnou úsečku a sestrojený koncový bod s využitím úběžníku U vrátíme zpět na přímku k.

Libovolná svislá rovina

Jelikož je rovina zrcadla svislá, jsou kolmice k této rovině rovnoběžné s půdorysnou, úběžník přímek kolmých k rovině ω tedy bude ležet na úběžnici půdorysny, tj. na horizontu. Jeho polohu nalezneme otočením základní roviny do průmětny (spojnice D^d a U určuje směr půdorysné stopy roviny zrcadla). V otočení je zachována kolmost přímek, tudíž snadno dohledáme kolmici k_0 proloženou otočeným středem promítání, následně její úběžník V a nakonec perspektivní obraz kolmice k (viz obr. 2.8).

Při konstrukci úseček stejné délky postupujeme stejným způsobem jako v případě roviny rovnoběžné s ν. Opět využijeme rovnoběžného promítání na přímku rovnoběžnou s h, na jejímž průmětu je zachován poměr délek. Směr rovnoběžného promítání určuje v tomto případě úběžník H.

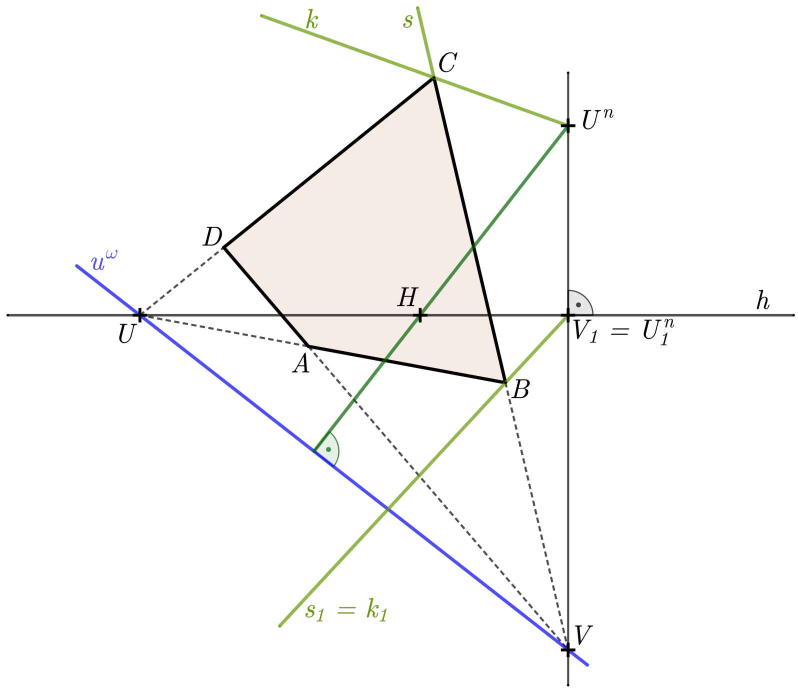


Obrázek 2.8: Svislé zrcadlo.

2.3.3 Šikmé zrcadlo

Kolmice k rovině šikmého zrcadla není rovnoběžná se základní rovinou π (na rozdíl od svislé roviny zrcadla), tudíž její úběžník leží mimo horizont h. Úběžník přímek kolmých k rovině nazýváme úběžník normál (ozn. U^n)[1].

Na obr. 2.9 je dáno šikmé obdélníkové zrcadlo $ABCD$. Hrana AB leží v π. Úběžnice u^ω roviny zrcadla ω je přímka UV, kde U je úběžník vodorovných hran AB, CD a bod V je úběžník hran AD, BC. Bod V je úběžníkem spádových přímek první osnovy roviny ω (kolmé na půdorysnou stopu roviny ω)[2]. Označme s spádovou přímku první osnovy BC a k hledanou kolmici k rovině ω bodem C. Přímka s_1 je kolmým průmětem s do π. Tato přímka splývá s přímkou k_1, která je kolmým průmětem k do π. Její úběžník $V_1 = U_1^n$ je průsečíkem horizontu (s_1 leží v π) a kolmice k π bodem V (V_1 je kolmým průmětem úběžníku V do π). Z toho plyne, že úběžník normál U^n leží na kolmici k π bodem U_1^n (přímka $U_1^n V$). Také si můžeme uvědomit, že tato kolmice je úběžnicí všech rovin kolmých k π i ω. Takové roviny protínají ω ve spádových přímkách první osnovy. Jejich úběžnice tedy obsahuje úběžník V i úběžník normál roviny π (nevlastní bod), tedy je kolmá k h. Na této úběžnici pak hledáme i úběžník kolmic k ω.



Obrázek 2.9: Šikmé zrcadlo – kolmice k rovině.

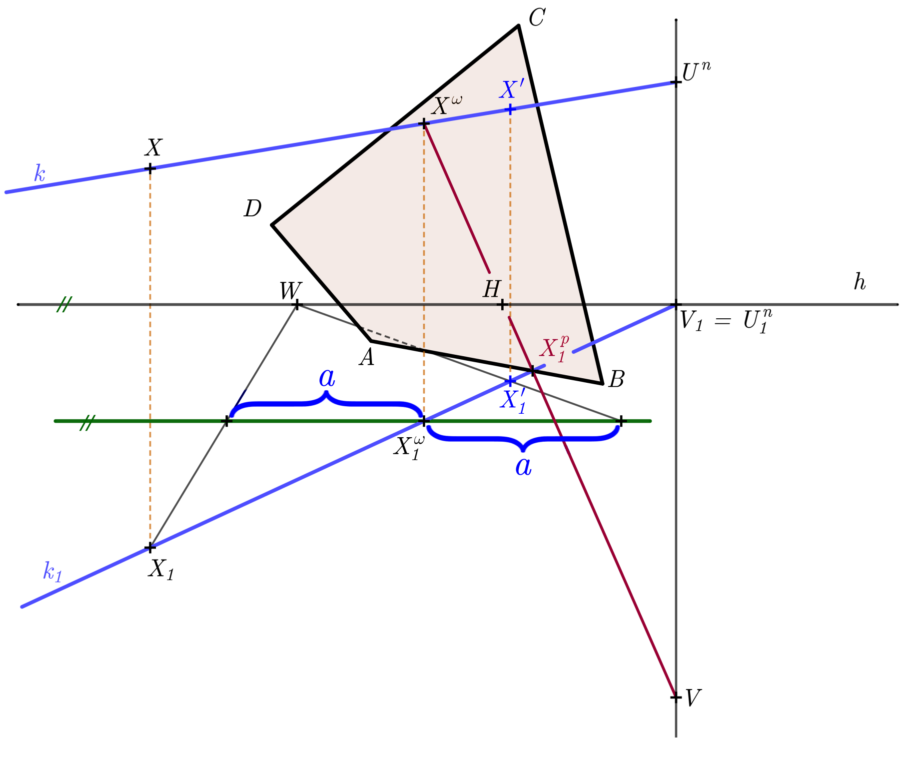
[1]V některé literatuře se úběžník normál roviny značí písmenem N s horním indexem – názvem roviny, k níž hledáme kolmice. Tj. zde by bylo označení N^{ω}.

[2]Spádové přímky druhé osnovy roviny ω jsou přímky náležící rovině ω kolmé k nárysné stopě této roviny.

Víme také, že úběžník normál roviny ω je stopník pomocné kolmice k' k rovině ω proložené středem promítání. Ta je kolmá ke všem přímkám roviny ω a každé roviny s ní rovnoběžné, je kolmá tedy i k u^{ω}. Při pravoúhlém promítání do nárysny se kolmost pomocné přímky k' a u^{ω} zachovává (dle věty o pravoúhlém průmětu pravého úhlu[3]) tedy pravoúhlý průmět k' do ν je kolmice k u^{ω} vedená bodem H. Průsečík této kolmice s přímkou $U_1^n V$ je hledaný úběžník normál U^n.

Dále hledáme bod X' (obr. 2.10), který je zrcadlovým obrazem bodu X. Víme, že průsečík X^{ω} roviny zrcadla a přímky k (kolmice k ω bodem X) je ve skutečnosti středem úsečky XX'. Rovněž platí, že X_1^{ω} je středem X_1X_1' (X_1, X_1', X_1^{ω} jsou kolmé průměty X, X', X^{ω} do π), jelikož rovnoběžné promítání zachovává poměr vzdáleností.

Označíme X_1^p průsečík k_1 a půdorysné stopy roviny ω (hrana zrcadla AB). Přímka X_1^pV je spádová přímka první osnovy roviny ω a její průsečík s kolmicí k je tudíž bod X^{ω}. Bod X_1^{ω} najdeme na kolmici k π vedené bodem X^{ω}. Pomocí rovnoběžné promítání na přímku rovnoběžnou s ν (v perspektivním průmětu se jedná o středový průmět z bodu W na přímku rovnoběžnou s h) sestrojíme bod X_1' středově souměrný s X_1 podle středu X_1^{ω} (viz. kapitola 2.3.2) a na kolmici k π dohledáme průmět bodu X'.



Obrázek 2.10: Šikmé zrcadlo – obraz bodu.

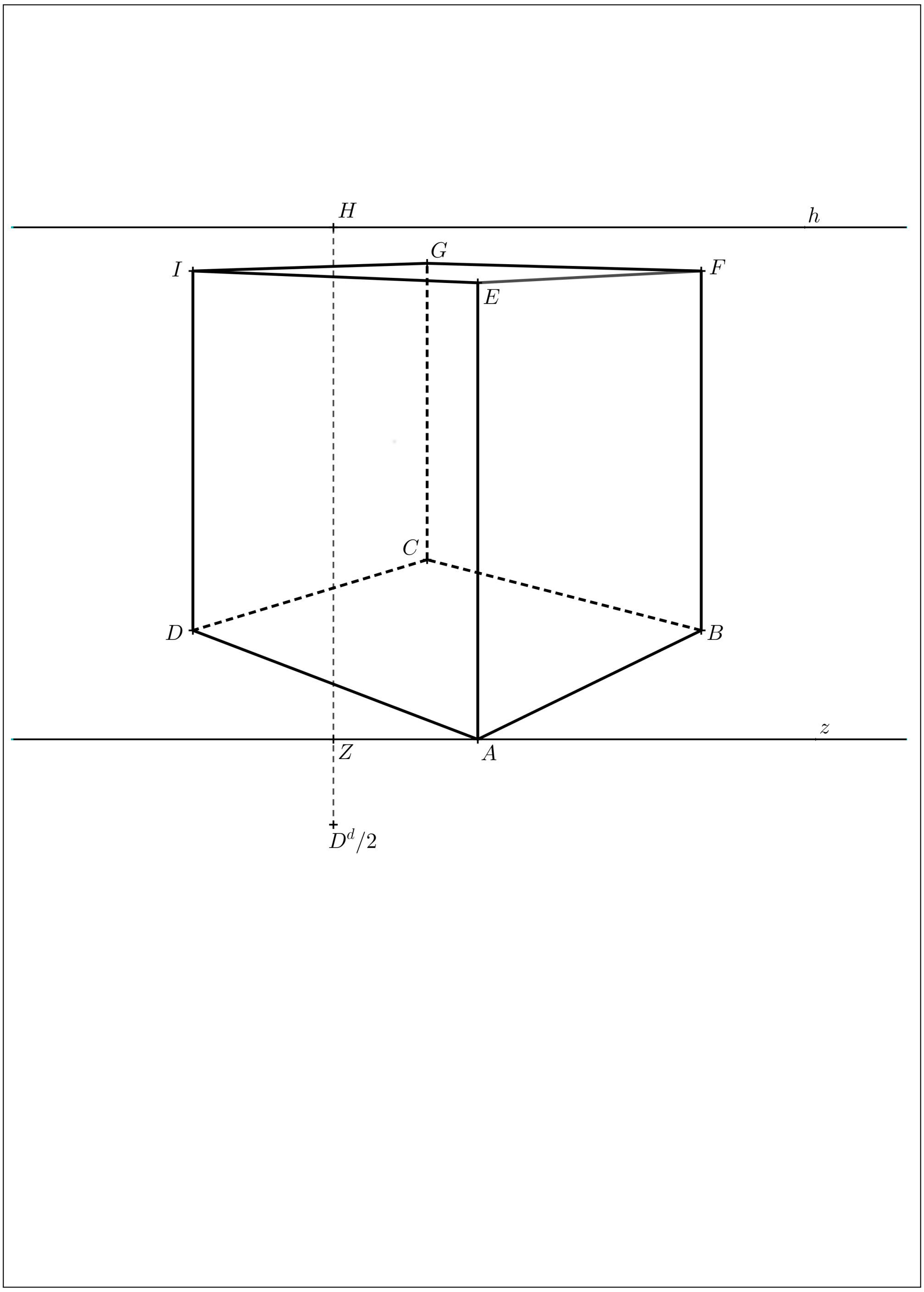
[3]Pravoúhlým průmětem pravého úhlu je opět pravý úhel, jestliže žádné rameno tohoto úhlu není kolmé k průmětně a jestliže alespoň jedno rameno je s průmětnou rovnoběžné.

3. Řešené příklady

3.1 Příklad 1 – Vodorovné zrcadlo

Zadání

Je dána krychle $ABCDEFGI$ stojící na základní rovině π. Sestrojte zrcadlový obraz krychle podle roviny π (obr. 3.1).



Obrázek 3.1: Příklad 1 – zadání.

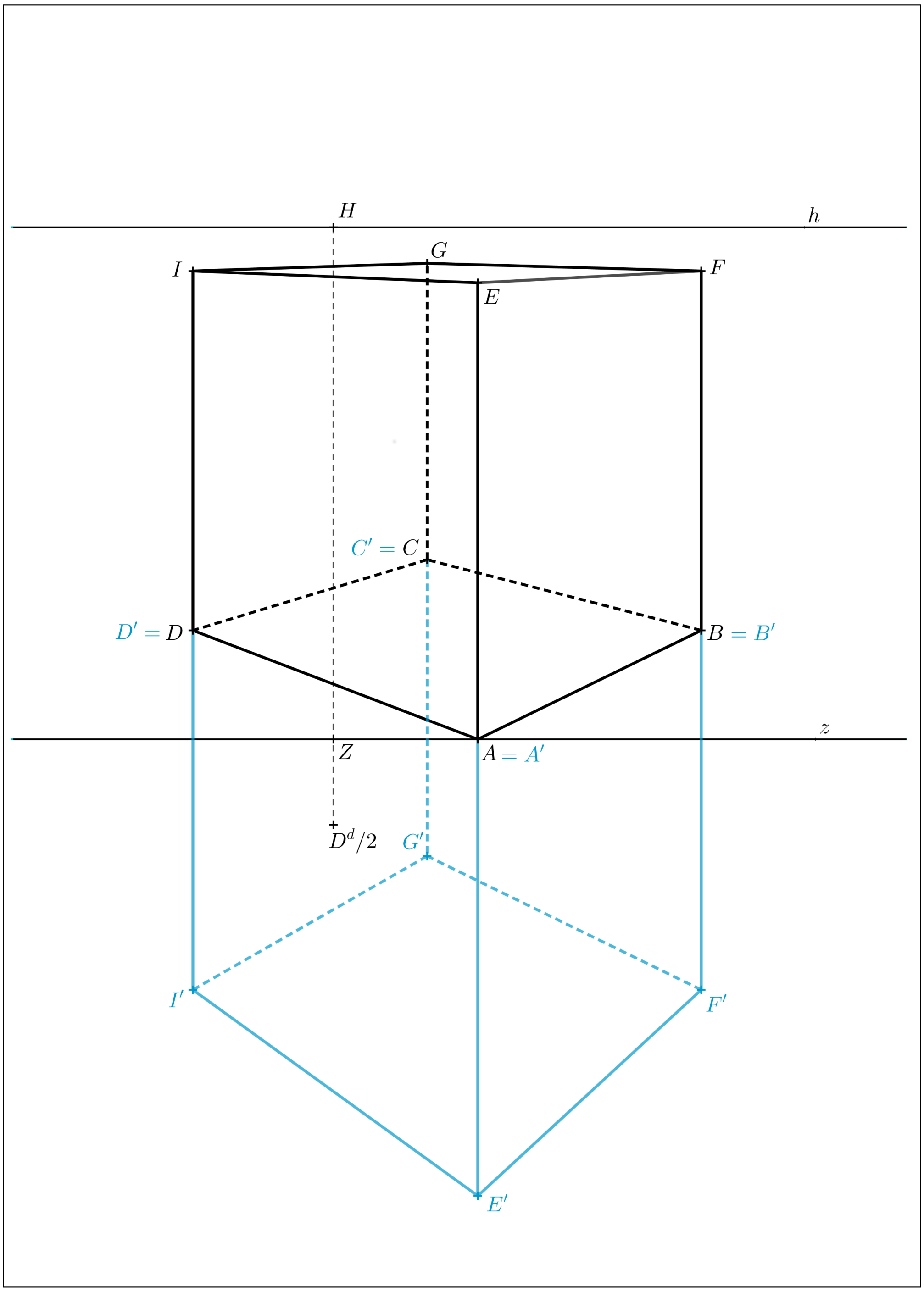
Řešení

Rovina souměrnosti π je vodorovná rovina. Konstrukce pro řešení tohoto typu zrcadlení jsou popsány v kapitole 2.3.1.

Body A, B, C, D (obr. 3.2) leží v rovině zrcadla, proto jsou samodružné (zobrazí se samy na sebe, viz. 2.1).

Zbývající vrcholy krychle (body E, F, G, I) v rovině π neleží. Z obecného postupu (kapitola 2.2) víme, že zrcadlový obraz E' bodu E leží na přímce kolmé k π procházející bodem E. Ze zadání je zřejmé, že hledanou kolmicí je přímka AE (hrana krychle AE je kolmá na stěnu $ABCD$, která leží v π). Jelikož přímka AE je rovnoběžná s průmětnou, bod E' leží na kolmici AE ve vzdálenosti $|AE|$ od bodu A – bod A je střed úsečky EE' a totéž platí pro perspektivní průměty bodů. Stejným postupem sestrojíme zrcadlové obrazy bodů F, G, I.

Krokované řešení tohoto příkladu i příkladů následujících ve formě GeoGebra appletů a PDF souborů se nalézá v příloze práce.

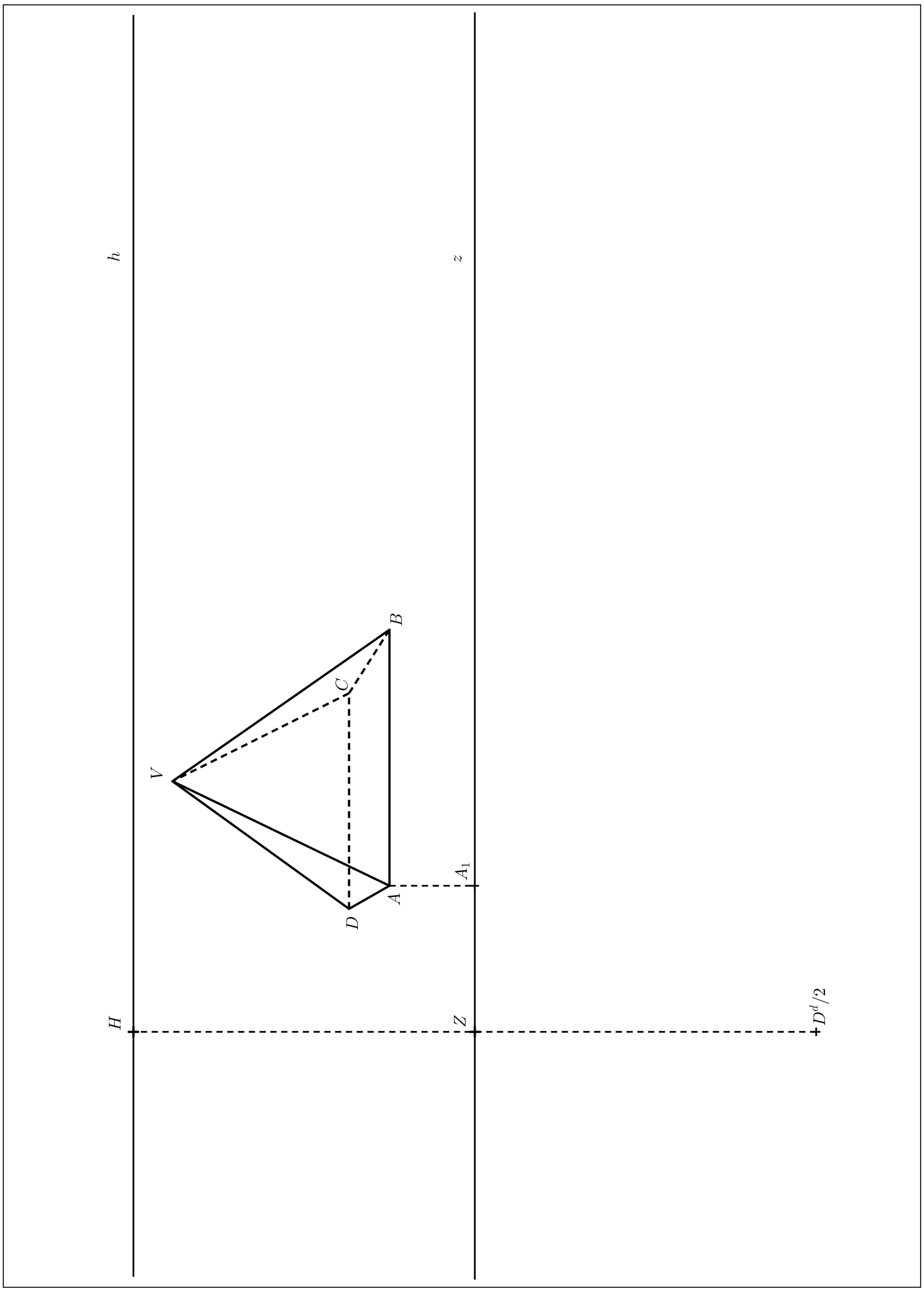


Obrázek 3.2: Příklad 1 – řešení.

3.2 Příklad 2 – Vodorovné zrcadlo

Zadání

Je dán dutý pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s podstavou v rovině rovnoběžné s π. Bod A_1 je pravoúhlý průmět bodu A do roviny π. Sestrojte zrcadlový obraz jehlanu ve vodorovném zrcadle určeném rovinou π (obr. 3.3).



Obrázek 3.3: Příklad 2 – zadání.

Řešení

Stejně jako u předchozího příkladu (př. 3.1) je rovinou zrcadla základní rovina π. Proto potřebné konstrukce najdeme rovněž v kapitole 2.3.1.

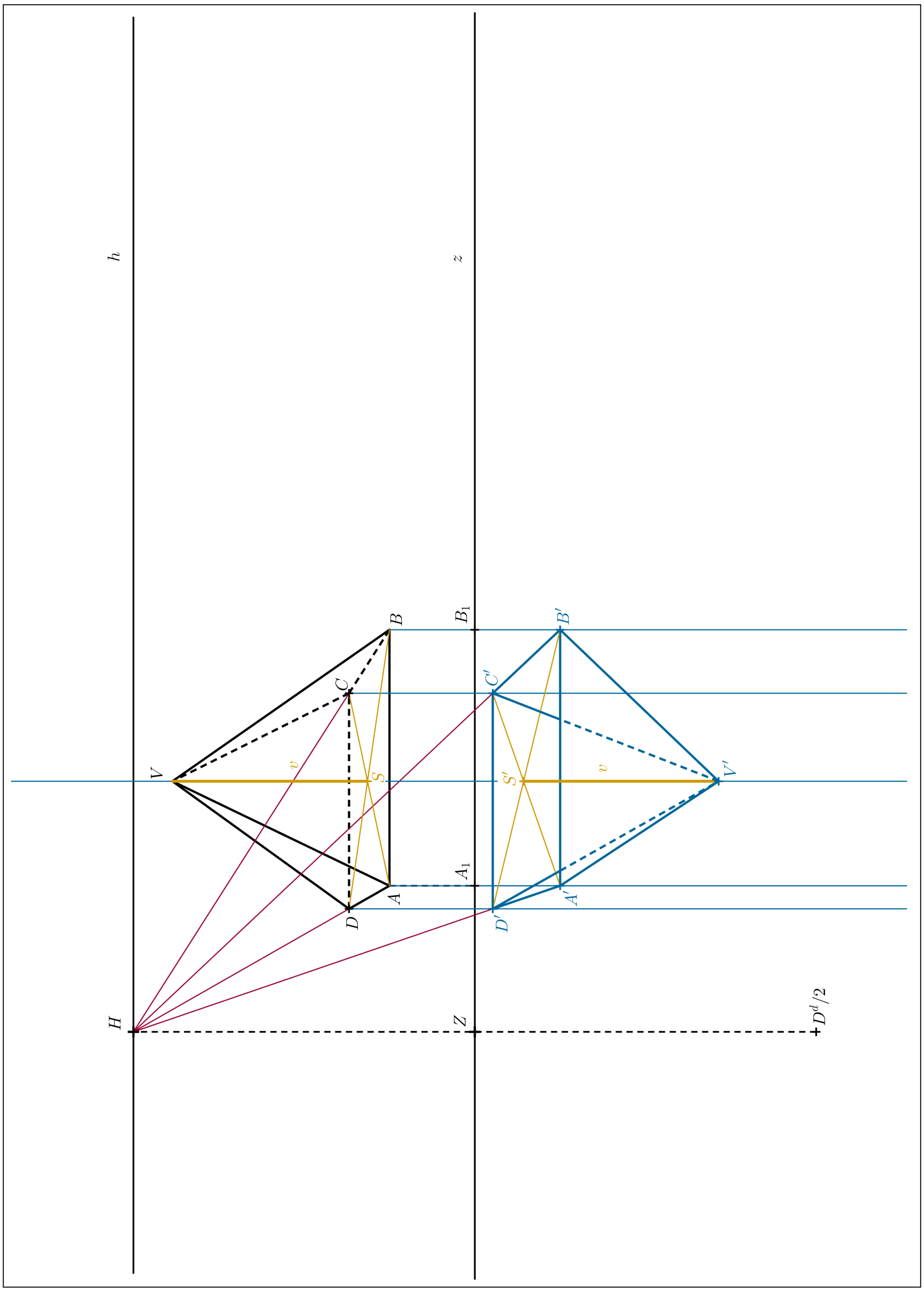
Jehlan leží nad základní rovinou (na rozdíl od krychle stojící na rovině π v předchozím příkladu). V tomto případě tedy žádný bod není samodružný.

Nejprve sestrojíme zrcadlový obraz A' vrcholu A. Ze zadání víme, že A_1 je pravoúhlý průmět bodu A do roviny π. Tedy přímka AA_1 je kolmice k π procházející bodem A a bod A_1 je její průsečík s π. Na přímce AA_1 leží taktéž bod A'. Jelikož je přímka AA_1 rovnoběžná s průmětnou (přímka AA_1 leží v průmětně), je na jejím průmětu zachován dělicí poměr, tudíž průmět bodu A_1 je středem perspektivního obrazu úsečky AA' (obr. 3.4). Stejným způsobem zobrazíme v rovinové souměrnosti vrchol B na B'.

Pro vrcholy C a D bychom mohli postupovat obdobně, nabízí se ovšem využít rovnoběžnosti, abychom docílili větší přesnosti. Víme, že podstava jehlanu leží v rovině rovnoběžné s π, z čehož plyne, že jsou hrany AD, BC rovnoběžné se základní rovinou. Dále víme, že hrany AD, BC jsou rovnoběžné, tudíž přímky jimi určené mají společný úběžník, kterým je bod H. Zrcadlení zachovává rovnoběžnost, proto je bod H také úběžníkem přímek $A'D'$ a $B'C'$. Při konstrukci využíváme osovou afinitu, která je určena osou h a dvojicí odpovídajících si bodů A, A'.

Označme S střed podstavy $ABCD$ (průsečík úhlopříček AC a BD. Z vlastností rovinové souměrnosti víme, že jeho obraz S' musí ležet ve středu čtverce $A'B'C'D'$. Jelikož je jehlan pravidelný, přímka VS je kolmá k rovině podstavy a tedy kolmá k základní rovině. Proto bude na této přímce ležet také zrcadlový obraz vrcholu V. Díky poloze přímky VS (rovnoběžná s průmětnou) průmět bodu V' snadno dohledáme.

Při řešení viditelnosti nesmíme opomenout skutečnost, že zobrazovaný jehlan je dutý, proto je část hrany $V'C'$ a $V'D'$ viditelná.

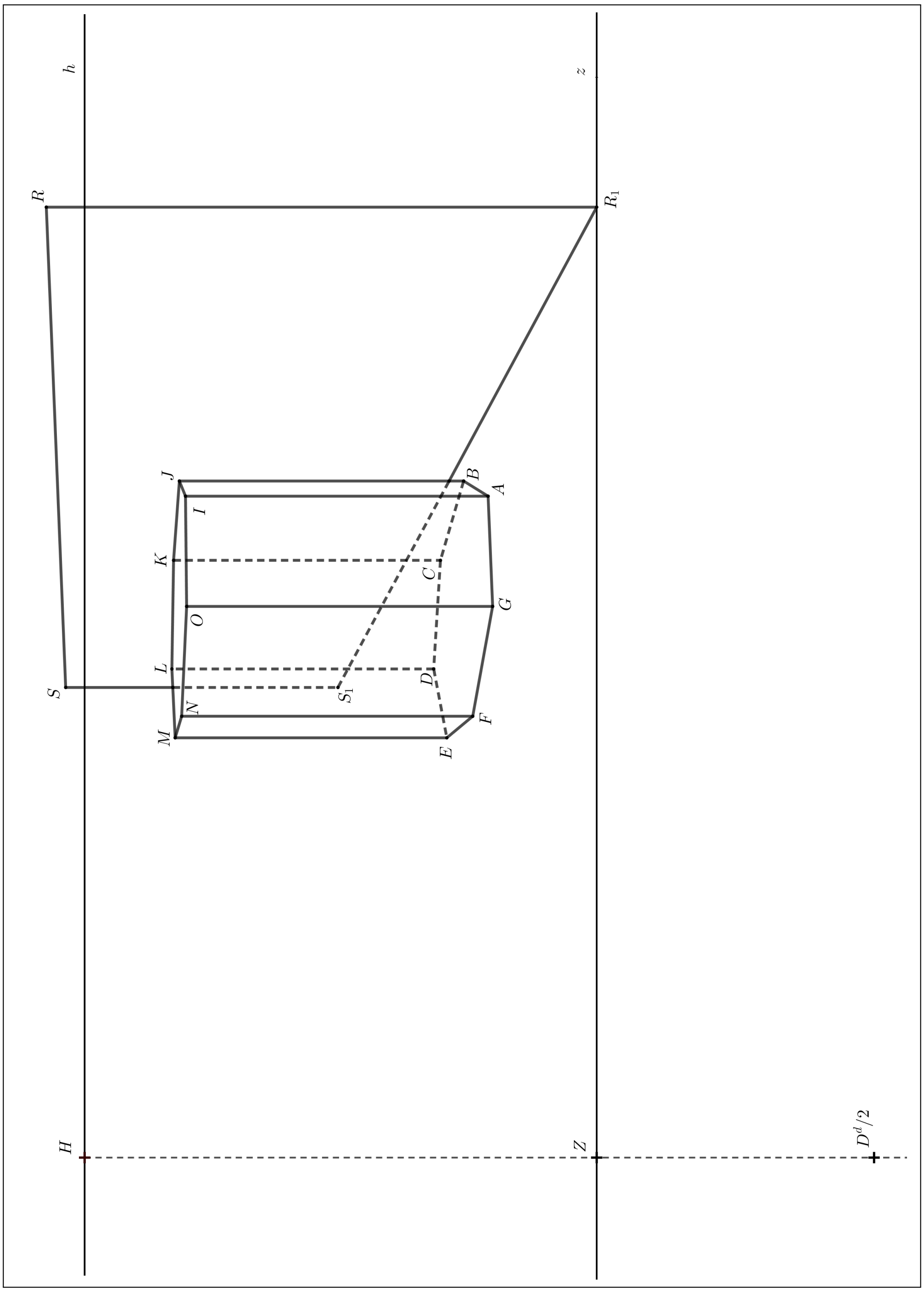


Obrázek 3.4: Příklad 2 – řešení.

3.3 Příklad 3 – Svislé zrcadlo

Zadání

Je dáno svislé obdélníkové zrcadlo S_1R_1RS v rovině kolmé na průmětnu. Sestrojte zrcadlový obraz pravidelného sedmibokého hranolu s podstavou v rovině π (obr. 3.5).



Obrázek 3.5: Příklad 3 – zadání.

Řešení

Zrcadlo je ve svislé poloze (viz. kapitola 2.3.2) a rovina zrcadla je kolmá k průmětně (přímky RS a R_1S_1 jsou hloubkové přímky), proto je kolmice k této rovině rovnoběžná s horizontem h (viz. kapitola 2.3.2).

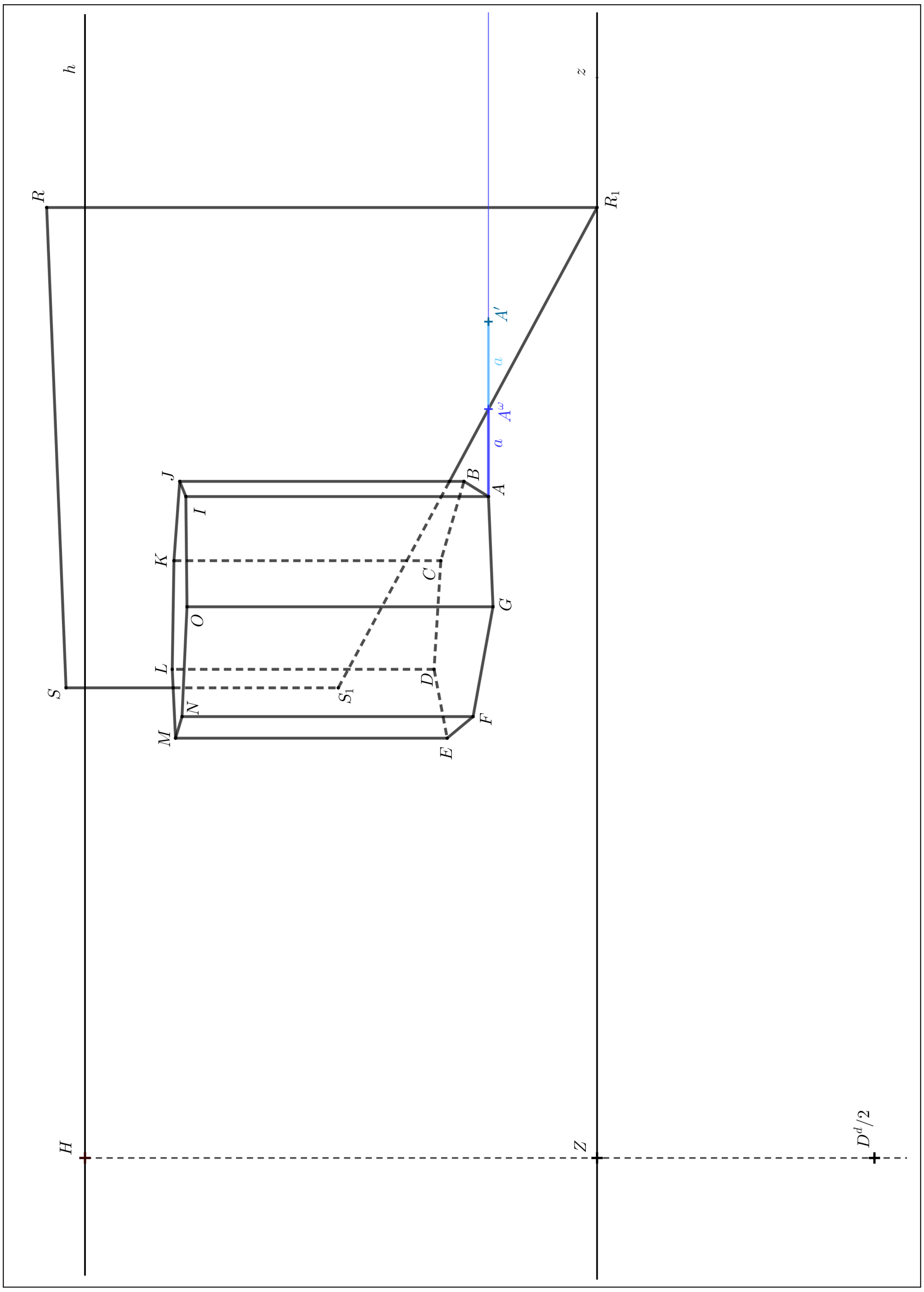
Sestrojíme zrcadlový obraz A' bodu A. Nejprve bodem A vedeme kolmici k rovině zrcadla, tedy vedeme rovnoběžku s h bodem A (obr. 3.6). Dále hledáme průsečík kolmice s rovinou zrcadla (ozn. A^ω), což je průsečík této přímky s přímkou R_1S_1 (obě přímky leží v rovině π). Perspektivní průmět bodu A^ω musí být středem perspektivního průmětu úsečky AA', jelikož kolmice k rovině zrcadla je rovnoběžná s průmětnou a perspektivní obrazy shodných úseček náležících této přímce mají tudíž stejnou délku.

Stejným způsobem lze postupovat u ostatních bodů podstavy. Můžeme si ale povšimnout, že podstava hranolu je ve skutečnosti osově souměrná podle osy R_1S_1 se svým zrcadlovým obrazem. V perspektivním průmětu se nezachovává kolmost přímek AA' a R_1S_1, zachovává se však rovnoběžnost mezi přímkami kolmými na rovinu zrcadla (kolmice k rovině zrcadla jsou rovnoběžné s h). Osová souměrnost tak přechází v osovou afinitu s osou R_1S_1, směrem AA' a charakteristikou -1 (tomuto zobrazení se také říká šikmé zrcadlení). Tohoto vztahu lze při konstrukci také využít.

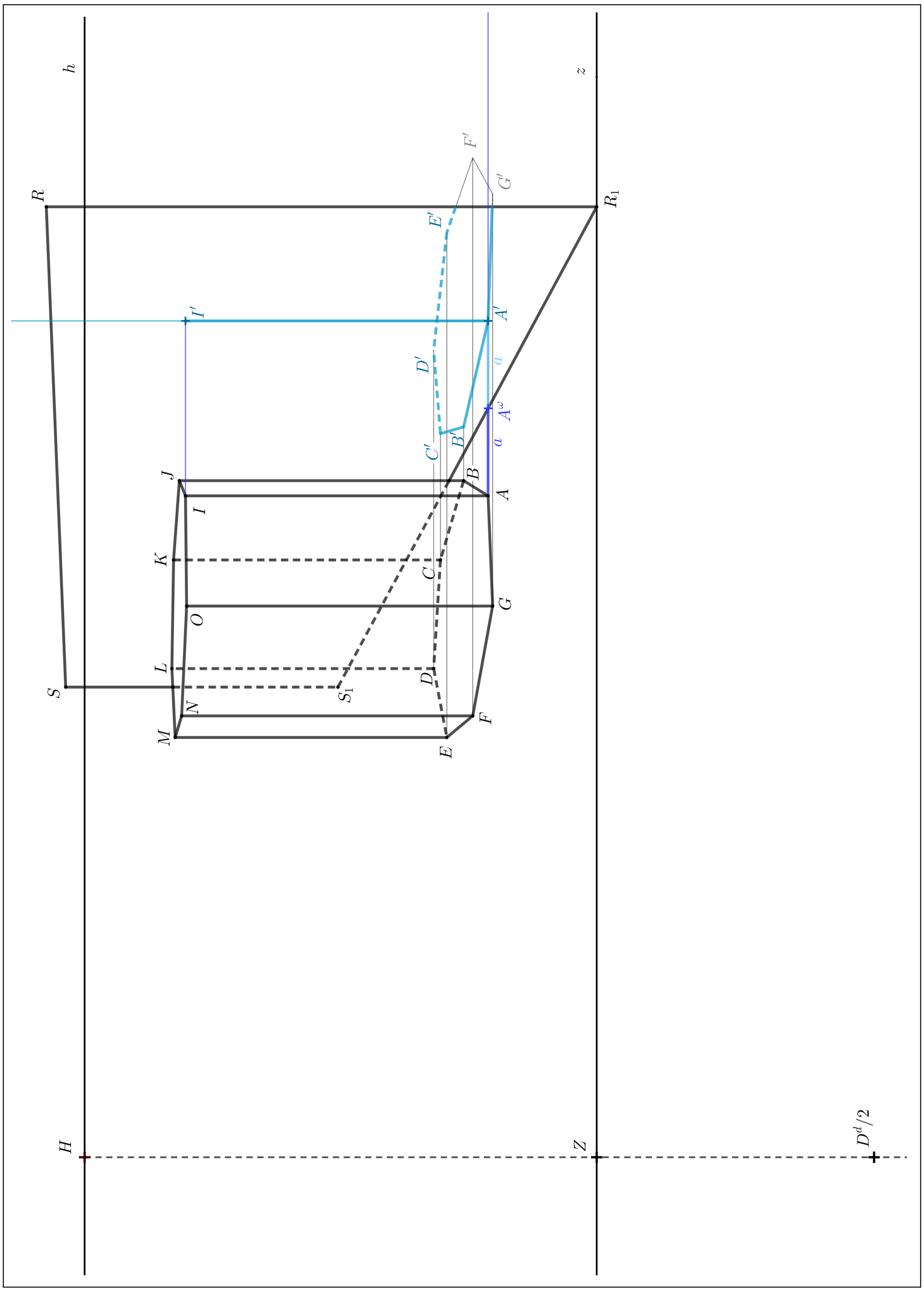
V podstavě zvýrazníme pouze hrany, které leží v obdélníku zrcadla. Obrazy F' a G' vrcholů F a G leží mimo zrcadlo, proto hranu $F'G'$ v zrcadle nevidíme a zobrazí se jen část hrany $A'G'$ od bodu A' k průsečíku $A'G'$ se stranou zrcadla a obdobně pro hranu $E'F'$.

Obrazy vrcholů horní podstavy leží rovněž na příslušných kolmicích k rovině zrcadla. Dále víme, že směr bočních hran hranolu v zrcadlení zůstává kolmý na π, proto zrcadlové obrazy vrcholů horní podstavy náleží zároveň odpovídajícím kolmicím k rovině π vztyčených z vrcholů dolní podstavy. Zrcadlový obraz bodu I je tudíž průsečíkem kolmice k rovině zrcadla vedené bodem I a přímky kolmé na rovinu podstavy procházející bodem A'. Totéž platí i pro perspektivní průměty bodů (obr. 3.7).

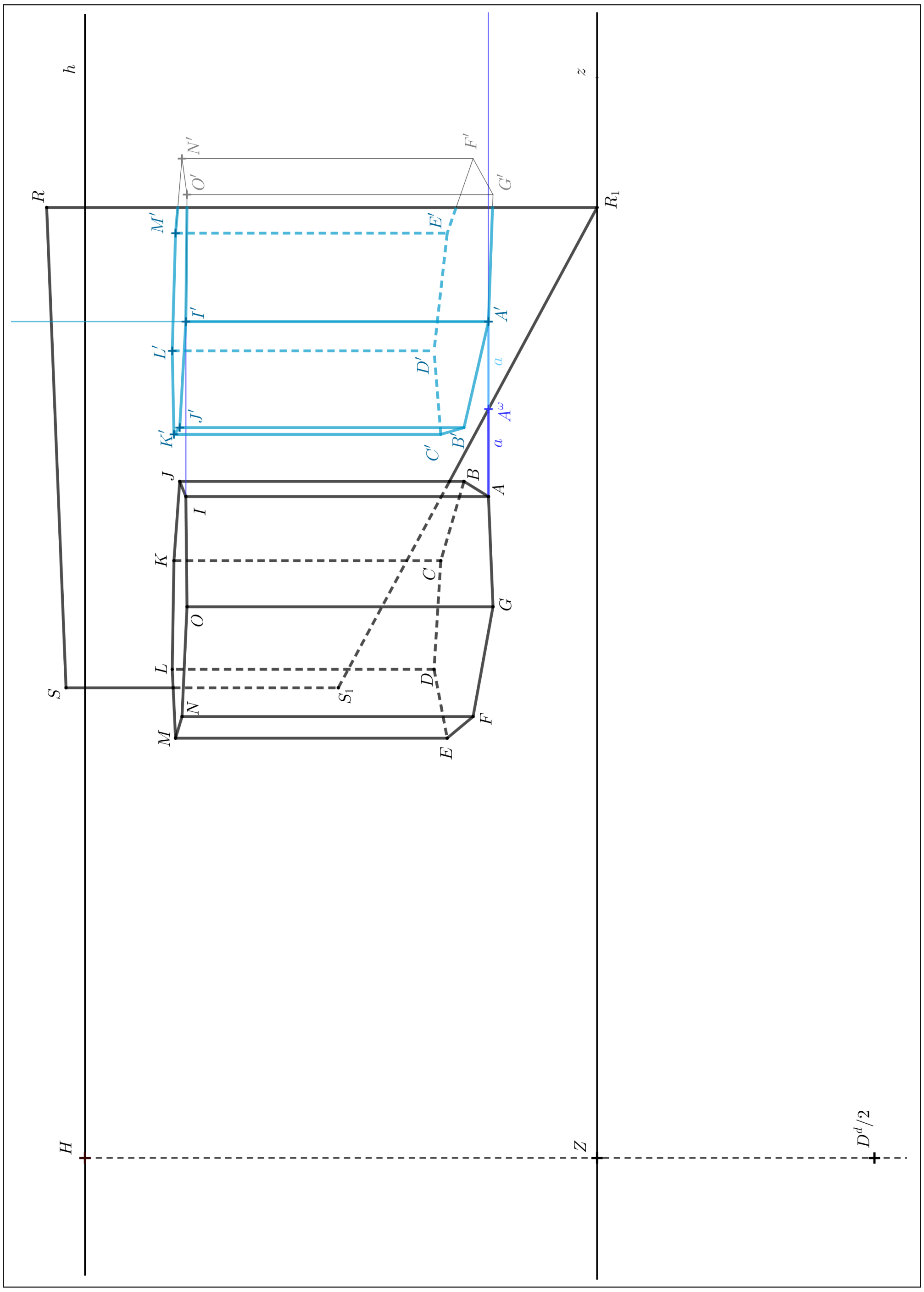
Obdobně postupujeme při hledání obrazů zbývajících bodů J', K', L', M', N' a O'. Body N' a O' leží mimo obdélník zrcadla, tudíž stejně jako body F' a G' nejsou v zrcadle vidět (obr. 3.8).



Obrázek 3.6: Příklad 3 – řešení.



Obrázek 3.7: Příklad 3 – řešení.

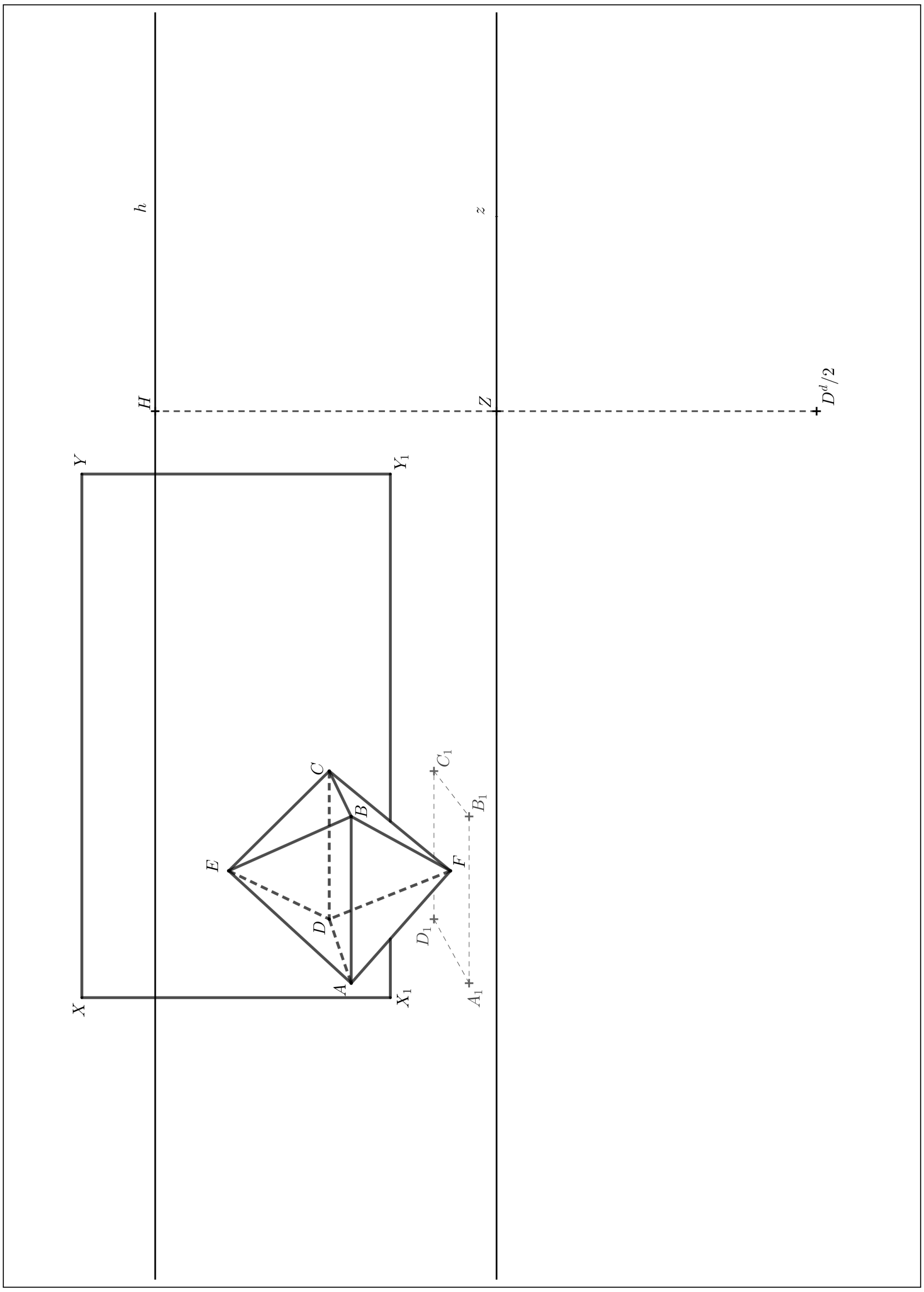


Obrázek 3.8: Příklad 3 – řešení.

3.4 Příklad 4 – Svislé zrcadlo

Zadání

Je dáno svislé obdélníkové zrcadlo X_1Y_1YX. Zobrazte zrcadlový obraz pravidelného osmistěnu $ABCDEF$ (obr. 3.9).



Obrázek 3.9: Příklad 4 – zadání.

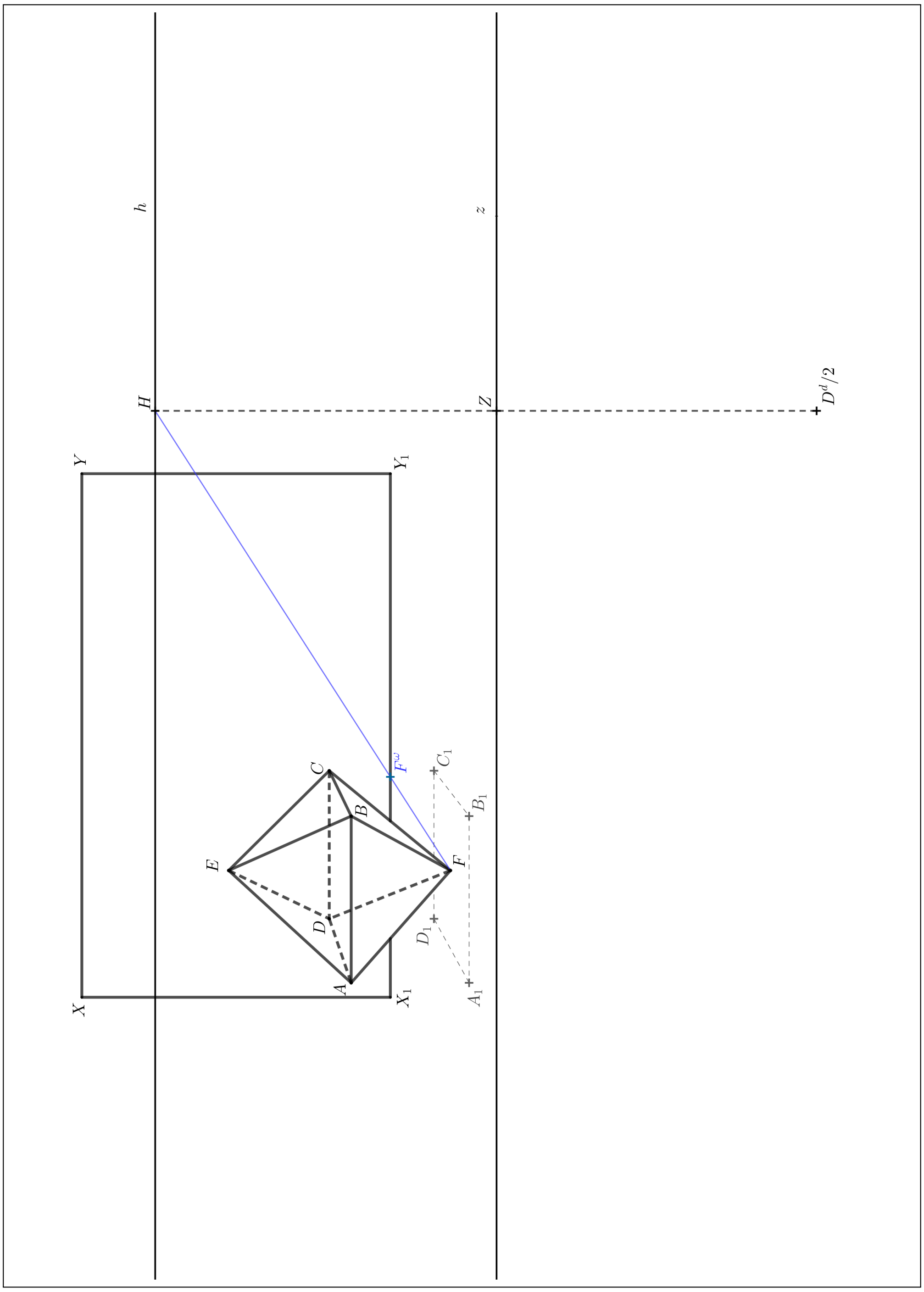
Řešení

V tomto příkladu je zrcadlo v rovině rovnoběžné s průmětnou ν. Kolmicemi k rovině zrcadla jsou tudíž hloubkové přímky a jejich úběžníkem je hlavní bod H (viz. kap. 2.3.2).

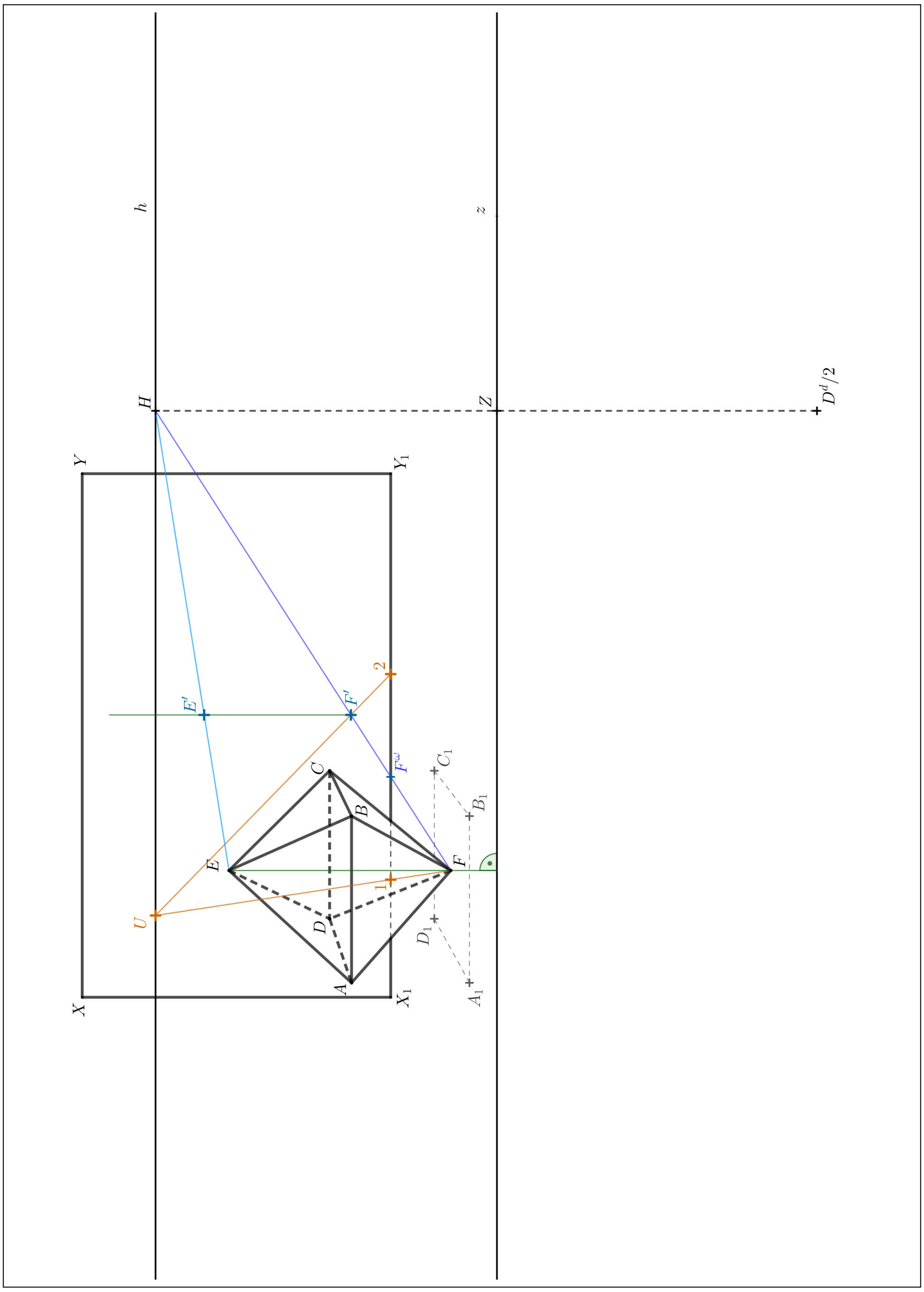
Víme, že zrcadlový obraz F' bodu F náleží přímce FH (kolmice k rovině souměrnosti bodem F). Přímka FH leží v π, její průsečík s rovinou zrcadla proto hledáme na přímce X_1Y_1 (bod F^ω, obr. 3.10). Dále víme, že úsečky FF^ω a $F^\omega F'$ jsou stejně dlouhé, ale jelikož přímka FH není rovnoběžná s průmětnou, v perspektivním průmětu tyto úsečky stejnou délku nemají. Využijeme rovnoběžného promítání na libovolnou přímku rovnoběžnou s horizontem (viz. kapitola 2.3.2), např. na hranu zrcadla X_1Y_1, na níž leží bod F^ω. V perspektivním průmětu je směr promítání určen úběžníkem U (libovolný bod na horizontu). Průmět bodu F na tuto přímku označíme 1. Sestrojíme průmět hledaného obrazu F' ve směru daném U na přímku X_1Y_1 (bod 2), který je středově souměrný s bodem 1 podle F^ω a s využitím úběžníku U jej vrátíme na přímku FH (obr. 3.11).

Jelikož přímka EF je rovnoběžná s rovinou souměrnosti (je kolmá na π), musí být tudíž s touto rovinou rovnoběžný i její zrcadlový obraz $E'F'$. Obraz bodu E je průsečíkem komice k π vedené bodem F' a hloubkové přímky EH.

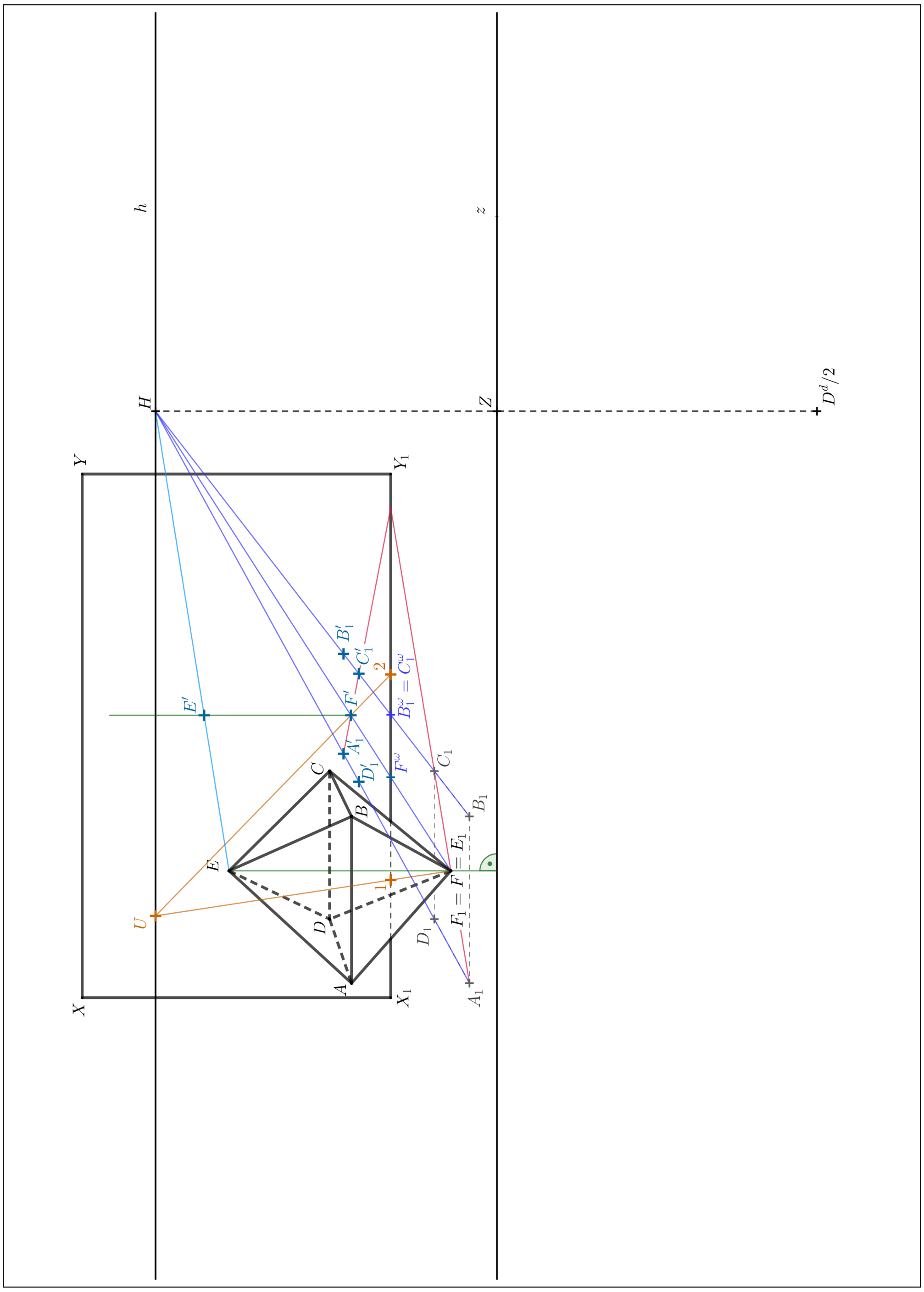
Hrany BC a AD jsou kolmé k rovině zrcadla – jejich úběžník je hlavní bod H. Hloubková přímka bodem B tudíž splývá s hloubkovou přímkou bodem C (obdobně pro A, D) a na této přímce musí ležet rovněž obrazy B', C' (resp. A', D'). Ze zadání známe pravoúhlé průměty bodů A, B, C, D do π (body A_1, B_1, C_1, D_1). Obrazy A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 bodů v základní rovině sestrojíme obdobným způsobem jako obraz bodu F. Můžeme také využít vztahu středové kolineace mezi půdorysy a jejich zrcadlovými obrazy. Kolineace je dána středem H, osou X_1Y_1 a dvojicí odpovídajících si bodů F, F' (obr. 3.12). Zrcadlové obrazy A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 rovnoběžně promítáme zpět na přímky BC a AD (ve směru kolmém k π), čímž získáme hledané průměty A', B', C', D' (obr. 3.13).



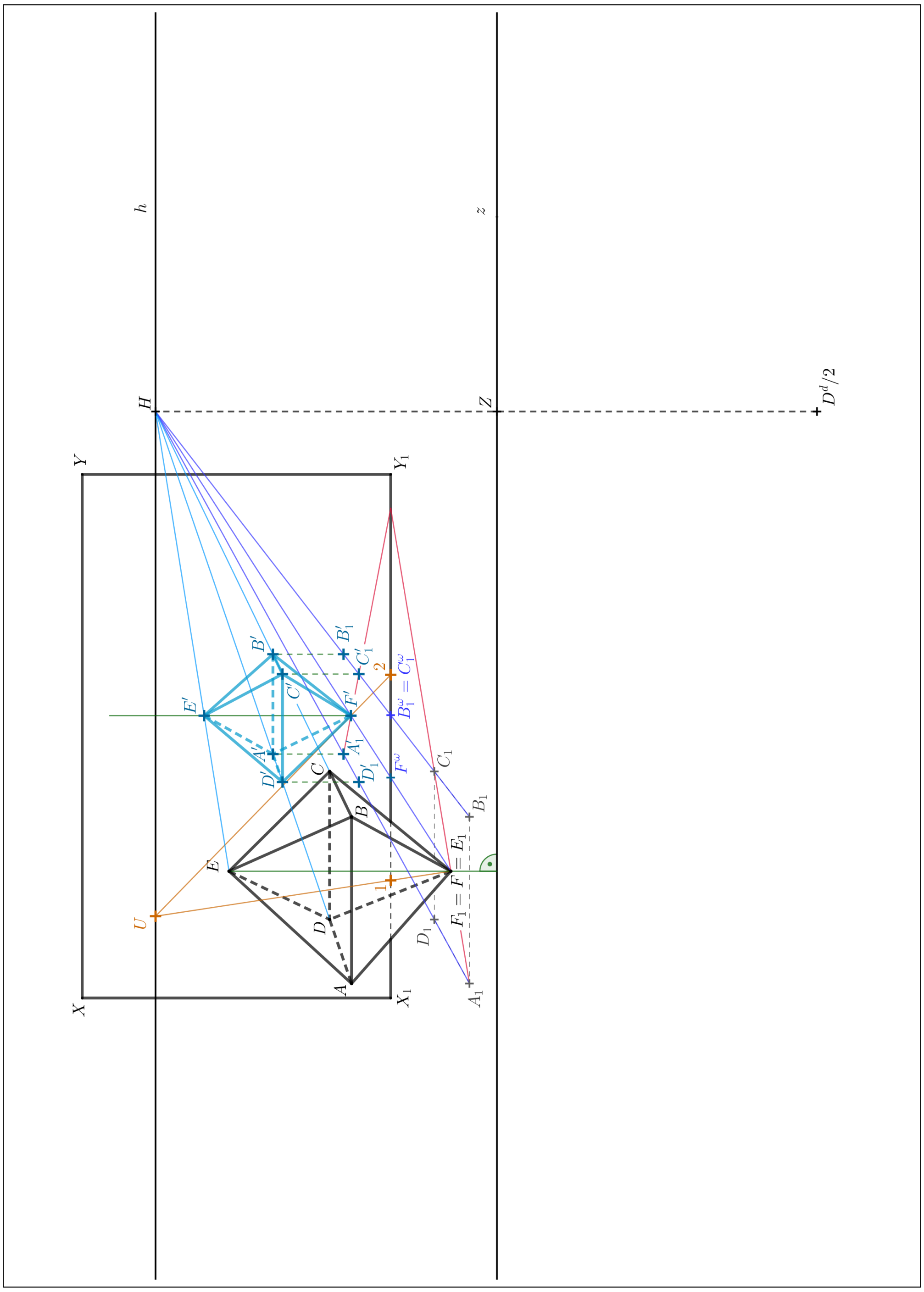
Obrázek 3.10: Příklad 4 – řešení.



Obrázek 3.11: Příklad 4 – řešení.



Obrázek 3.12: Příklad 4 – řešení.

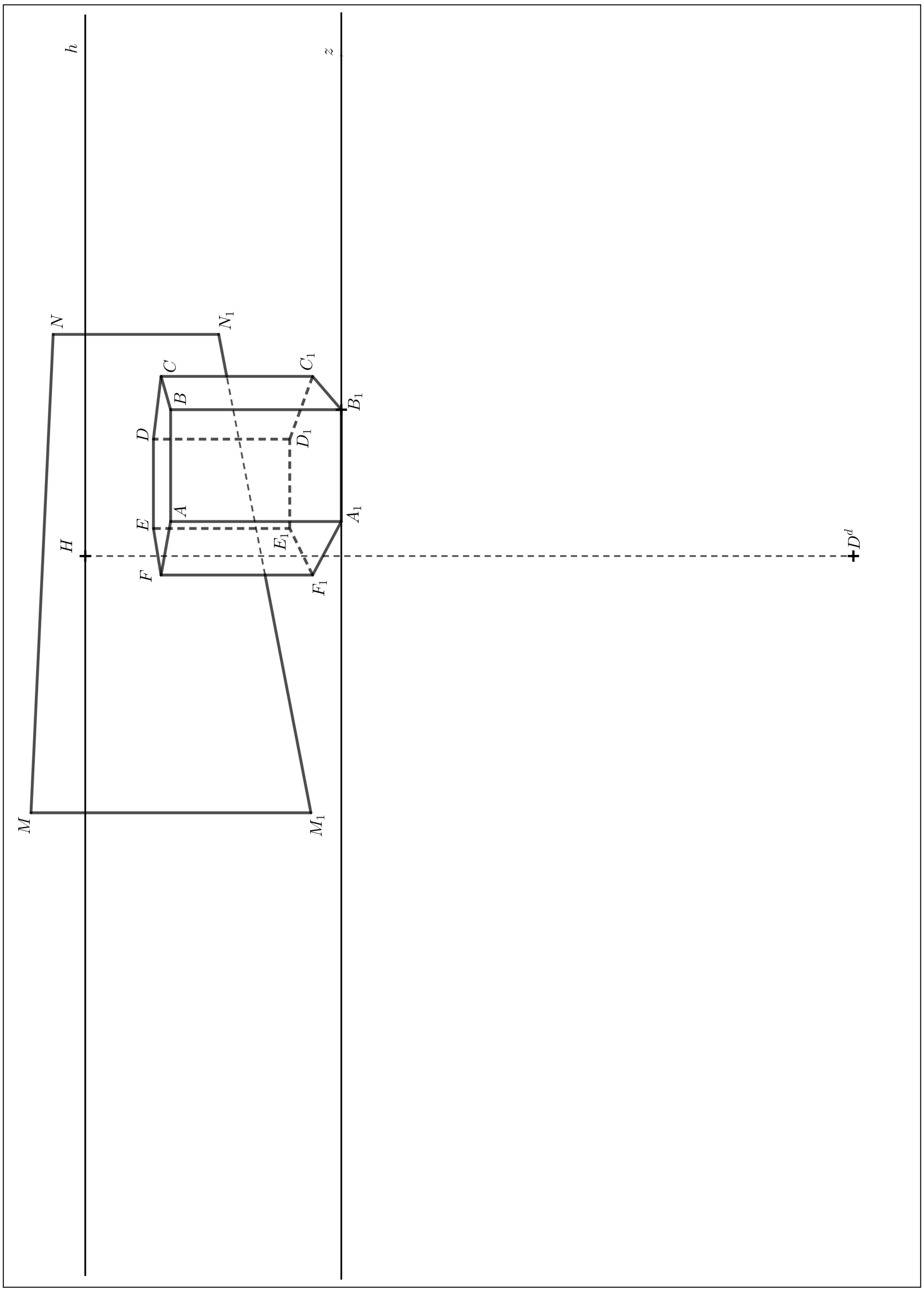


Obrázek 3.13: Příklad 4 – řešení.

3.5 Příklad 5 – Svislé zrcadlo

Zadání

Sestrojte zrcadlový obraz pravidelného šestibokého jehlanu s podstavou v základní rovině π v obdélníkovém zrcadle M_1N_1NM (obr. 3.14).



Obrázek 3.14: Příklad 5 – zadání.

Řešení

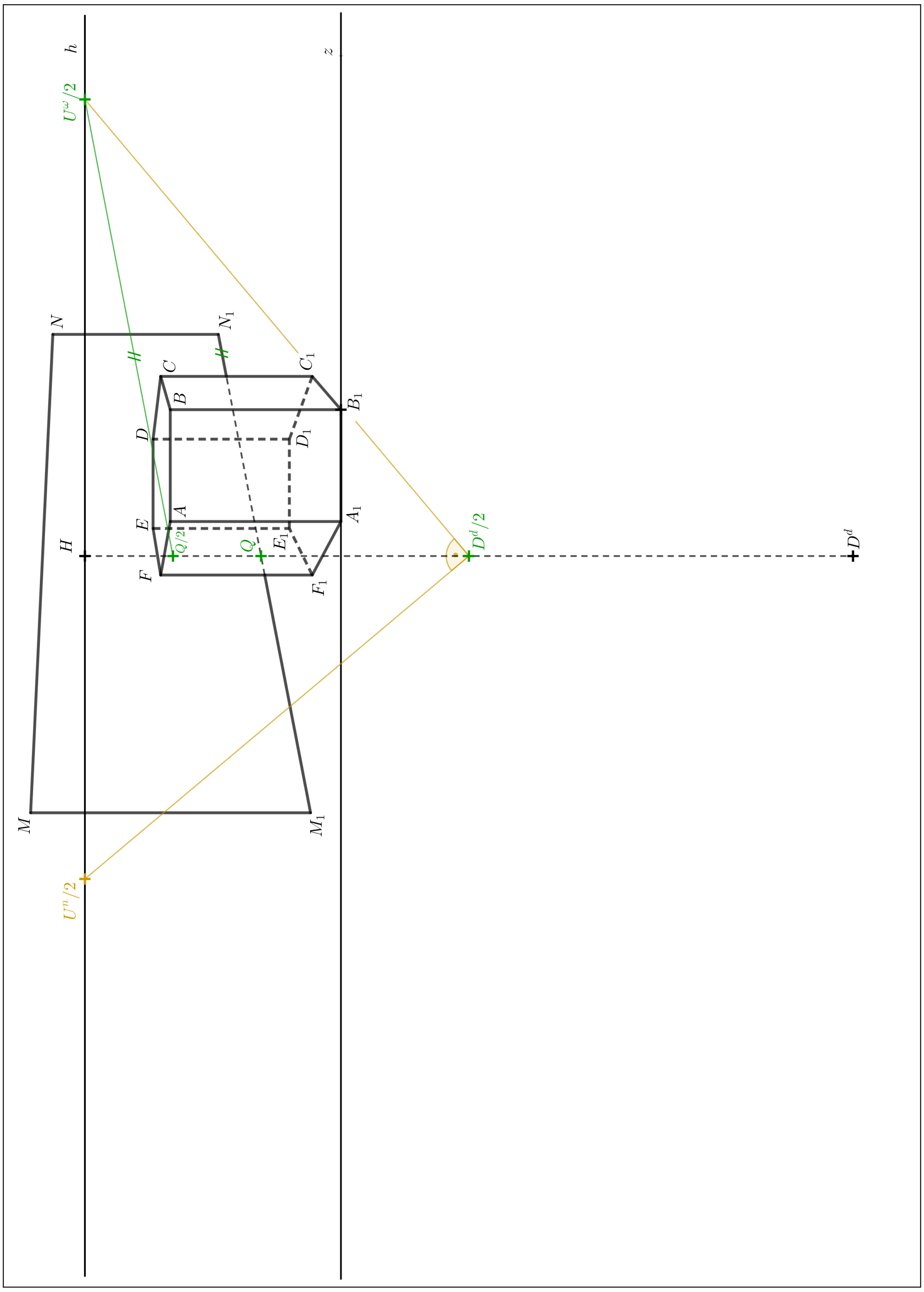
Rovina zrcadla je kolmá k základní rovině. Konstrukce pro svislé zrcadlo jsou popsány v kapitole 2.3.2.

Úběžník přímek kolmých k rovině zrcadla leží na horizontu h. Abychom tento bod našli, využijeme otočení základní roviny do průmětny. Směr půdorysné stopy roviny zrcadla je určen přímkou $D^d U^\omega$, kde U^ω je úběžník přímky $M_1 N_1$. Jelikož však tento bod leží mimo nákresnu, postupujeme metodou redukce distance. Uvažujeme v prostoru stejnolehlost se středem H a koeficientem 0,5. Obraz bodu D^d ve stejnolehlosti je redukovaný dolní distančník $D^d/2$. Zvolíme libovolný bod Q na přímce $M_1 N_1$ (obr. 3.15). Redukovaný bod Q je středem úsečky QH a víme, že tento bod náleží obrazu půdorysné stopy roviny zrcadla v dané stejnolehlosti. Stejnolehlost zachovává rovnoběžnost, proto je redukovaná půdorysná stopa roviny zrcadla (v obr. 3.15 vyznačena zelenou barvou) rovnoběžná se svým vzorem (přímka $M_1 N_1$) a její úběžník $U^\omega/2$ leží na horizontu. Spojnice bodů $D^d/2$ a $U^\omega/2$ určuje směr půdorysné stopy roviny zrcadla (na základě stejnolehlosti víme, že se jedná o rovnoběžku s $D^d U^\omega$).

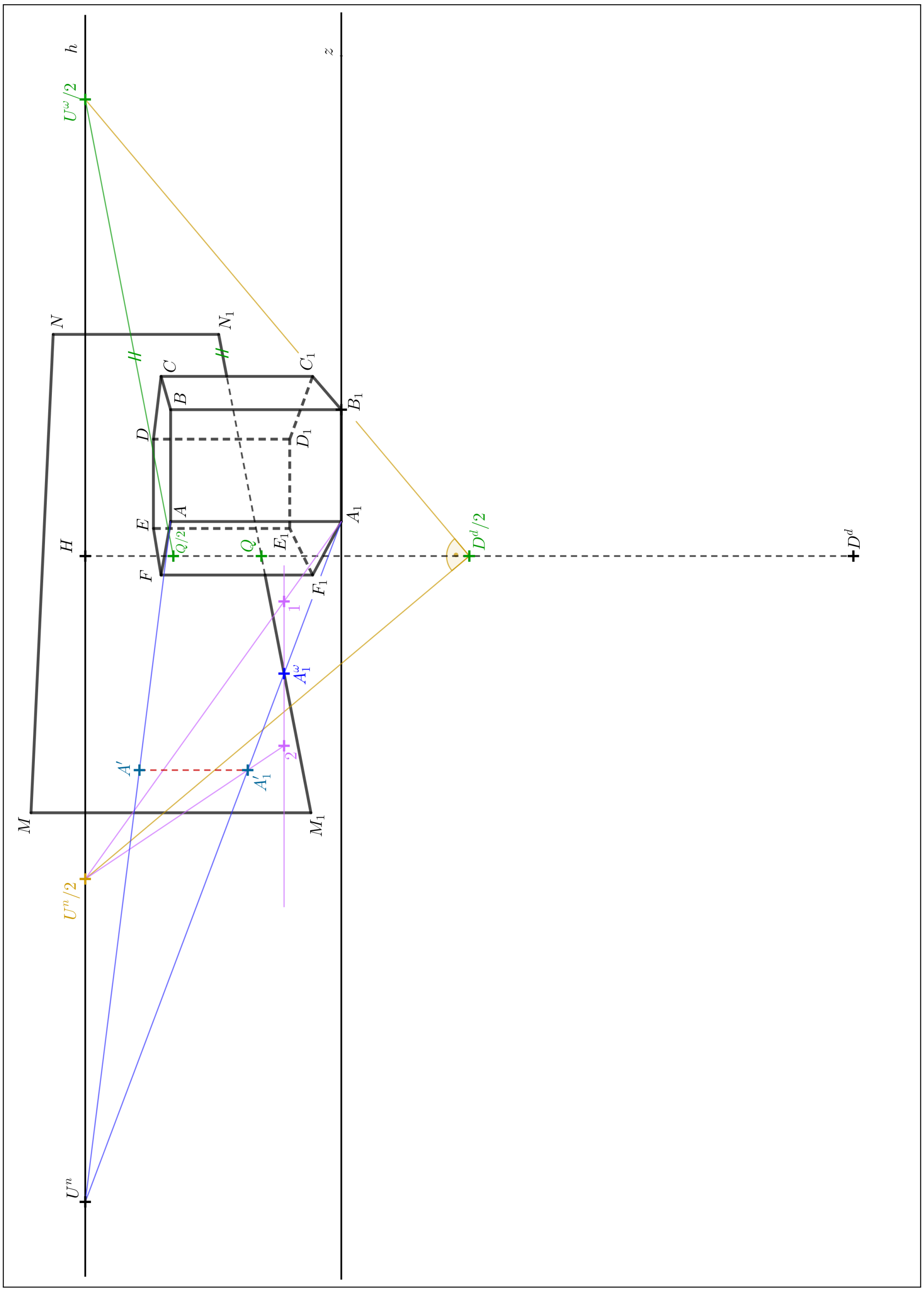
Směr přímek kolmých k rovině zrcadla je určen kolmicí na přímku $D^d/2U^\omega/2$. Redukovaný úběžník normál této roviny $U^n/2$ (úběžník přímek kolmých k této rovině) je průsečík horizontu a kolmice vztyčené z bodu $D^d/2$ ke směru půdorysné stopy roviny zrcadla. Bod $U^n/2$ je obrazem úběžníku normál U^n ve stejnolehlosti (střed H, koeficient 0,5), proto je $U^n/2$ středem úsečky $U^n H$, snadno již tedy určíme úběžník normál roviny zrcadla.

Dále postupujeme stejným způsobem jako u příkladu 3.4. Zrcadlový obraz bodu A_1 hledáme na kolmici k rovině zrcadla tímto bodem (přímka $A_1 U^n$). Označíme $A_1\ \omega$ průsečík kolmice a zrcadla. Bodem $A_1\ \omega$ vedeme rovnoběžku s h čili přímku rovnoběžnou s průmětnou, na které jsou zachovány poměry délek. Na tuto rovnoběžku promítneme bod A_1 (ozn. 1, směr určen úběžníkem $U^n/2$ – možno zvolit libovolný bod na horizontu). Najdeme obraz bodu 1 ve středové souměrnosti se středem A_1^ω (ozn. 2) a tento bod promítneme ve směru daném úběžníkem $U^n/2$ zpět na kolmici k rovině zrcadla, čímž získáme zrcadlový obraz A'_1 bodu A_1. Víme, že obraz bodu A leží na kolmici tímto bodem k rovině zrcadla. Dále víme, že hrana $A_1 A$ musí být rovnoběžná se svým zrcadlovým obrazem. Bod A' je tedy průsečík zmíněné kolmice bodem A a přímky rovnoběžné s $A_1 A$ procházející bodem A'_1 (obr. 3.16). Obdobně postupujeme pro další vrcholy hranolu (obr. 3.17). Při konstrukci průmětů zrcadlových obrazů dalších bodů lze též využít vztahu středové kolineace mezi body roviny π a jejich zrcadlovými obrazy určené osou $M_1 N_1$, středem U^n a dvojicí odpovídajících si bodů A_1, A'_1.

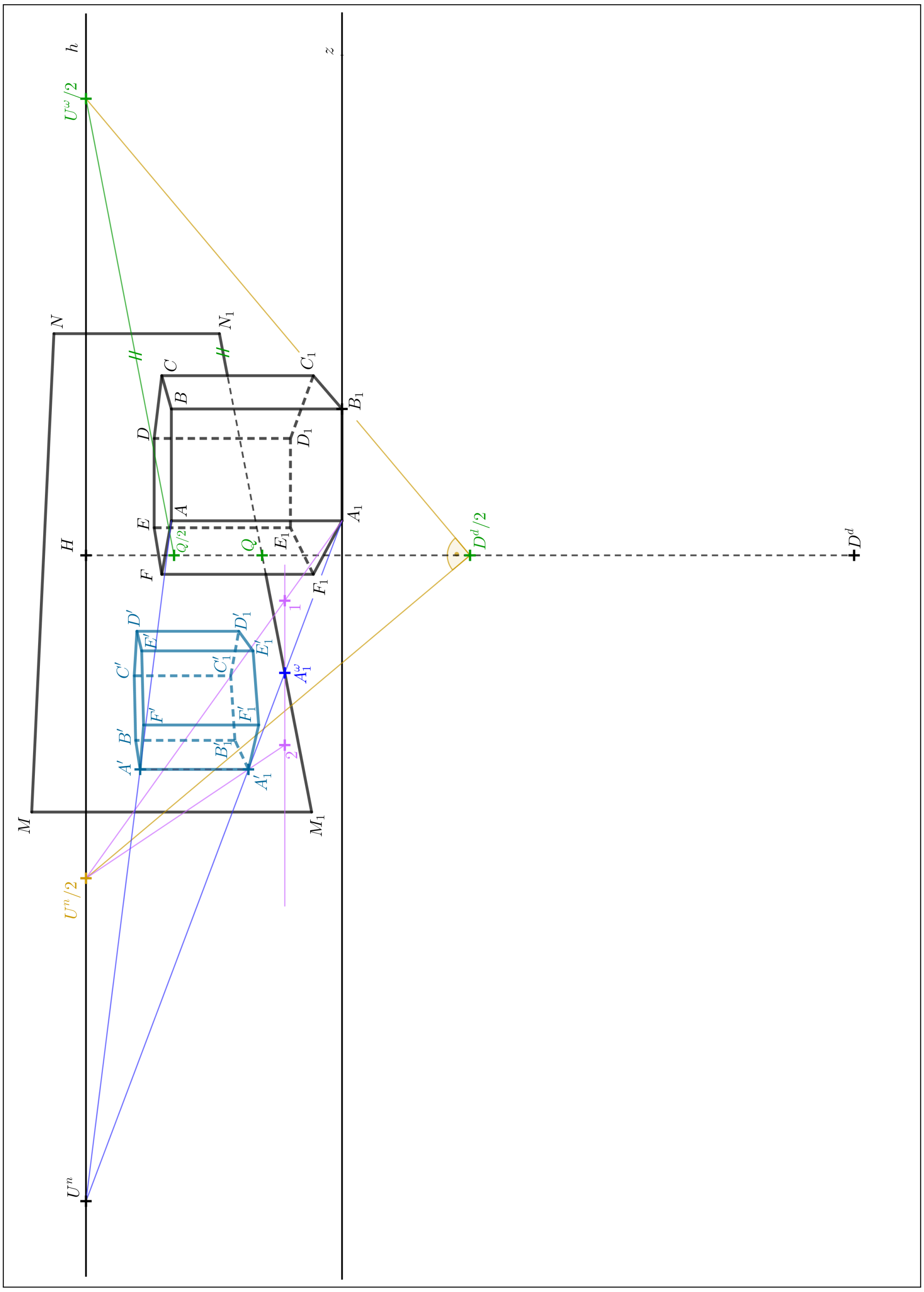
Vrcholy horní podstavy hledáme na příslušných kolmicích k rovině zrcadla. Dále víme, že zrcadlové obrazy přímek kolmých k π jsou také kolmé k π, jelikož je zrcadlo ve svislé poloze. Obraz A' je tudíž průsečíkem kolmice k rovině zrcadla vedené bodem A a kolmice na rovinu π vztyčené z bodu A'_1. Při konstrukci obrazů zbývajících vrcholů postupujeme stejným způsobem.



Obrázek 3.15: Příklad 5 – řešení.



Obrázek 3.16: Příklad 5 – řešení.

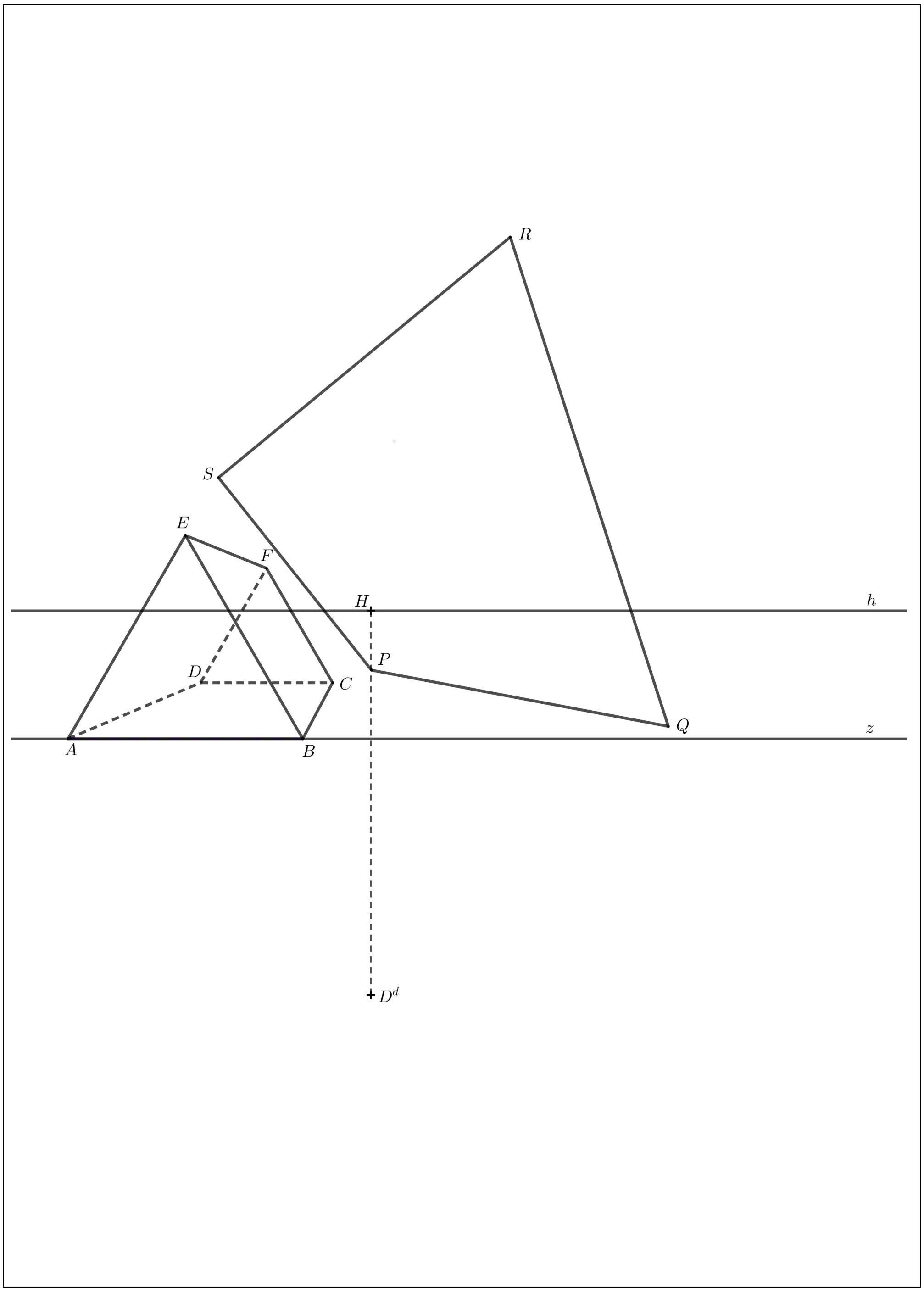


Obrázek 3.17: Příklad 5 – řešení.

3.6 Příklad 6 – Šikmé zrcadlo

Zadání

Je dán pravidelný trojboký hranol se stěnou $ABCD$ v základní rovině π. Sestrojte zrcadlový obraz hranolu v obdélníkovém zrcadle $PQRS$. Hrana zrcadla PQ leží v rovině π (obr. 3.18).



Obrázek 3.18: Příklad 6 – zadání.

Řešení

Šikmé zrcadlo je zadáno obdélníkem $PQRS$. Konstrukce pro rovinu zrcadla v této poloze najdeme v kapitole 2.3.3.

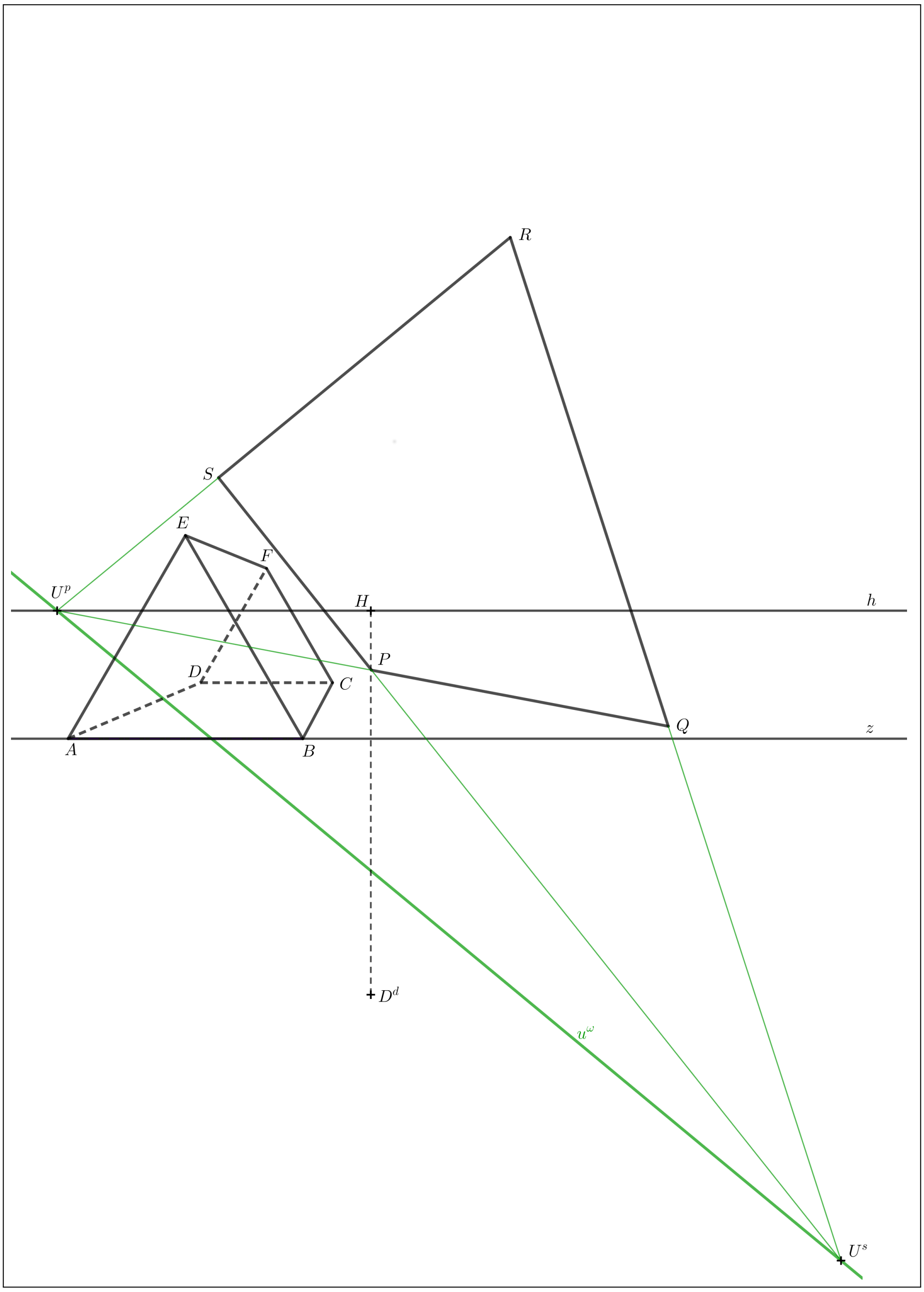
Nejprve hledáme úběžnici roviny zrcadla. Úběžníkem vodorovných hran zrcadla U^p je průsečík přímek PQ a RS (bod na horizontu) a úběžník spádových přímek první osnovy roviny U^s je průsečík přímek PS a QR. Úběžnice roviny zrcadla u^ω je pak spojnice U^p a U^s (obr. 3.19).

Na obr. 3.20 je znázorněna konstrukce úběžníku normál U^n roviny zrcadla (úběžník přímek kolmých k rovině). Známe úběžník spádových přímek první osnovy U^s. Víme, že úběžník U^n najdeme na úběžnici rovin, které jsou kolmé k π a zároveň k ω. Takové roviny protínají ω ve spádových přímkách první osnovy, proto jejich úběžnice prochází bodem U^s. Zároveň je kolmá na horizont, jelikož na ní leží úběžník normál roviny π (nevlastní bod). Dále víme, že pravoúhlý průmět kolmice k rovině zrcadla vedené středem promítání do roviny ν prochází hlavním bodem H a je kolmý k u^ω. Z toho vyplývá, že úběžník U^n je průsečík kolmice k h procházející bodem U_1^n a kolmice k u^ω vedené bodem H.

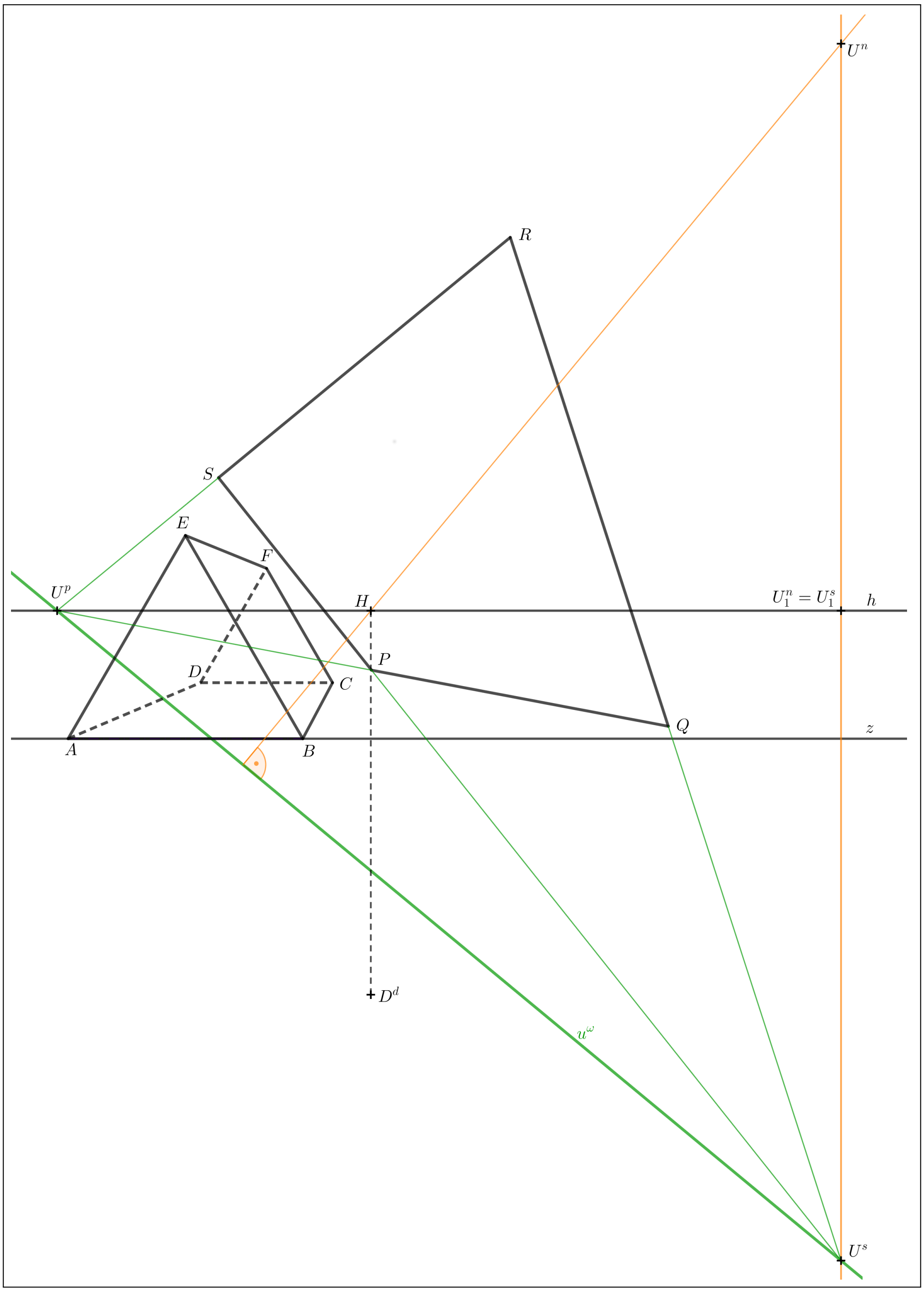
Vedeme kolmici k rovině zrcadla bodem E (přímka EU^n, obr. 3.21). Zároveň sestrojíme také kolmý průmět této přímky do π (přímka $E_1U_1^n$). Průsečík přímek $E_1U_1^n$ a PQ označíme E_1^p. Na spádové přímce první osnovy roviny zrcadla procházející tímto bodem najdeme průsečík kolmice vedené bodem E s rovinou zrcadla (ozn. E^ω).

Bod E^ω musí být ve skutečnosti středem úsečky EE', kde E' je zrcadlový obraz bodu E. Jelikož na přímce v obecné poloze neumíme v perspektivě přenášet vzdálenosti, rovnoběžně promítáme body E, E^ω do π (směr kolmý k π) do bodů E_1, E_1^ω. Přímka určená těmito body je ve vodorovné poloze a jelikož rovnoběžné promítání zachovává dělicí poměr, musí být E_1^ω středem úsečky E_1E_1', kde E_1' je průmět bodu E' do π. Konstrukce průmětu bodu E_1' je popsána v kapitole 2.3.2 a v řešení př. 3.4 a př. 3.5. Využíváme rovnoběžného promítání na přímku rovnoběžnou s h (v perspektivním průmětu směr určuje úběžník H). Na obr. 3.22 je tato konstrukce zvýrazněna růžovou barvou. Bod E_1' vrátíme ve směru kolmém k π na přímku EU^n a tím získáme hledaný obraz E'.

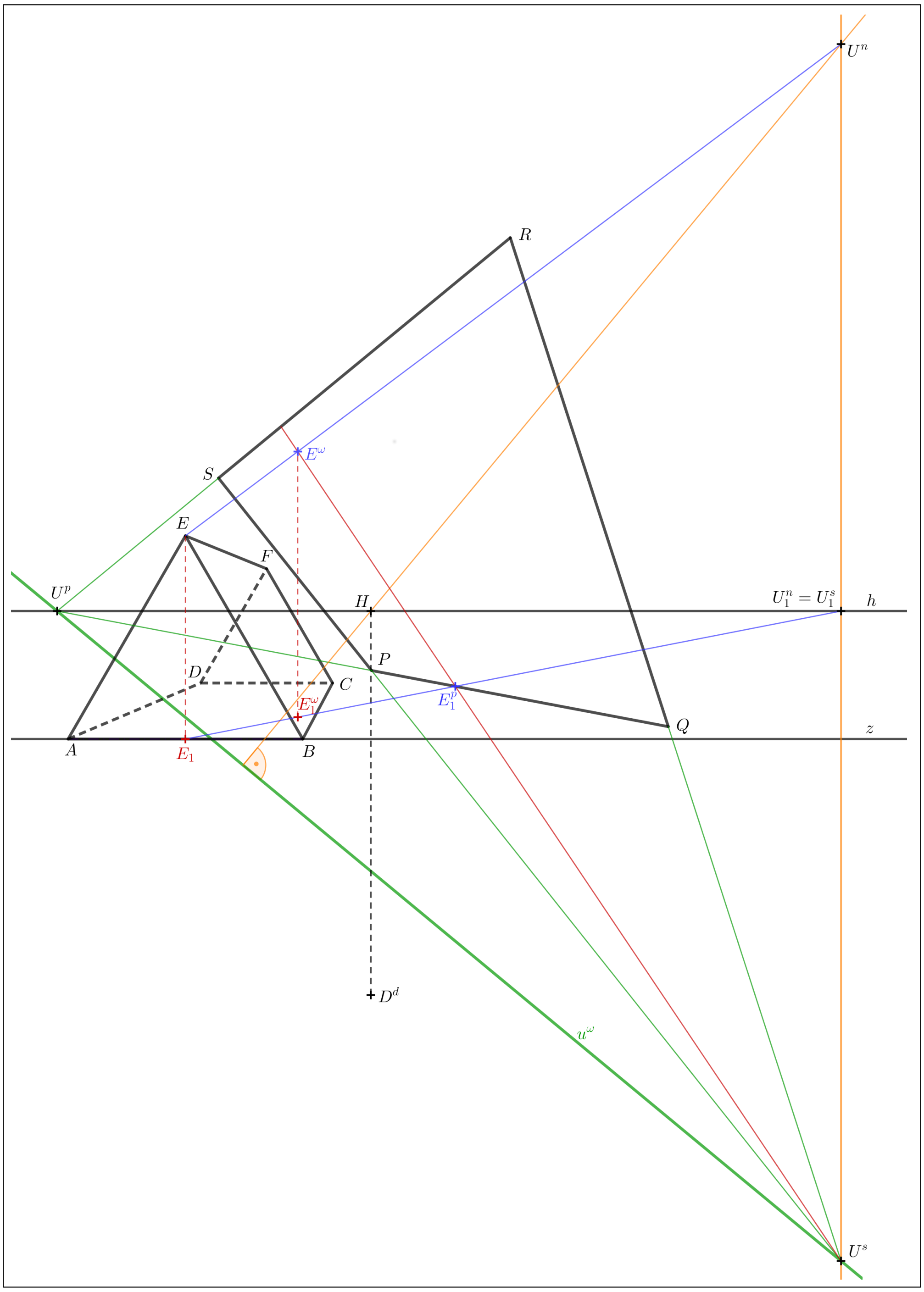
Obdobně postupujeme při konstrukci zrcadlových obrazů zbývajících bodů (obr. 3.23). Pro body v π můžeme také využít středové kolineace mezi perspektivními průměty bodů v π a průměty jejich zrcadlových obrazů. Jedná se o kolineaci se středem U^n, osou PQ a dvojicí odpovídajících si bodů AA'.



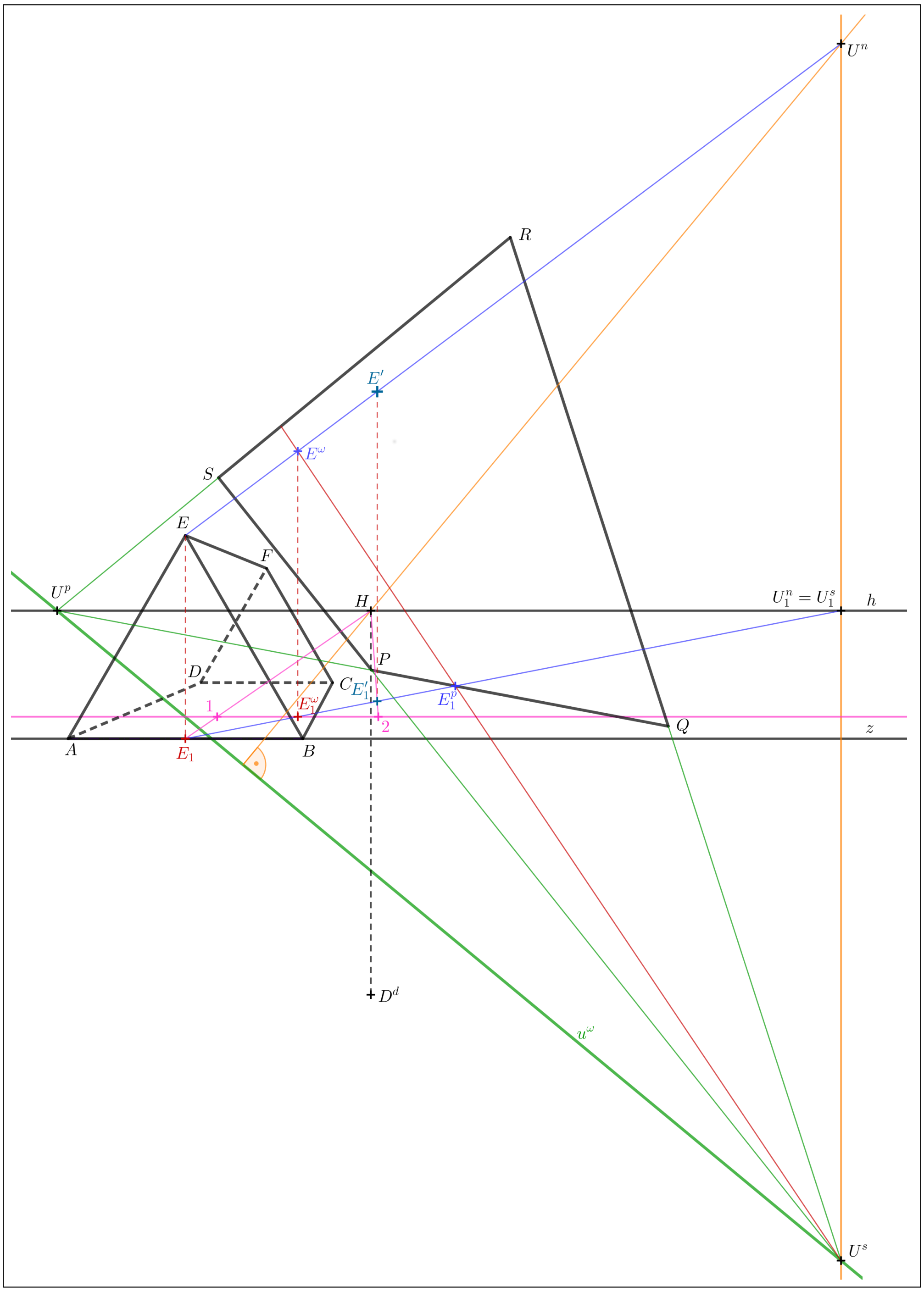
Obrázek 3.19: Příklad 6 – řešení.



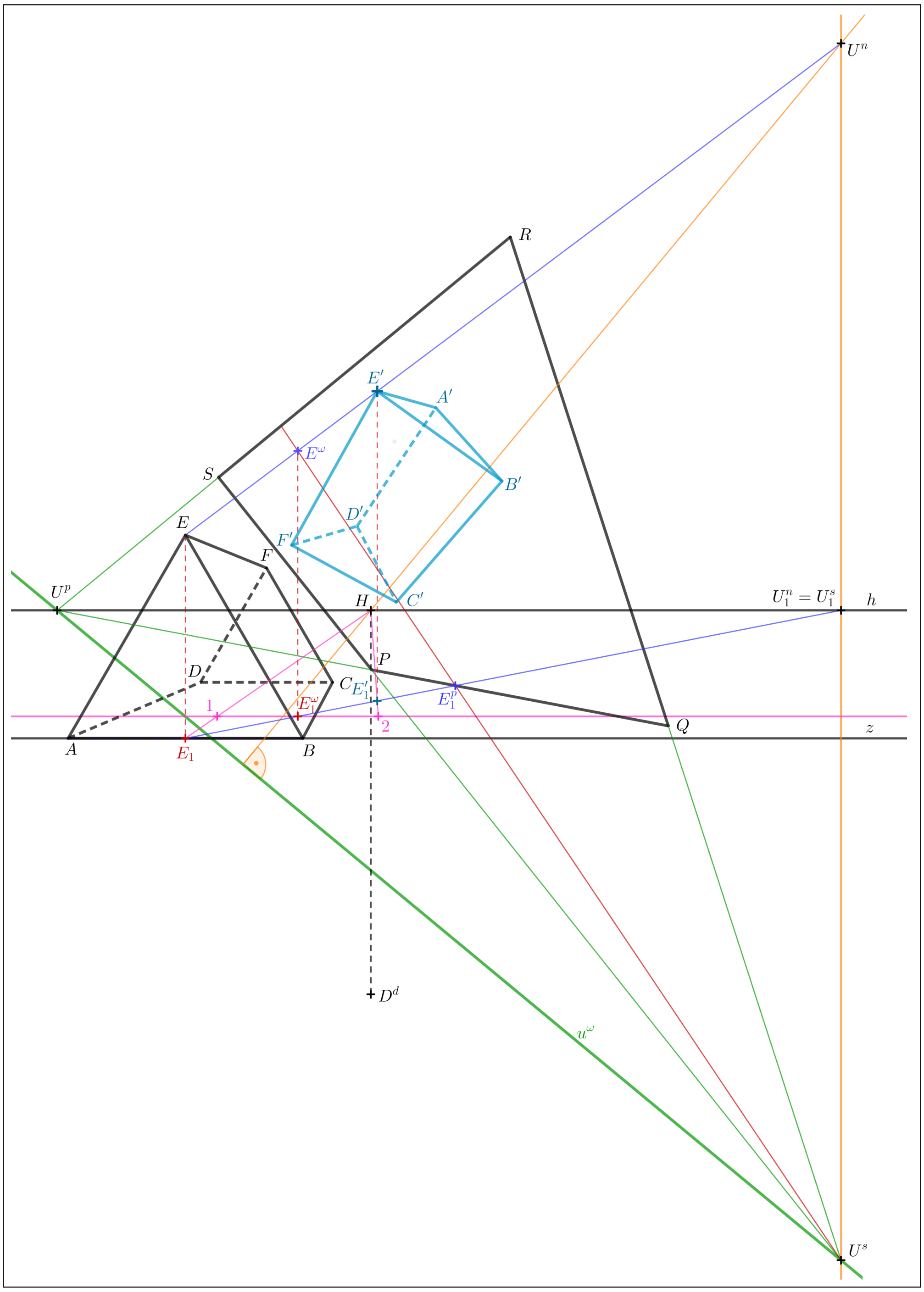
Obrázek 3.20: Příklad 6 – řešení.



Obrázek 3.21: Příklad 6 – řešení.



Obrázek 3.22: Příklad 6 – řešení.

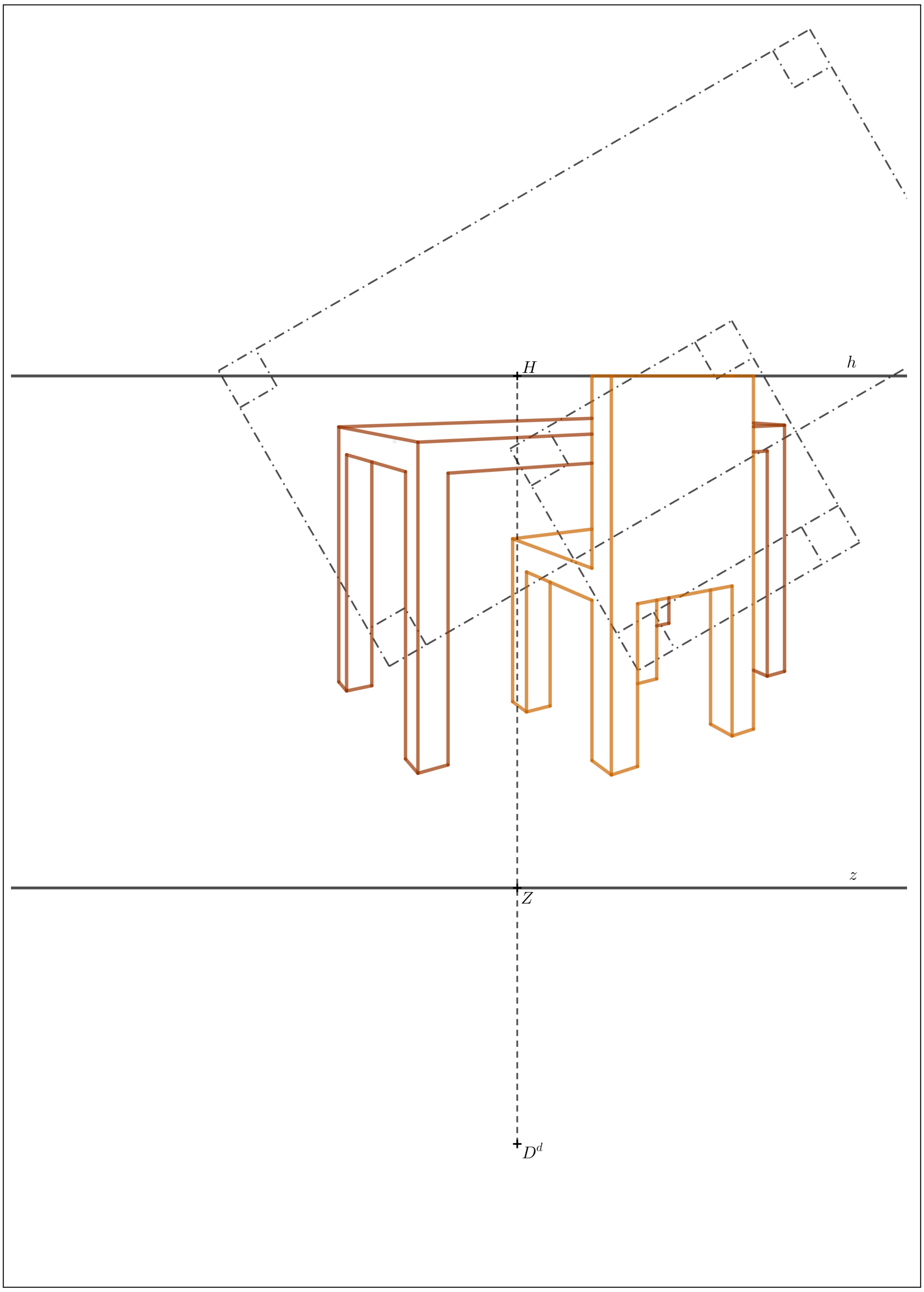


Obrázek 3.23: Příklad 6 – řešení.

3.7 Příklad 7 – Vodorovné zrcadlo

Zadání

Je dán perspektivní průmět židle a stolu (objekty stojí na základní rovině π). Sestrojte zrcadlové obrazy zadaných objektů. Rovinou zrcadla je základní rovina π (obr. 3.24).



Obrázek 3.24: Příklad 7 – zadání.

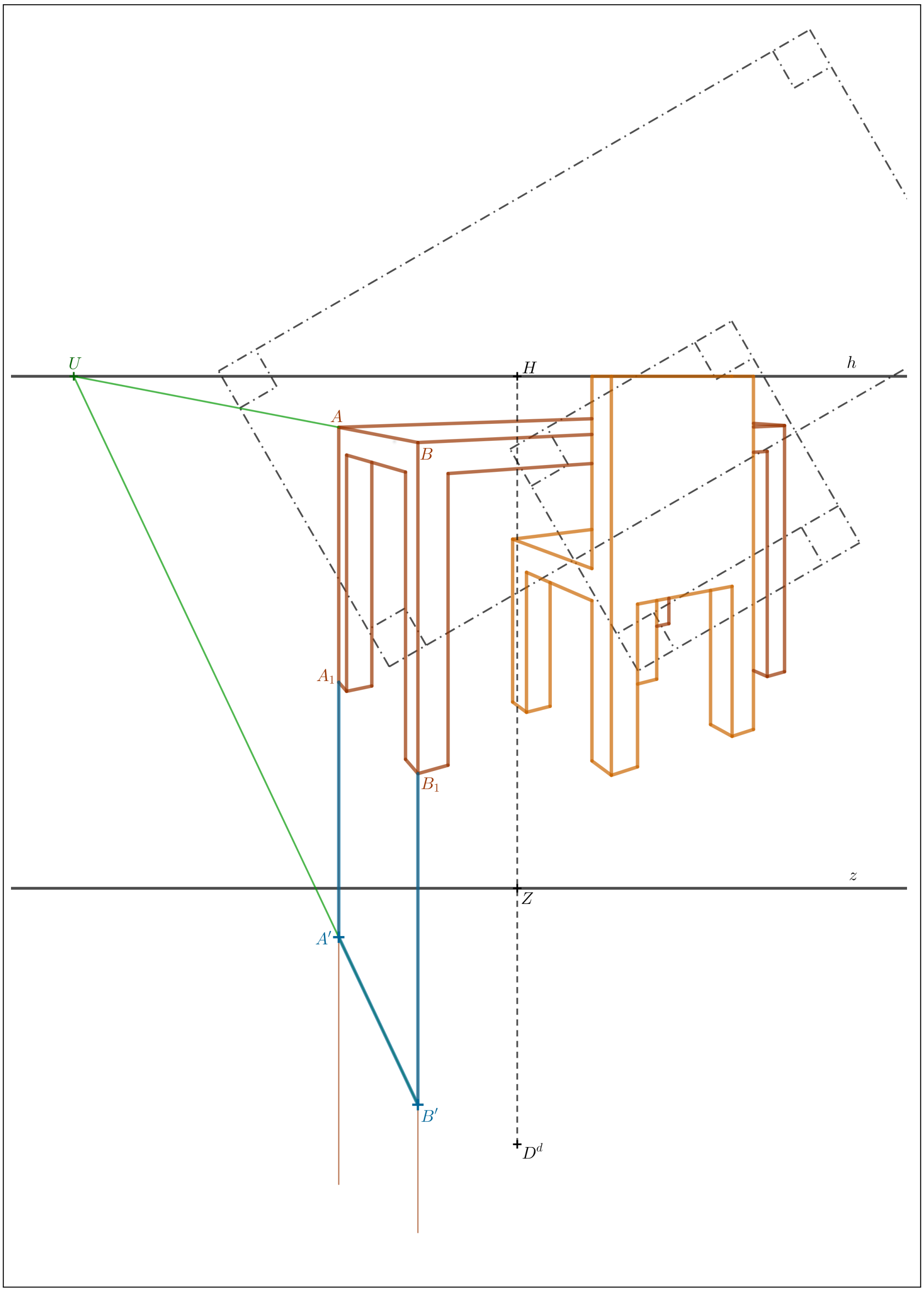
Řešení

Rovina π je vodorovná (kap. 2.3.1) stejně jako u př. 3.1. Řešení bude tudíž obdobné.

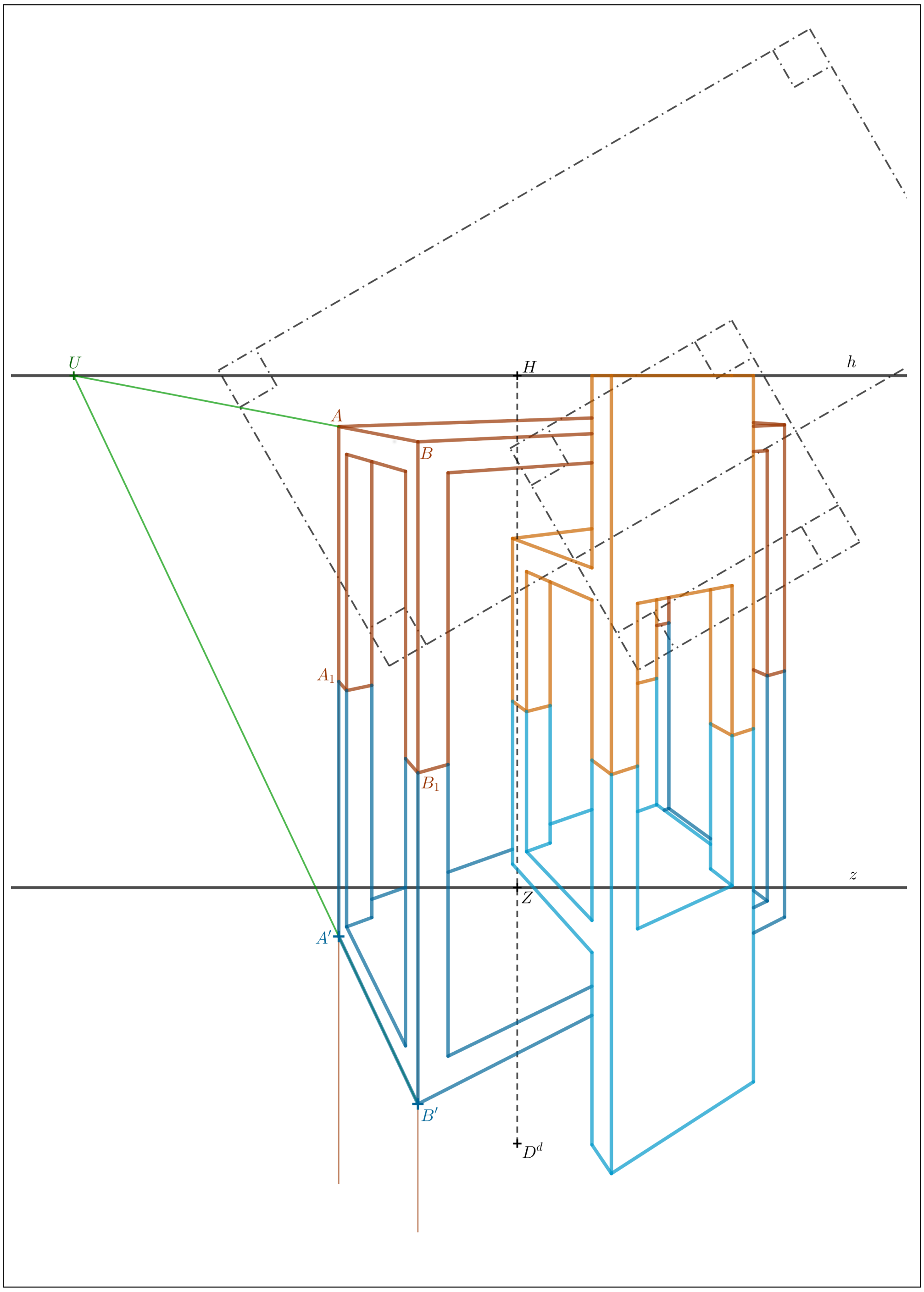
Body náležící rovině zrcadla π jsou samodružné. Pro body mimo rovinu π je postup následující. Označme A levý zadní roh desky stolu (obr. 3.25). Jeho zrcadlový obraz A' leží na přímce kolmé k π, na níž leží i boční hrana stolu. Průsečík kolmice s rovinou zrcadla je bod A_1 (stůl je umístěn na základní rovině, proto je bod A_1 krajní bod hrany stolu). Přímka AA_1 je rovnoběžná s průmětnou, proto snadno sestrojíme průmět bodu A' (vzdálenost bodu A' od bodu A_1 je stejná jako vzdálenost bodu A od A_1, bod A_1 je střed úsečky AA', totéž platí pro perspektivní průměty bodů).

Pro další body je možné zvolit stejný postup jako pro bod A. Je ovšem vhodné využívat také rovnoběžnosti a tím docílit přesnější konstrukce. Označme B levý přední roh desky stolu. Víme že jeho obraz B' leží na kolmici k π procházející bodem B. Dále víme, že přímka AB je rovnoběžná s rovinou zrcadla, proto musí být s rovinou zrcadla rovnoběžná i přímka $A'B'$. Z toho plyne, že jsou přímky AB, $A'B'$ rovnoběžné a jejich průměty tedy mají společný úběžník U na horizontu.

Kombinací výše popsaných konstrukcí postupujeme i pro zrcadlení zbývajících bodů. Řešení příkladu vidíme na obrázku 3.26.



Obrázek 3.25: Příklad 7 – řešení.

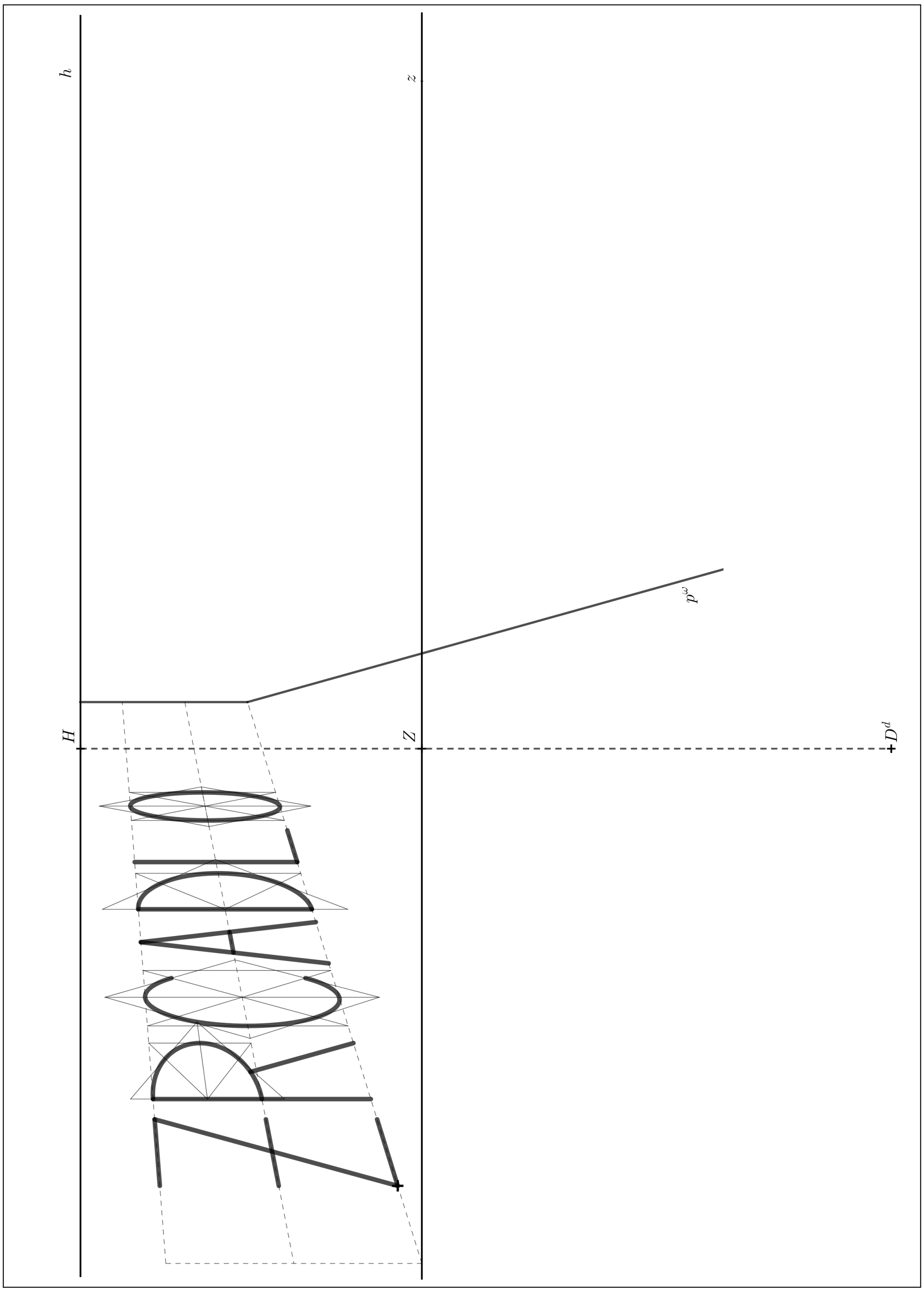


Obrázek 3.26: Příklad 7 – řešení.

3.8 Příklad 8 – Svislé zrcadlo

Zadání

Zobrazte v rovinové souměrnosti podle roviny ω nápis „ZRCADLO“, který leží v rovině kolmé na základní rovinu π. Rovina ω je svislá, kolmá k průmětně (obr. 3.27).



Obrázek 3.27: Příklad 8 – zadání.

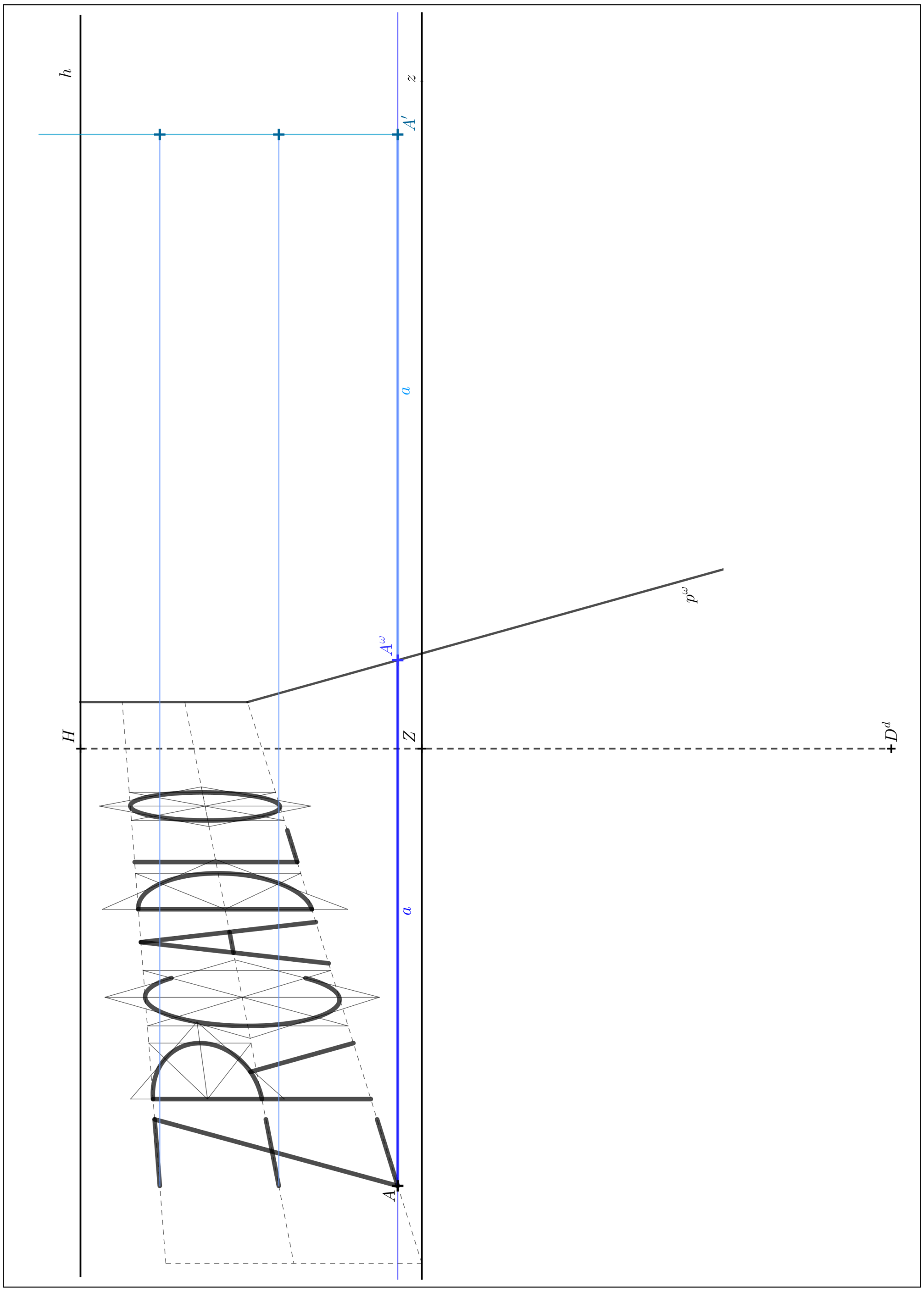
Řešení

Zrcadlo je ve stejné poloze jako v příkladu 3.3. Zrcadlo je ve svislé poloze a úběžníkem půdorysné stopy roviny zrcadla je hlavní bod H. Rovina ω je tudíž zároveň kolmá k π i ν a kolmice k této rovině je přímka rovnoběžná s horizontem h (viz. kapitola 2.3.2).

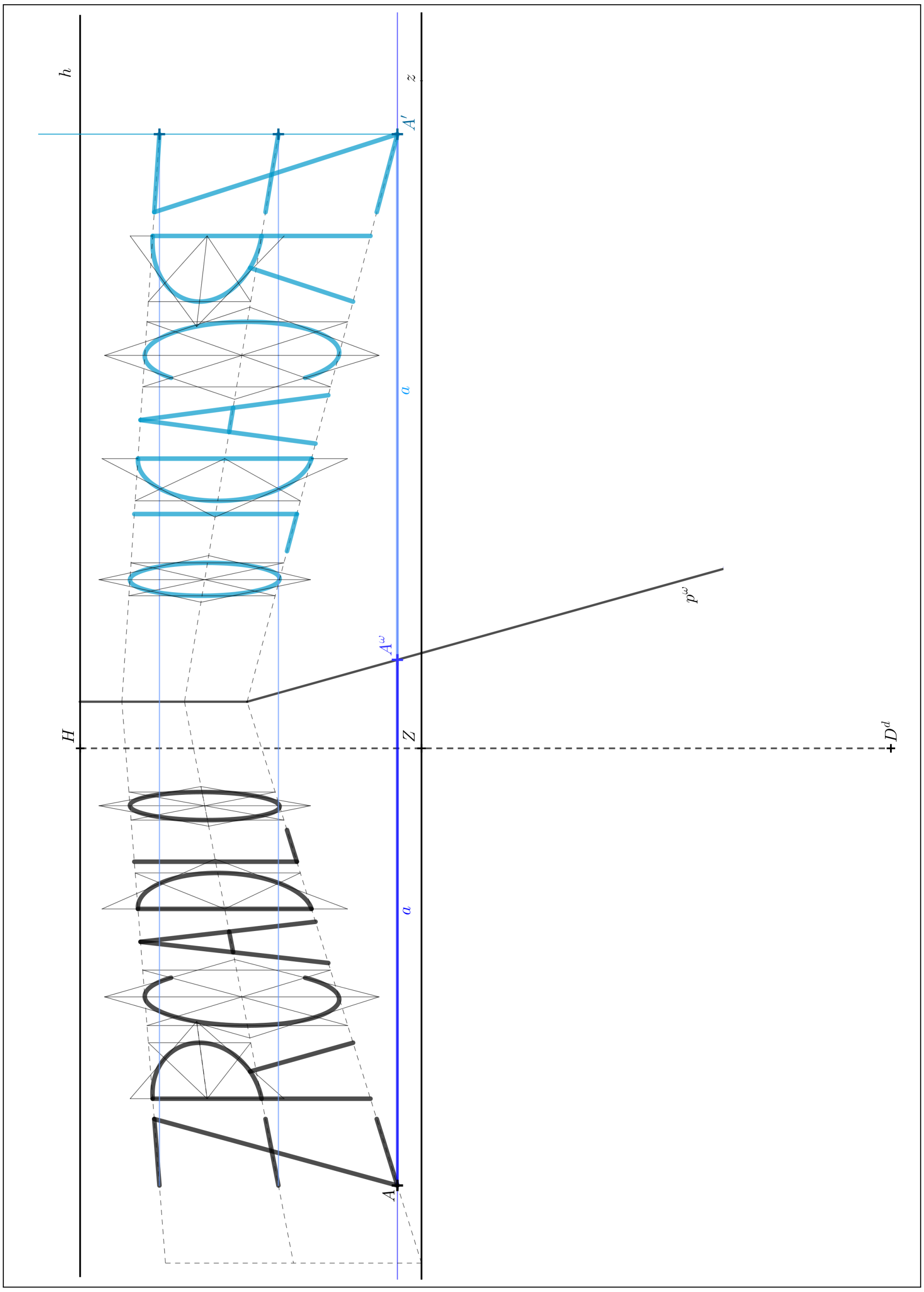
Na obr. 3.28 je vyznačena konstrukce zrcadlového obrazu bodu A, který leží v základní rovině. Bodem A vedeme kolmici k rovině ω. Bod A^{ω}, průsečík kolmice s přímkou p^{ω} (čili průsečík kolmice a roviny zrcadla), je střed úsečky AA'. Bod A' je zrcadlový obraz bodu A. Vzhledem k poloze zrcadla platí výše popsané jak pro body v prostoru, tak pro jejich perspektivní průměty.

Z vlastností zrcadlení víme, že přímka kolmá k π (její perspektivní průmět je kolmice na horizont) se v rovinové souměrnosti podle svislé roviny zrcadla zobrazí na přímku, která je také kolmá k π. Tohoto poznatku využijeme pro konstrukci obrazů bodů, které neleží v rovině π.

Při řešení příkladu nám rovněž pomůže zobrazit v rovinové souměrnosti pomocné linky ohraničující řádek písma. Zrcadlit oblé znaky bod po bodu by bylo příliš zdlouhavé, abychom však docílili v konstrukci co nejvyšší přesnosti, nalezneme kromě obrazů několika bodů také zrcadlové obrazy tečen v těchto bodech (obr. 3.29).



Obrázek 3.28: Příklad 8 – řešení.

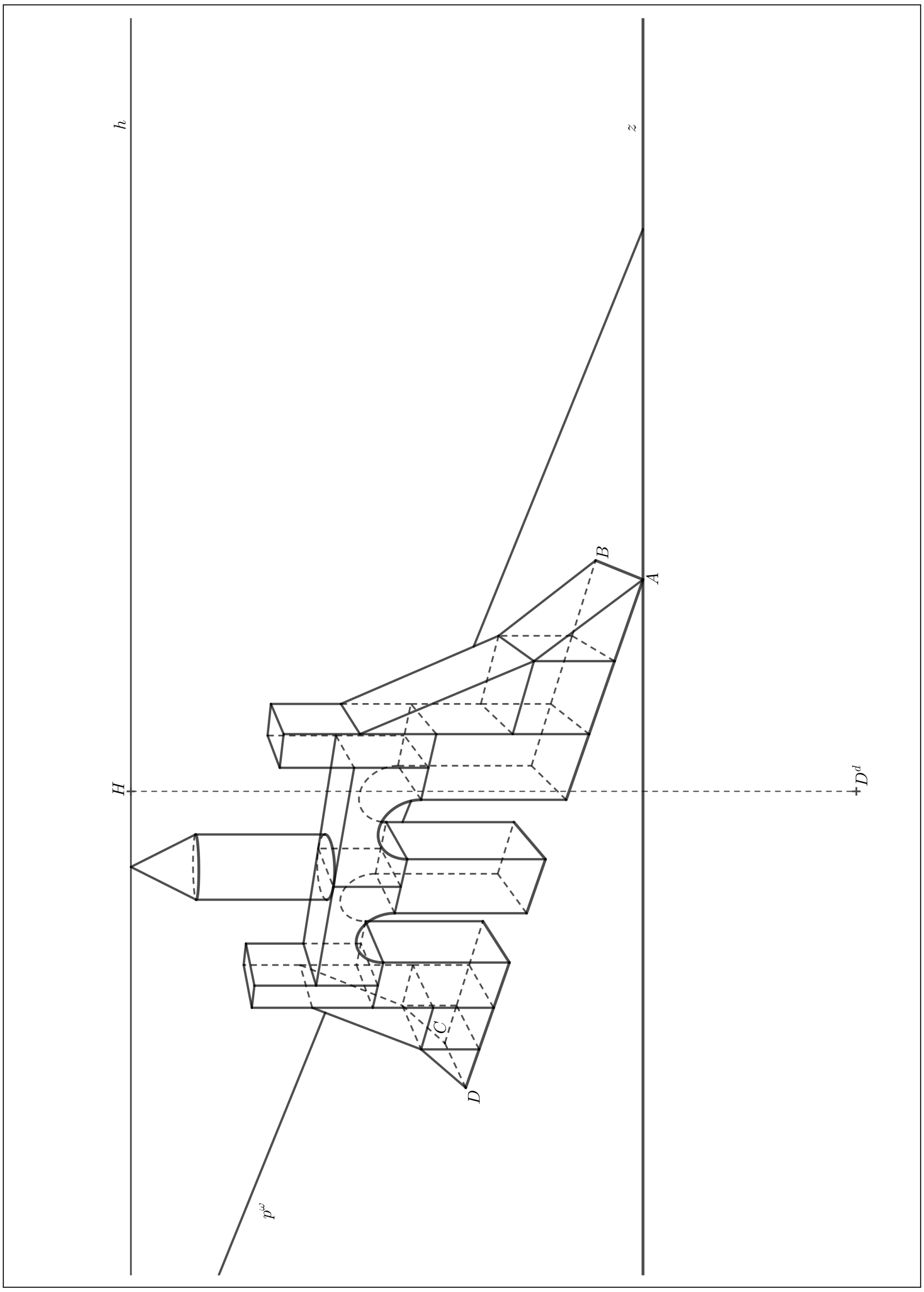


Obrázek 3.29: Příklad 8 – řešení.

3.9 Příklad 9 – Svislé zrcadlo

Zadání

Zobrazte stavbu z kostek v rovinové souměrnosti podle roviny ω. Rovina souměrnosti je ve svislé poloze a je dána její půdorysná stopa p^ω. Stavba je umístěna na základní rovině π (obr. 3.30).



Obrázek 3.30: Příklad 9 – zadání.

Řešení

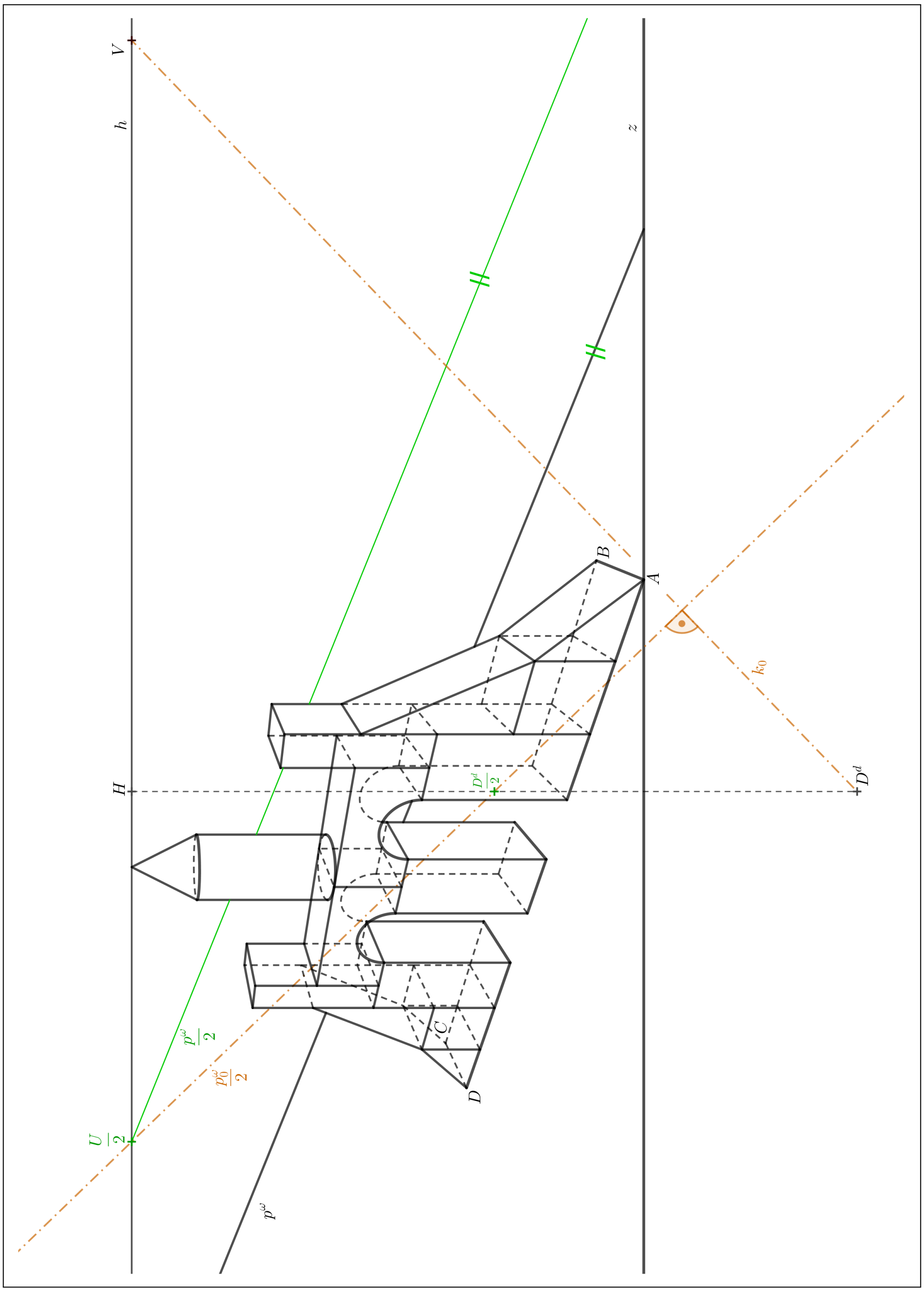
Je dána svislá rovina zrcadlení. Konstrukce pro tuto polohu zrcadla jsou popsány v kapitole 2.3.2 a u příkladu 3.5.

Pro nalezení úběžníku přímek kolmých k rovině ω využijeme otočení základní roviny do průmětny. Označme U úběžník půdorysné stopy roviny ω. Směr otočené půdorysné stopy je určen spojnicí UD^d. Jelikož však úběžník U leží mimo nákresnu, postupujeme metodou redukce distance (jedná se o stejnolehlost se středem H a koeficientem 0,5, viz. příklad 3.5). Směr otočené půdorysné stopy udává přímka $p_0^\omega/2$ (spojnice redukovaného dolního distančníku a redukovaného úběžníku U, obr. 3.31). Bodem D^d vedeme kolmici k $p_0^\omega/2$ (ozn. k_0). Úběžník přímek kolmých k rovině ω je průsečík k_0 a horizontu (ozn. V).

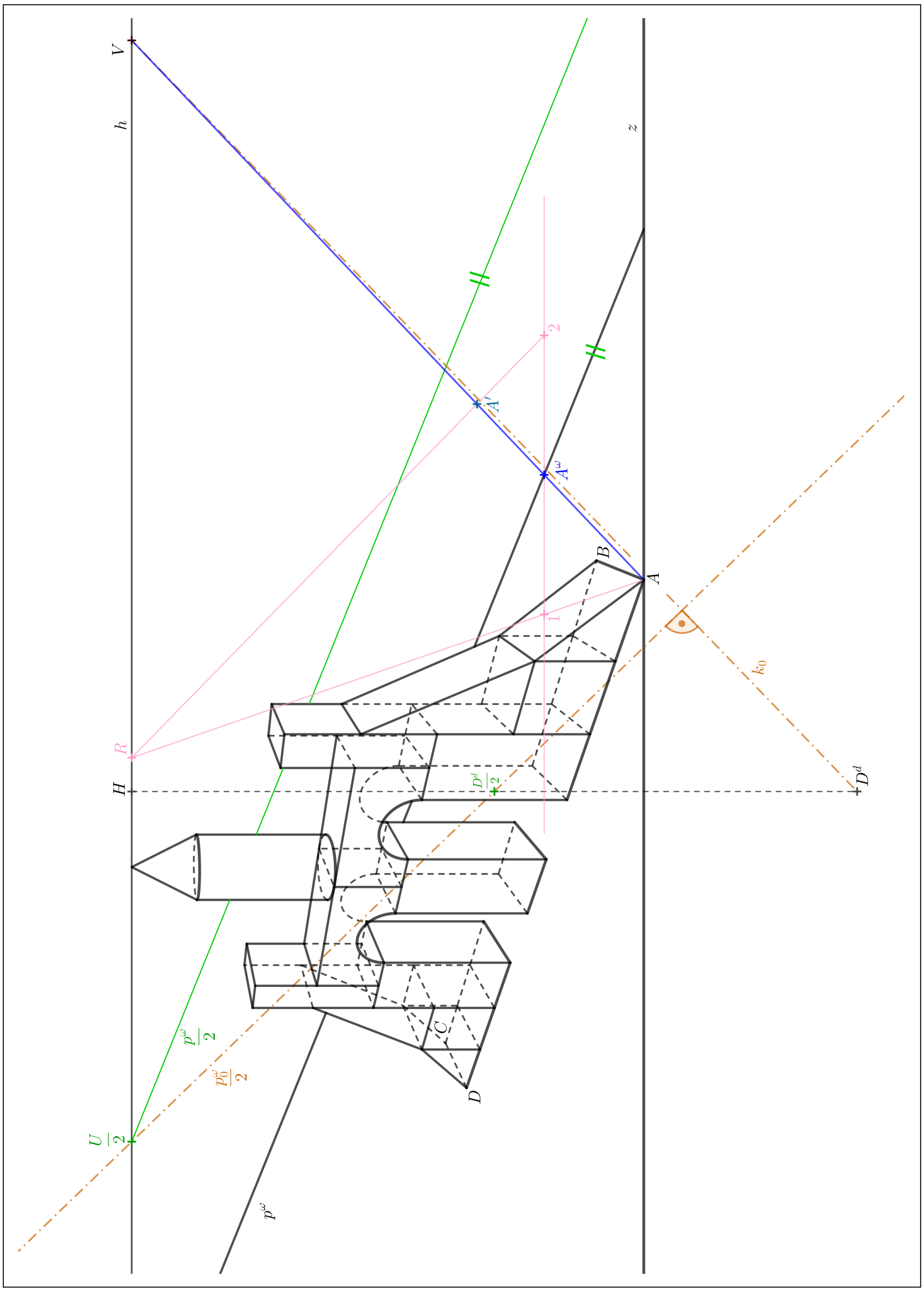
Obraz bodu A v rovinové souměrnosti hledáme na přímce AV (kolmice k ω vedená bodem A). Bod A náleží π, průsečík kolmice s rovinou ω je proto průsečík přímek AV a p^ω (ozn. A^ω). Využitím rovnoběžného promítání na přímku rovnoběžnou s průmětnou dohledáme obraz A' bodu A (obr. 3.32).

Při konstrukci dalších bodů ležících v rovině π je možné využít kolineace se středem V, osou p^ω a dvojicí odpovídajících si bodů A, A'. Víme, že průsečík přímek AB a $A'B'$ náleží přímce p^ω (osa kolineace). Bod B' (obraz bodu B) tedy dohledáme jako průsečík obrazu přímky AB a kolmice k ω vedené bodem B (obr. 3.33).

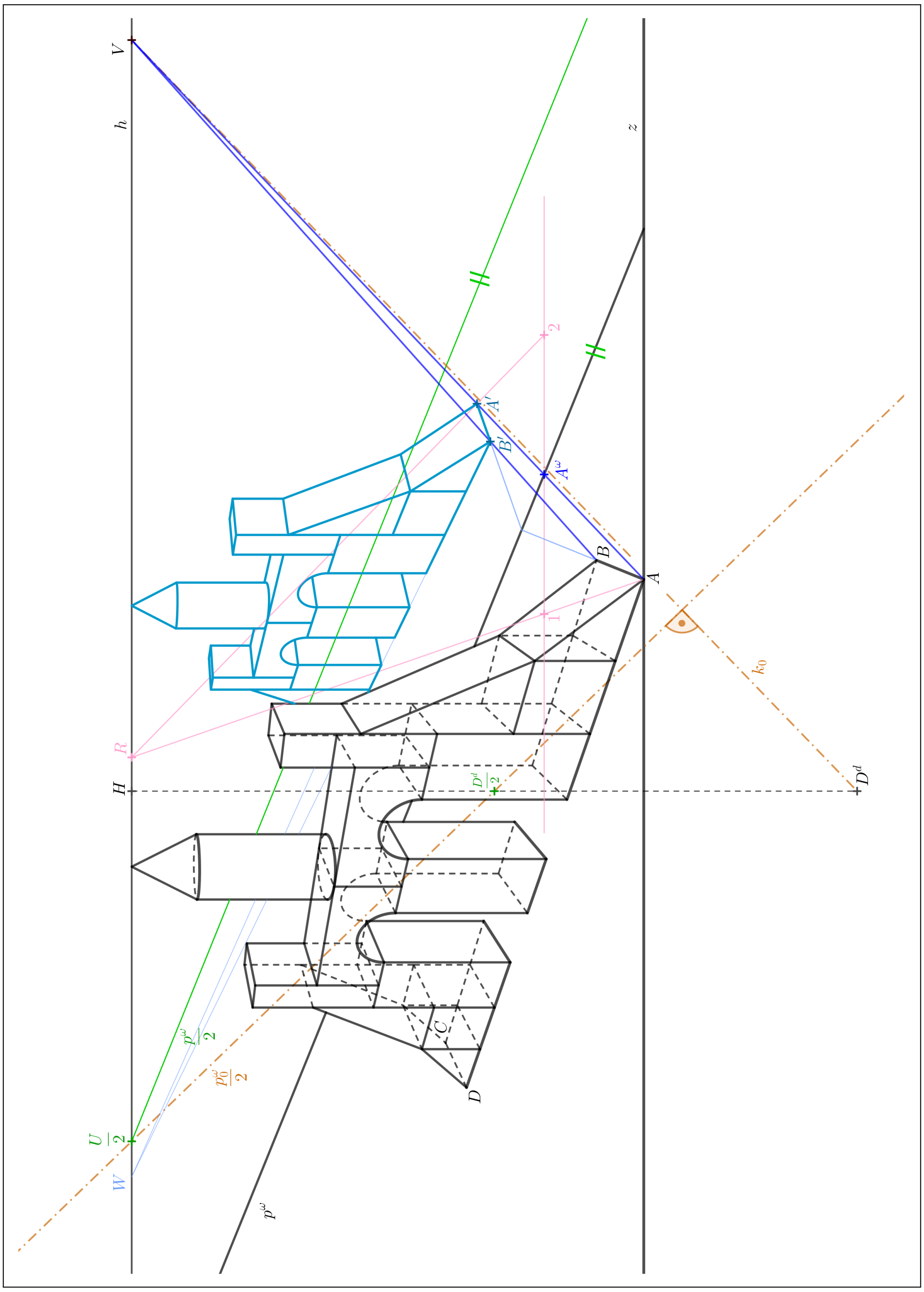
Směr kolmý k základní rovině je v této rovinové souměrnosti zachován. Obrazy bodů neležících v π tudíž hledáme na příslušných kolmicích k π (kolmice vztyčené z obrazů půdorysných průmětů hledaných bodů).



Obrázek 3.31: Příklad 9 – řešení.



Obrázek 3.32: Příklad 9 – řešení.

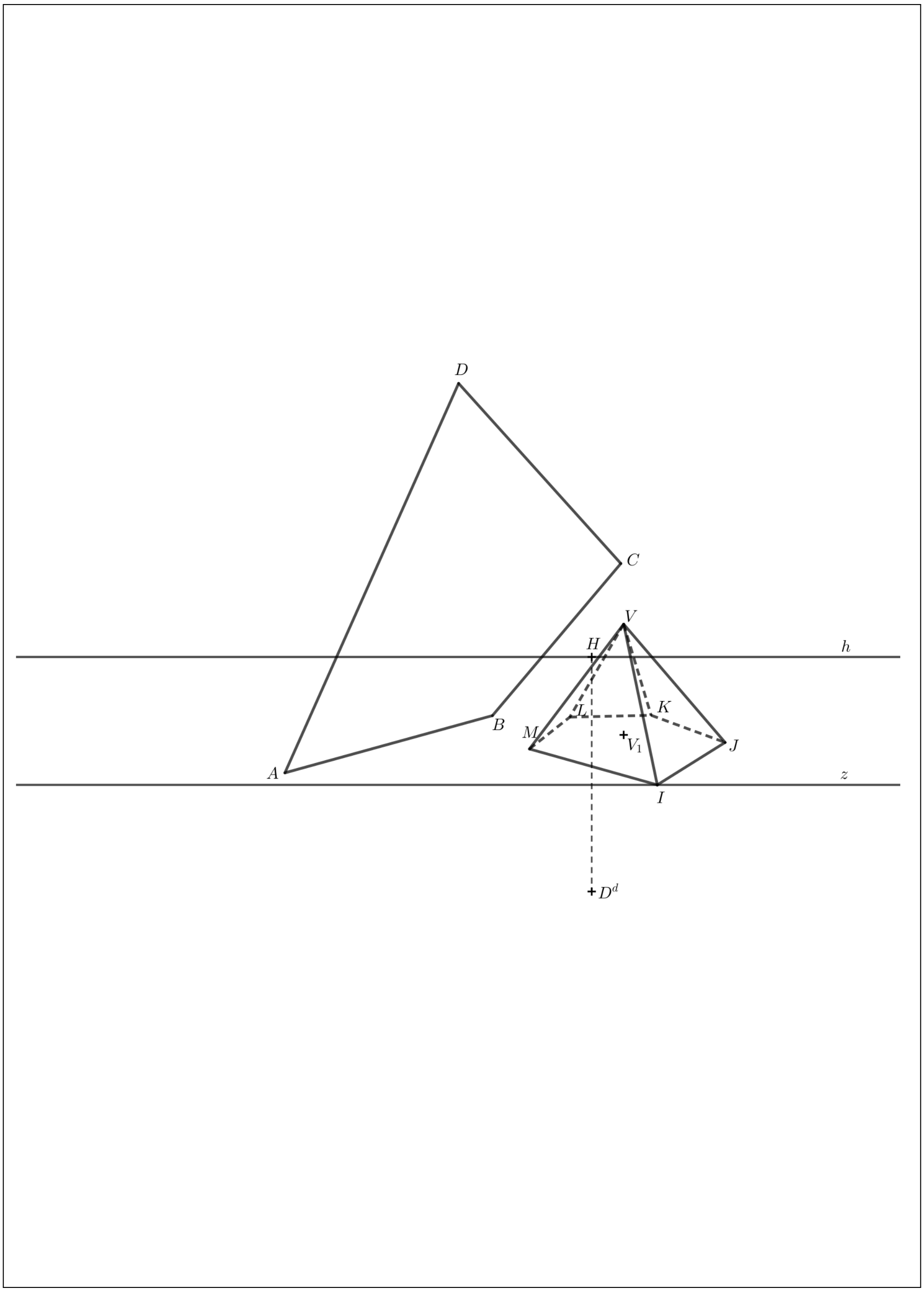


Obrázek 3.33: Příklad 9 – řešení.

3.10 Příklad 10 – Šikmé zrcadlo

Zadání

Je dán pravidelný pětiboký jehlan $IJKLMV$ s podstavou v základní rovině. Sestrojte zrcadlový obraz hranolu v šikmém obdélníkovém zrcadle $ABCD$. Hrana zrcadla AB leží v rovině π (obr. 3.34).



Obrázek 3.34: Příklad 10 – zadání.

Řešení

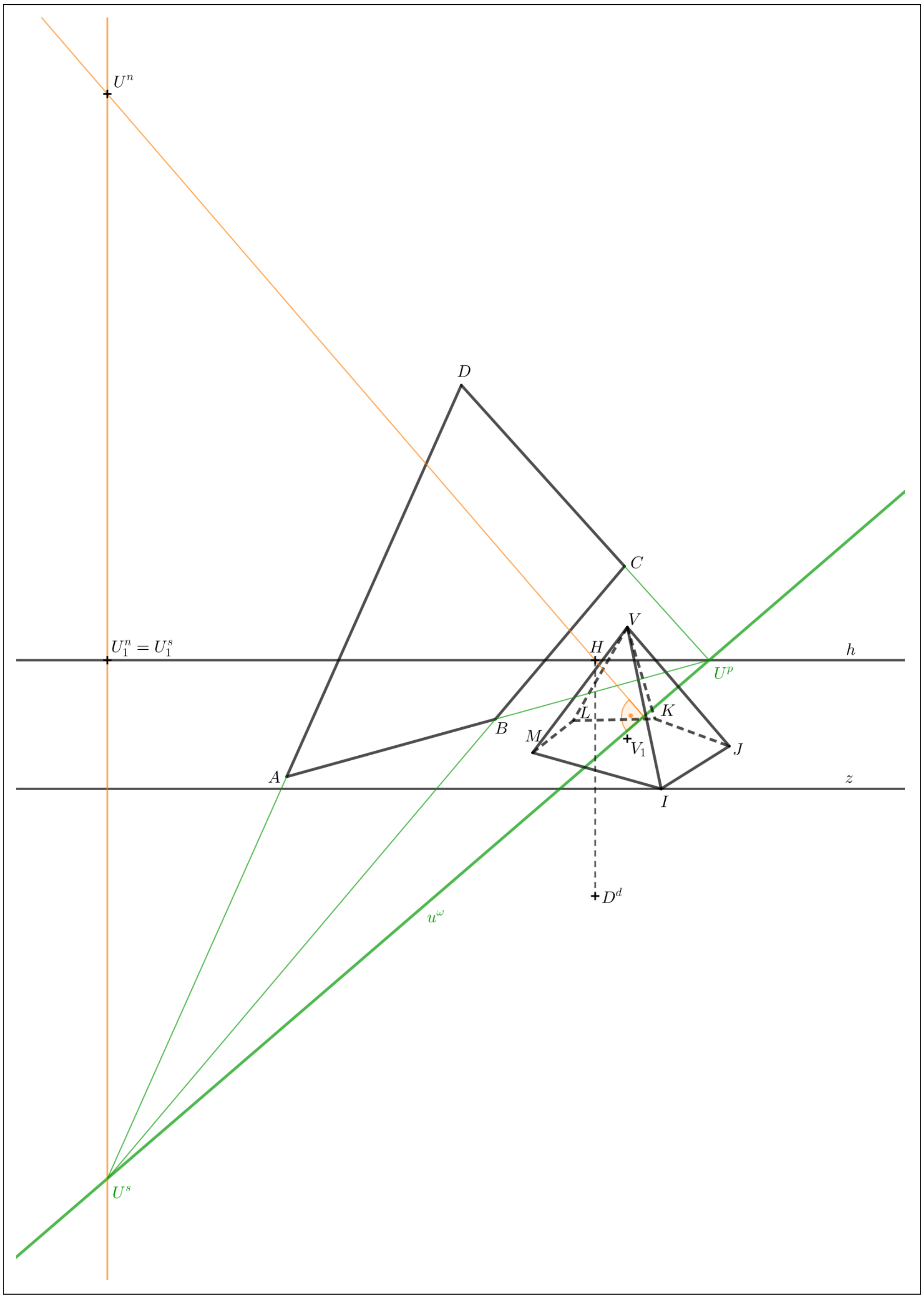
Konstrukce zrcadlení v šikmé rovině zrcadla jsou popsány v kapitole 2.3.3 a v řešení příkladu 3.6.

Abychom mohli sestrojit úběžník normál roviny ω (rovina zrcadla), potřebujeme nejprve najít úběžnici této roviny u^ω. Sestrojíme úběžník spádových přímek první této roviny (ozn. U^s), dále sestrojíme úběžník U^p vodorovných přímek roviny ω. Úběžnice u^ω je pak spojnice úběžníků U^s a U^p (obr. 3.35). Úběžník normál U^n najdeme jako průsečík kolmice k u^ω vedené bodem H a kolmice k h procházející bodem U^s.

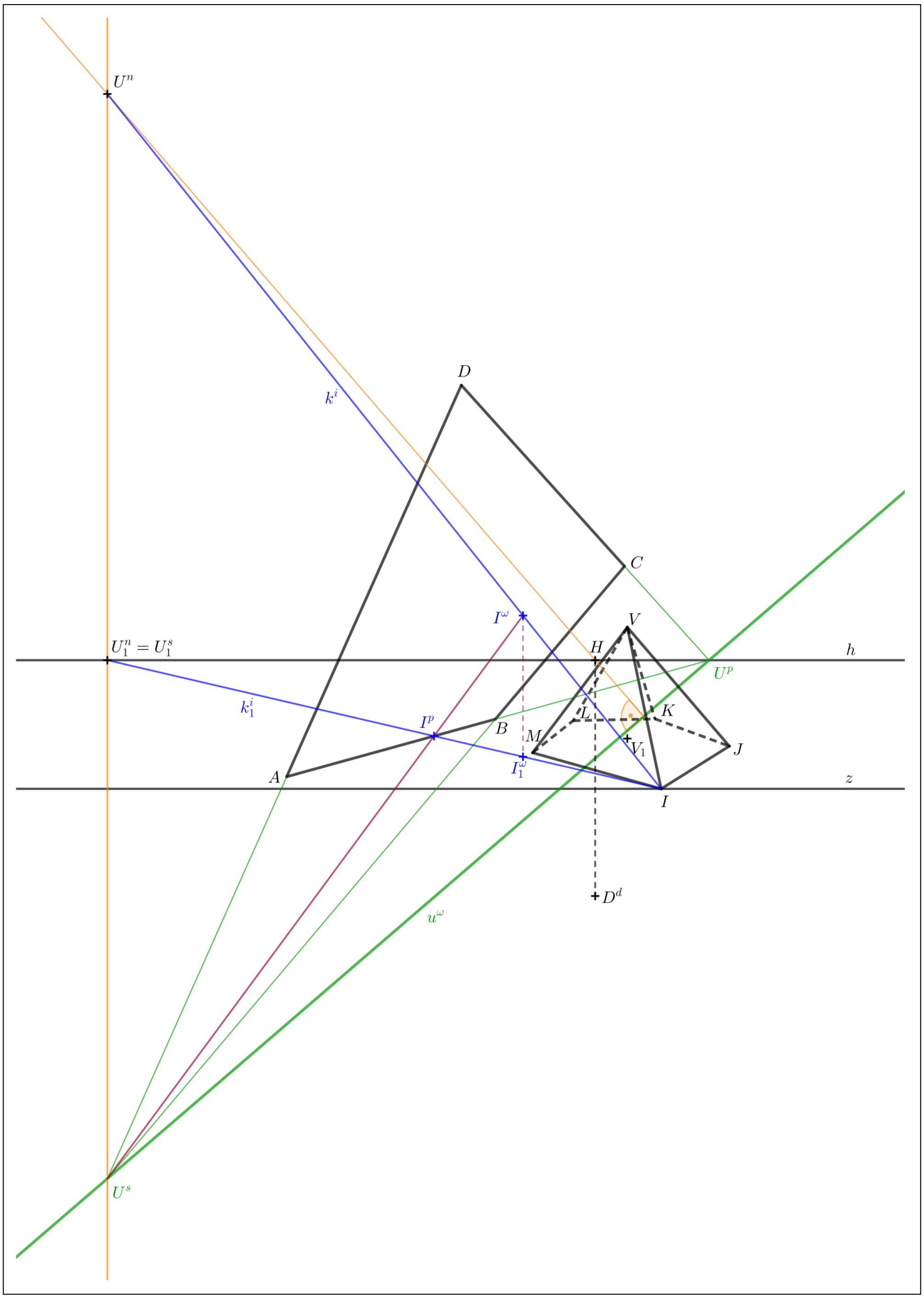
Přímka IU^n je kolmice k rovině ω vedená bodem I (ozn. k^i, obr. 3.36). Jejím půdorysným průmětem je spojnice I, U_1^n (bod I leží v π). Bod I^p je průsečík k_1^i s půdorysnou stopou roviny ω. Průsečík kolmice k^i s rovinou zrcadla (bod I^ω) leží na spádové přímce první osnovy této roviny vedené bodem I^p. Na přímce k_1^i leží jeho půdorysný průmět I_1^ω. Dále najdeme půdorysný průmět I_1' zrcadlového obrazu I' pomocí rovnoběžného promítání na přímku rovnoběžnou s h (v lineární perspektivě se jedná o středový průmět z libovolného bodu na úběžnici, viz. příklad 3.4). Bod I' náleží kolmici k π vztyčené z bodu I_1' (obr. 3.37).

Perspektivní průměty zrcadlových obrazů zbývajících vrcholů podstavy je možné sestrojit s využitím kolineace se středem U^n, osou AB a dvojicí odpovídajících si bodů I, I'. Jak vidíme na obr. 3.38, přímky IM a $I'M'$ se protínají na ose kolineace AB. Hledaný obraz M' najdeme na kolmici k rovině zrcadla procházející bodem M (ozn. k^m). Pro další obrazy postupujeme obdobně.

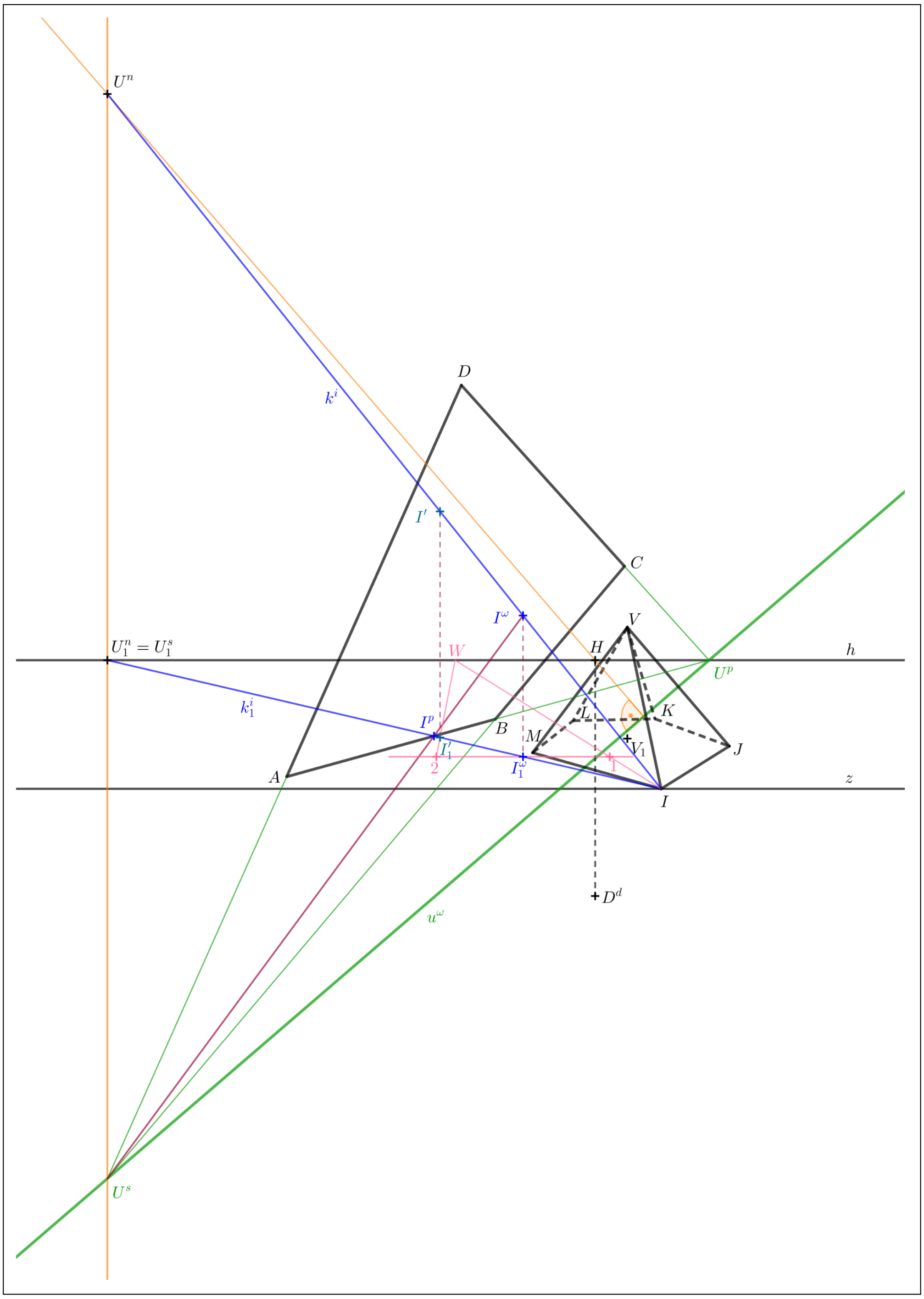
Pro konstrukci obrazu vrcholu jehlanu V opakujeme postup nastíněný pro bod I. Jelikož bod V neleží v π, půdorysný průmět kolmice k^v prochází v tomto případě bodem V_1 (obr. 3.39).



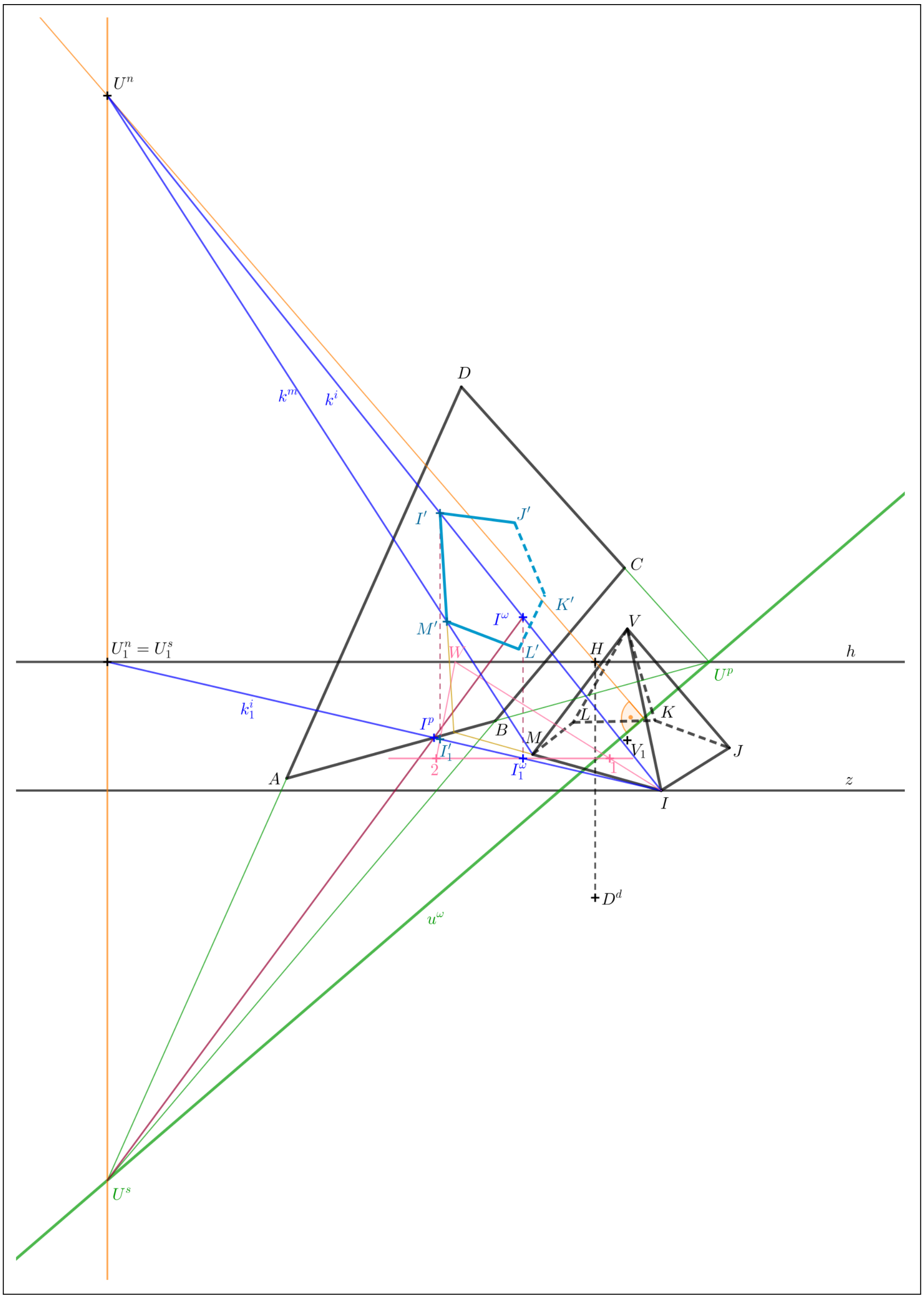
Obrázek 3.35: Příklad 10 – řešení.



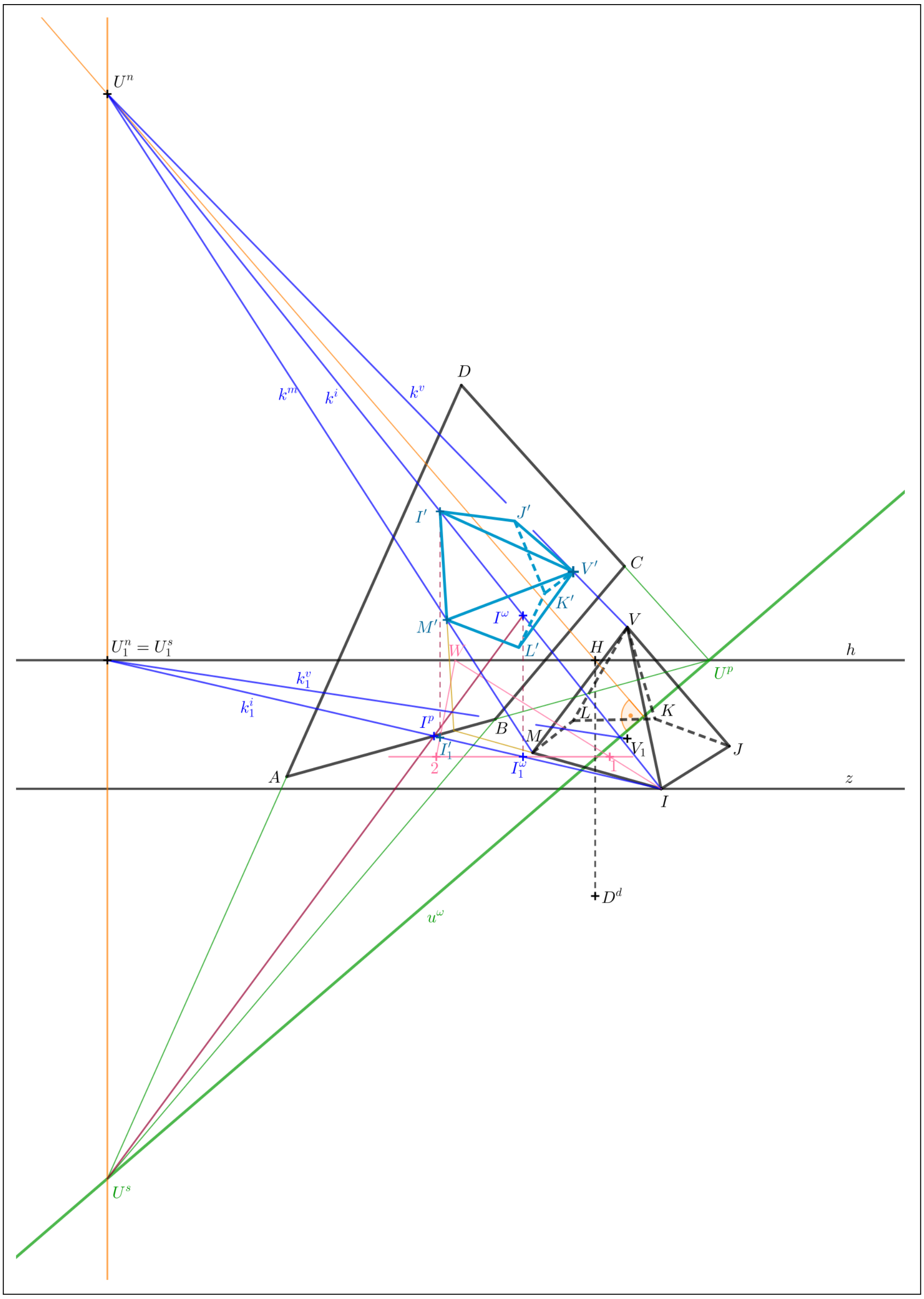
Obrázek 3.36: Příklad 10 – řešení.



Obrázek 3.37: Příklad 10 – řešení.



Obrázek 3.38: Příklad 10 – řešení.

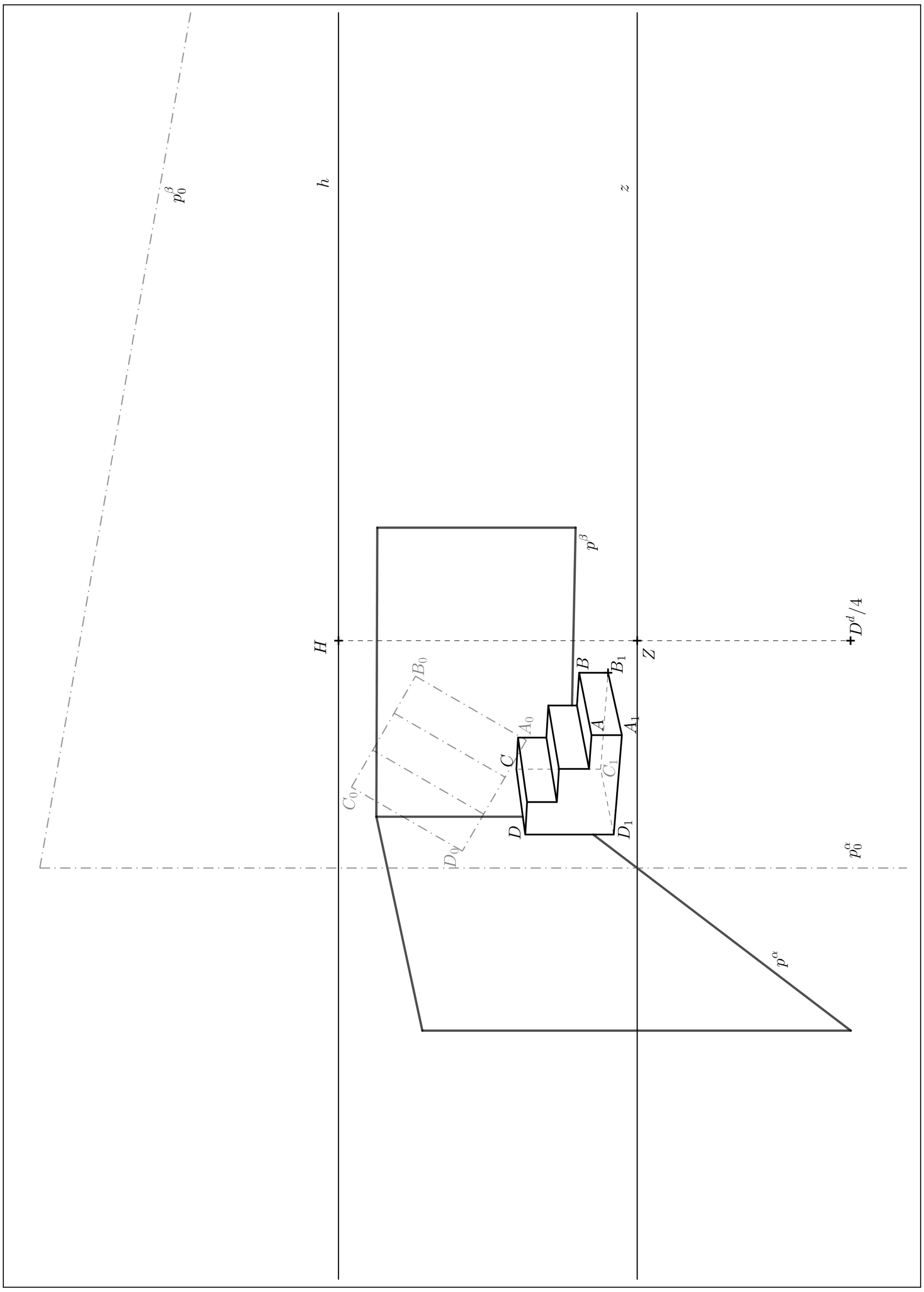


Obrázek 3.39: Příklad 10 – řešení.

3.11 Příklad 11 – Dvě svislá zrcadla

Zadání

Sestrojte zrcadlové obrazy schodiště umístěného na základní rovině π v rovinové souměrnosti podle svislých zrcadel α a β (obr. 3.40).



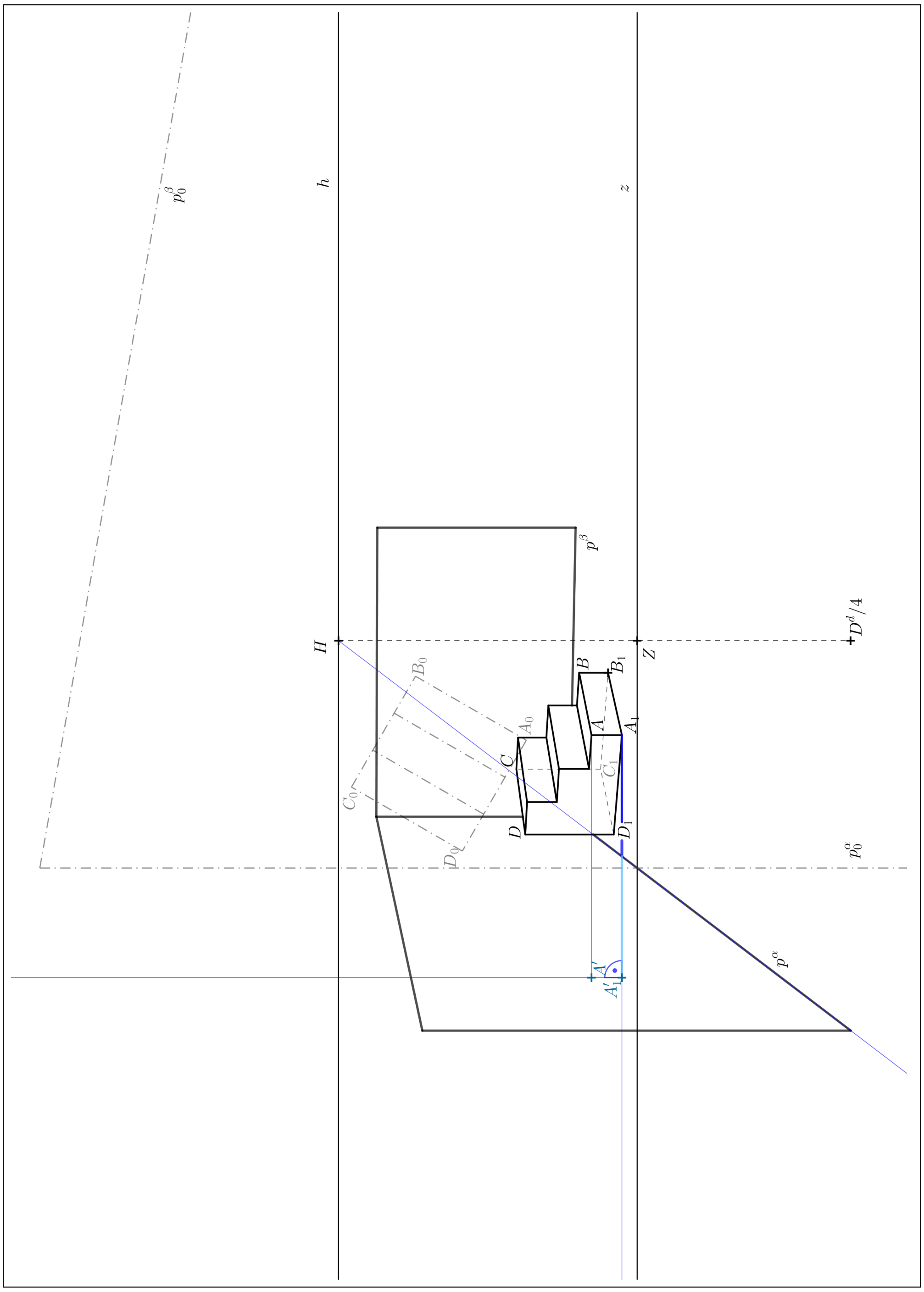
Obrázek 3.40: Příklad 11 – zadání.

Řešení

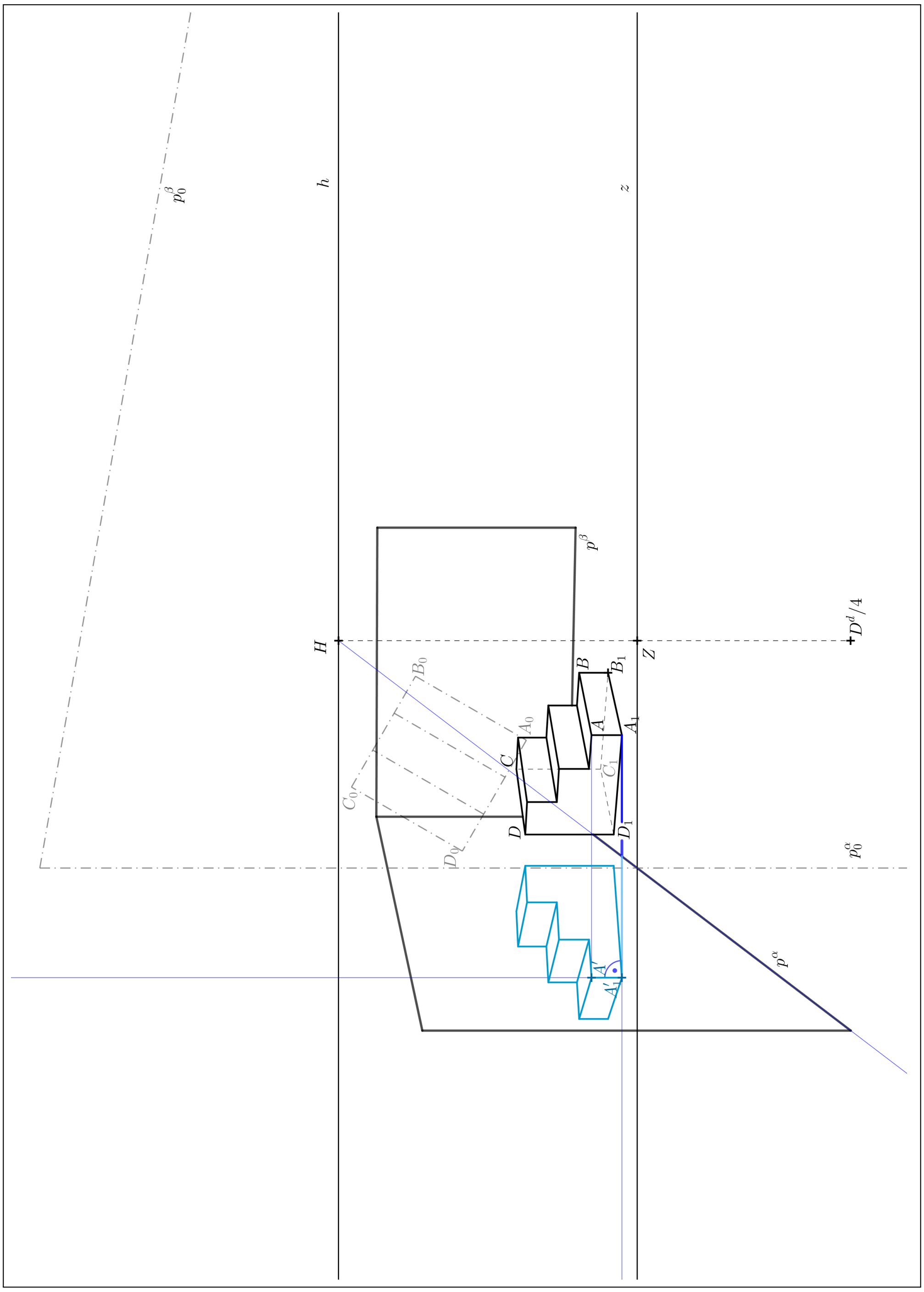
Názornou představu o poloze rovin získáme z otočených půdorysných stop. Rovina α je kolmá k základní rovině a zároveň k průmětně (viz. kapitola 2.3.2). Postup pro tuto polohu zrcadla je popsán u příkladu 3.3. Na obr. 3.41 je naznačena konstrukce zrcadlového obrazu bodu A podle roviny α. Zrcadlový obraz celého schodiště vidíme na obr. 3.42.

Rovina β je kolmá k základní rovině (viz. svislé zrcadlo kap. 2.3.2). Podrobný postup konstrukce pro danou polohu roviny souměrnosti najdeme u příkladu 3.5. Sestrojíme úběžník normál roviny β (U_n^β) pomocí něhož dohledáme zrcadlový obraz bodu (bod B', obr. 3.43). Sestrojíme zrcadlový obraz celého schodiště podle roviny β (obr. 3.44).

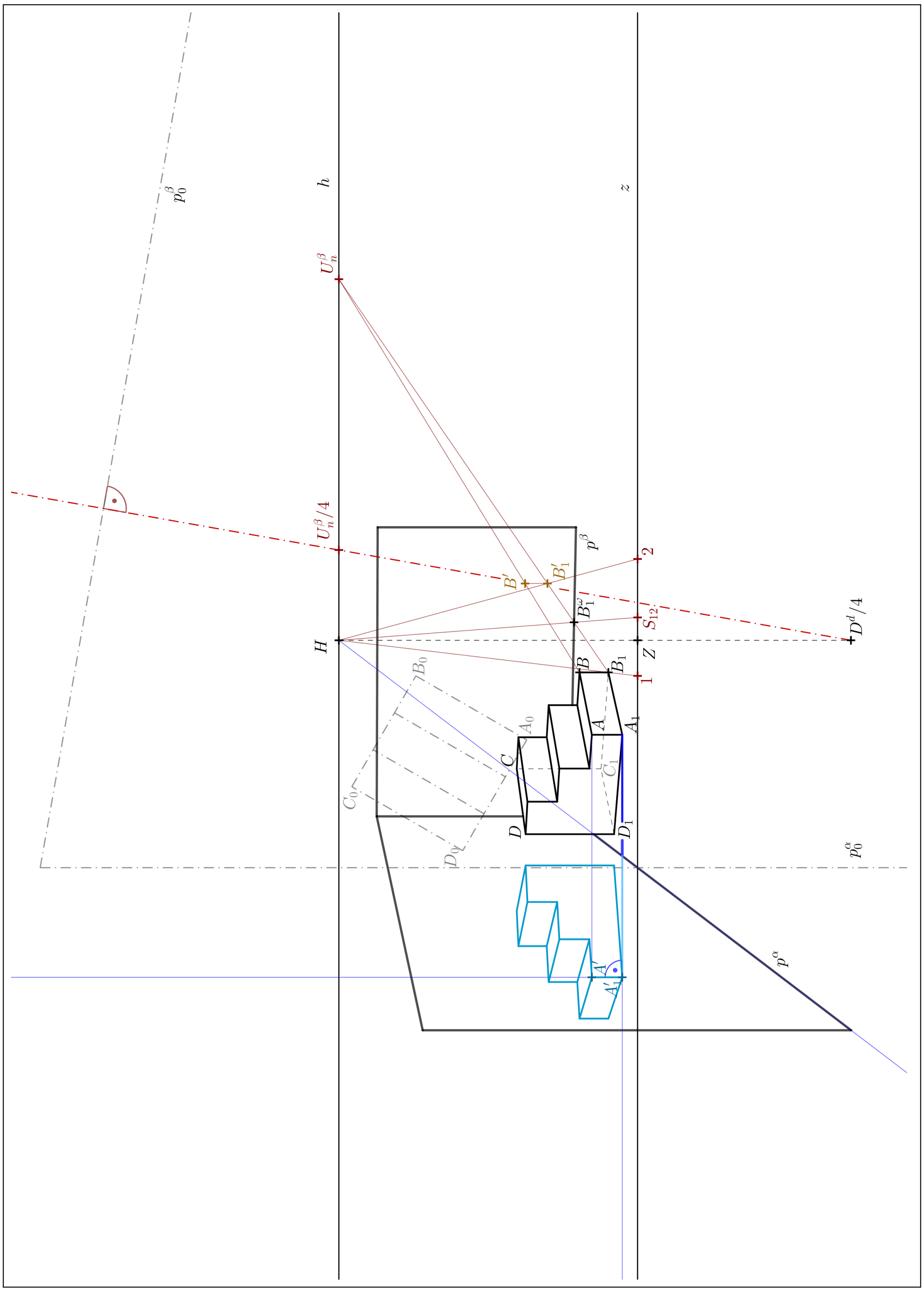
Zrcadlové obrazy v rovinách α a β se však také dále zrcadlí v opačném zrcadle. Střídavě zrcadlíme obrazy schodiště stále dokola, dokud jsou zrcadlená schodiště viditelná v obdélnících zrcadel. Celkové řešení příkladu je znázorněno na obr. 3.45.



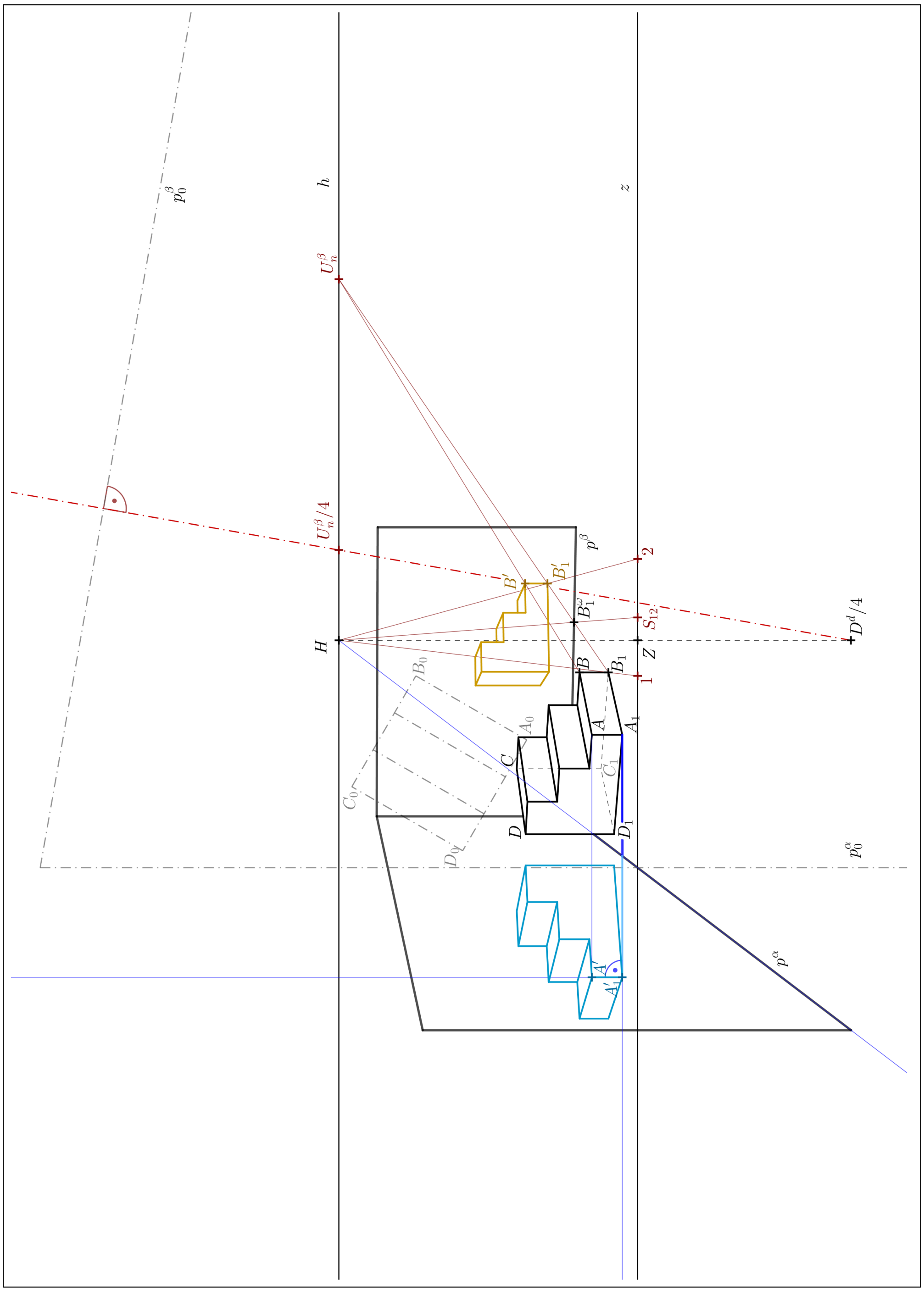
Obrázek 3.41: Příklad 11 – řešení.



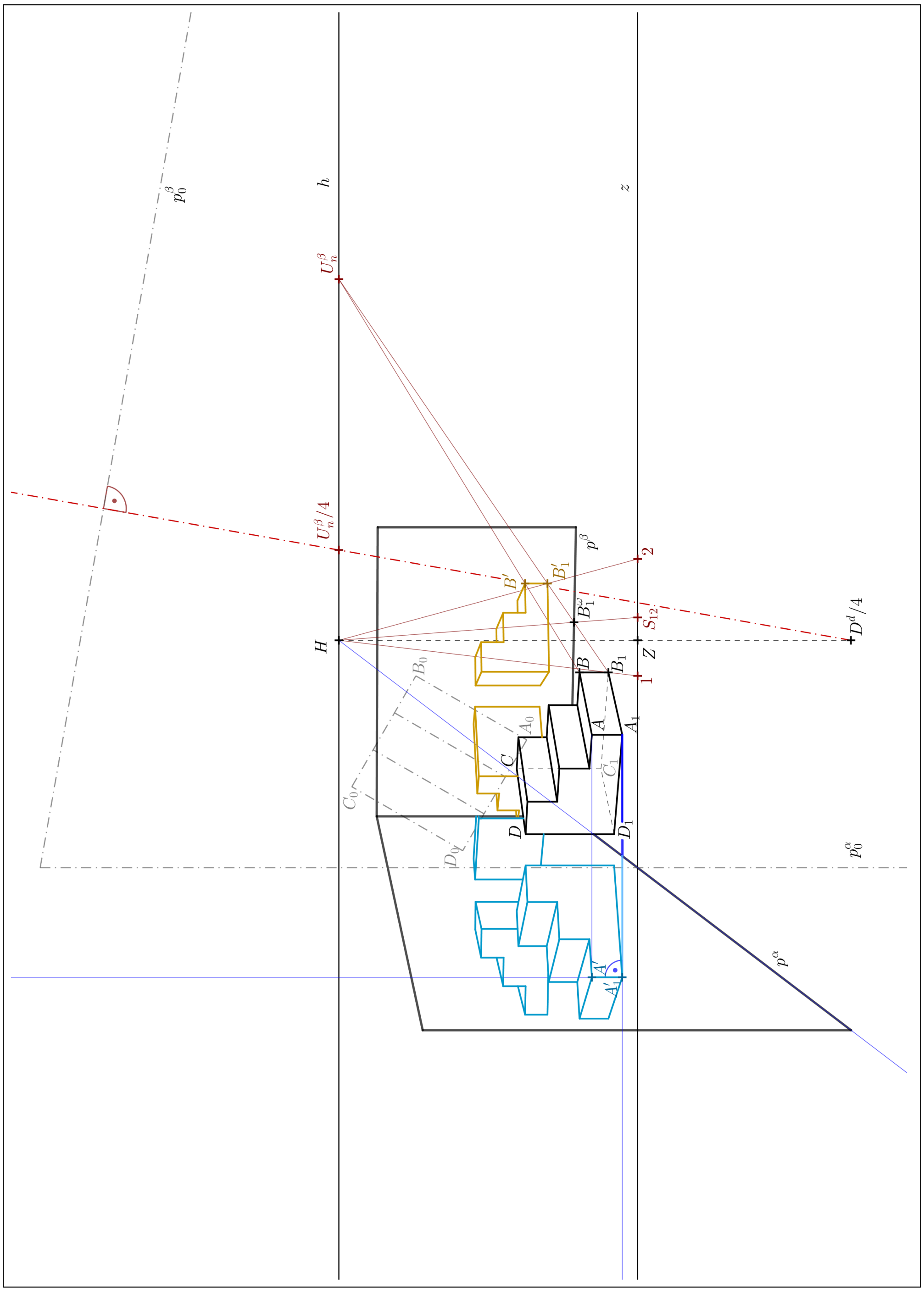
Obrázek 3.42: Příklad 11 – řešení.



Obrázek 3.43: Příklad 11 – řešení.



Obrázek 3.44: Příklad 11 – řešení.



Obrázek 3.45: Příklad 11 – řešení.

4. Ukázky zrcadlení

Se zrcadlením se v běžném životě setkáváme snad každý den. Typickým příkladem vodorovného zrcadla je odraz na vodní hladině (obr. 4.1, obr. 4.2, obr. 4.3, obr. 4.4, obr. 4.5).

Svislé zrcadlo je dnes již téměř nezbytným vybavením každé domácnosti. Jen málokterá koupelna nemá zrcadlo umístěné nad umyvadlem, často bývá zrcadlo také v ložnicích a předsíních. Samozřejmostí jsou pro nás rovněž zrcadla v obchodních domech, ať už v obchodech s oblečením, brýlemi, či sportovním vybavením. Také ale dennodenně vídáme zrcadlící plochy, kterým většinou nevěnujeme sebemenší pozornost. Příkladem je zrcadlový obraz eskalátoru ve skleněném zábradlí (obr. 4.6).

V některých obchodech také můžeme vidět zrcadlo šikmé. Používáme jej například při zkoušení nových bot. I malé šikmé zrcadlo umístěné ve správné poloze umožní spatřit zrcadlový obraz vlastních bot, aniž bychom se museli ohýbat. Občas vidíme v obchodě zrcadlo umístěné nade dveřmi či nad pokladnou. Jedná se o bezpečnostní zrcadlo, které slouží pro dohled nad zákazníky (obr. 4.7). Většinou je v šikmé poloze a často bývá též vypouklé. V takovém případě není zrcadlo částí roviny, ale částí jiné plochy. Typicky se setkáme se zrcadlem parabolickým, které má tvar rotačního paraboloidu či hemisférickým, tvaru koule. Vypouklého zrcadla se využívá mimo jiné i v dopravě. Parabolická zrcadla jsou umísťována na nepřehledných křižovatkách a v hromadné dopravě slouží zrcadla řidičům pro dohled nad cestujícími.

Obrázek 4.1: Nábřeží Chrudimky.

Obrázek 4.2: Winternitzovy mlýny.

Obrázek 4.3: Letadlo, foto Duspivová Jiřina.

Obrázek 4.4: Park Na Špici.

Obrázek 4.5: Kamenný oblouk.

Obrázek 4.6: Eskalátor.

Obrázek 4.7: Bezpečnostní parabolické zrcadlo. Zdroj: [5].

V některých situacích si může zrcadlo zahrávat s našimi smysly. Na obrázku 4.8 vidíme jízdní kolo, jehož zadní kolo je značně deformované. Jeho zrcadlový obraz na vodní hladině se ovšem zdá být zcela pravidelný. Takto „dokonalý“ tvar má však odraz pouze z pohledu, který vidíme na fotografii. Pokud bychom se na situaci podívali z jiného místa, obraz na vodní hladině by měl jiný tvar.

Obrázek 4.8: Rozbité, či nerozbité kolo. Zdroj: [6].

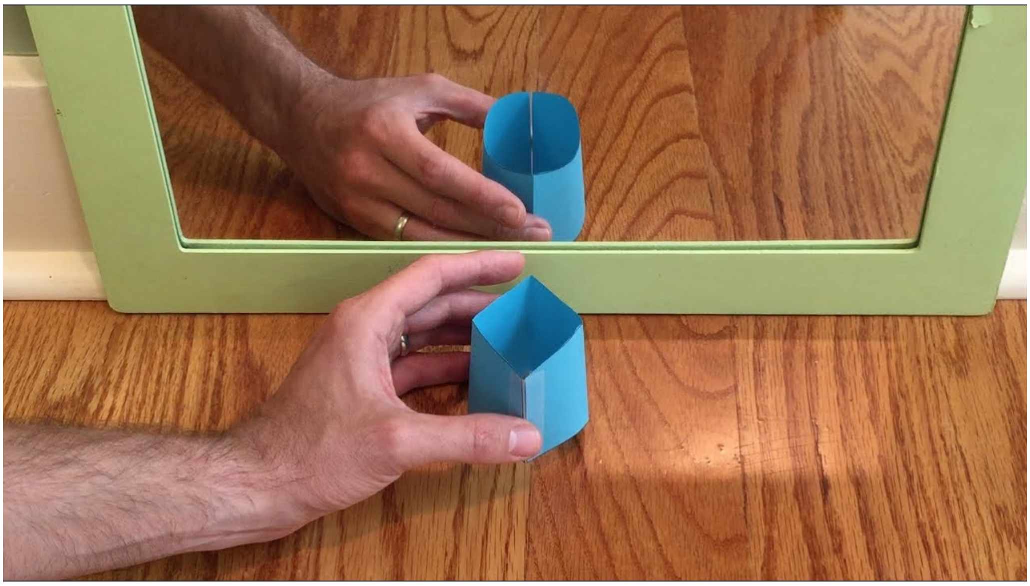
Alespoň na jeden zrcadlový exponát narazíme také snad v každém muzeu smyslů. Na obr. 4.9 vidíme stůl na němž leží hlava. Dívka, jejíž hlavu na stole vidíme, je však skryta pod stolem. Její tělo nevidíme, protože po stranách stolu jsou umístěna dvě zrcadla, která vytváří iluzi prázdného prostoru pod stolem.

Na obr. 4.10 je další objekt z muzea smyslů. Postava jedné ženy je částečně skryta za rovnoměrně rozmístěnými pásy zrcadel v nichž se zrcadlí druhá žena. Celkový obraz představuje lidskou postavu, která je kombinací dvou skutečných osob stojících na opačných stranách zrcadel.

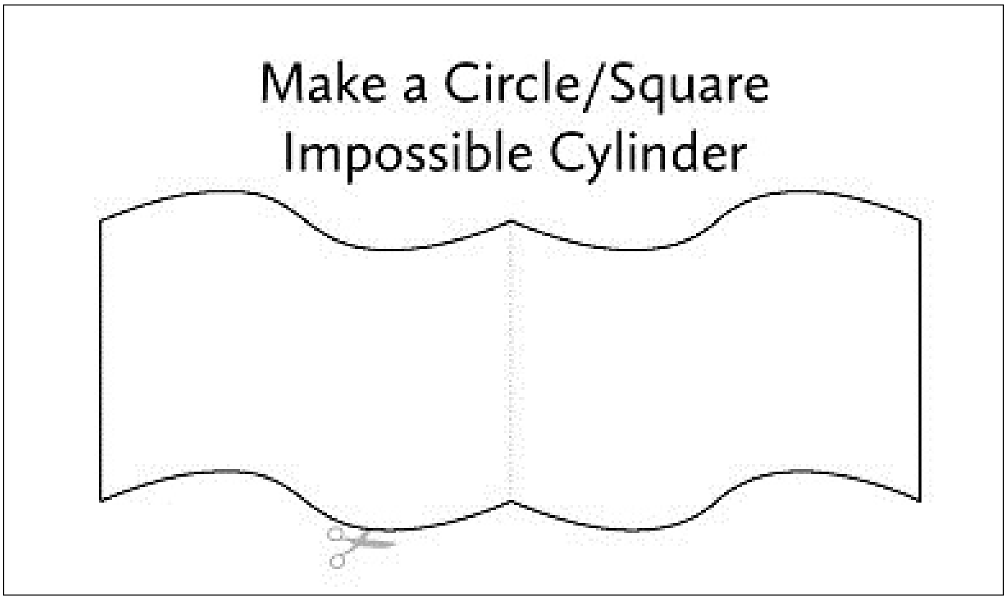
Modrý předmět na obr. 4.11 zhotovený z papíru, který je umístěn před zrcadlem, se zdá být částí pravidelné čtyřboké hranolové plochy. Jeho zrcadlový obraz však vypadá jako část rotační válcové plochy. Hraniční křivka, která se zdá být v prvním případě hranicí čtverce a v opačném případě kružnicí, je ve skutečnosti prostorovou křivkou, což je vidět při pohledu na šablonu na obr.4.12. Tuto iluzi je možné vyhledat pod názvem *Impossible Cylinder*.

Obrázek 4.9: Hlava na talíři. Zdroj: [7].

Obrázek 4.10: Pásy zrcadla. Zdroj: [8].



Obrázek 4.11: Neskutečný válec. Zdroj: [9].



Obrázek 4.12: Šablona. Zdroj: [10].

Závěr

Hlavním cílem práce bylo vytvořit sbírku příkladů k tématu zrcadlení v lineární perspektivě. Úvodní kapitola obsahuje vysvětlení základních pojmů, se kterými se setkáváme v lineární perspektivě a objasnění principu tohoto promítání. Následující kapitola zahrnuje popis principu zrcadlení (rovinové souměrnosti), objasnění konstrukce zrcadlového obrazu a následně vysvětlení postupu konstrukce zrcadlových obrazů v lineární perspektivě pro vodorovné, svislé a šikmé zrcadlo. Sbírka obsahuje příklady pro všechny základní polohy roviny zrcadla. Ke každému příkladu byl rovněž vytvořen krokovaný postup řešení, který je k práci přiložen ve formě PDF souborů a appletů vytvořených v softwaru GeoGebra. V závěrečné kapitole byl princip zrcadlení demonstrován na zajímavých situacích z běžného života.

Literatura

[1] Pomykalová, Eva. *Matematika pro gymnázia – Stereometrie.* 3. vyd. (dotisk). Praha: Prometheus, 2004. ISBN 80-7196-178-7.

[2] Setzer, Ota. *Deskriptivní geometrie II.* 3. dop. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1980.

[3] Kadeřávek, František, Josef Klíma a Josef Kounovský. *Deskriptivní geometrie.* Díl 1. 3. vyd. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1946.

[4] Piska, Rudolf a Václav Medek. *Deskriptivní geometrie I.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1966.

Zdroje převzatých obrázků

[5] [Zrcadlo]. In: *zrcadlabezpecnostni.cz* [online]. [cit. 2019-07-11]. Dostupné z: http://www.zrcadlabezpecnostni.cz/fotky34343/fotos/_vyr_13DMC_0007.jpg

[6] [Rozbité, či nerozbité kolo]. In: *Imgur.com* [online]. [cit. 2019-07-11]. Dostupné z: https://i.imgur.com/H9jSDWl.jpg

[7] [Hlava na talíři]. In: *Travel Chameleon* [online]. [cit. 2019-07-11]. Dostupné z: https://www.travelchameleon.net/wp-content/uploads/2019/04/Illusions-Museum-Head-768x794.jpg

[8] [Pásy zrcadla]. In: *Travel Chameleon* [online]. [cit. 2019-07-11]. Dostupné z: https://www.travelchameleon.net/wp-content/uploads/2019/04/Museum-Illusions-KL-3-768x863.jpg

[9] [Neskutečný válec]. In: *YouTube.com* [online]. [cit. 2019-07-11]. Dostupné z: https://i.ytimg.com/vi/p5VTqUIBBFE/maxresdefault.jpg

[10] [Šablona]. In: *Jjycjn's Math Storehouse* [online]. [cit. 2019-07-11]. Dostupné z: https://t1.daumcdn.net/cfile/tistory/2475474C57FE73AB15

Seznam obrázků

A. Přílohy

A.1 Krokované řešení příkladů

Krokované řešení bylo vytvořeno v softwaru GeoGebra. Řešení jednotlivých příkladů ve formě appletů jsou dostupná na příslušných odkazech. Na uvedených stránkách jsou rovněž uložena zadání a řešení příkladu ve formátu PDF.

Příklad 1. https://www.geogebra.org/m/znurskah

Příklad 2. https://www.geogebra.org/m/jaq9vwad

Příklad 3. https://www.geogebra.org/m/hfb5ze2w

Příklad 4. https://www.geogebra.org/m/sn8jacns

Příklad 5. https://www.geogebra.org/m/wsbnhqkn

Příklad 6. https://www.geogebra.org/m/w2bue5mf

Příklad 7. https://www.geogebra.org/m/nzewgxk6

Příklad 8. https://www.geogebra.org/m/u9f7mqq4

Příklad 9. https://www.geogebra.org/m/muent9v8

Příklad 10. https://www.geogebra.org/m/qu2fkshc

Příklad 11. https://www.geogebra.org/m/db5ztdas