MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Adam Smetana

Výuka prostorové geometrie na SŠ

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petra Surynková, Ph.D
Studijní program: Tělesná výchova a sport
Studijní obor: Tělesná výchova a sport se zaměřením na vzdělávání – matematika

PRAHA 2018.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 26.9.2018 Podpis autora

Název práce: Výuka prostorové geometrie na SŠ

Autor: Adam Smetana

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petra Surynková, Ph.D

Abstrakt: Tématem této práce je výuka prostorové geometrie na středních školách. Na názorných ilustracích jsou znázorněny základní pojmy prostorové geometrie, rozebírány jsou i modelové situace. Práci tvoří soubor vyřešených a rozebraných demonstrativních příkladů, se kterými se učitel na střední škole může potkat. Všechny řešené příklady jsou podloženy 2D i 3D applety v software GeoGebra pro lepší představivost.

Klíčová slova: výuka, prostorová geometrie, řezy, GeoGebra

Title:Curriculum of solid geometry at czech high schools

Author: Adam Smetana

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Petra Surynková, Ph.D

Abstract: The topic of the bachelor thesis is Curriculum of solid geometry at Czech high schools. All of the basic and advanced terms are explained and shown in simple illustrations. The thesis contains a number of solved examples and excercises that are being taught at Czech high schools. All the examples are supported by 2D and 3D applets in GeoGebra software.

Keywords: curriculum, solid geometry, cross sections, GeoGebra

Na tomto místě bych chtěl poděkovat především vedoucí mé bakalářské práce RNDr. Petře Surynkové, Ph.D za čas, který mi věnovala, jak na dálku při její stáži v Americe, tak po jejím návratu. Její doporučení a rady byly nedocenitelné.

Dále bych chtěl poděkovat své rodině a svým nejbližším za podporu po celou dobu vypracovávání mé práce i v průběhu mého dlouhotrvajícího studia.

Obsah

1. Úvod

Hlavní motivací pro sepsání bakalářské práce na téma výuky prostorové geometrie na středních školách v České republice bylo kromě zmapování českého vyučování prostorové geometrie hlavně shrnutí všech potřebných témat týkajících se konstrukce těles a jejich řezů. Na způsobu výuky prostorové geometrie, zvláště pak volného rovnoběžného promítání a konstrukce řezů, mi nejvíce schází volnost ve volbě pohledu na dané těleso stejně tak způsobu řešení. Sám jsem se ve výuce setkal převážně s levým nadhledem a vztahem osové afinity mezi hranicí řezu a hranicí dolní podstavy. Myslím, že je důležité chápat prostorovou geometrii jako celek a dokázat si poradit i s jinými pohledy, i když procvičení jiných, netradičních pohledů na tělesa, zvláště pak podhledů, může zpočátku žákovi připadat zbytečné a méně přehledné.

V první kapitole teoretické části přibližuji čtenářům ve stručnosti systém českého školství, vysvětluji program vzdělávání a ve stručnosti popisuji rozdělení rámcových vzdělávacích programů dle typu škol. Na jednom příkladu demonstruji hodinovou dotaci a jednotlivé kapitoly týkající se prostorové geometrie.

Na začátku druhé kapitoly definuji základní tělesa, která v práci využívám, a způsob jejich zobrazení do roviny ve volném rovnoběžném promítání. Dále jsem na příkladech uvedl základní polohové vlastnosti přímek a rovin v prostoru i v rovině. Pro jednotlivé příklady jsem vytvořil ilustrace v dynamickém prostředí programu GeoGebra pro jejich lepší pochopení. Na samotném konci kapitoly jsem definoval osovou afinitu a středovou kolineaci, které jsou nezbytné pro řešení vybraných příkladů v praktické části.

Třetí, krátká kapitola, se věnuje prostorové představivosti jako schopnosti, hlavně pak jejímu vztahu k matematickým schopnostem.

V praktické části uvádím nejprve příklady pro rozvoj prostorové představivosti pomocí různých příkladů s využitím pomůcek i bez nich. Dále se věnuji řešení příkladů na řezy těles.

Hlavním přínosem mé práce je podrobné krokované zpracování příkladů různé obtížnosti v dynamickém prostředí, které napomáhá především jedincům s horší prostorovou představivostí. Každý příklad je sestrojen po krocích v rovinném i prostorovém zobrazení, kterým lze libovolně otáčet a pohybovat. Vybrané příklady pokrývají hned několik učebnicových příkladů díky variabilitě jejich pohledů na těleso nebo možnosti měnit zadání. Všechny obrázky využité v mé práci jsem zpracoval

samostatně v dynamickém prostředí programu GeoGebra. Tyto dynamické applety jsou dostupné v mé GeoGebra knize online.
(Smetana, 2018, https://www.geogebra.org/m/mwcv3yve)

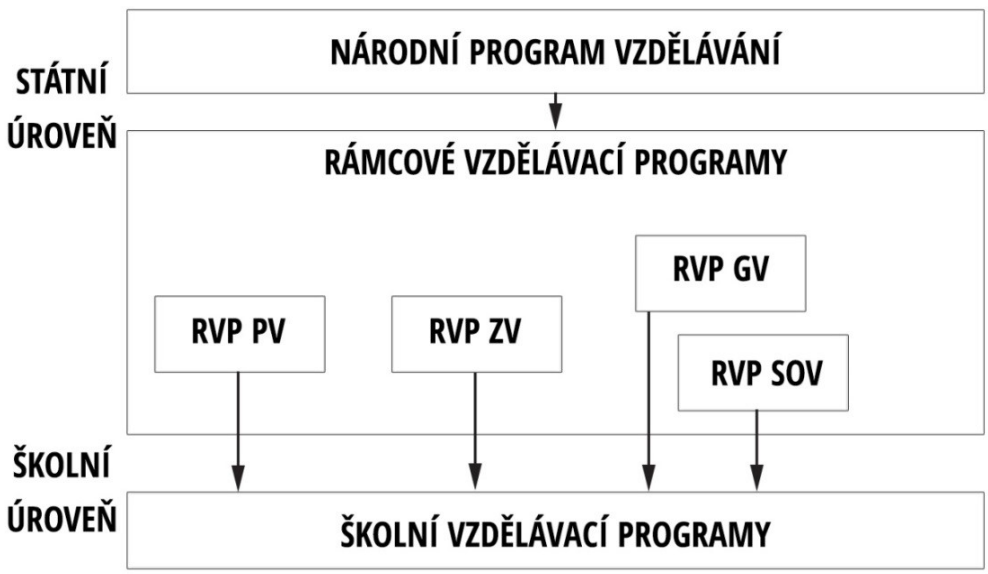
2. Náplň současného vyučování

Náplň vyučování se na českých školách v dnešní době řídí především třemi dokumenty, a to ve dvou úrovních – státní a školní (viz graf 1, převzato z sospo.eu). Státní úroveň představují Národní program vzdělávání (NVP) a rámcové vzdělávací programy (RVP). Školní úroveň zastupuje školní vzdělávací program (ŠVP), který sestavuje v každé škole řada odborníků pro všechny dané předměty, které konkrétní škola vyučuje. Při sestavování ŠVP se školy musí řídit RVP pro daný typ školy. (MŠMT, 2018)

2.1. Rámcový vzdělávací program

Rámcový vzdělávací program vydává Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. Jedná se o obecný dokument, který charakterizuje každou oblast vyučování jako celek. Udává, jakým směrem by se výuka měla ubírat, vytyčuje cíle, kterých by měl žák během svého studia dosáhnout, a objasňuje propojení předmětů mezi sebou. (msmt.cz, 2018)

Rámcový vzdělávací program má několik úrovní odpovídající typu vzdělání (viz graf 1). Pro naši potřebu bude zásadní RVP pro gymnázia a RVP pro školy s odborným vzděláním.



Graf 1 - Systém vzdělávání v ČR

Legenda: RVP PV – RVP předškolního vzdělávání; RVP ZV – RVP základního vzdělávání; RVP G (resp. GSP) – RVP pro gymnázia (resp. se sportovní přípravou); RVP SOV – RVP pro školy s odborným vzděláním

2.1.1. Rámcový vzdělávací program pro školy s odborným vzděláním

Rámcových vzdělávacích programů pro školy s odborným vzděláním je několik desítek, každý obor má svůj RVP. Pro příklad jsme zvolili obor Informační technologie (dále jen IT).

V RVP pro obor IT, stejně jako je tomu v ostatních, uvádí očekávané výstupy žáků a příklady učiva jednotlivých předmětů. Jednotlivé RVP se liší v množství a typu předmětů, případně v obtížnosti a rozsáhlosti látky. V tematickém okruhu stereometrie RVP pro obor IT vyžaduje, aby žáci uměli řešit příklady na vzájemné polohy dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin, určovat odchylky a vzdálenosti, dále je po žácích vyžadováno zvládat určovat povrch a objem základních těles. Tento RVP nestanovuje povinnost vyučovat řezy na tělesech.

2.1.2. Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia je pouze jeden a tím se musí řídit všechna čtyřletá gymnázia a vyšší ročníky víceletých gymnázií. Ohledně tématu stereometrie RVP pro gymnázia určuje, že žák má umět zobrazit hranol a jehlan ve volném rovnoběžném promítání, umí na nich sestrojit rovinný řez a umí řešit planimetrické a stereometrické úlohy motivované praxí. Obecně se nedá říci, že gymnázia mají obsáhlejší výuku matematiky. Např. obor stavebnictví se dotýká matematiky i v jiných předmětech, které se na gymnáziích nevyučují.

2.2. Školní vzdělávací programy

Školní vzdělávací program obsahuje charakteristiku školy, podrobný popis výuky na škole, charakteristiku výuky, učební plán, podrobné učební osnovy všech předmětů a cíle těchto předmětů. ŠVP je sestavován jednotlivými pedagogy nebo pedagogickými radami předmětů na každé škole, je schvalován ředitelem školy a musí být veřejně přístupný. Jedním z hlavních přínosů ŠVP je pro uchazeče, informuje je o používaných pedagogických praktikách na škole, upřesňuje, co se na jaké škole vyučuje, a tím poskytuje možnost porovnání různých škol a výběru nejvhodnější varianty. Pro učitele je velice důležitá návaznost kapitol různých předmětů a jejich načasování v průběhu studia (př. matematika-fyzika, biologie-chemie).

2.2.1. Školní vzdělávací program středních škol

Školní vzdělávací programy různých středních škol o výuce matematiky hovoří různě. Nejvíce záleží na oboru studia na SŠ. Obecně platí, že největší důraz na matematiku mají ekonomické, technické, přírodovědné nebo např. IT obory. Naopak zdravotnické nebo umělecké obory matematiku upozaďují a tomu odpovídá i jejich týdenní hodinová dotace.

2.2.2. Školní vzdělávací programy gymnázií

Na gymnáziích, stejně jako u SŠ, závisí obsáhlost předmětu matematiky na zaměření gymnázia. Obecně platí, že na gymnáziích se ve všeobecně vzdělávacích předmětech (ČJ, Matematika, AJ, Fyzika, Chemie) probírá látka podrobněji než na odborných SŠ.

Pro příklad jsem si vybral gymnázium, kde jsem v roce 2011 sám maturoval. Gymnázium Jaroslava Heyrovského je gymnázium všeobecné, které je nyní fakultní školou Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. (mff.cuni.cz) Na této škole vyučuje matematiku, deskriptivní geometrii a informační technologie moje matka, která úzce spolupracuje s předsedkyní předmětové komise na sestavování tematických plánů pro jednotlivé ročníky gymnázia.

Základy pro řešení příkladů prostorové geometrie jsou na Gymnáziu Jaroslava Heyrovského vyučovány v sextě (6. ročník osmiletého gymnázia). Studentům jsou představeny pojmy orientovaný úhel, všechny goniometrické funkce, které se hned využívají v tematickém okruhu trigonometrie. Dále jsou definovány pojmy, jako jsou přímka, úhel, mnohoúhelníky a základní věty týkající se rovinných útvarů. Na toto téma navazují základní zobrazení – posunutí, středová a osová souměrnost nebo otočení. Všechna tato témata se vyučují postupně od února do června školního roku. Velkou většinu těchto pojmů jsem využil při sestrojování dynamických appletů v programu GeoGebra.

V navazujícím ročníku, septimě, se hned v prvních hodinách matematiky definuje volné rovnoběžné promítání a základní tělesa. Tato témata jsou zahrnuta v teoretické kapitole mé práce. Po definování nezbytných pojmů následuje tematický okruh „body, přímky a roviny v prostoru – jejich polohové vlastnosti, polohové konstrukční úlohy“, kterému se věnuji v druhé části teoretické a v celé praktické části mé práce. Prostorové geometrii se učitelé věnují až do přelomu kalendářního roku, polohové úlohy se vyučují však pouze v prvních dvou měsících školního roku s celkovou dotací 16 vyučovacích hodin.

3. Základní poznatky z prostorové geometrie

V této kapitole předpokládáme znalost základních pojmů, jako jsou bod, přímka nebo rovina, dále definujeme tělesa, uvádíme základní polohové vlastnosti v rovině i v prostoru, citujeme věty potřebné pro konstrukci rovinných řezů a jejich důsledky. K vybraným tvrzením a příkladům jsou přiloženy obrázky z grafického programu GeoGebra, které jsou v dynamické verzi přístupné z mojí GeoGebra knihy Výuka prostorové geometrie na SŠ online.
(Smetana, 2018, https://www.geogebra.org/m/mwcv3yve)

3.1. Geometrická tělesa

Geometrické těleso definuje Polák (2008) jako prostorově omezené souvislé útvary, jejichž hranicí je uzavřená plocha.

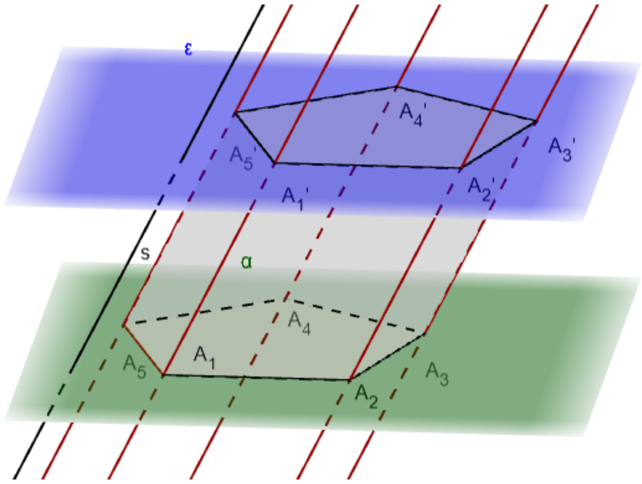
3.1.1. Hranol

K přesné definici hranolu nejdříve potřebujeme vymezit pojem hranolová plocha (Obrázek 1). Je dán konvexní n-úhelník $A_1, A_2, \ldots, A_n$ v rovině α a přímka s různoběžná s rovinou α. Množina všech rovnoběžek s přímkou s protínající hranici n-úhelníku se nazývá **hranolová plocha**. Množina všech přímek rovnoběžných s přímkou s protínající n-úhelník $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se nazývá **hranolový prostor.** Průnik takto daného hranolového prostoru a vrstvy ohraničené různými rovnoběžnými rovinami α a ε se nazývá ***n*-boký hranol**. Průniky tohoto hranolového prostoru s rovinami α a ε jsou n-úhelníky $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, které nazýváme **podstavami** hranolu. Strany podstav hranolu se nazývají **podstavné hrany.** Rovnoběžníky $A_1A_2A'_1A'_2$, $A_2A_3A'_2A'_3$, …, $A_nA_1A'_nA'_1$ se nazývají **boční stěny** hranolu. Strany $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, …, $A_nA'_n$ těchto rovnoběžníků se nazývají **boční hrany** hranolu. Boční stěny a podstavy souhrnně označujeme jako **stěny** hranolu. Sjednocení všech stěn hranolu se nazývá **hranice** hranolu. Body $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1', A_2', \ldots, A_n'$ se nazývají **vrcholy** hranolu. Spojnice vrcholů, které neleží v téže stěně, se nazývají **tělesové úhlopříčky** hranolu. Úhlopříčky jednotlivých stěn se nazývají **stěnové úhlopříčky**.

Hranoly dělíme na kolmé, které mají všechny boční stěny kolmé k podstavám, a kosé, kde boční stěny svírají s podstavami úhel, který není pravý.

Hranol, jehož podstavou je pravidelný n-úhelník, se nazývá pravidelný n-boký hranol. Hranol, jehož bočními stěnami jsou rovnoběžníky, se nazývá **rovnoběžnostěn**.

Kolmý rovnoběžnostěn se nazývá **kvádr**, jehož stěnami jsou obdélníky. Speciální případ kvádru, který má všechny hrany stejně dlouhé, se nazývá **krychle**. (Polák, 2008)

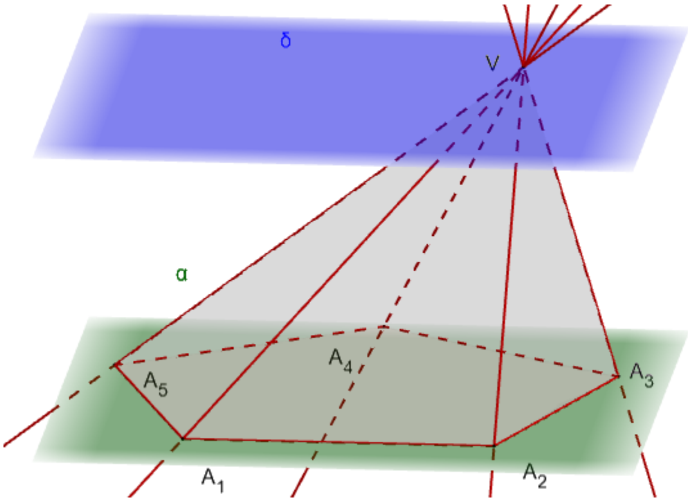


Obrázek 1 – Hranol

3.1.2. Jehlan

Obdobně definujeme jehlan (Obrázek 2). Je dán konvexní n-úhelník $A_1, A_2, \dots, A_n$ v rovině α a bod V, který rovině α nenáleží. Sjednocení všech přímek procházejících bodem V a protínající strany $A_1A_2, \dots, A_nA_1$ n-úhelníka se nazývá **jehlanová plocha**. Sjednocení všech přímek procházejících bodem V protínající n-úhelník $A_1, A_2, \dots, A_n$ se nazývá **jehlanový prostor.** Průnik tohoto jehlanového prostoru a vrstvy dané rovinami α a δ, kde $\delta \parallel \alpha$ a bod V leží v rovině δ, se nazývá ***n*-boký jehlan**. n-úhelník $A_1, A_2, \dots, A_n$ se nazývá **podstavou** jehlanu. Stranám podstavy se říká **podstavné hrany**. Trojúhelníky $A_1\ A_2\ V, \dots, A_n\ A_1\ V$ se nazývají **boční stěny** jehlanu, jejichž strany $A_1V, A_2V, \dots, A_n\ V$ jsou **boční hrany** jehlanu. Bod V se nazývá hlavní vrchol jehlanu, body $A_1, A_2, \dots, A_n$ se nazývají **vrcholy podstavy** jehlanu. Boční stěny a podstavu souhrnně nazýváme stěnami jehlanu. Sjednocení všech stěn jehlanu je **hranice** jehlanu. Vzdálenost hlavního vrcholu od podstavy se nazývá výška jehlanu.

Jehlan, jehož podstavou je pravidelný n-úhelník, se nazývá **pravidelný *n*-boký jehlan**. (Polák, 2008)

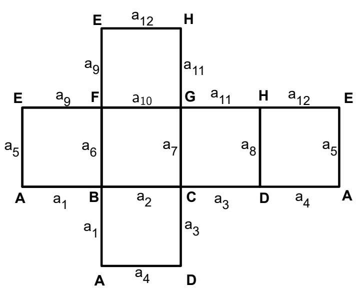


Obrázek 2 – Jehlan

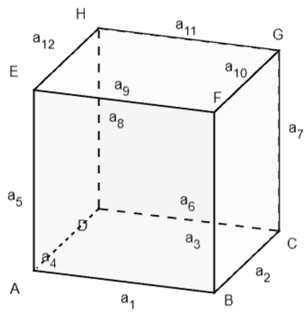
3.1.3. Sítě těles

Při vyučování je nejnázornější využití fyzického modelu těles. K vytvoření papírových modelů těles je potřeba znát pojem síť tělesa. **Síť tělesa** získáme rozvinutím všech stěn tělesa do roviny jedné stěny. Martínková (2014) tvrdí, že pokud lze z obrazce *U* složit povrch mnohostěnu *M* tak, že se po složení žádné části obrazce *U* nepřekrývají a zároveň nevznikne žádná nepokrytá část mnohostěnu *M,* pak *U* je sítí mnohostěnu *M*.

Na obrázku 3 vidíme jednu možnou síť pro krychli, na obrázku 4 vidíme, jak by tato síť vypadala složená. Na obou obrázcích jsou pojmenovány vrcholy a hrany krychle.



Obrázek 3 – Síť krychle



Obrázek 4 – Složená krychle

3.2. Polohové vlastnosti

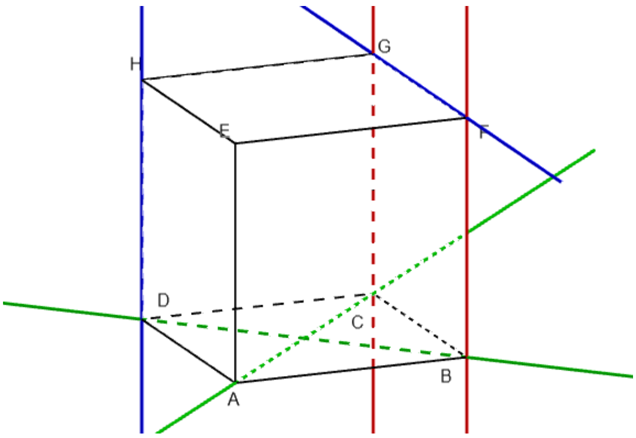
Důležitým vztyčným bodem pro porozumění prostorové geometrie je znalost vzájemných poloh bodů, přímek a rovin.

3.2.1. Vzájemná poloha dvou přímek

V rovině existují pouze dvě varianty vzájemné polohy dvou přímek. *Různoběžné přímky* (obrázek 5, zelené přímky) mají společný právě jeden bod, kterému říkáme průsečík, značíme je $a \times b$. Druhou variantou jsou *přímky rovnoběžné*, které můžeme rozlišit na *rovnoběžky různé* (obrázek 5, oranžové přímky), které nemají žádný společný bod ($a \parallel b$), nebo *totožné*, které mají všechny body společné ($a = b$).

V prostoru existuje třetí poloha dvou přímek – *přímky mimoběžné* (obrázek 5, modré přímky), které neleží v téže rovině a zároveň nemají žádný společný bod, značíme je $a \not\times b$.

Při vyučování je pro názornost dobré, pokud učitel tyto situace buď sám vymodeluje, nebo nechá žáky, aby sami navrhli možnost, jak všechny tyto situace demonstrovat. Obvykle k jednoduchému příkladu poslouží jako přímky tužky nebo například ukazovátko.



Obrázek 5 – Vzájemná poloha dvou přímek

3.2.2. Vzájemná poloha přímky a roviny

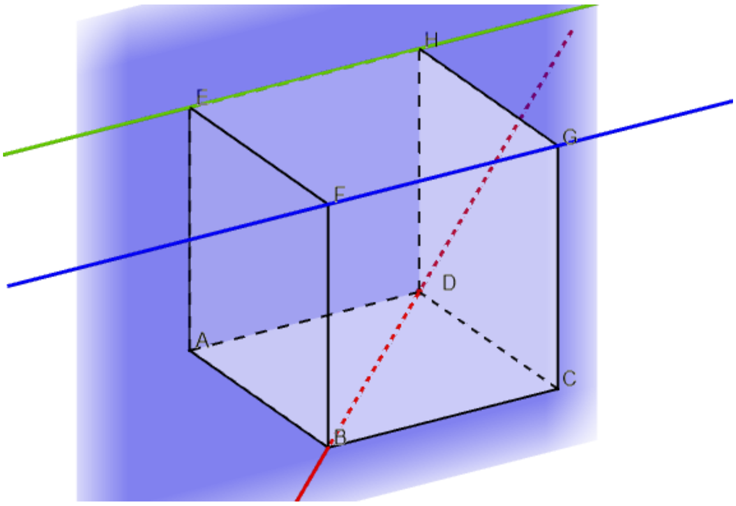
Tři různé polohy určíme počtem společných bodů. Názorně si tyto příklady ukážeme na obrázku krychle se zvýrazněnou rovinou ε stěny *ADHE*.

Žádný společný bod nemá přímka *a rovnoběžná* s rovinou ε, kde každý bod přímky a má konstantní nenulovou vzdálenost od roviny ε Značíme $a \parallel \varepsilon$ (obrázek 6, rovina *ADHE* a modrá přímka).

Jeden společný bod (průsečík) má přímka *a různoběžná* s rovinou ε Přímka a svírá s rovinou ε nenulový úhel. Značíme $a \times \varepsilon$ (obrázek 6, rovina *ADHE* a červená přímka).

Všechny body přímky a společné s rovinou α má pouze přímka, která celá *náleží* rovině ε. Značíme $a \subset \varepsilon$ (obrázek 6, rovina *ADHE* a zelená přímka).

Roviny lze ve třídě demonstrovat například pomocí stěn třídy, křídly tabule nebo vrchními deskami školních lavic.



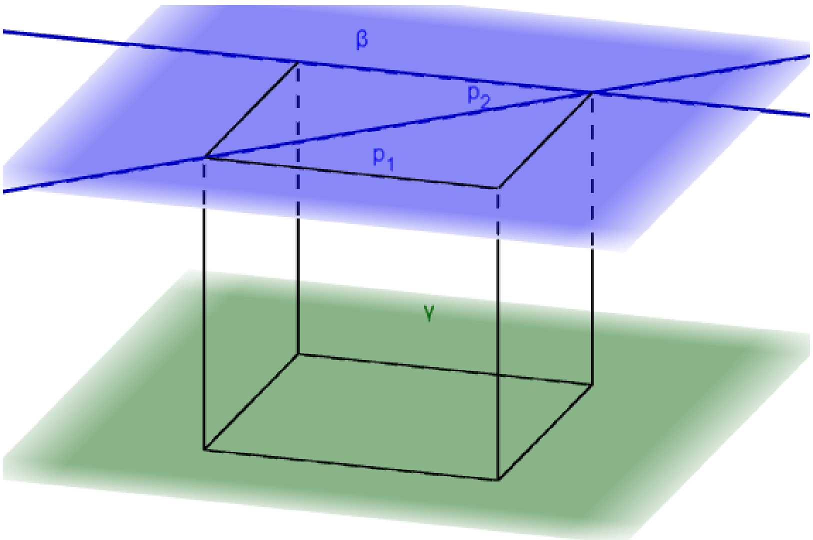
Obrázek 6 – Vzájemná poloha přímky a roviny

3.2.3. Vzájemná poloha dvou rovin

Vzájemnou polohu dvou rovin opět určíme přes množinu společných bodů rovin.

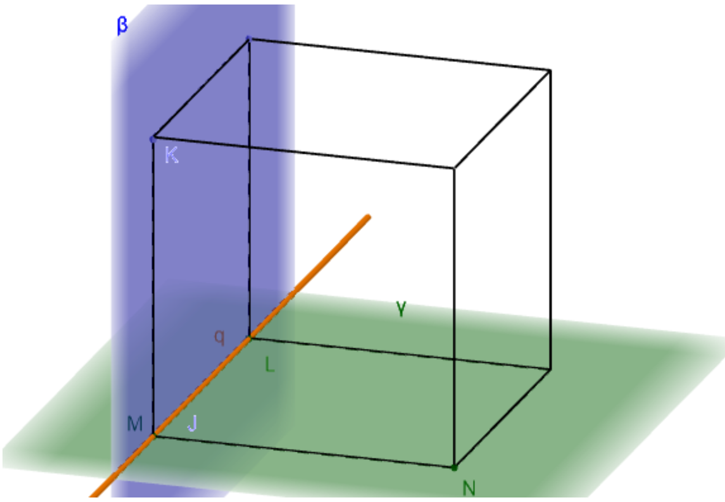
Všechny body společné mají dvě roviny *totožné*. Značíme např. $\alpha = \beta$. (bez obrázku)

Žádný společný bod nemají dvě roviny α a β, které jsou *rovnoběžné*. Podmínkou rovnoběžnosti dvou rovin je existence dvou různoběžných přímek p_1 a p_2 náležících rovině β, které jsou obě rovnoběžné s rovinou α. Značíme $\alpha \parallel \beta$ (obrázek 7).



Obrázek 7 – Vzájemná poloha dvou rovin – dvě rovnoběžné roviny

Pokud mají dvě roviny α a β společný bod a nejsou totožné, mají společnou právě jednu přímku q a mimo ní nemají žádný jiný bod společný. (obrázek 8)

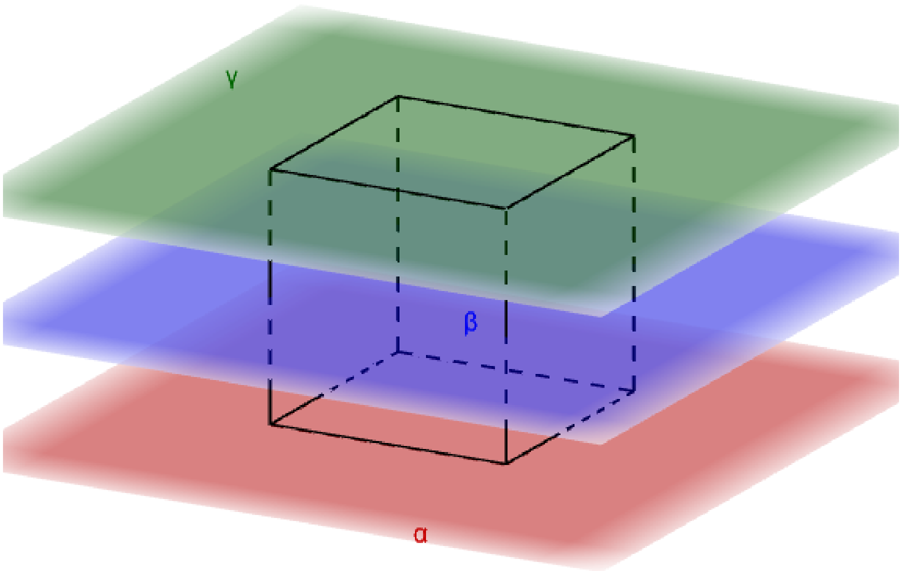


Obrázek 8 – Vzájemná poloha dvou rovin – společná přímka

3.2.4. Vzájemná poloha tří rovin

Tři různé roviny α, β, γ v prostoru mohou určovat tyto množiny bodů. Pro názornost jsem využil různé roviny dané pomocí vrcholů (resp. vrcholů a středů hran) na krychli.

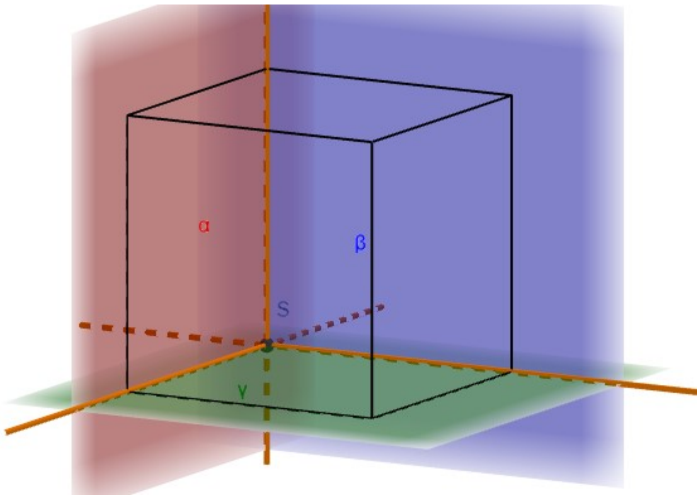
Tři navzájem rovnoběžné roviny nemají **žádný společný bod**. (obrázek 9)



Obrázek 9 – Vzájemná poloha tří rovin – tři rovnoběžné roviny

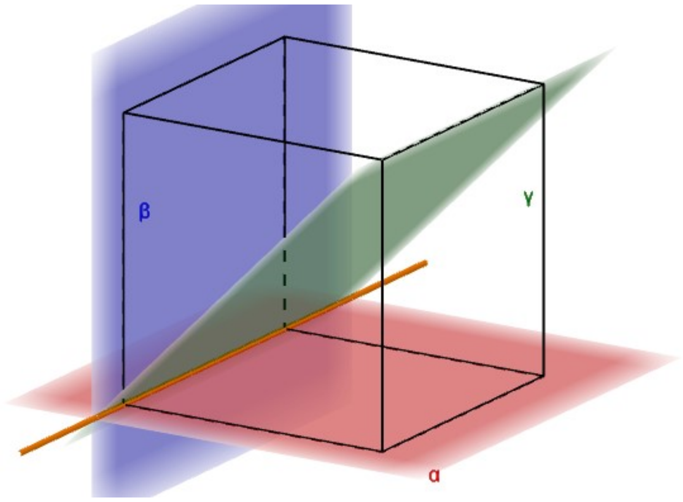
V následujících dvou případech je znázorněnou množinou průnik všech tří rovin.

Právě jeden společný bod mají roviny, kde každé dvě roviny mají společnou právě jednu přímku a všechny tyto přímky se protínají v jednom bodě. (obrázek 10)



Obrázek 10 – Vzájemná poloha tří rovin – právě jeden společný bod

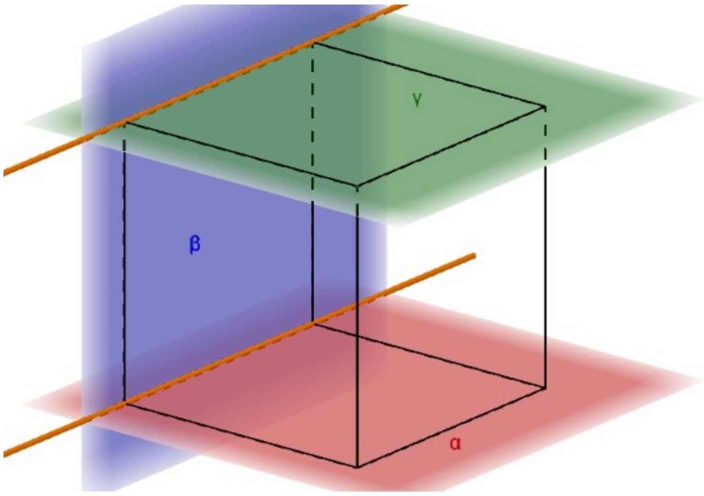
Právě jednu společnou přímku mají roviny, kde každá dvojice rovin jsou roviny různoběžné, určují tedy vždy jednu přímku, která je společná pro všechny roviny. (obrázek 11)



Obrázek 11 – Vzájemná poloha tří rovin – právě jedna společná přímka

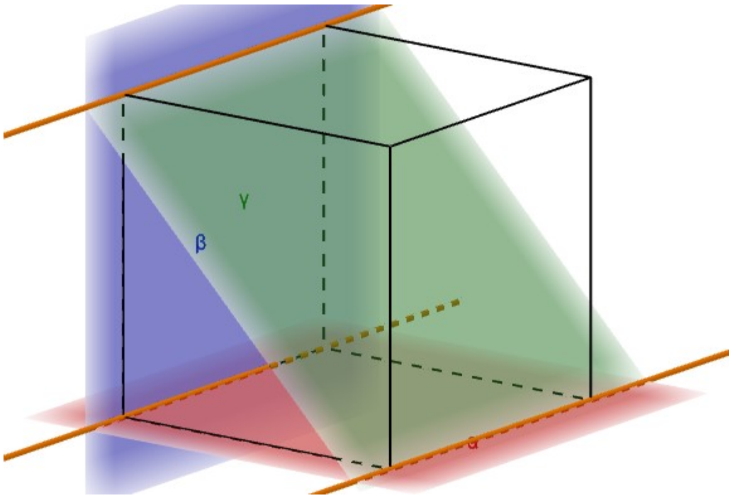
V posledních dvou případech není výslednou množinou průnik všech tří rovin, nýbrž sjednocení průniků všech dvojic rovin.

Pokud jsou dvě roviny rovnoběžné a třetí rovina je obě protíná, je výslednou množinou **dvojice rovnoběžek**. (obrázek 12)



Obrázek 12 – Vzájemná poloha tří rovin – dvě rovnoběžné přímky

Další výslednou množinou jsou **tři rovnoběžky**. Tato situace nastává, když jsou každé dvě roviny různoběžné a jejich průsečnice jsou rovnoběžné různé přímky. (obrázek 13)

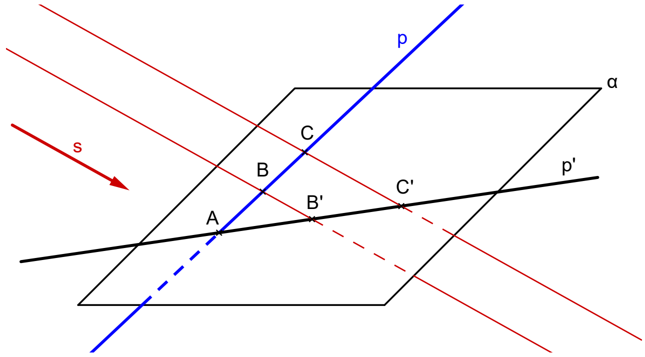


Obrázek 13 – Vzájemná poloha tří rovin – tři rovnoběžné přímky

Existuje řada možností, jak tyto situace modelovat při výuce v běžně vybavené třídě. Jako roviny poslouží sešity, desky, tabule nebo například stěny třídy.

3.3. Volné rovnoběžné promítání

Zobrazováním prostorových útvarů do roviny se zabývá speciální odvětví – deskriptivní geometrie. Pro potřeby středoškolské matematiky postačí velmi názorné volné rovnoběžné promítání (dále jen VRP). VRP je typem promítání na pevně zvolenou rovinu – průmětnu, v určitém směru – směru promítání (obrázek 14). Roviny rovnoběžné s průmětnou se nazývají průčelné roviny. Přímky rovnoběžné se směrem promítání se nazývají promítací paprsky. (Hromadová, 2013)

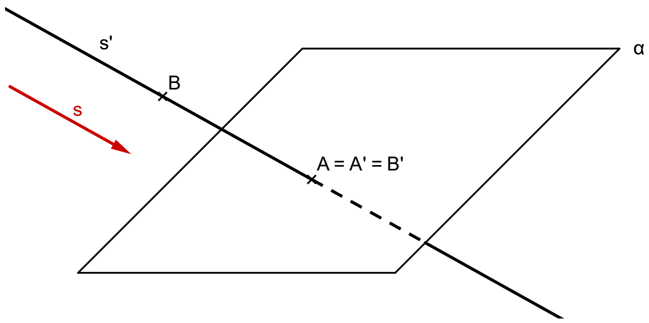


Obrázek 14 – Volné rovnoběžné promítání

Vzorový příklad 1: Zobrazení přímky p, která není rovnoběžná se směrem promítání a protíná rovinu α právě v jednom bodě A, ve VRP do průmětné roviny α:

1. Zvolme libovolný bod B, který leží na přímce p, různý s bodem A. Bodem B vedeme rovnoběžku s' ve směru s. Průsečík tohoto promítacího paprsku s' s průmětnou α je bod B' – obraz bodu B.
2. Body, které leží na průmětně, jsou samodružné. Z obrázku 14 je zřejmé, že bod A splývá se svým obrazem.
3. Body A a B' určují přímku p' – obraz přímky p.

Poznamenejme, že kdybychom zobrazili další body přímky p, například bod C, ve stejném VRP do roviny α, zjistíme, že obraz bodu C, tedy bod C', leží na přímce p. VRP tedy zachovává incidenci.

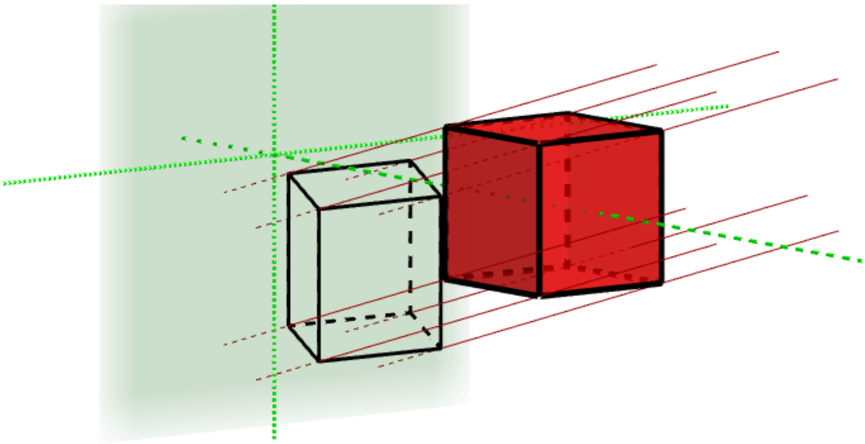


Obrázek 15 – Volné rovnoběžné promítání přímky rovnoběžné se směrem promítání

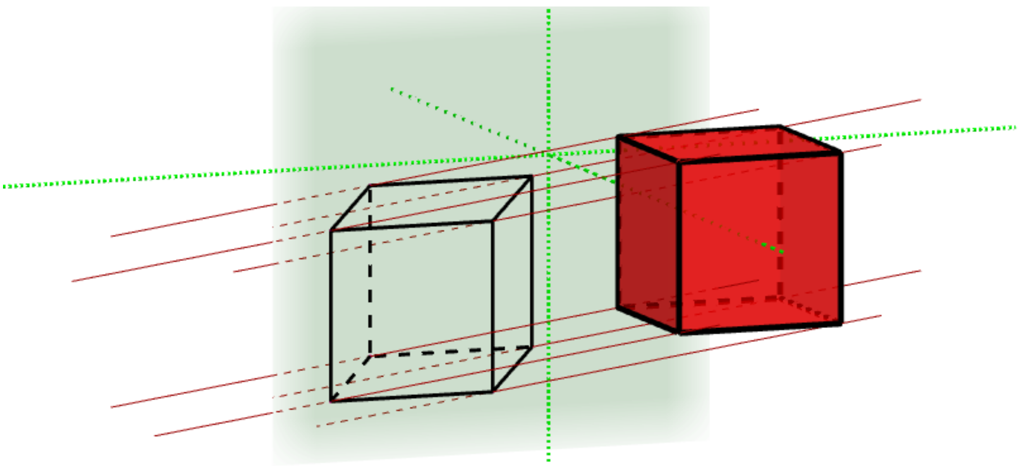
Každá přímka se ve volném rovnoběžném promítání zobrazuje na přímku, když je daná přímka různoběžná se směrem promítání, nebo na bod, když je přímka rovnoběžná se směrem promítání. (obrázek 15). Tato situace demonstruje vzájemnou nejednoznačnost tohoto zobrazení, nejsme tedy schopni z obrazu zpětně získat vzor.

Na obrázku 14 si můžeme rovněž demonstrovat jednu z vlastností VRP, a to zachovávání dělicího poměru. Platí poměr $|AB|/|AC|=|AB'|/|AC'|$.

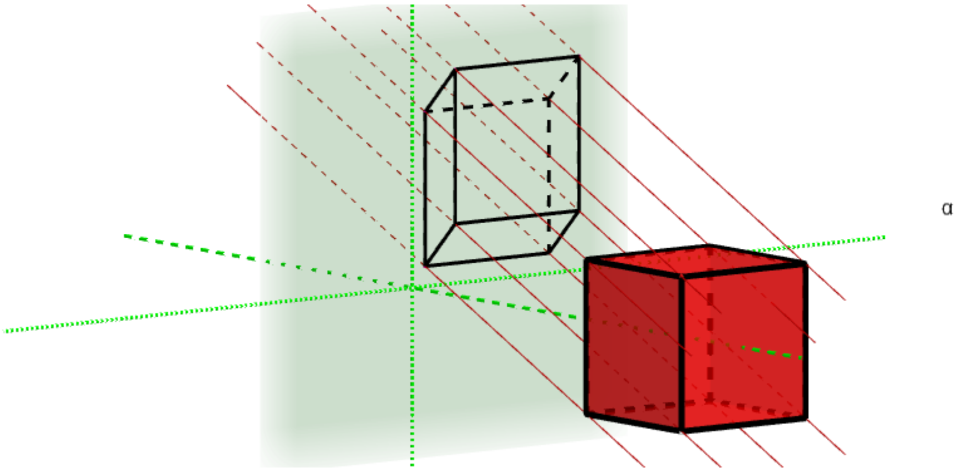
Při zobrazování těles ve VRP se snažíme volit průmětnu a směr promítání tak, aby byl výsledný obrázek co nejnázornější. Při promítání krychle volíme průmětnu obvykle rovnoběžnou s přední stěnou a směr promítání tak, aby byly na obrázku znázorněny obrazy všech stěn, hran a bodů tak, aby všechny body náležely jednoznačně odpovídajícím hranám a žádné dvě hrany nesplývaly. Nejčastěji využívaným je tzv. nadhled zprava, kde jsou viditelné přední, pravá a horní stěna. Přední a zadní stěna leží v průčelné rovině, zobrazují se tedy ve skutečné velikosti. O obraze hran kolmých k průmětně rozhoduje směr promítání a velikost úhlu, který svírá vektor směru promítání s průmětnou. Na obrázcích 16 až 19 vidíme krychle zobrazené ve 4 základních pohledech. Jedná se o VRP krychle do roviny α, promítací paprsky jsou značeny s, pro názornost je zobrazena osa o krychle, která je kolmá k rovině α a přímky náležící rovině α rovnoběžné s hranami krychle, které nejsou kolmé k rovině α.



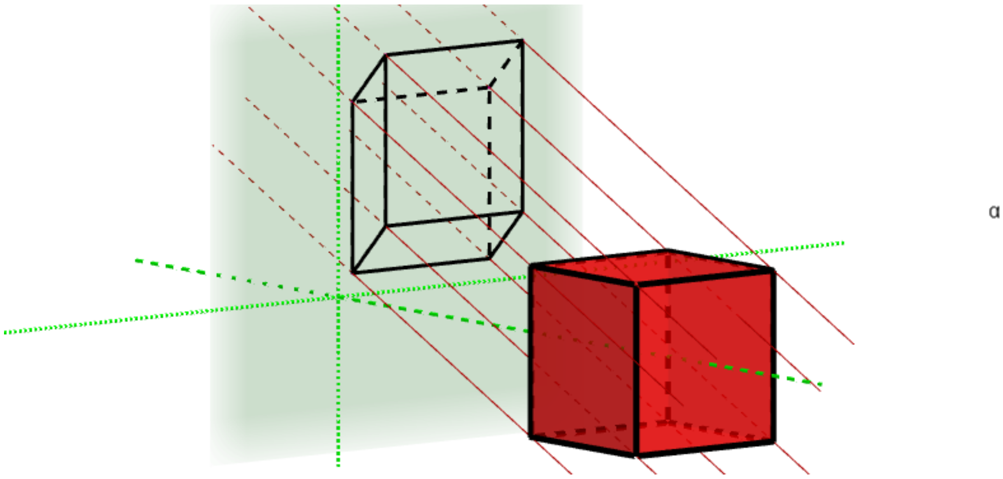
Obrázek 16 – Nadhled zleva



Obrázek 17 – Nadhled zprava

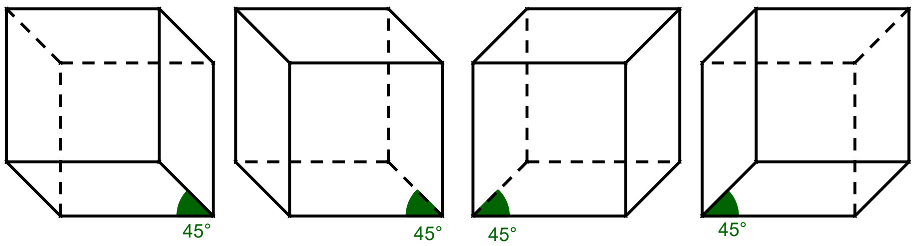


Obrázek 18 – Podhled zleva



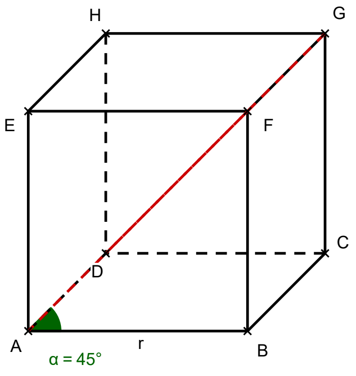
Obrázek 19 – Podhled zprava

Na obrázku 20 jsou obrazy krychle zobrazené na průmětně z obrázků 16 až 19.



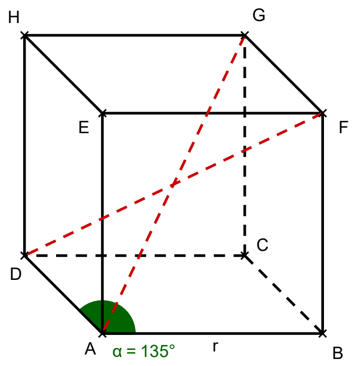
Obrázek 20 – Obrazy krychle ve 4 základních pohledech

U každého příkladu je potřeba, například pomocí náčrtku, vyhodnotit, jaké zobrazení daného objektu je pro daný příklad nejvhodnější. Na obrázku 21 je příklad nevhodně zvoleného pohledu, kde spolu obrazy tělesových úhlopříček AG a DF splývají.



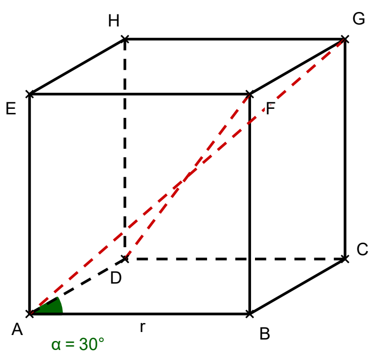
Obrázek 21 – Nevhodné zobrazení

Obrázek 22 je jednou z variant, jak tyto tělesové úhlopříčky zobrazit tak, aby jejich obrazy nesplývaly. Zde jsme zvolili pohled z jiné strany.



Obrázek 22 – Vhodné zobrazení 1 – jiný pohled

Další z možností, jak se vyvarovat splývajících obrazů některých úseček je volba jiného úhlu, který svírají obrazy úseček kolmých k průmětně vzhledem k vodorovnému směru na průmětně (obrázek 23). Tento úhel je na obrázcích 21 až 23 vyznačen.



Obrázek 23 – Vhodné zobrazení 1

Další z proměnných VRP je koeficient q. Koeficient q závisí na úhlu, který svírají promítací paprsky s průmětnou. Na obrázku 21 je zobrazena krychle s délkou hran a. Obraz úsečky BC je dlouhý $a*q$, což znamená, že obrazy úseček kolmých k průmětně jsou násobeny koeficientem q.

Ve většině učebnic (např. Pomykalová, 2009) se volí nejčastěji nadhled zprava, kde se hrany kolmé k průmětně zobrazují pod úhlem $\alpha=45°$ s koeficientem $q=1/2$ (obrázek 20– druhý zprava).

3.4. Konstrukce řezů hranatých těles

Řezem tělesa budeme rozumět průnik roviny řezu s tělesem. Stěžejní pro konstrukci takového řezu je konstrukce průniku roviny řezu s jednotlivými stěnami. Sjednocení těchto úseček je lomená čára, hranice řezu. Důležité pro konstrukci průniků roviny řezu a rovin stěn tělesa jsou tyto věty:

I. Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině.

II. Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina v dvou rovnoběžných přímkách. (obrázek 12)

III. Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto roviny společný jeden bod, prochází tímto bodem i všechny tři průsečnice.

Pro samotnou konstrukci řezů budeme používat především jejich důsledky:

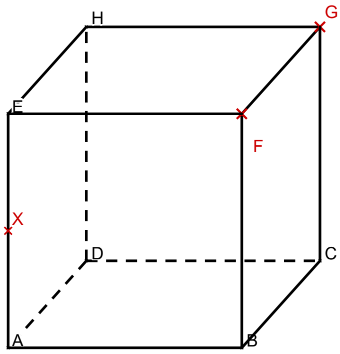
i. Leží-li dva různé body roviny řezu v rovině některé stěny, leží v rovině této stěny i jejich spojnice. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.

ii. Jsou-li roviny dvou stěn rovnoběžné, a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné.

iii. Průsečnice rovin dvou sousedních stěn (tj. stěn se společnou hranou) s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana, se protínají v jednom bodě.

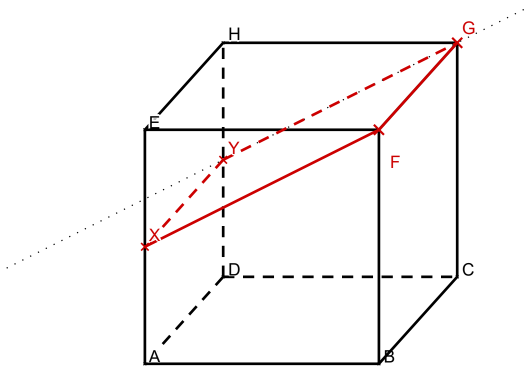
(Pomykalová, 2009, str.39)

Vzorový příklad 2: Na krychli *ABCDEFGH* (obrázek 24) demonstrujeme důsledky *i.* a *ii.*, úkolem je sestrojit hranici řezu krychle *ABCDEFGH* rovinou *XFG.*



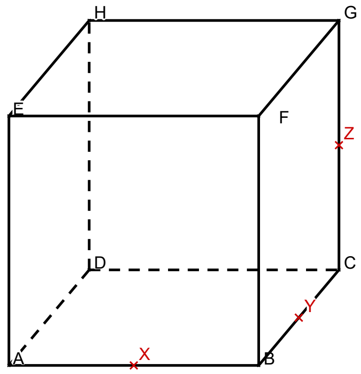
Obrázek 24 – Zadání vzorového příkladu 2

Začněme sestrojením průniku roviny řezu s přední stěnou *ABEF*. *B*ody *X* a *F* leží v jedné rovině, v této rovině tedy leží i jejich spojnice přímka *XF,* a tudíž i úsečka *XF* (důsledek *i*.). Stejný důsledek využijeme pro sestrojení průniku roviny řezu s pravou boční stěnou *BCGF*. Roviny přední a zadní stěny jsou v krychli rovnoběžné, můžeme tedy bodem *G* vést rovnoběžku s úsečkou *XF*, průsečík *Y* této rovnoběžky s hranou *DH* je vrcholem hranice řezu. Úsečky *XY* a *YG* jsou hranicí řezu (důsledky *i*. a *ii*.). Výsledný řez je zobrazen na obrázku 25.



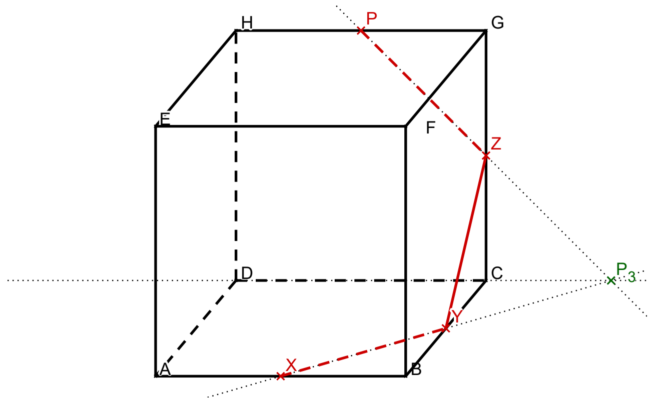
Obrázek 25 – Řešení vzorového příkladu 2

Vzorový příklad 3: Na krychli *ABCDEFGH* (obrázek 26) demonstrujeme důsledek *iii*. Úkolem je sestrojit řez krychle *ABCDEFGH* rovinou *XYZ*.



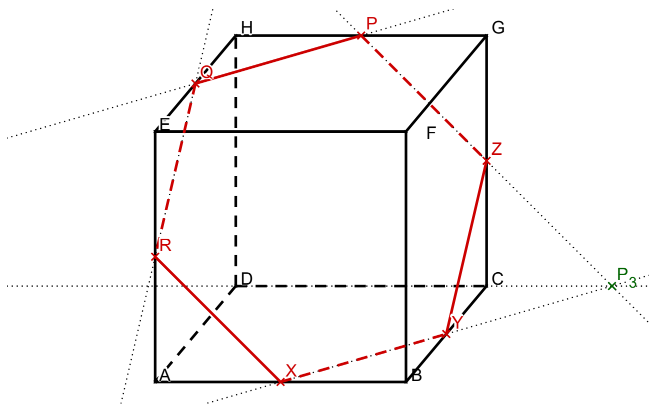
Obrázek 26 – Zadání vzorového příkladu 3

Body *XY* leží v jedné rovině, hranicí řezu je tedy úsečka *XY* (důsledek *i*.). Roviny dolní podstavy *ABCD* a zadní stěny *CDHG* mají společnou hranu, která náleží průsečnici těchto dvou rovin. Rovina řezu *XYZ* a rovina dolní podstavy *ABCD* mají společnou průsečnici, jíž náleží úsečka *XY*. Tyto dvě průsečnice se protínají v jednom bodě P_3, který náleží všem třem rovinám, rovině dolní podstavy, zadní stěny a roviny řezu. Je to jejich jediný společný bod. Jelikož známe v rovině zadní stěny *CDHG* dva body *Z* a P_3, které současně náleží rovině řezu a rovině zadní stěny, můžeme sestrojit jejich průsečnici, které náleží úsečka ZP_3. Průnik přímky ZP_3 s hranou *GH* je bod *P*, vrchol řezu (obrázek 27).



Obrázek 27 – Konstrukce vzorového příkladu 3 – bod *W*

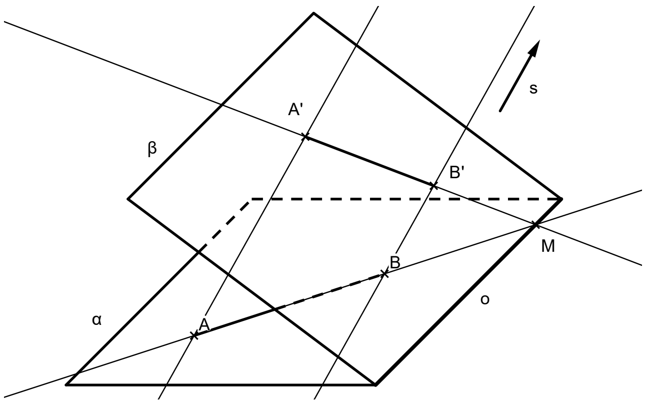
Dále postupujeme s využitím důsledků *i.* a *ii.* Výsledný řez je zobrazen na obrázku 28.



Obrázek 28 – Řešení vzorového příkladu 3

3.4.1. Osová afinita

Je dán bod A, který leží v rovině α, k ní různoběžná rovina β a směr s různoběžný s oběma rovinami. Promítnutím bodu A do roviny β ve směru s, získáme bod A'. Říkáme, že body A a A' jsou ve vztahu osové afinity. Průsečnici rovin α a β nazýváme osou afinity. Z obrázku je patrné, že všechny body osy o jsou samodružné. (obrázek 29) (Križalovič, 1972)



Obrázek 29 – Osová afinita

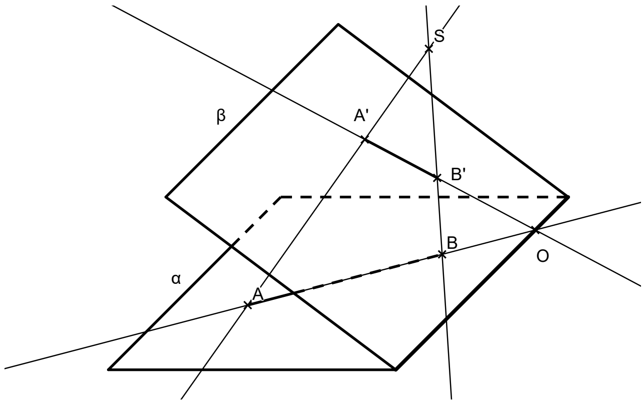
Poznamenejme, že body náležící ose afinity o, jsou samodružné. Pokud přímka náležící rovině α protíná osu afinity o v nějakém bodě, pak i vzor této přímky protíná osu afinity v témže (samodružném) bodě.

Osovou afinitu využijeme při konstrukcích rovinných řezů hranolů. Osou afinity volíme nejčastěji průsečnici roviny řezu s rovinou dolní podstavy a směrem afinity směr hran různoběžných k podstavě. V takto dané afinitě se zobrazí hranice dolní podstavy do hranice řezu.

3.4.2. Středová kolineace

Je dán bod A, který leží v rovině α, k ní různoběžná rovina β a bod S, který neleží ani na jedné z rovin. Promítnutím bodu A ze středu S do roviny β získáme bod A'.

Říkáme, že body A a A' jsou ve vztahu středové kolineace. Průsečnici o rovin α a β nazýváme osou kolineace. Všechny body osy o jsou samodružné. (obrázek 30) (Križalovič, 1972)



Obrázek 30 – Středová kolineace

Poznamenejme, že i u středové kolineace body náležící ose o jsou samodružné. Pokud přímka náležící rovině α protíná osu kolineace o v nějakém bodě, pak i vzor této přímky protíná osu kolineace v témže (samodružném) bodě.

Středovou kolineace budeme využívat při konstrukcích rovinných řezů na jehlanech. Osou kolineace se nejčastěji volí průsečnice roviny řezu a roviny podstavy a jako střed kolineace volíme hlavní vrchol jehlanu. V takto dané středové kolineaci se zobrazí hranice dolní podstavy do hranice řezu jehlanu.

4. Představivost

Prostorová představivost a matematické schopnosti jsou z hlediska kognitivních procesů velmi úzce provázané subjekty. Množství studií prokázalo tuto provázanost na nejrůznějších věkových skupinách pomocí specifických testů, které se zaměřují na jednotlivé schopnosti. Výsledkem těchto studií je fakt, že lidé s lepšími výkony v testech zaměřených na prostorovou představivost vykazují lepší výsledky i v testech matematických schopností. Provázanost představivosti a matematických schopností je jeden z nejzavedenějších výroků, o které se opírá kognitivní psychologie. Přes to není zcela jasné, proč jsou tyto dvě oblasti tak úzce spjaté.

Je třeba vzít v úvahu, že jak prostorová představivost, tak matematické schopnosti jsou pojmy zahrnující množství dalších podkategorií, jednotlivých faktorů, které se společně podílejí na výsledném výkonu v dané oblasti. Všechny tyto faktory společně působí v rámci takzvané obecné inteligence a ovlivňují kognitivní výkon daného jedince. O tom, zda jsou jednotlivé domény obecné inteligence od sebe oddělitelné, vedou autoři zabývající se touto tématikou vleklé spory a jednotlivé názory se dost liší. V současné době se většina z nich kloní k názoru, že prostorová představivost se oddělit dá, stejně jako matematické schopnosti. I samotná představivost je ovlivněna dílčími procesy a faktory, z nichž některé lze izolovaně testovat a rozvíjet. Na konkrétním počtu těchto dílčích procesů se autoři neshodují, starší studie (Carroll, Lohman, Hoffler) mluví o třech podkategoriích:

Prostorová orientace – Schopnost vnímat pozice různých objektů v prostoru, vůči nim vzájemně a vůči pozorovateli

Manipulace v představě – Schopnost manipulovat nebo rotovat zapamatovanými objekty nebo předměty dané scény v představě

Prostorová vizualizace – Schopnost vnímat komplexní prostorové vzory a chápat imaginární pohyby v prostoru

Novější studie zahrnují do prostorové představivosti ještě pojem vizuálně-prostorová pracovní paměť (VSWM – Visuospatial working memory). Tento pojem jako první zmínili Baddeley a Hitch v roce 1974 jako vysvětlení, jak mohou lidé provádět více úkonů zároveň. Popsali tři druhy pracovní paměti: vizuálně-prostorovou, fonologickou a exekutivní kontrolu, z nichž každá má svojí vlastní kapacitu. Novější teorie prostorové představivosti již zahrnuje pět podkategorií, které se do velké míry shodují se starší teorií, víceméně výše zmíněné kategorie specifikuje více podle toho, zda se jedná o statické nebo dynamické procesy:

Zaměření – Schopnost vnímat dané objekty nebo prostorová uspořádání na rozptylujícím pozadí

Prostorová vizualizace – Schopnost skládat dílčí objekty do komplexnějších konfigurací, například převod rovinných objektů do prostorového zobrazení a naopak

Manipulace v představě – Schopnost otáčet rovinné nebo prostorové objekty v představě

Vnímání prostoru – Porozumění abstraktním prostorovým principům, jako je např. vertikalita

Vnímání perspektivy – Schopnost představit si prostředí jako celek z různých pohledů

Všechny tyto podkategorie velmi úzce souvisí s obecnou inteligencí, ale i navzájem mezi sebou. Z hlediska vzdělávání je důležitý poznatek, že trénink prostorové představivosti může být značně obecný ale i přesto efektivní z hlediska zlepšování matematických schopností.

Matematické schopnosti se na rozdíl od představivosti nedají tak snadno rozdělit na podkategorie a podružné procesy. Z psychologického hlediska totiž využíváme různé procesy pro řešení matematicky zdánlivě stejných úkolů. Například pro výčet souboru obsahující méně než 4 objekty používáme jiné procesy než pro výčet rozsáhlejšího souboru. Je ale zřejmé, že i matematické schopnosti jsou provázané s obecnou inteligencí, stejně jako s pracovní pamětí.

Za čistě prostorové schopnosti považujeme manipulaci v představě, vizuálně-prostorovou pracovní paměť (VSWM) a vnímání perspektivy. VSWM hraje významnou roli v učení jednotlivých matematických dovedností jak u malých dětí, tak u dospělých. U dětí má vliv na početní úkoly, rozpoznávání malých čísel či neverbální řešení problémů. U studentů středních škol má vliv na numerické úkoly, ale už menší na verbální schopnosti. Manipulace v představě zahrnuje úkoly požadující například rozeznání stejného objektu v různých orientacích. Provázání této schopnosti s geometrií se přímo nabízí. Kromě toho má tato schopnost vliv i na řešení verbálních problémů. Pro ty zjevně využíváme stejné kognitivní procesy, jako když si představujeme krychli rotující v prostoru. Vnímání perspektivy je schopnost, kterou kromě v geometrii využíváme například i v řešení algebraických důkazů. Dobré vnímání perspektivy totiž poukazuje na určitou prostorovou flexibilitu, která umožňuje vidět rovnost v různých situacích, jako jsou právě různá řešení při algebraickém nebo geometrickém dokazování.

Na rozdíl od ostatních vývojových fenoménů, které se v průběhu života s přibývajícím věkem mění, se vztah mezi matematickými schopnostmi a prostorovou představivostí zásadně nemění. Obě modality se samozřejmě s věkem vyvíjí, ale jejich vztah zůstává prakticky po celý život stejný a to od již velmi útlého věku (cca 4 let).

V názoru, jestli se tréninkem prostorových schopností dají zlepšit i matematické schopnosti, se názory literatury dost liší. Prostorové schopnosti se dají trénovat pomocí nejrůznějších úkonů, které jsou ve vzdělávacím systému známé a využívané. Je ale otázka, do jaké míry se opravdu rozvíjí prostorové schopnosti a do jaké míry se jedinci pouze učí řešit konkrétní úkol, na kterém trénují. Výsledky studií, které toto zjišťovaly, se značně rozcházejí. Efektivita tréninku prostorových schopností se liší jednak u každého jednotlivce, jednak v závislosti na zaměření tréninku a jedince. Většina autorů se ale kloní k názoru, že se prostorová představivost trénovat dá a dají se pomocí toho zlepšit i matematické schopnosti. (Mix, Cheng, 2012)

Především, pokud tréninkové úkoly využívají i některé matematické schopnosti. Používání úkolů rozvíjejících prostorové schopnosti tak má ve vzdělávání své opodstatnění (Bishop, 1980).

5. Soubor úloh

Rozvíjet prostorovou představivost se dá různě. U malých dětí rozvíjíme prostorovou představivost nevědomě už jen tím, že dáme dítěti například hračku do ruky, ta jim po chvíli spadne a dítě se pro ni začne natahovat. Množství procesů, co dítě musí v takové situaci vykonat si dospělý člověk už neuvědomuje.

Snad každý si za svůj život zkoušel slepit nějaký model z papíru, ať už se jednalo o prostou krychli nebo o papírový model nějakého letadla. Takový model musíte v ruce nespočetněkrát otočit, nastudovat ze všech stran a vyhodnotit, kam jaká část skládačky patří. Další velice oblíbenou pomůckou pro rozvoj prostorové představivosti jsou různé skládačky typu Lego.

Ve výuce matematiky se využívají buď drátové modely těles, nebo někteří učitelé zadávají svým žákům za domácí úkol sestrojení a slepení papírového modelu nějakého z jednodušších těles. Pro sestavení takového modelu musíme znát jeho síť, kterým se věnuje první příklad následující kapitoly.

Všechny tyto příklady je možno modelovat buď na PC nebo papírovými či dřevěnými kostičkami, původní záměr však byl, aby si žáci vyzkoušeli tyto příklady řešit pouze v jejich hlavách pro lepší rozvoj prostorové představivosti.

5.1. Úlohy pro rozvoj prostorové představivosti

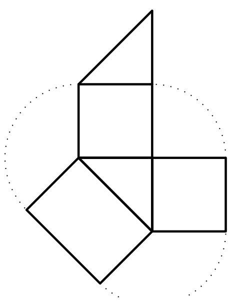
Tato kapitola je souborem úloh pro rozvoj prostorové představivosti, každá úloha má jeden řešený příklad a nejméně jeden neřešený.

Úloha 1: Sítě těles

Zadání úlohy 1:

Rozhodněte, zdali daná síť náleží nějakému tělesu. Načrtněte, jak toto těleso vypadá. Jak se toto těleso nazývá?

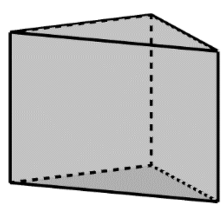
Zadání řešeného příkladu:



Obrázek 31– Zadání řešené úlohy 1

Řešení:

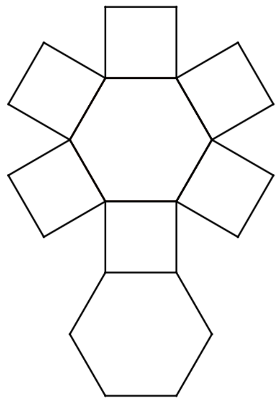
Jedná se o trojboký kolmý hranol.



Obrázek 32 – Řešení úlohy 1

Zadání neřešeného příkladu:

Rozhodněte, zdali daná síť je sítí nějakého tělesa, dané těleso pojmenujte a načrtněte, jak vypadá složené.



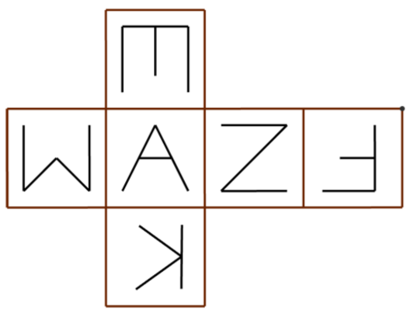
Obrázek 33 – Zadání neřešené úlohy 1

Žáci by měli znát sítě ve výuce nejčastěji používaných těles – krychle, kvádru, trojbokého či čtyřbokého jehlanu. Sítí krychle by žáci měli být schopni sestrojit hned několik.

Úloha 2: Síť krychle s písmeny

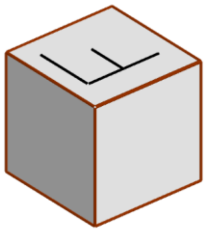
Zadání úlohy 2:

Úloha se sestává ze sítě krychle se znázorněnými písmeny na každé stěně. Úkolem je dokreslit písmena do obrázku složené krychle, kde je vyplněné pouze jedno písmeno.



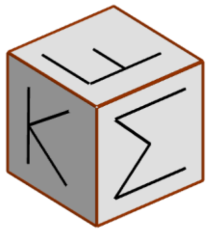
Obrázek 34 – Zadání úlohy 2

Zadání řešeného příkladu:



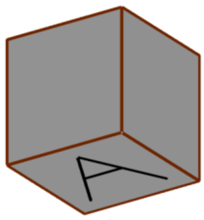
Obrázek 35 – Zadání řešené úlohy 2

Řešení:



Obrázek 36 – Řešení úlohy 2

Zadání neřešeného příkladu:



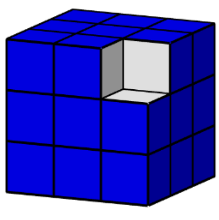
Obrázek 37 – Zadání neřešené úlohy 2

Pro sestavení dalších zadání je možné zvolit jinou síť krychle, písmena zaměnit, promíchat nebo pouze různě otočit. Příklad se dá zadat i naopak, zde je však nutné si pohlídat, aby byli žáci schopni doplnit celou síť krychle. (částečně převzato, Molnár 2009)

Úloha 3: Nabarvená krychle

Zadání úlohy 3:

Představme si krychli sestavenou z malých bílých krychliček. Tuto velkou krychli nabarvíme na modro tak, že stěny malých krychliček, které nejsou viditelné, zůstanou bílé. Teprve po odebrání některé z nabarvených krychliček můžeme pozorovat bílé stěny (obrázek 38). Počet krychliček použitých při sestavování velké krychle je vždy předem dán. Prvním úkolem je spočítat, kolik viditelných stěn (ze všech stran, obrázek musí být jednoznačný) je modrých a kolik stěn je bílých. Druhým úkolem je načrtnout, jak vypadá objekt při pohledu z druhé strany (viz řešený příklad).

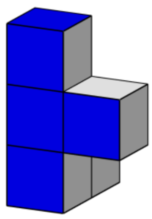


Obrázek 38 – Krychle z úlohy 3

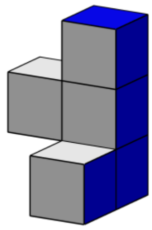
Zadání řešeného příkladu: Původní krychle je složena z 3x3x3 malých krychliček. Kolik viditelných stěn je bílých a kolik je modrých? Načrtněte pohled na tento objekt při pohledu z druhé strany. (obrázek 39)

Řešení:

Je viditelných 11 modrých a 10 bílých stěn.



Obrázek 39 – Zadání řešené úlohy 3

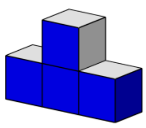


Obrázek 40 – Řešení úlohy 3

Zadání neřešených příkladů:

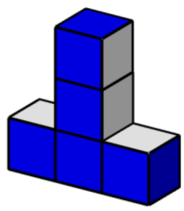
Původní krychle je složena z 3x3x3 krychliček. Řešte všechny výše zmíněné úkoly.

a)



Obrázek 41 – Zadání úlohy 3 a)

b)



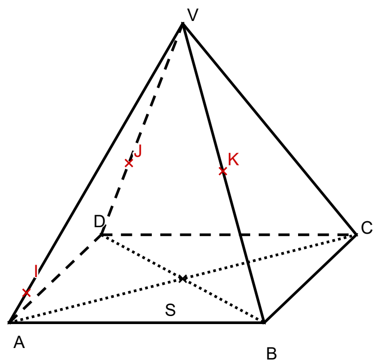
Obrázek 42 – Zadání úlohy 3 b)

5.2. Řezy hranatých těles

V této kapitole jsem připravil sedm příkladů na řezy hranatých těles. Snažil jsem se vyčerpat možnosti, jak mohou být příklady zadány, stejně tak obsáhnout všechna možná tělesa, se kterými se žáci na středních školách potkávají. Některé úlohy jsou sestrojeny z nadhledů, některé z podhledů. Mezi úlohami najdete jehlany i hranoly, tělesa kolmá i kosá. Roviny řezů jsou zadány buď prostě třemi body nebo bodem a přímkou. Rád bych znovu odkázal na mou knihu GeoGebra online, kde je kromě rovinného zobrazení úlohy k dispozici také 3D dynamické znázornění dané úlohy, se kterým lze libovolně otáčet a přibližovat. Všechny níže zmíněné úlohy jsou sestrojeny transparentně tak, aby čtenář přesně věděl, kde se jaký bod vzal. K dispozici je kompletní krokovaná konstrukce. První dva příklady jsou v textu rozebrány po jednotlivých krocích, zbylé příklady jsou po krocích dostupné pouze v GeoGebra knize online.

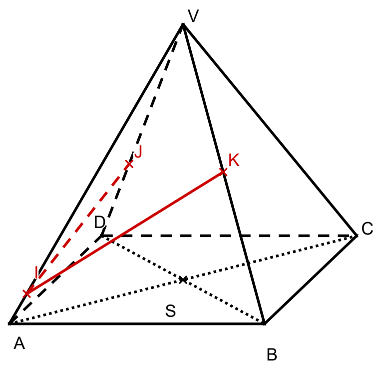
Úloha 4: Řez čtyřbokým jehlanem

Zadání úlohy 4: Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu rovinou *IJK*. Body *I, J, K* jsou po řadě vnitřními body hran *AV, DV* a *BV* (obrázek 43).



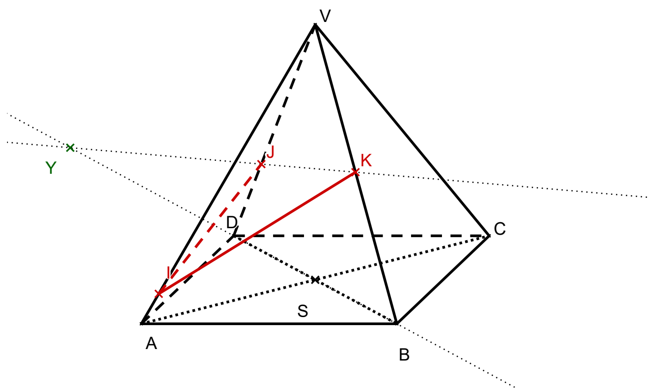
Obrázek 43 – Zadání úlohy 4

Řešení: Body *I, J* a *I, K* leží v jedné rovině, v téže rovině tedy leží i jejich spojnice, hranice řezu (důsledek *i.*). (obrázek 44)



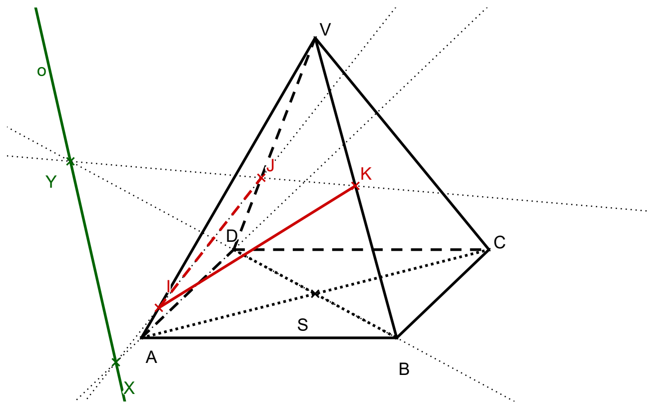
Obrázek 44 – Řešení úlohy 4 – využití důsledku *i*.

Z definice středové kolineace víme, že podstava jehlanu a hranice řezu jsou ve vztahu středové kolineace se středem v bodě *V*. Pro nalezení osy kolineace využijeme průsečík *Y* přímek *BD* a *KJ*. (obrázek 45)



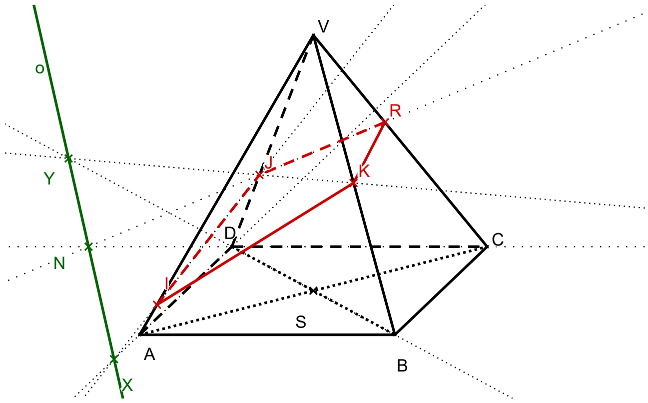
Obrázek 45 – Řešení úlohy 4 – první bod osy kolineace

Obdobně sestrojíme bod *X*, průsečík přímek *IJ* a *AD*. Nalezli jsme dva body *X* a *Y*, které náleží přímce *o* – ose kolineace. (obrázek 46)



Obrázek 46 – Řešení úlohy 4 – osa kolineace

V dalším kroku budeme chtít zobrazit bod *C* ve výše určené středové kolineaci. Pro jeho získání zobrazíme úsečku *CD*. Přímka *CD* má právě jeden bod samodružný, jedná se o bod *N*, který je průsečíkem přímky *CD* a osy *o*. Přímka *CD* se zobrazí do přímky *NJ*, průsečík přímky *NJ* a hrany *CV* označíme bod *R*, další vrchol hranice řezu. Výslednou hranici řezu získáme aplikováním důsledku *i. (*obrázek 47)

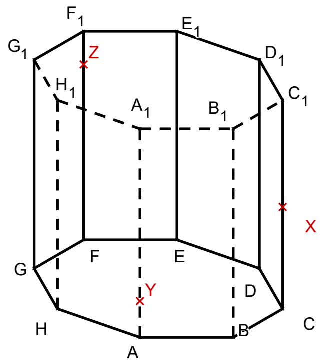


Obrázek 47 – Řešení úlohy 4

V dynamickém prostředí programu GeoGebra je zajímavé sledovat, jak se chová průsečnice *o* roviny řezu a roviny podstavy při posouvání bodů *I, J* a *K* v rámci jejich příslušných hran. Dále je v appletu dostupná i krokovaná prostorová verze tohoto příkladu, která se dá libovolně natočit pro ještě vyšší názornost.

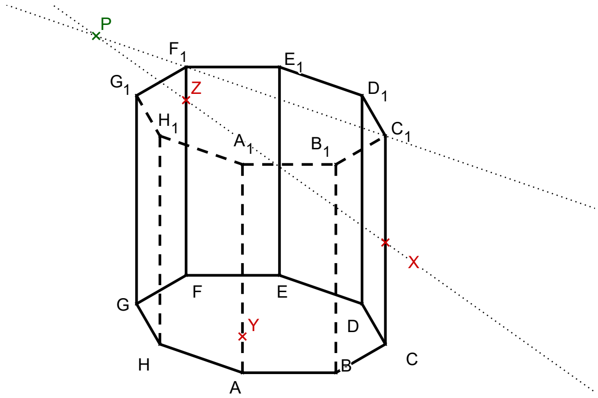
Úloha 5: Řez kolmým osmibokým hranolem rovinou zadanou třemi body

Zadání úlohy 5: Sestrojte řez osmibokým jehlanem $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ rovinou zadanou třemi body X, Y a Z. (obrázek 48)



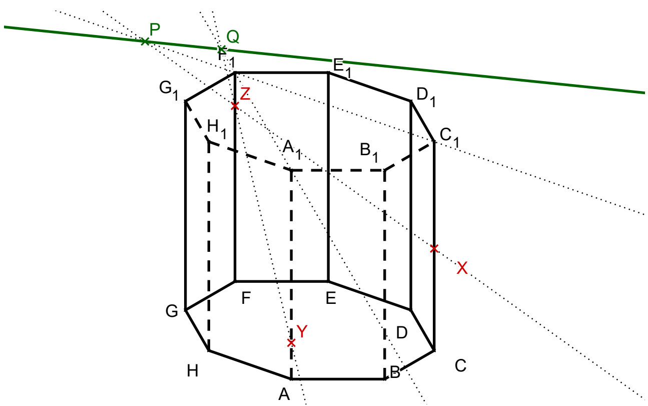
Obrázek 48 – Zadání úlohy 5

Řešení: Předpokládejme, že je mezi hranicí řezu a hranicí horní podstavy afinní vztah. Za směr afinity bereme směr bočních hran. První bod P osy této afinity získáme jako průsečík přímky XZ a přímky C_1F_1. (obrázek 49)



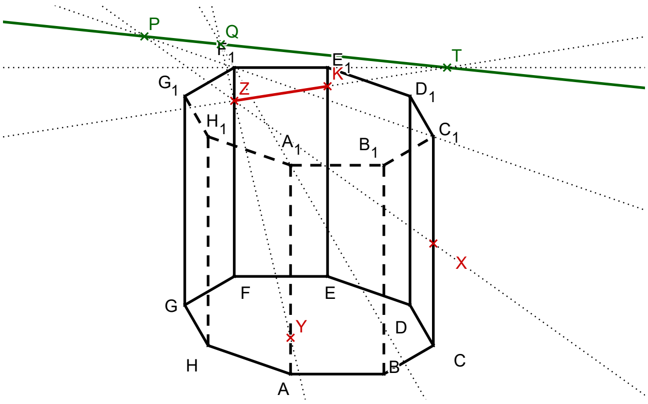
Obrázek 49 – Řešení úlohy 5 – první bod osy afinity

Druhý bod Q osy afinity získáme obdobným způsobem. Bod Q je průsečík přímek YZ a A_1F_1. Sestrojme osu afinity – přímku PQ. (obrázek 50)



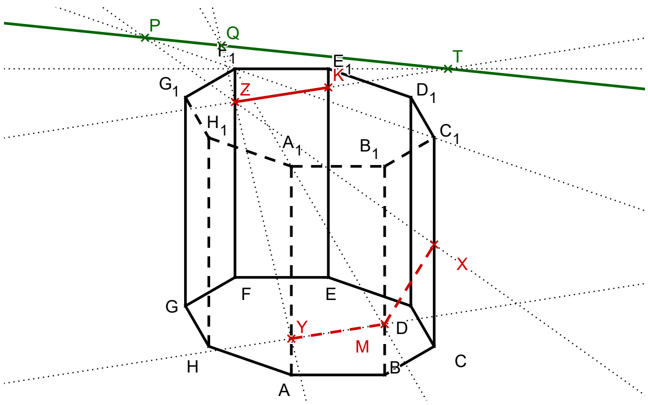
Obrázek 50 – Řešení úlohy 5 – osa afinity

Úsečka F_1E_1 náležící horní podstavě se v takto dané osové afinitě zobrazí do úsečky KZ, k tomu využijeme bodu T, který je samodružný a náleží zároveň přímkám F_1E_1 a KZ. Úsečka KZ je stranou hranice řezu. (obrázek 51)



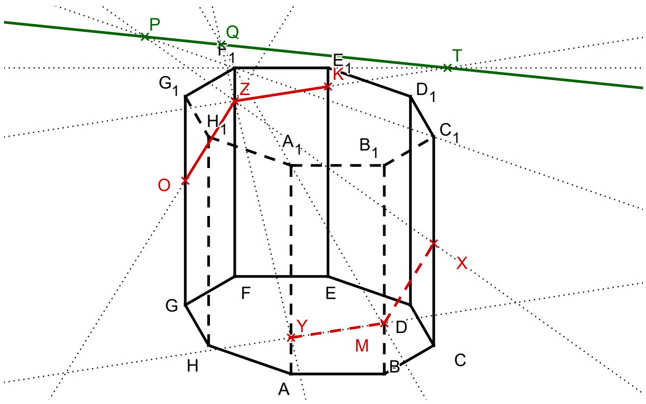
Obrázek 51 – Řešení úlohy 5 – vrchol *K* hranice řezu

Protilehlé boční stěny kolmého osmibokého hranolu jsou rovnoběžné. Bodem Y vedeme rovnoběžku s úsečkou KZ. Průsečík této rovnoběžky a hrany BB_1 je bod M, další bod hranice řezu (důsledek *ii.*). Úsečky MY a MX jsou stranami hranice řezu (důsledek *i.*). (obrázek 52)



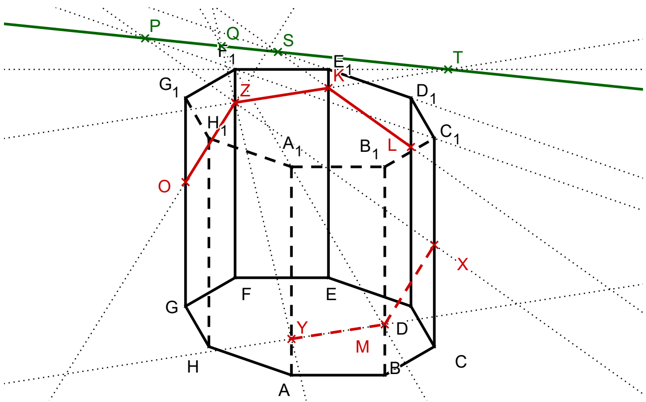
Obrázek 52 – Řešení úlohy 5 – vrchol *M* hranice řezu

Rovnoběžnost protilehlých stěn využijeme i při sestrojení dalšího vrcholu O hranice řezu. Bodem Z vedeme rovnoběžku s úsečkou MX. Průsečík této rovnoběžky s hranou GG_1 je bod O, další vrchol hranice řezu. Úsečka OZ je stranou hranice řezu (důsledek *i.)*. (obrázek 53)



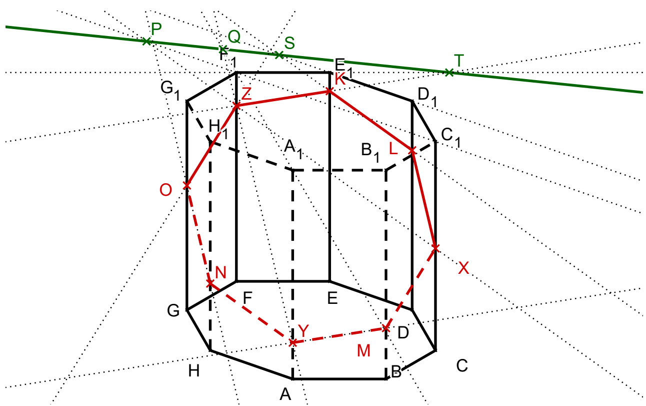
Obrázek 53 – Řešení úlohy 5 – vrchol *O* hranice řezu

Úsečka E_1D_1 se v dané osové afinitě zobrazí do úsečky *KL*. K sestrojení bodu *L* využijeme průsečík přímky E_1D_1 a osy afinity, nazveme jej *S*. Bod *L* je průsečík přímky *KS* a hrany DD_1. Úsečka *KL* je stranou hranice řezu (důsledek *i.*). (obrázek 54)



Obrázek 54 – Řešení úlohy 5 – vrchol *L* hranice řezu

Pomocí důsledku *i.* a *ii.* jsme schopni sestrojit celou hranici řezu *XLKZONYM.* (obrázek 55)

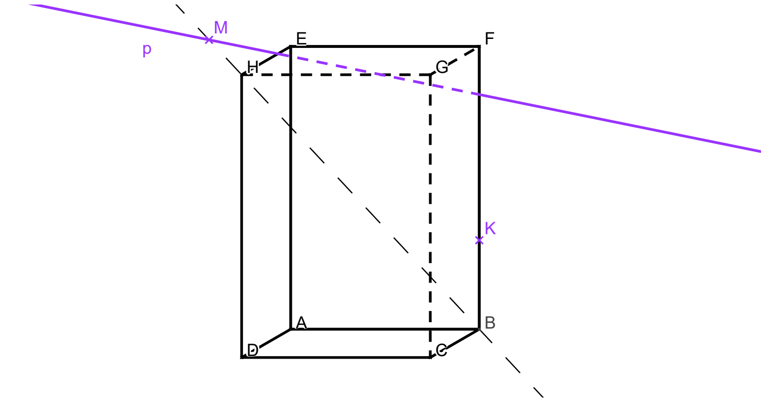


Obrázek 55 – Řešení úlohy 5

V dynamickém prostředí lze pohybovat vnitřními body *X*, *Y* a *Z* v rámci jejich příslušných hran.

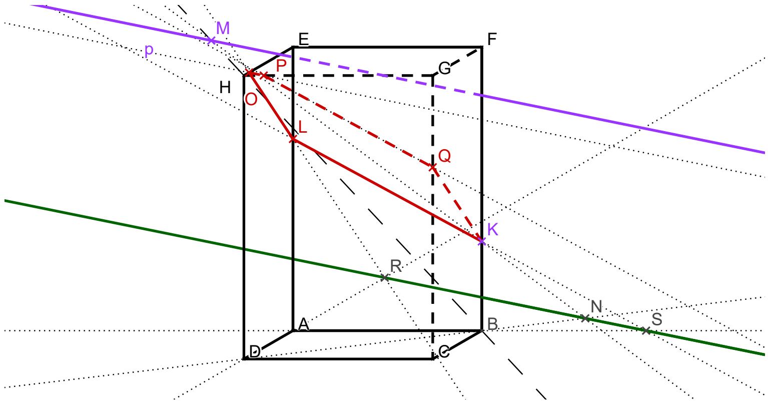
Úloha 6: Řez kolmým čtyřbokým hranolem rovinou zadanou bodem a přímkou

Zadání úlohy 6: Sestrojte řez kolmého čtyřbokého hranolu *ABCDEFGH* rovinou zadanou bodem *K* a přímkou *p* rovnoběžnou s úsečkou *AC* procházející bodem *M*, který náleží polopřímce *BH* a leží za bodem *H* (leží na prodloužení tělesové úhlopříčky). (částečně převzato, Križalovič 1972) (obrázek 56)



Obrázek 56 – Zadání úlohy 6

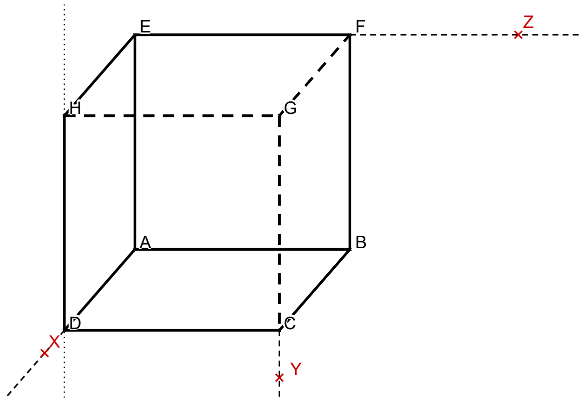
Řešení: V příkladu využívám vztahu osové afinity se směrem bočních hran hranolu mezi hranicí dolní podstavy a hranicí řezu. Osa afinity je rovnoběžná se zadanou přímkou *p*. (obrázek 57)



Obrázek 57 – Řešení úlohy 6

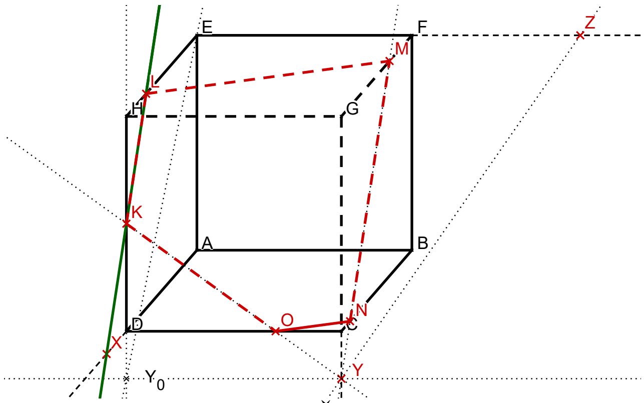
Úloha 7: Řez krychlí rovinou zadanou třemi body

Zadání úlohy 7: Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou danou body *X*, *Y* a *Z*. (obrázek 58*)*



Obrázek 58 – Zadání úlohy 7

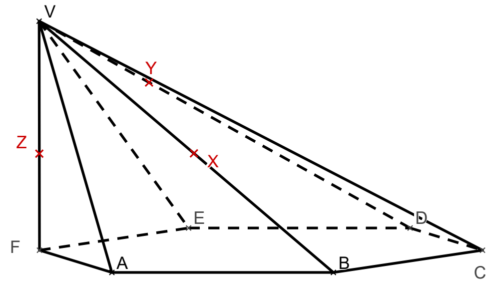
Řešení: Úlohu jsem vyřešil s využitím afinního vztahu mezi hranicí řezu a hranicí levé boční stěny krychle. (obrázek 59)



Obrázek 59 – Řešení úlohy 7

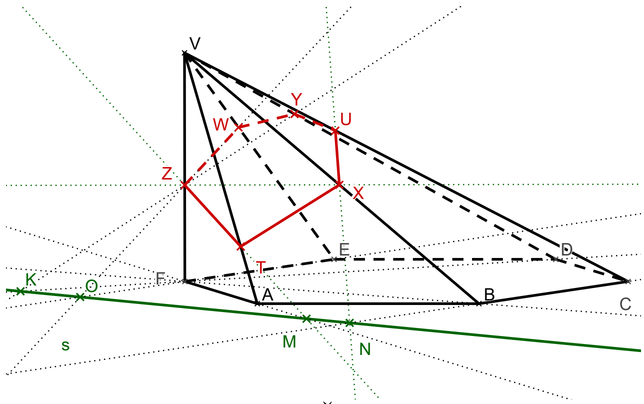
Úloha 8: Řez kosým šestibokým jehlanem

Zadání úlohy 8: Sestrojte řez kosým šestibokým jehlanem *ABCDEFFV* rovinou danou body *X*, *Y* a *Z*. (obrázek 60)



Obrázek 60 – Zadání úlohy 8

Řešení: Úlohu jsem řešil pomocí středové kolineace se středem v hlavním vrcholu *V* jehlanu. V takto dané kolineaci se hranice podstavy jehlanu zobrazí do hranice řezu. (obrázek 61)

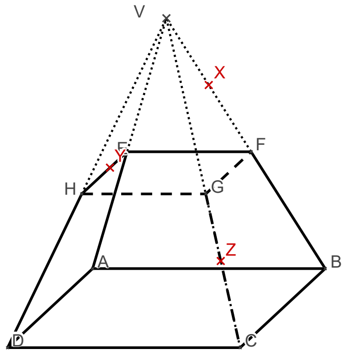


Obrázek 61 – Řešení úlohy 8

Hlavním přínosem tohoto příkladu je možnost pohybovat s hlavním vrcholem *V* jehlanu v jeho prostorovém zobrazení v dynamickém prostředí.

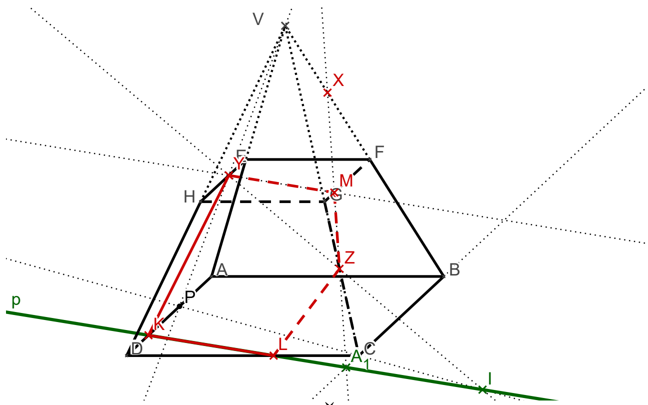
Úloha 9: Řez čtyřbokým komolým jehlanem

Zadání úlohy 9: Sestrojte řez čtyřbokým komolým jehlanem *ABCDEFGH* rovinou danou třemi body *X*, *Y* a *Z*. (obrázek 62)



Obrázek 62 – Zadání úlohy 9

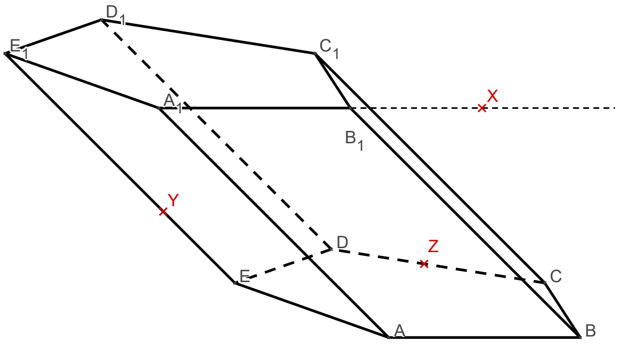
Řešení: Tento příklad jsem řešil z podhledu, využil jsem středové kolineace se středem v bodě *V*. Dále jsem využil rovnoběžnosti stěn *ABCD* a *EFGH*. (obrázek 63)



Obrázek 63 – Řešení úlohy 9

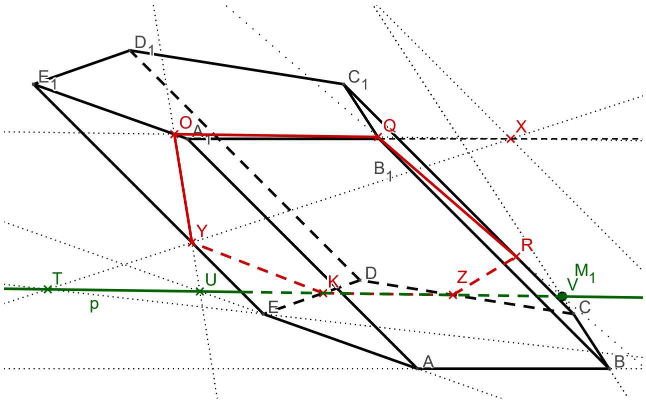
Úloha 10: Řez kosým pětibokým hranolem

Zadání úlohy 10: Sestrojte řez kosým pětibokým hranolem $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ rovinou danou body *X, Y* a *Z*. (obrázek 64)



Obrázek 64 – Zadání úlohy 10

Řešení: K vyřešení této úlohy jsem využil osové afinity se směrem bočních hran hranolu. V takto dané afinitě se hranice dolní podstavy zobrazí do hranice řezu. (obrázek 65)



Obrázek 65 – Řešení úlohy 10

Závěr

Při studování podkladů pro první kapitolu mé práce – systém českého školství, mne překvapilo, jak jsou veřejné dokumenty zasahující všechny veřejné školy obecné. Mnohdy jsem nebyl schopen ani ve ŠVP najít, zdali konkrétní škola vyučuje prostorovou geometrii, popřípadě v jakém ročníku a v jakém rozsahu. Do problematiky sestavování ŠVP mne zasvětila až moje matka, učitelka matematiky na víceletém gymnáziu v Praze. Dala mi k dispozici její tematické plány, které jsou to, co jsem přesně hledal, protože právě až v tematických plánech, které jsou buď jednotné na celé škole, ale mohou se i lehce lišit, jsem nalezl přesné názvy vyučovaných kapitol a jejich hodinové dotace.

V kapitole základních poznatků z prostorové geometrie je stručný úvod do jednotlivých témat potřebných pro samotné pochopení prostorové geometrie, zvláště pak ke konstruování řezů těles. V tištěné verzi mé práce jsou znázornění těles a jejich řezů do roviny, v internetové GeoGebra knize jsem se snažil využít především prostorová znázornění pro větší názornost a lepší pochopení.

Kapitola týkající představivosti mne při jejím psaní zaskočila. Dlouho jsem nebyl schopen najít stručně a pochopitelně zpracováno téma prostorové geometrie, nakonec mi byl doporučen článek od Mixe a Chenga, který se přímo dotýká vztahu mezi prostorovou představivostí a matematikou.

V praktické části uvádím tři příklady pro rozvoj prostorové představivosti, které dospělým dělají občas problémy. Zvláště pak představování si odvrácených stran je pro osoby s horší prostorovou představivostí náročné.

Při sestrojování příkladů do mé nejdůležitější části práce mne překvapilo množství možností, které program GeoGebra obnáší, a hlavně pak množství aspektů, které je nutné brát v potaz při sestrojování příkladů. Zvláště obtížné bylo vyznačit správně viditelnost různých úseček či přímek ve volném rovnoběžném promítání do roviny. Bylo nezbytné přijít na to, jak stanovit „rozhodující prvky“ pro viditelnost konkrétních úseček tak, aby se při změně pohledu nebo předefinování bodu, který určuje rovinu, úsečka chovala tak, jak má. Při konstrukcích kolmých hranolů se dalo odkazovat na úhel, pod kterým jsou zobrazovány úsečky kolmé k průmětně. U jehlanů nebo kosých hranolů to nebylo tak snadné, proto jsem nebyl úplně u všech příkladů schopen zanechat čtenářovu volnost při volbě pohledu nebo posouvání různých bodů.

Seznam literatury

BISHOP, Alan J. Spatial abilities and mathematics education: A review. Educational Studies in Mathematics [online]. 1980, 11(3), 257-269 [cit. 2018-09-25]. DOI: 10.1007/BF00697739. ISSN 0013-1954. Dostupné z: http://link.springer.com/10.1007/BF00697739

HROMADOVÁ, Jana. Deskriptivní geometrie I [online]. Praha, 2013 [cit. 2018-07-01]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jole/deskriptiva/DG1-Stereometrie.html.

KRIŽALOVIČ, Karol. 500 riešených úloh z geometrie. 2. vyd. Bratislava: Alfa, 1972.

MARTÍNKOVÁ, Jana. Mnohostěny a jejich sítě. Praha, 2014. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce PhDr. Šarounová Alena, CSc.

MOLNÁR, Josef. Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii. 2., rozš. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2009. ISBN 978-80-244-2254-1.

MIX, Kelly S. a Yi-Ling CHENG. The Relation Between Space and Math. Advances in Child Development and Behavior Volume 42 [online]. Elsevier, 2012, 2012, s. 197-243 [cit. 2018-09-25]. Advances in Child Development and Behavior. DOI: 10.1016/B978-0-12-394388-0.00006-X. ISBN 9780123943880. Dostupné z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B978012394388000006X

POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.

POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

Rámcové vzdělávací programy. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy* [online]. Praha [cit. 2018-09-08]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/skolskareforma/ramcove-vzdelavaci-programy

SMETANA, Adam. Výuka prostorové geometrie na středních školách. *GeoGebra* [online]. Praha, 2018, 26.09.2018 [cit. 2018-09-26]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/mwcv3yve

SMETANOVÁ, Jitka. Tematické okruhy Gymnázia Jaroslava Heyrovského pro předmět Matematika. Praha, 2018.

Základní informace o RVP. *Střední odborná škola podnikání a obchodu, s.r.o.* [online]. Prostějov [cit. 2018-09-08]. Dostupné z: www.sospo.eu/obory_vzdelani_rvp.html

Seznam obrázků