



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Zuzana Vlasáková

**Pole proudových smyček kolem černých
děr**

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Teoretická fyzika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Tímto bych chtěla poděkovat doc. RNDr. Oldřichu Semerákovi, DSc., za vedení této diplomové práce a své rodině a příteli za podporu při jejím vypracování i během celého zbytku studia.

Název práce: Pole proudových smyček kolem černých děr

Autor: Zuzana Vlasáková

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Pole testovací proudové smyčky umístěné v ekvatoriální rovině symetricky okolo Kerrovy černé díry bylo již několikrát studováno a řešení publikována v různých podobách. Tyto výsledky navzájem porovnáváme a určujeme jejich limity ve významných místech – v radiálním nekonečnu, na vnějším horizontu událostí, na statické mezi, v ekvatoriální rovině a na ose symetrie. Dále také ukazujeme chování pole odpovídající extrémní černé díře a ověřujeme platnost Meissnerova efektu. Na závěr určujeme pole jednoduchého modelu proudového disku superpozicí polí testovacích proudových smyček. Tato úloha má astrofyzikální motivaci – popis akrečních disků v blízkosti černých děr.

Klíčová slova: obecná teorie relativity, černé díry, magnetická pole

Title: The fields of current loops around black holes

Author: Zuzana Vlasáková

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc., Institute of Theoretical Physics

Abstract: The field of a test current loop placed symmetrically in the equatorial plane around a Kerr black hole has been studied several times and solutions have been published in different forms. We compare these results and determine their limits in important places – in radial infinity, on the outer event horizon, on the static limit, in the equatorial plane and on the axis of symmetry. Furthermore, we show the behaviour of the field corresponding to the extreme black hole and verify Meissner effect. In the end we determine the field of a simple model of a current disc by a superposition of test current loops. This problem has an astrophysical motivation – the description of accretion discs in the vicinity of black holes.

Keywords: general theory of relativity, black holes, magnetic fields

Obsah

Úvod	2
1 Matematický úvod	4
1.1 Kerrova metrika	4
1.1.1 Horizonty a statické meze	6
1.1.2 Lokálně nerotující pozorovatelé	7
1.2 Tetrádový formalismus	7
1.2.1 Ricciho rotační koeficienty	8
1.3 Newmanův-Penroseův formalismus	9
1.3.1 Weylův tenzor v NP formalismu	10
1.3.2 Maxwellovy rovnice v NP formalismu	11
1.3.3 Kerrův prostoročas v NP formalismu	12
1.4 GHP formalismus a Carterova tetráda	13
1.5 Perturbace na Kerrově pozadí	16
1.5.1 Testovací elektromagnetické pole	16
1.5.2 Teukolskyho rovnice	17
1.6 Speciální funkce	19
1.6.1 Ortogonální polynomy	19
1.6.2 Legendrovy polynomy a Legendrovy funkce	19
1.6.3 Přidružené Legendrovy polynomy	21
1.6.4 Sférické harmoniky	22
1.6.5 Sférické harmoniky se spinovou váhou s	22
1.6.6 Legendrovy funkce 2.druhu	24
1.6.7 Hypergeometrické funkce	25
2 Studovaná řešení	27
2.1 Chitre a Vishveshwara	27
2.2 Petterson	29
2.3 Bičák a Dvořák	31
2.4 Znajek	35
2.5 Moss	36
3 Porovnání studovaných řešení	38
4 Limity studovaných řešení	43
4.1 Hodnoty ve speciálních místech	43
4.2 Extrémní černá díra, Meissnerův efekt	45
5 Pole proudového disku	52
Závěr	57
Seznam použité literatury	58

Úvod

Existence černých děr je jednou ze zásadních předpovědí obecné teorie relativity. Přes počáteční skepsi se zhruba od 60. let ukazuje, že tyto extrémní objekty hrají ústřední roli v některých astrofyzikálních systémech. Jedná se zejména o jádra aktivních galaxií a rentgenové dvojhvězdy. Od konce 20. století je víceméně jasné, že velmi hmotné černé díry jsou přítomny i v centrech většiny neaktivních galaxií, speciálně pak v centru naší Galaxie.

Ve všech zmíněných systémech jsou argumenty pro přítomnost černé díry založeny na elektromagnetických projevech její interakce s hmotným okolím. V r. 2015 byly poprvé přímo detekovány gravitační vlny, což – kromě další podpory Einsteiny teorie – především přineslo nezávislý důkaz existence černých děr, v tomto případě dokonce nové „populace“ černých děr s výrazně vyššími hmotnostmi, než jaké byly u stelárních černých děr do té doby zjištěny. Díky pokroku v radiové interferometrii byl pak na jaře 2019 publikován první „snímek černé díry“, konkrétně velmi hmotné černé díry v aktivní galaxii M87.

Astrofyzikální objekty mají obecně zanedbatelný elektrický náboj, takže se nepředpokládá, že by budily podstatné elektrické pole. Díky tzv. magnetorotační nestabilitě však může být v rotujících plazmatických systémech generováno silné *magnetické pole*: ačkoli globálně elektricky nenabitě, je toto prostředí ionizované a jeho jednotlivé proudnice mohou efektivně vést elektrický proud. Určité magnetické pole mají díky tomu i hvězdy, a proto – v důsledku zachování magnetického toku – mohou mít velmi silné magnetické pole kompaktní pozůstatky po závěrečných etapách jejich vývoje, především pak neutronové hvězdy. Dalším zdrojem silných magnetických polí jsou zřejmě akreční disky kolem kompaktních těles, tedy diskové konfigurace, které v okolí takových těles hmota přirozeně vytváří pod působením gravitace a odstředivé síly a ve kterých k nim (v důsledku disipace energie a momentu hybnosti) postupně spiráluje.

V této diplomové práci se budeme zabývat zdroji elektromagnetického pole v blízkosti Kerrovy černé díry. Motivováni představou akrečního disku jakožto soustavy proudových smyček se zaměříme na nalezení magnetického pole jedné nenabitě kruhové proudové smyčky ležící v ekvatoriální rovině symetricky okolo černé díry. Smyčku budeme považovat za *testovací*, t.j. nehmotnou (nepřispívající ke gravitačnímu poli), tedy budeme s ní pracovat jen jako se zdrojem elektromagnetického pole na pevně daném pozadí (popsaném Kerrovou metrikou).

Magnetické pole proudových smyček na Schwarzschildově i Kerrově pozadí bylo již v literatuře studováno v několika různých článcích a výsledky byly prezentovány v podobě několika různých formulí. Zde tyto formule porovnáme, abychom zkontrolovali, zda dávají stejné výsledky a případně opravili vyskytnuvší se nepřesnosti, a také abychom zjistili, které z nich jsou více a které méně vhodné pro další analytickou a numerickou práci. Kromě obecného analytického porovnání bude jedním z testů také limitní chování formulí – v radiálním nekonečnu, na vnějším horizontu událostí a statické mezi, v ekvatoriální rovině a na ose symetrie.

Speciální zajímavostí, rovněž známou z literatury, je tzv. Meissnerův efekt, totiž „vypuzování“ magnetických siločar z černých děr blížícím se extrémnímu stavu (s jediným, degenerovaným horizontem). Ověříme, zda studované formule

pro magnetické pole proudových smyček skutečně takovéto chování popisují. Na závěr se pokusíme vytvořit zjednodušený model akrečního disku tím, že z principu superpozice sečteme (popř. zintegrujeme) pole mnoha proudových smyček různých poloměrů, abychom zjistili, jaké pole budí celý proudový disk.

Před výše zmíněnými kapitolami, obsahujícími (mimo jiné) původní výsledky, zařazujeme stručný přehled užitečné matematiky. V celé práci budeme užívat geometrizovaných jednotek (ve kterých jsou rychlost světla a gravitační konstanta rovny jedné, $c = 1$, $G = 1$).

1. Matematický úvod

Při řešení obecného problému zdroje elektromagnetického pole popsaného proudovou hustotou J^μ v zakřiveném prostoročasu je třeba uvažovat kombinaci Einsteinových [1]

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

a Maxwellových rovnic [2]

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu. \quad (1.2)$$

Tyto rovnice jsou vzájemně provázány – geometrie vstupuje do Maxwellových rovnic (1.2) prostřednictvím kovariantní derivace, elektromagnetické pole $F^{\mu\nu}$ naopak vstupuje do Einsteinových rovnic (1.1) prostřednictvím tenzoru energie a hybnosti [2]

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right).$$

Pokud se zaměříme na zdroj ve formě dříve zmiňovaných akrečních disků, vidíme, že jejich realističtější modely by měly být navíc hmotné, čímž se situace ještě více komplikuje. V této práci se ale budeme zabývat pouze zjednodušenou modelovou situací nehmotné proudové smyčky, která neovlivňuje gravitační pole, jedná se tedy o zdroj elektromagnetického pole na pevně daném pozadí, konkrétně prostoročasu Kerrovy černé díry (popřípadě Schwarzschildovy černé díry).

Ukazuje se ovšem [3], že přímé řešení Maxwellových rovnic (1.2) v tenzorovém tvaru na Kerrově pozadí vede k velmi složité soustavě parciálních diferenciálních rovnic, která je těžko řešitelná. Je proto výhodnější místo obvyklého tenzorového tvaru (1.2) řešit rovnice za pomoci Newmanova-Penroseova formalismu a také využít v něm odvozené Teukolskyho rovnice [4], popisující perturbace rotující černé díry. Tyto pojmy rozebereme podrobněji v následujících podkapitolách spolu s definicí některých speciálních funkcí, které budeme využívat k vyjádření výsledného pole, a vztahů mezi nimi.

1.1 Kerrova metrika

Kerrova metrika popisuje přesné řešení Einsteinových rovnic pro prázdný stacionární axiálně symetrický prostoročas v okolí rotující, nenabitě, černé díry (nabitý případ popisuje zobecněná, tzv. Kerrova-Newmanova metrika, se kterou v tomto textu ale nebudeme pracovat). V Boyerových-Lindquistových souřadnicích můžeme psát Kerrovu metriku jako [2]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2, \quad (1.3)$$

kde jsme zavedli značení

$$\begin{aligned} \Sigma &\equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta &\equiv r^2 - 2Mr + a^2, \\ A &\equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

M je hmotnost černé díry a $J = aM$ je její moment hybnosti.

Podívejme se také na obecný případ (obecně nevakuového) stacionárního, axiálně symetrického¹, asymptoticky plochého prostoročasu. Pro něj můžeme psát metriku [5]

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu_1} dr^2 + e^{2\mu_2} d\theta^2. \quad (1.4)$$

Tato metrika zřejmě přechází na Kerrovu při speciální volbě

$$\begin{aligned} e^{2\nu} &= \frac{\Sigma \Delta}{A} & e^{2\mu_1} &= \frac{\Sigma}{\Delta} & \omega &= \frac{2Mar}{A} \\ e^{2\psi} &= \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma} & e^{2\mu_2} &= \Sigma \end{aligned}$$

Všimněme si některých jednoduchých vlastností metriky (1.3). V limitě $a \rightarrow 0$ metrika přechází na Schwarzschildovu ve standardních Schwarzschildových souřadnicích

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

zatímco v limitě $M \rightarrow 0 \wedge a = \text{konst.}$ dostáváme

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2,$$

což je metrika popisující plochý prostoročas ve „sferoidálních“ souřadnicích, pro které lze v trojrozměrném euklidovském prostoru psát vztah k obvyklým kartézským souřadnicím jako [6]

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi, \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

V těchto souřadnicích plochy $r = \text{konst.}$ popisují povrch sféroidu (rotačního elipsoidu [7]), který vznikl rotací elipsy s hlavní poloosou $\sqrt{r^2 + a^2}$ ve směru osy x a vedlejší poloosou r ve směru osy z kolem osy z :

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

plochy $\theta = \text{konst.}$ odpovídají rotačním hyperboloidům

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 \sin^2 \theta} - \frac{z^2}{a^2 \cos^2 \theta} = 1.$$

Limitou $a \rightarrow 0$ přecházejí sféroidy ve sféry a sféroidální souřadnice přechází v obyčejné sférické souřadnice, podobně v případě $r \gg a$ (rozdíl mezi souřadnicemi je tedy patrný hlavně v okolí počátku).

¹Přesněji se musí jednat o tzv. cirkulární prostoročas, tedy stacionární a axiálně symetrický prostoročas splňující podmínku tzv. ortogonální tranzitivity (která zajišťuje existenci meridionálních rovin jako globálních podvariet).

Alternativně lze vyjádřit Kerrovu metriku např. v Kerrových-Schildových souřadnicích [6]

$$ds^2 = -dT^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left[dT + \frac{r(xdx + ydy)}{a^2 + r^2} + \frac{a(ydx - xdy)}{a^2 + r^2} + \frac{z}{r}dz \right]^2, \quad (1.5)$$

kde r už není nezávislá souřadnice, ale funkce souřadnic definovaná jako

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + a^2 \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right).$$

Metrika (1.5) limitou $M \rightarrow 0$ přechází na metriku plochého prostoročasu v kartézských souřadnicích $ds^2 = -dT^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

1.1.1 Horizonty a statické meze

Podívejme se nyní na možné singularity Kerrové metriky [6]. Z vyjádření (1.3) je vidět, že existují dvě možnosti, a to

$$\begin{aligned} r^2 + a^2 \sin^2 \theta = 0 & \Leftrightarrow r = 0 \wedge \theta = \frac{\pi}{2}, \\ \frac{r^2 - 2Mr + a^2}{r^2} = 0 & \Leftrightarrow r = r_{\pm} \equiv M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Pro lepší porozumění charakteru těchto singularit se můžeme podívat na chování invariantů – v Boyerových-Lindquistových souřadnicích lze vyjádřit invariant $R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda}$ jako

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{48M^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) ((r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 - 16r^2a^2 \cos^2 \theta)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6}, \quad (1.7)$$

zřejmě tedy první ze singularit (1.6) je singularita skutečná, protože v ní (1.7) diverguje. Druhá singularita je pouze singularita souřadnicová a označuje polohu horizontů. Ihned vidíme, že mohou nastat tři případy – buď máme $a < M$, získáváme tedy opravdu 2 horizonty: vnitřní r_- a vnější r_+ , nebo $a > M$, v tom případě neexistuje horizont žádný a výsledkem je tzv. nahá singularita, nebo může nastat limitní případ $a = M$, tedy případ extrémní černé díry, která má jeden horizont na poloměru $r = M$. V souladu s očekáváním také platí, že v limitě $a \rightarrow 0$ přecházejí dva horizonty na jeden Schwarzschildův $r_h = 2M$.

Kerrova metrika má ale (na rozdíl od Schwarzschildovy) kromě horizontů další významné povrchy, a to statické meze [6]. Pokud se pozorovatel snaží v Kerrově prostoročasu stát na místě (tedy jeho souřadnice r , θ , ϕ jsou konstantní v čase t), jediná nenulová složka jeho čtyřrychlosti je časová složka u^t . Z normalizace čtyřrychlosti fyzikálního pozorovatele $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ vyplývá, že pro stojícího pozorovatele musí platit $g_{tt}(u^t)^2 = -1$, a tedy nutně $g_{tt} < 0$. Z (1.3) tedy dostáváme ihned podmínku

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta < 0.$$

Statické meze potom definujeme jako plochy odpovídající poloměrům

$$r_E = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta},$$

mezi kterými nemůže pozorovatel stát na místě. Všimněme si, že statické meze odpovídají horizontům pouze na ose rotace ($\theta = 0, \pi$), zatímco mimo ni se liší. Oblast nad vnějším horizontem, která ale zároveň leží pod vnější statickou mezí, nazýváme ergosférou (je to tedy oblast, kde fyzikální pozorovatel sice nemůže být statický, ale může z ní uniknout do nekonečna [6]).

1.1.2 Lokálně nerotující pozorovatelé

Pro Kerrovu metriku je vhodné zavést sadu pozorovatelů, kteří v jistém smyslu rotují společně s geometrií [5]. Každý takový pozorovatel si s sebou nese ortonormální tetradu (viz kapitola 1.2) vektorů, jednotlivé fyzikální veličiny měřené v lokálním souřadnicovém systému takového pozorovatele pak vyjadřujeme průmětem odpovídajícího tenzoru na tuto tetradu.

Pro stacionární, axisymetrický, asymptoticky plochý prostoročas popsaný metrikou (1.4) můžeme zavést tzv. lokálně nerotující pozorovatele, pro jejichž světočáru platí $r = \text{konst.}$, $\theta = \text{konst.}$, $\phi = \omega t + \text{konst.}$ (tedy rotují úhlovou rychlostí ω). Jejich ortonormální tetradu pak vypadá v bodě (t, r, θ, ϕ) následujícím způsobem [5]:

$$\begin{aligned} e_{(t)} &= e^{-\nu} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right) = \left(\frac{A}{\Sigma \Delta} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2Mar}{(A\Sigma\Delta)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ e_{(r)} &= e^{-\mu_1} \frac{\partial}{\partial r} = \left(\frac{\Delta}{\Sigma} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial r}, \\ e_{(\theta)} &= e^{-\mu_2} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{\Sigma^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ e_{(\phi)} &= e^{-\psi} \frac{\partial}{\partial \phi} = \left(\frac{\Sigma}{A} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

kde jsme dosadili i konkrétní případ Kerrova prostoročasu.

Na tyto pozorovatele [2] se můžeme také dívat jako na pozorovatele, kteří jsou v klidu vzhledem k souřadnému systému tvořenému kongruencí světočar ortogonálních k nadploše $t = \text{konst.}$ Jednotkový vektor tečný k těmto světočarám můžeme psát jako

$$u_\mu = - \left(\frac{\Sigma \Delta}{A} \right)^{1/2} \delta_\mu^0. \tag{1.9}$$

Jelikož pro (1.9) platí $u_\mu \xi_{(\phi)}^\mu = 0$ (kde $\xi_{(\phi)}^\mu$ značí Killingův vektor), moment hybnosti částice, pohybující se rychlostí u_μ , bude nulový. Díky této vlastnosti se lokálně nerotující pozorovatelé nazývají také ZAMO (z anglického „zero angular momentum observers“, tedy pozorovatelé s nulovým momentem hybnosti).

1.2 Tetrádový formalismus

Namísto obvyklé volby řešení rovnic v souřadnicové bázi se v některých případech ukazuje jako výhodnější výpočty provádět s použitím tetrádového formalismu [8] – volíme obecná čtyři lineárně nezávislá vektorová pole

$$e_{(a)}^\mu,$$

kde uzávorkované (a) značí tetřádový index, $a = 0,1,2,3$, zatímco řecké μ značí obvyklý „tenzorový“ index složek těchto kontravariantních vektorů, $\mu = 0,1,2,3$. Navíc budeme požadovat, aby tato báze splňovala normalizační podmínku

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = e_{(a)}^\mu e_{(b)\nu} g_{\mu\nu} = \eta_{(a)(b)}, \quad (1.10)$$

kde $\eta_{(a)(b)}$ je konstantní symetrická matice (lze také zavést obecnější formalismus, kde tato matice není konstantní, ten ale nebudeme používat). Tedy například pro ortonormální bázové vektory máme $\eta_{(a)(b)} = \text{diag}(-1,1,1,1)$. Všechny tenzorové veličiny a rovnice poté můžeme na tuto bázi projektovat a dále pracovat pouze s těmito projekcemi – tím efektivně přejdeme k práci se skalárními veličinami a rovnicemi.

Pokud budeme jednotlivé bázové vektory chápat jako řádky matice $e_{(a)}^\mu$ (tedy (a) je řádkový a μ sloupcový index), můžeme definovat k ní inverzní matici (a tedy duální tetřádu k $e_{(a)}^\mu$) jako

$$\begin{aligned} e_{(a)}^\mu e_\mu^{(b)} &= \delta_{(a)}^{(b)}, \\ e_{(a)}^\mu e_\nu^{(a)} &= \delta_\nu^\mu, \end{aligned} \quad (1.11)$$

podobně inverzní matice k $\eta_{(a)(b)}$ je definována vztahem

$$\eta^{(a)(b)} \eta_{(a)(c)} = \delta_{(c)}^{(a)}. \quad (1.12)$$

Projekcí jakéhokoliv tenzoru na tetřádovou bázi získáme jeho tetřádové složky

$$T_{(a)(b)\dots} = e_{(a)}^\mu e_{(b)\nu} \dots T_{\mu\nu\dots},$$

užitím definice (1.11) a využitím zvedání a snižování tenzorových indexů pomocí metriky dostáváme inverzní vztah pro složky tenzoru vyjádřené pomocí jeho tetřádových složek

$$T_{\mu\nu\dots} = e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)} \dots T_{(a)(b)\dots}. \quad (1.13)$$

Za pomoci (1.10), (1.11) a (1.12) dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} \eta_{(a)(b)} e_\mu^{(a)} &= e_{(b)\mu}, \\ \eta^{(a)(b)} e_{(a)\mu} &= e_\mu^{(b)}, \end{aligned}$$

ze kterých plyne pravidlo pro snižování a zvyšování tetřádových indexů

$$\begin{aligned} T^{(a)\dots} &= \eta^{(a)(b)} T_{(b)\dots}, \\ T_{(a)\dots} &= \eta_{(a)(b)} T^{(b)\dots}. \end{aligned}$$

1.2.1 Ricciho rotační koeficienty

Pomocí kontravariantních vektorů báze (chápaných jako tečné vektory) můžeme definovat směrové derivace [8]

$$e_{(a)} = e_{(a)}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

zavádíme tedy následující označení:

$$T_{(b)\dots,(a)} = e_{(a)}^\mu \frac{\partial T_{(b)\dots}}{\partial x^\mu} = e_{(a)}^\mu T_{(b)\dots,\mu}.$$

Podívejme se pro jednoduchost, jak tato derivace působí na vektor $V_{(a)}$. Platí

$$\begin{aligned} V_{(a),(b)} &= e_{(b)}^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} V_{(a)} = e_{(b)}^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} e_{(a)}^\nu V_\nu = e_{(b)}^\mu \left(e_{(a)}^\nu V_\nu \right)_{;\mu} = \\ &= e_{(b)}^\mu \left(e_{(a)}^\nu V_{\nu;\mu} + V_\lambda e_{(a);\mu}^\lambda \right) = e_{(a)}^\nu V_{\nu;\mu} e_{(b)}^\mu + e_{(a)\lambda;\mu} e_{(b)}^\mu e_{(c)}^\lambda V^{(c)}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Na základě posledního výrazu v (1.14) označme

$$\gamma_{(c)(a)(b)} \equiv e_{(c)}^\lambda e_{(a)\lambda;\mu} e_{(b)}^\mu.$$

Zřejmě platí

$$e_{(a)\lambda;\mu} = e_\mu^{(c)} \gamma_{(c)(a)(b)} e_\mu^{(b)}$$

a pro derivaci vektoru můžeme tedy psát

$$V_{(a),(b)} = e_{(a)}^\nu V_{\nu;\mu} e_{(b)}^\mu + \gamma_{(c)(a)(b)} V^{(c)}.$$

Z předpokladu, že $\eta_{(a)(b)}$ je konstantní matice, dostáváme

$$\begin{aligned} 0 = \eta_{(a)(b),\nu} &= (e_{(a)\mu} e_{(b)}^\mu)_{;\nu} = e_\mu^{(d)} \gamma_{(d)(a)(c)} e_\nu^{(c)} e_{(b)}^\mu + e_{(a)\mu} e^{(e)\mu} \gamma_{(e)(b)(c)} e_\nu^{(c)} = \\ &= (\gamma_{(b)(a)(c)} + \gamma_{(a)(b)(c)}) e_\nu^{(c)}, \end{aligned}$$

tedy antisymetrii v prvních dvou indexech $\gamma_{(a)(b)(c)}$. V případě, kdy je toto splněno, dostáváme 24 nezávislých koeficientů, které nazýváme Ricciho rotační koeficienty.

Dále definujeme tzv. vnitřní derivaci $V_{(a)}$ ve směru $e_{(b)}$ jako

$$V_{(a)|(b)} \equiv e_{(a)}^\nu V_{\nu;\mu} e_{(b)}^\mu = V_{(a),(b)} - \eta^{(n)(m)} \gamma_{(n)(a)(b)} V_{(m)}. \quad (1.15)$$

Stejným způsobem poté můžeme definovat vnitřní derivaci pro obecný tenzor.

1.3 Newmanův-Penroseův formalismus

Newmanův-Penroseův (dále NP) formalismus je zvláštní případ tetrádového formalismu se speciální volbou tetrádové báze. Její vektory jsou zvoleny tak, aby byly nulové, a dva z nich (typicky značené jako l^μ a n^μ) jsou reálné, zatímco zbylé dva jsou navzájem komplexně sdružené m^μ a \bar{m}^μ , které lze chápat také jako lineární kombinace dvou reálných ortogonálních jednotkových prostorupodobných vektorů a^μ a b^μ ($m^\mu = \frac{a^\mu - ib^\mu}{\sqrt{2}}$). Tento formalismus byl poprvé publikován v článku z roku 1962 [9] a od dřívějších typických postupů se lišil zejména použitím nulových bázevých vektorů – do té doby byly užívány především ortonormální báze. Motivací pro tuto volbu byla snaha o zavedení spinorového počtu do obecné relativity.

Kromě podmínky nulovosti pro bázevé vektory požadujeme navíc splnění podmínek ortogonalit

$$l_\mu m^\mu = l_\mu \bar{m}^\mu = n_\mu m^\mu = n_\mu \bar{m}^\mu = 0 \quad (1.16)$$

a normalizačních podmínek

$$l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1. \quad (1.17)$$

Tyto relace zůstávají v platnosti při působení 6-parametrické grupy Lorentzových transformací v každém bodě, čímž získáváme šest stupňů volnosti pro volbu tetrády [4].

Pro matici definovanou v (1.10) dostáváme

$$\eta_{(a)(b)} = \eta^{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde jsme přiřadili báze vektory v následujícím pořadí: $e_0 = l$, $e_1 = n$, $e_2 = m$ a $e_3 = \bar{m}$. Užitím normalizačních podmínek můžeme také ihned psát odpovídající kovariantní vektory báze $e^0 = e_1 = n$, $e^1 = e_0 = l$, $e^2 = -e_3 = \bar{m}$ a $e^3 = -e_2 = -m$. Pro metriku $g_{\mu\nu}$ zpětně dostáváme

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu m_\nu.$$

Pro směrové derivace dané jednotlivými báze vektory užíváme speciálního značení [9]

$$\begin{aligned} D \equiv e_0 &= l^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} & \delta \equiv e_2 &= m^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \\ \Delta \equiv e_1 &= n^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} & \delta^* \equiv e_3 &= \bar{m}^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Podobně 24 nezávislých Ricciho rotačních koeficientů je v NP formalismu vyjádřeno pomocí tzv. spinových koeficientů, které jsou komplexní a je jich 12. Zřejmě z volby tetrády platí, že ke komplexně sdružené veličině přejdeme záměnou indexů $2 \leftrightarrow 3$:

$$\begin{aligned} \kappa &\equiv \gamma_{200} & \rho &\equiv \gamma_{203} & \epsilon &\equiv (\gamma_{100} + \gamma_{230})/2 \\ \sigma &\equiv \gamma_{202} & \mu &\equiv \gamma_{132} & \gamma &\equiv (\gamma_{101} + \gamma_{231})/2 \\ \lambda &\equiv \gamma_{133} & \tau &\equiv \gamma_{201} & \alpha &\equiv (\gamma_{103} + \gamma_{233})/2 \\ \nu &\equiv \gamma_{131} & \pi &\equiv \gamma_{130} & \beta &\equiv (\gamma_{102} + \gamma_{232})/2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

1.3.1 Weylův tenzor v NP formalismu

Weylův tenzor, tedy bezestopou část Riemannova tenzoru, můžeme určit pomocí jeho tetradových složek C_{abcd} z následujícího vztahu [8]:

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{1}{2}(\eta_{ac}R_{bd} - \eta_{bc}R_{ad} - \eta_{ad}R_{bc} + \eta_{bd}R_{ac}) - \frac{1}{6}(\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc})R,$$

kde R_{abcd} , R_{ab} a R jsou popořadě tetradové složky Riemannova tenzoru, Ricciho tenzoru a skalární křivost. Využitím symetrií Weylova tenzoru lze dospět k závěru, že má pouze 10 nezávislých složek, které jsou v NP formalismu reprezentovány pomocí 5 komplexních skalárních veličin

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= -C_{0202} = -C_{\mu\nu\lambda\rho}l^\mu m^\nu l^\lambda m^\rho, \\ \Psi_1 &= -C_{0102} = -C_{\mu\nu\lambda\rho}l^\mu n^\nu l^\lambda m^\rho, \\ \Psi_2 &= -C_{0231} = -C_{\mu\nu\lambda\rho}l^\mu m^\nu \bar{m}^\lambda n^\rho, \\ \Psi_3 &= -C_{0131} = -C_{\mu\nu\lambda\rho}l^\mu n^\nu \bar{m}^\lambda n^\rho, \\ \Psi_4 &= -C_{1313} = -C_{\mu\nu\lambda\rho}n^\mu \bar{m}^\nu n^\lambda \bar{m}^\rho. \end{aligned} \quad (1.20)$$

1.3.2 Maxwellovy rovnice v NP formalismu

Podobně jako v případě Weylova tenzoru můžeme místo 6 nezávislých složek tenzoru elektromagnetického pole $F_{\mu\nu}$ zavést 3 komplexní skaláry [8] ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 (někdy také značené jako $\phi_{-1}, \phi_0, \phi_1$, podle jejich spinové váhy):

$$\begin{aligned}\phi_0 &= F_{02} = F_{\mu\nu} l^\mu m^\nu, \\ \phi_1 &= \frac{1}{2}(F_{01} + F_{32}) = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(l^\mu n^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu), \\ \phi_2 &= F_{31} = F_{\mu\nu} \bar{m}^\mu n^\nu.\end{aligned}\tag{1.21}$$

Zpětně můžeme tenzor elektromagnetického pole pomocí těchto skalárů vyjádřit za pomoci (1.13) jako [4]

$$F_{\mu\nu} = 2\left(\phi_1(l_{[\mu}l_{\nu]} + m_{[\mu}\bar{m}_{\nu]}) + \phi_2l_{[\mu}m_{\nu]} + \phi_0\bar{m}_{[\mu}n_{\nu]}\right) + c.c.,\tag{1.22}$$

kde hranaté závorky značí antisymetrizaci indexů $n_{[\mu}l_{\nu]} = \frac{1}{2}(n_\mu l_\nu - n_\nu l_\mu)$ a c.c. značí výraz komplexně sdružený k předchozímu.

Maxwellovy rovnice v tenzorovém tvaru,

$$F_{[\alpha\beta;\gamma]} = 0 \quad g^{\mu\lambda}F_{\mu\nu;\lambda} = 0,$$

můžeme nahradit Maxwellovými rovnicemi pro tetřádové složky tenzoru elektromagnetického pole,

$$F_{[ab|c]} = 0 \quad \eta^{ml}F_{mn|l} = 0,$$

a ty dále rovnicemi pro nové skalární veličiny definované v (1.21):

$$\begin{aligned}\phi_{1|0} - \phi_{0|3} &= 0 & \phi_{2|0} - \phi_{1|3} &= 0 \\ \phi_{1|2} - \phi_{0|1} &= 0 & \phi_{2|2} - \phi_{1|1} &= 0.\end{aligned}$$

Přímým vyjádřením vnitřní derivace (1.15) a dosazením za zavedené Ricciho rotační (spinové) koeficienty (1.19) dostáváme Maxwellovy rovnice pro ϕ_0, ϕ_1 a ϕ_2 [9]:

$$\begin{aligned}D\phi_1 - \bar{\delta}\phi_0 &= (\pi - 2\alpha)\phi_0 + 2\rho\phi_1 - \kappa\phi_2, \\ D\phi_2 - \bar{\delta}\phi_1 &= -\lambda\phi_0 + 2\pi\phi_1 + (\rho - 2\epsilon)\phi_2, \\ \delta\phi_1 - \Delta\phi_0 &= (\mu - 2\gamma)\phi_0 + 2\tau\phi_1 - \sigma\phi_2, \\ \delta\phi_2 - \Delta\phi_1 &= -\nu\phi_0 + 2\mu\phi_1 + (\tau - 2\beta)\phi_2.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Pro tenzor energie a hybnosti elektromagnetického pole platí

$$T_{ab} = \eta^{cd}F_{ac}F_{bd} - \frac{1}{4}\eta_{ab}F_{ef}F^{ef},$$

a tedy vyjádřením pomocí ϕ_0, ϕ_1 a ϕ_2 dostáváme

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}T_{00} &= \phi_0\bar{\phi}_0 & -\frac{1}{2}T_{02} &= \phi_0\bar{\phi}_1 \\ -\frac{1}{4}(T_{01} + T_{23}) &= \phi_1\bar{\phi}_1 & -\frac{1}{2}T_{12} &= \phi_1\bar{\phi}_2 \\ -\frac{1}{2}T_{11} &= \phi_2\bar{\phi}_2 & -\frac{1}{2}T_{22} &= \phi_0\bar{\phi}_2.\end{aligned}$$

1.3.3 Kerrův prostoročas v NP formalismu

Kerrův prostoročas je prostoročas typu D na základě klasifikace objevené Piranim a Petrovem v člancích z let 1954 [10] a 1957 [11]. Nejdříve si objasníme, co tato klasifikace znamená a jaké jsou její důsledky v rámci NP formalismu.

Mějme nulovou tetradu a vzhledem k ní definovaných 5 skalárních veličin určujících Weylův tenzor podle (1.20) – jejich hodnota zřejmě závisí na volbě tetrady, kterou můžeme transformovat působením šestiparametrické Lorentzovy grupy. Pro určení typu daného prostoročasu nás bude zajímat, kdy lze které z těchto Weylových skalárů vynulovat. Předpokládejme, že $\Psi_4 \neq 0$ (což lze vhodnou transformací splnit, pokud není Weylův tenzor identicky nulový) a provedme následující rotaci nulové tetrady $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$ [8]:

$$n^\mu \rightarrow n^\mu, m^\mu \rightarrow m^\mu + bn^\mu, \bar{m}^\mu \rightarrow \bar{m}^\mu + b^*n^\mu, l^\mu \rightarrow l^\mu + b^*m^\mu + b\bar{m}^\mu + bb^*n^\mu, \quad (1.24)$$

kde b je parametr transformace. Weylovy skaláry se touto transformací změň následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4, \\ \Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4, \\ \Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4, \\ \Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + b\Psi_4, \\ \Psi_4 &\rightarrow \Psi_4. \end{aligned}$$

Zkusme touto transformací vynulovat Ψ_0 – to lze udělat za podmínky, že parametr b zvolíme tak, že bude platit

$$\Psi_4 b^4 + 4\Psi_3 b^3 + 6\Psi_2 b^2 + 4\Psi_1 b + \Psi_0 = 0.$$

Jedná se o kvartickou rovnici, řešením tedy budou čtyři kořeny, díky kterým získáme čtyři nové směry l^μ (podle (1.24)), které nazýváme hlavní nulové směry Weylova tenzoru. Samozřejmě v závislosti na daném řešení mohou některé směry koincidovat, a to udává dělení do jednotlivých Petrovových typů. Typ I odpovídá případu, kdy máme čtyři různé hlavní nulové směry, u typu II právě dva koincidují a zbylé dva jsou různé, typ D odpovídá případu, kdy dvě dvojice koincidují, typ III případu, kdy tři směry koincidují a jeden je různý a nakonec typ N odpovídá tomu, že všechny čtyři směry koincidují. Pro každý z typů lze také vynulovat jiné Weylovy skaláry, speciálně pro typ D můžeme vynulovat všechny z nich kromě Ψ_2 .

Pro NP formalismus je významný Goldbergův-Sachsův teorém [8]

Teorém 1. *Jestliže je Riemannův tenzor typu II a nulová báze je zvolena tak, že l^μ je opakující se hlavní nulový směr a $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$, pak $\kappa = \sigma = 0$. Pokud naopak platí, že $\kappa = \sigma = 0$, pak $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ a Riemannův tenzor je typu II.*

Důkaz lze nalézt např. v [9]. Tento teorém lze zobecnit pro prostoročas typu D, který je speciálním případem typu II – máme v něm dva různé opakující se hlavní nulové směry l^μ, n^μ , a teorém platí ve stejném změň pro $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$ a $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$.

Nyní se podívejme na význam nulovosti těchto spinových koeficientů. Změnu l^μ ve směru l^μ můžeme vyjádřit jako [8]

$$l_{\mu;\nu}l^\nu = (\epsilon + \epsilon^*)l_\mu - \kappa\bar{m}_\mu - \kappa^*m_\mu,$$

z čehož vidíme, že l^μ tvoří kongruenci nulových geodetik právě tehdy, když $\kappa = 0$. Zároveň jsou tyto kongruence afinně parametrizované právě, když $\text{Re}(\epsilon) = 0$. Spinový koeficient σ můžeme vyjádřit jako

$$|\sigma|^2 = \frac{1}{2} \left(l_{(\mu;\nu)}l^{\mu;\nu} - \frac{1}{2}(l^\mu_{;\mu})^2 \right),$$

jedná se tedy o „shear“, což je jeden z optických skalárů. Podobné výsledky bychom mohli uvést i pro vektor n^μ s příslušně změněnými spinovými koeficienty, ve výsledku tedy $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$, což znamená, že l^μ , n^μ jsou geodetické s nulovým shearem.

V Kerrově prostoročasu existuje třída nulových geodetik daná tečnými vektory [8]

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}E, \frac{dr}{d\tau} = \pm E, \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{a}{\Delta}E, E = \text{konst.}$$

Pomocí těchto geodetik můžeme definovat nulové vektory l^μ , n^μ , čímž získáme tzv. Kinnersleyho tetradu v Boyerových-Lindquistových souřadnicích vyjádřenou v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{\Delta} (r^2 + a^2, \Delta, 0, a), \\ n^\mu &= \frac{1}{2\Sigma} (r^2 + a^2, -\Delta, 0, a), \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left(ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Z předchozího vyplývá, že spinové koeficienty κ , σ , ν , λ budou nulové. Tím jsme využili 4 z možných 6 stupňů volnosti pro výběr tetrády. Zbylé dva stupně volnosti byly využity na to, aby l^μ bylo normalizováno tak, že $\text{Re}(\epsilon) = 0$ a m^μ rotováno takovým způsobem, že i $\text{Im}(\epsilon) = 0$, tedy celkově platí $\epsilon = 0$. Jediné nenulové spinové koeficienty pak budou

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{1}{r - ia \cos \theta} \\ \mu &= \rho^2 \bar{\rho} \frac{\Delta}{2} & \gamma &= \mu + \rho \bar{\rho} \frac{r - M}{2} \\ \tau &= -ia \rho \bar{\rho} \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \alpha &= \pi - \bar{\beta} \\ \pi &= ia \rho^2 \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \beta &= -\bar{\rho} \frac{\cot \theta}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{1.26}$$

1.4 GHP formalismus a Carterova tetradá

Předpokládejme, že máme prostoročas, v jehož každém bodě lze zvolit 2 nulové směry a zvolme (analogicky jako v předchozí kapitole) dva z nulových tetradových

vektorů l^μ , n^μ jako vektory k nim tečné, normalizované jako $l^\mu n_\mu = 1$, zbylé dva vektory zvolme jako jednotkové prostorupodobné vektory x^μ , y^μ ortogonální k l^μ a n^μ a k sobě navzájem. Tyto dva vektory lze sdružit do komplexního vektoru $m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^\mu + iy^\mu)$, čímž získáváme celou tetrádu $(l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$. Po splnění podmínek kladených na báze vektory tetrády zbývá v každém bodě stále kalibrační volnost odpovídající podgrupě Lorentzovy grupy dimenze 2. Ta je generovaná boosty [12]

$$l^\mu \rightarrow r l^\mu \wedge n^\mu \rightarrow r^{-1} n^\mu \quad (1.27)$$

a rotací v prostoru

$$m^\mu \rightarrow e^{i\psi} m^\mu. \quad (1.28)$$

Parametry r , ψ můžeme shrnout do jednoho komplexního parametru λ , pro který platí $\lambda^2 = r e^{i\psi}$. Transformaci (1.27), (1.28) můžeme přepsat pomocí λ jako

$$\begin{aligned} l^\mu &\rightarrow \lambda \bar{\lambda} l^\mu & m^\mu &\rightarrow \lambda \bar{\lambda}^{-1} m^\mu \\ n^\mu &\rightarrow \lambda^{-1} \bar{\lambda}^{-1} n^\mu & \bar{m}^\mu &\rightarrow \lambda^{-1} \bar{\lambda} \bar{m}^\mu, \end{aligned} \quad (1.29)$$

skalární veličinu nazveme veličinou se spinovou a boostovou váhou typu $\{p, q\}$, pokud se při transformaci tetrády (1.29) transformuje jako

$$\eta \rightarrow \lambda^p \bar{\lambda}^q \eta.$$

Spinová váha takového skaláru je $\frac{1}{2}(p - q)$ a boostová váha $\frac{1}{2}(p + q)$. Diferenciální operátor nazýváme typu $\{p, q\}$, pokud platí, že po působení na skalár typu $\{a, b\}$ dostaneme skalár typu $\{a + p, b + q\}$.

GHP formalismus (podrobně popsáný v článku [12] autorů Gerocha, Helda a Penrose z roku 1972) spočívá v práci pouze s veličinami se spinovou a boostovou váhou. To jsou totiž ty veličiny, které se při transformaci tetrády (1.29) transformují „správně“. Podívejme se nyní na spinové koeficienty (1.26). Po dosazení transformace (1.29) lze snadno určit, že správné spinové koeficienty, se kterými budeme pracovat, jsou pouze κ , σ , ρ , τ , $\kappa' = -\nu$, $\sigma' = -\lambda$, $\rho' = -\mu$, $\tau' = -\pi$. Např. pro κ máme

$$\kappa = \gamma_{200} = m^\mu l_{\mu;\nu} l^\nu \rightarrow \lambda \bar{\lambda}^{-1} m^\mu (\lambda \bar{\lambda} l_\mu)_{;\nu} \lambda \bar{\lambda} l^\nu = \lambda^3 \bar{\lambda} \kappa + \lambda^2 m^\mu l_\mu (\lambda \bar{\lambda})_{;\nu} l^\nu = \lambda^3 \bar{\lambda} \kappa,$$

jedná se tedy o veličinu typu $\{3, 1\}$. Zbylé veličiny mají následující typy: $\sigma \{3, -1\}$, $\rho \{1, 1\}$, $\tau \{1, -1\}$ a pro příslušné očárkované veličiny platí $p \rightarrow -p$, $q \rightarrow -q$. Nové čárkované značení některých koeficientů odpovídá korespondenci mezi nečárkovanými a čárkovanými veličinami, vycházející z vyjádření spinových koeficientů pomocí spinorové dyády zavedené na daném prostoročase (podrobnější popis tohoto přístupu lze nalézt přímo v [12]). Uvedme si ještě navíc případ spinového koeficientu, který se netransformuje správně, např.

$$\begin{aligned} \beta = \frac{1}{2}(\gamma_{102} + \gamma_{232}) &= \frac{1}{2}(n^\mu l_{\mu;\nu} m^\nu - \bar{m}^\mu m_{\mu;\nu} m^\nu) \rightarrow \frac{1}{2}(\bar{\lambda}^{-2} n^\mu (\lambda \bar{\lambda} l_\mu)_{;\nu} m^\nu + \\ &\quad - \bar{m}^\mu (\lambda \bar{\lambda}^{-1} m_\mu)_{;\nu} m^\nu) = \lambda \bar{\lambda}^{-1} \beta + \bar{\lambda}^{-1} \lambda_{;\nu} m^\nu. \end{aligned}$$

Transformovaná β zřejmě obsahuje člen navíc, díky kterému se nejedná o veličinu typu $\{1, -1\}$.

Také diferenciální operátory (1.18) používané v NP formalismu nejsou správně definované, protože požadujeme, aby po působení na skalár typu $\{p, q\}$ byl výsledek opět veličina se spinovou a boostovou váhou, což zde není splněno. Využijeme proto zbylých spinových koeficientů a za pomoci jejich lineární kombinace definujeme nové diferenciální operátory (derivate)

$$\begin{aligned}
\flat\eta &= (D - p\epsilon - q\bar{\epsilon})\eta, \\
\flat'\eta &= (D' + p\epsilon + q\bar{\epsilon}')\eta, \\
\delta\eta &= (\delta - p\beta + q\bar{\beta}')\eta, \\
\delta'\eta &= (\delta' + p\beta' - q\bar{\beta})\eta,
\end{aligned} \tag{1.30}$$

kde čárka značí záměnu $l^\mu \leftrightarrow n^\mu$ a $m^\mu \leftrightarrow \bar{m}^\mu$. Tyto operátory jsou popořadě typu $\{1, 1\}$, $\{-1, -1\}$, $\{1, -1\}$ a $\{-1, 1\}$.

Maxwellovy rovnice (1.23) vyjádřené pomocí těchto operátorů můžeme psát v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned}
2\pi J_l &= \flat\phi_1 - \delta'\phi_0 + \tau'\phi_0 - 2\rho\phi_1 + \kappa\phi_2, \\
2\pi J_n &= \delta\phi_2 - \flat'\phi_1 - \tau\phi_2 + 2\rho'\phi_1 - \kappa'\phi_0, \\
2\pi J_m &= \delta\phi_1 - \flat'\phi_0 + \rho'\phi_0 - 2\tau\phi_1 + \sigma\phi_2, \\
2\pi J_{\bar{m}} &= \flat\phi_2 - \delta'\phi_1 - \rho\phi_2 + 2\tau'\phi_1 - \sigma'\phi_0.
\end{aligned}$$

Pro skaláry ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 zřejmě z (1.21), (1.29) platí, že jsou popořadě typu $\{2,0\}$, $\{0,0\}$ a $\{-2,0\}$.

Nejčastěji používaná nulová tetráda je Kinnersleyho tetráda (1.25). Ta se sice sama o sobě ukazuje být užitečná pro zjednodušení výpočtů v Kerrově prostoročase [4], ale má i své nevýhody. Podívejme se na přidruženou ortonormální tetrádu, kterou lze zavést pro jakoukoliv nulovou tetrádu následujícím způsobem [13]

$$\begin{aligned}
e_0 &= \frac{l+n}{\sqrt{2}} & e_1 &= \frac{l-n}{\sqrt{2}} \\
e_2 &= \frac{m+\bar{m}}{\sqrt{2}} & e_3 &= \frac{m-\bar{m}}{i\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

– ta je singulární na horizontu událostí a pozorovatel, který je vůči ní v klidu, má nenulovou radiální rychlost. Tento nedostatek je způsoben tím, že vektory l^μ a n^μ jsou v jistém smyslu normalizovány nesymetricky vzhledem k hlavním nulovým směrům – viz faktor $\frac{1}{\Delta}$ u vektoru l^μ oproti faktoru $\frac{1}{2\Sigma}$ u n^μ v (1.25). To lze ale napravit nulovou rotací (1.25) s $r = \sqrt{\frac{\Delta}{2\Sigma}}$ a $e^{i\psi} = -\rho\sqrt{\Sigma}$, po které dostáváme symetrickou nulovou tetrádu (oba faktory u vektorů l^μ, n^μ přejdou po příslušné transformaci (1.27) na faktor $\frac{1}{\sqrt{2\Sigma\Delta}}$) a ortonormální tetráda přechází

v Boyerových-Lindquistových souřadnicích do tvaru

$$\begin{aligned} e_0^c &= \left(\frac{r^2 + a^2}{\sqrt{\Sigma\Delta}}, 0, 0, \frac{a}{\sqrt{\Sigma\Delta}} \right), \\ e_r^c &= \left(0, \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}, 0, 0 \right), \\ e_\theta^c &= \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}, 0 \right), \\ e_\phi^c &= \left(\frac{a \sin \theta}{\sqrt{\Sigma}}, 0, 0, \frac{1}{\sin \theta \sqrt{\Sigma}} \right), \end{aligned}$$

odpovídající duální tetráda je

$$\begin{aligned} \omega_c^0 &= \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}(dt - a \sin^2 \theta d\phi), \\ \omega_c^r &= \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}dr, \\ \omega_c^\theta &= \sqrt{\Sigma}d\theta, \\ \omega_c^\phi &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{\Sigma}}((r^2 + a^2)d\phi - a dt). \end{aligned}$$

V tomto tvaru byla tetráda nalezena Carterem v článku [14] z roku 1968, budeme ji nazývat Carterovou tetrádou a složky tenzorů vyjádřených vzhledem k ní nebo odpovídající symetrické nulové tetrádě budeme označovat indexem c .

Pozorovatelé, kteří jsou vzhledem k této tetrádě v klidu, stojí na daných souřadnicích r , θ a zároveň rotují úhlovou rychlostí $\frac{a}{r^2+a^2}$ [13]. Všimněme si, že na rozdíl od lokálně nerotujících pozorovatelů definovaných v kapitole 1.1.2 je tato rychlost nezávislá na θ . Mezi další vlastnosti Carterových pozorovatelů patří to, že jejich čtyřrychlost je vně horizontu událostí vždy časupodobná a z jejich pohledu se fotony pohybující se podél hlavních nulových geodetik pohybují čistě radiálně. Díky tomu nabývají Maxwellovy rovnice vzhledem ke Carterově tetrádě poměrně jednoduchého tvaru.

1.5 Perturbace na Kerrově pozadí

Budeme vycházet z Teukolskyho článku z roku 1973 [4], v němž odvozuje lineari-zované rovnice pro gravitační, elektromagnetické a neutrinové perturbace rotující černé díry. Opět se ukazuje, že standardní postup výpočtu, ve kterém se počítá s perturbací metriky $g_{\mu\nu}$, dává příliš složité výsledky a neseparovatelné rovnice. Teukolsky proto využívá NP formalismu – pro každou NP veličinu a pro každý vektor NP tetrády X platí $X = X_A + X_B$, kde X_A je veličina příslušející pozadí a X_B její perturbaci. Dosazením do NP rovnic a ponecháním pouze členů lineárních v B dostáváme hledané rovnice.

1.5.1 Testovací elektromagnetické pole

Podívejme se, jak vypadají po tomto postupu Maxwellovy rovnice. Amplituda elektromagnetického tenzoru energie a hybnosti je závislá na druhé mocnině elek-

tromagnetického pole, a tedy i perturbace vzniklá v gravitačním poli bude druhého řádu, tedy ji zanedbáváme (což je konsistentní s postupem, který je zmiňován v úvodu a s naším uvažováním „testovací“ proudové smyčky). Tím pádem dostaneme od gravitačních rovnic separované Maxwellovy rovnice v následujícím tvaru

$$(D - 2\rho)\phi_1 - (\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)\phi_0 = 2\pi J_l, \quad (1.31)$$

$$(\delta - 2\tau)\phi_1 - (\Delta + \mu - 2\gamma)\phi_0 = 2\pi J_m, \quad (1.32)$$

$$(D - \rho + 2\epsilon)\phi_2 - (\bar{\delta} + 2\pi)\phi_1 = 2\pi J_{\bar{m}}, \quad (1.33)$$

$$(\delta - \tau + 2\beta)\phi_2 - (\Delta + 2\mu)\phi_1 = 2\pi J_n, \quad (1.34)$$

kde J_l , J_m , $J_{\bar{m}}$ a J_n jsou průměty vektoru proudové hustoty J_μ na NP tetradu.

Nyní se pokusíme z těchto rovnic eliminovat ϕ_1 a získat tak dekaplované rovnice pro ϕ_0 a ϕ_2 . K tomu použijeme následující komutační relaci:

$$(D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})(\delta - 2\tau) - (\delta - \beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 2\tau)(D - 2\rho) = 0,$$

kteřá platí pro každou metriku typu D (viz kapitola 1.3.3). Zřejmě tedy musíme zapůsobit operátorem $(\delta - \beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} - 2\tau)$ na rovnici (1.31) a operátorem $(D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})$ na (1.32) a navzájem je odečíst, čím se odečtou členy úměrné ϕ_1 a dostáváme

$$\begin{aligned} & ((D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})(\Delta + \mu - 2\gamma) \\ & - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} + \pi - 2\alpha))\phi_0 = 2\pi J_0, \end{aligned} \quad (1.35)$$

kde

$$J_0 = (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})J_l - (D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})J_m.$$

S přihlédnutím k definicím (1.21), (1.18) a (1.19) zjišťujeme, že při záměně $l^\mu \leftrightarrow n^\mu$ a $m^\mu \leftrightarrow \bar{m}^\mu$ (tedy tetradových indexů $1 \leftrightarrow 2$ a $3 \leftrightarrow 4$) přejde rovnice (1.31) na (1.34) a (1.32) na (1.33), proto můžeme s využitím stejné záměny rovnou psát z (1.35) obdobnou rovnici pro ϕ_2 :

$$\begin{aligned} & ((\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})(D - \rho + 2\epsilon) \\ & - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})(\delta - \tau + 2\beta))\phi_2 = 2\pi J_2, \end{aligned} \quad (1.36)$$

kde

$$J_2 = (\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})J_{\bar{m}} - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})J_n.$$

Bohužel pravděpodobně neexistuje obdobná separovaná rovnice pro ϕ_1 , tento skalar tedy musíme určit ze znalosti ϕ_0 nebo ϕ_2 a integrace Maxwellových rovnic.

1.5.2 Teukolskyho rovnice

Doposud jsme pracovali v obecném NP formalismu pro prostoročas typu D, nyní si již zvolíme konkrétní souřadný systém. Budeme používat Kerrovu metriku v Boyerových-Lindquistových souřadnicích (1.3), a dále v těchto souřadnicích zvolíme tetradovou bázi – tou bude Kinnersleyho báze (1.25).

V tomto souřadnicovém systému a takto zvolené tetradě můžeme psát homogenní verzi Maxwellových rovnic (1.31)–(1.34) pro axiálně symetrický stacionární případ ve tvaru [3]

$$\begin{aligned}
-\sqrt{2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cot\theta}{\rho} + ia\sin\theta\right)\phi_0 &= 0, \\
\sqrt{2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} - \left(\frac{\Delta}{\rho}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2(r-M)}{\rho} + \Delta\right)\phi_0 &= 0, \\
-\frac{\rho^3}{\sqrt{2}}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} - \left(\frac{\partial}{\partial r} - \rho\right)\phi_2 &= 0, \\
\frac{\Delta\rho^2}{\sqrt{2}}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} - ia\sin\theta + \frac{\cot\theta}{\rho}\right)\phi_2 &= 0,
\end{aligned}$$

kde $\Phi_1 = \frac{\phi_1}{\rho^2}$.

Rovnice (1.35) a (1.36) společně se zde neuvedenými separovanými rovnicemi pro perturbace gravitačního a neutrinového pole (jejichž podrobný popis lze nalézt v [4]) lze shrnout do jedné společné rovnice

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial\phi} + \left(\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\
&- \Delta^{-s}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta^{s+1}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) - 2s\left(\frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \\
&- 2s\left(\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia\cos\theta\right)\frac{\partial\psi}{\partial t} + (s^2\cot^2\theta - s)\psi = 4\pi\Sigma T. \quad (1.37)
\end{aligned}$$

Je to rovnice pro polní veličinu ψ se zdrojem T a spinovou vahou s . Je platná pro testovací skalární ($s = 0$), neutrinové ($s = \pm\frac{1}{2}$) a elektromagnetické ($s = \pm 1$) pole a pro gravitační perturbace ($s = \pm 2$) na Kerrově pozadí. Konkrétně pro elektromagnetické pole je rovnice splněna pro $\psi = \phi_0 \wedge s = 1 \wedge T = J_0$ nebo $\psi = \rho^{-2}\phi_2 \wedge s = -1 \wedge T = \rho^{-2}J_2$.

Rovnici (1.37) pro vakuový případ $T = 0$ lze řešit separací proměnných $\psi = e^{-i\omega t}e^{im\phi}S(\theta)R(r)$, čímž dostáváme [4] rovnice pro radiální

$$\Delta^{-s}\frac{d}{dr}\left(\Delta^{s+1}\frac{dR}{dr}\right) + \left(\frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} + 4is\omega r - \lambda\right)R = 0 \quad (1.38)$$

a úhlovou část

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right) + \\
&+ \left(a^2\omega^2\cos^2\theta - \frac{m^2}{\sin^2\theta} - 2a\omega s\cos\theta - \frac{2ms\cos\theta}{\sin^2\theta} - s^2\cot^2\theta + s + A\right)S = 0,
\end{aligned} \quad (1.39)$$

kde $K \equiv (r^2 + a^2)\omega - am$ a $\lambda \equiv A + a^2\omega^2 - 2am\omega$, A je separační konstanta. Rovnice (1.39) spolu s podmínkami regularity na hranicích intervalu $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ tvoří tzv. Sturmův-Liouvilleův problém – pro dané s , m , $a\omega$ hledáme vlastní

funkce a vlastní čísla l rovnice (tedy konstanty, pro které má rovnice řešení rovné dané vlastní funkci), kde nejmenší vlastní číslo je $\max(|m|, |s|)$.

V tomto případě jsou vlastními funkcemi obecně tzv. sféroidální harmoniky ${}_sS_l^m$ se spinovou váhou s , speciálně např. v axiálně symetrickém případě, kdy $a\omega = 0$, tyto funkce přechází na sférické harmoniky se spinovou váhou s (viz kapitola 1.6.5). Obecně platí, že tyto vlastní funkce tvoří úplný ortogonální systém na intervalu $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$, a pro $T \neq 0$ lze (1.37) řešit rozvojem

$$4\pi\Sigma T = \int d\omega \sum_{l,m} G(r) {}_sS_l^m(\theta) e^{im\phi} e^{-i\omega t},$$

$$\psi = \int d\omega \sum_{l,m} R(r) {}_sS_l^m(\theta) e^{im\phi} e^{-i\omega t},$$

kde $R(r)$ je řešení radiální rovnice (1.38) s pravou stranou rovnou $G(r)$.

1.6 Speciální funkce

1.6.1 Ortogonální polynomy

Systém polynomů p_n nazveme ortogonálním na intervalu $x \in (a, b)$ vzhledem k váhové funkci $w(x)$ ($w(x) \geq 0$), jestliže platí [7]

$$\int_a^b w(x) p_n(x) p_m(x) dx = 0$$

pro $n, m = 0, 1, 2, \dots$ a $n \neq m$. Pro tyto polynomy můžeme psát několik důležitých vztahů. Obecně každý jejich systém splňuje diferenciální rovnici

$$g_2(x) \frac{d^2 p_n}{dx^2} + g_1(x) \frac{dp_n}{dx} + a_n p_n = 0$$

a rekurentní relace

$$p_{n+1} = (A_n + xB_n)p_n - C_n p_{n-1},$$

kde $g_1(x)$ a $g_2(x)$ jsou funkce nezávislé na n a a_n, A_n, B_n, C_n jsou konstanty závislé jenom na n . Příkladem známých a ve fyzice využívaných systémů ortogonálních polynomů jsou polynomy Hermitovy nebo Laguerrovy. Podrobně ale dále popíšeme vlastnosti tzv. Legendrových polynomů.

1.6.2 Legendrovy polynomy a Legendrovy funkce

Podívejme se nyní na následující problém [15]: Mějme výraz $(1 - 2zh + h^2)^{-1/2}$, který chceme rozšířit do mocninné řady ve tvaru

$$(1 - 2zh + h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z). \quad (1.40)$$

Pro $|2zh - h^2| < 1$ můžeme rozvinout výraz $(1 - 2zh + h^2)^{-1/2}$ do konvergentní řady v $2zh - h^2$ (užitím zobecněné binomické věty). Pokud navíc platí, že tato řada konverguje absolutně, můžeme jednotlivé mocniny $2zh - h^2$ roznásobit a

změnit jejich pořadí tak, abychom získali požadovanou řadu (1.40). Dosazením příslušného rozvoje můžeme přímo určit, že pro koeficient $P_n(z)$ platí

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} z^{n-2r}, \quad (1.41)$$

kde m značí $n/2$ pro n sudé a $(n-1)/2$ pro n liché. Zřejmě tedy vidíme, že P_0, P_1, P_2, \dots je systém polynomů v z . Nazýváme je Legendrovy polynomy a funkce $(1-2zh+h^2)^{-1/2}$ se nazývá jejich generující funkce.

Jaký je ale fyzikální význam předchozího postupu? Pro ilustraci si vezmeme jednoduchý příklad z klasické elektrostatiky [16]. Chceme určit elektrostatický potenciál bodového zdroje s nábojem q a souřadný systém volíme tak, že tento zdroj leží na ose z ve vzdálenosti a od počátku. Pro potenciál ve vzdálenosti R od zdroje platí $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{R}$. Pokud zavedeme obvyklým způsobem sférické souřadnice (r, ϕ, θ) , můžeme tento potenciál vyjádřit jako $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon} (r^2 - 2ar \cos \theta + a^2)^{-1/2}$, tedy dostáváme potenciál ve tvaru generující funkce (1.40), kde $z = \cos \theta$ a $h = \frac{a}{r}$. Z toho vyplývá, že můžeme provést multipólový rozvoj potenciálu a jeho koeficienty budou právě Legendrovy polynomy $P_n(\cos \theta)$.

Na základě znalosti generující funkce můžeme jednoduše dosazením určit některé speciální hodnoty Legendrových polynomů [15]:

$$\begin{aligned} P_n(1) &= 1 & P_n(-1) &= (-1)^n \\ P_{2n+1}(0) &= 0 & P_{2n}(0) &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Generující funkci také lze využít k odvození některých rekurentních relací. Jejím diferencováním vzhledem k h , dosazením z (1.40) a následujícím využitím jednoznačnosti mocninné řady dostáváme

$$P_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{n+1} z P_n(z) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(z). \quad (1.43)$$

Tento vztah je mimo jiné výhodný k rekurentnímu výpočtu polynomu libovolného stupně (spolu se znalostí $P_0(z) = 1, P_1(z) = z$).

Diferencováním generující funkce podle z a kombinací vzniklých rekurentních vztahů lze taky ukázat, že jsou řešením tzv. Legendrovy diferenciální rovnice

$$(1-z^2) \frac{d^2 P_n(z)}{dz^2} - 2z \frac{dP_n(z)}{dz} + n(n+1) P_n(z) = 0, \quad (1.44)$$

kterou můžeme pro $P_n(\cos \theta)$ psát ve speciálním tvaru

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right) + n(n+1) P_n(\cos \theta) = 0.$$

Přesným výpočtem výrazu $\frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n$ a porovnáním s (1.41) získáme tzv. Rodriguesovu formuli

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n, \quad (1.45)$$

kterou lze chápat i jako alternativní definici Legendrových polynomů. Jejím užitím a použitím metody per partes můžeme ihned dokázat relace ortogonalit:

$$\int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{pro } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{pro } m = n. \end{cases} \quad (1.46)$$

Legendrový polynomy jsou tedy systém ortogonálních polynomů s váhovou funkcí 1 na intervalu $(-1,1)$.

Použitím Cauchyho teorému [17] můžeme Legendrův polynom stupně n vyjádřit jako

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{P_n(t)}{(t-z)} dt, \quad (1.47)$$

kde C je libovolná uzavřená smyčka v komplexní rovině obkružující bod z proti směru hodinových ručiček. Dosazením Rodriguesovy formule (1.45) do (1.47) dostáváme integrální vyjádření Legendrových polynomů, tzv. Schläfliho integrální reprezentaci

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \oint_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}} dt. \quad (1.48)$$

Zatím jsme uvažovali pouze n přirozené, tedy případ Legendrových polynomů. Užitím integrální formule (1.48) ale můžeme definovat funkce $P_n(z)$ i když n není celé číslo – dostáváme obecnější sadu tzv. Legendrových funkcí 1.druhu.

1.6.3 Přidružené Legendrový polynomy

Podívejme se nyní na tzv. Helmholtzovu rovnici

$$\Delta f + k^2 f = 0, \quad (1.49)$$

kde k je konstanta a Δ Laplaceův operátor. Tuto rovnici můžeme psát ve sférických souřadnicích

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right) = -k^2 f$$

a řešit separací proměnných – po substituci $f = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ a standardních úpravách dostáváme rovnici ve tvaru

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P_n^m(\cos \theta) = 0.$$

Po dosazení $z = \cos \theta$ pak máme

$$(1-z^2) \frac{d^2 P_n^m(z)}{dz^2} - 2z \frac{dP_n^m(z)}{dz} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right) P_n^m(z) = 0, \quad (1.50)$$

tedy jen zobecněnou verzi (1.44). Regulární řešení pro celé číslo $m \geq 0$ můžeme vyjádřit pomocí $P_n(z)$ jako [16]

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z).$$

Funkce $P_n^m(z)$ nazýváme přidružené Legendrový polynomy.

Analogicky jako v případě obyčejných Legendrových polynomů platí rekurentní relace (1.43), navíc lze odvodit diferenciací rekurentní vztahy, pomocí kterých lze převést navzájem přidružené Legendrový polynomy s měnícím se n , příkladem takového vztahu je podle [7]

$$(z^2-1) \frac{dP_n^m}{dz}(z) = nzP_n^m(z) - (n+m)P_{n-1}^m(z). \quad (1.51)$$

Pro přidružené Legendrovy polynomy (a obecněji Legendrovy funkce) můžeme rozšířit vztah (1.42) a jejich hodnotu v nule vyjádřit jako [7]

$$P_n^m(0) = 2^m \pi^{-1/2} \cos \frac{1}{2}(n+m) \frac{\Gamma(\frac{m+n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-m-2}{2})}. \quad (1.52)$$

Navíc můžeme zobecnit relace ortogonality na

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_l^m(x) dx &= 0 && \text{pro } l \neq n, \\ \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^l(x) (1-x^2)^{-1} dx &= 0 && \text{pro } l \neq m. \end{aligned} \quad (1.53)$$

1.6.4 Sférické harmoniky

Podívejme se znovu na Helmholtzovu rovnici (1.49). Přejdem ke sférickým souřadnicím a separací proměnných dostáváme pro úhlovou část rovnice následující vyjádření:

$$\frac{\Phi(\phi)}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + n(n+1) \Theta(\theta) \Phi(\phi) = 0.$$

Po další separaci dostáváme azimutální rovnici

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = -m^2,$$

jejíž řešení můžeme po normalizaci psát [16] jako $\Phi(\phi) = e^{im\phi}$. Závislost na úhlu θ již byla vyřešena v kapitole 1.6.3, řešením jsou přidružené Legendrovy funkce, po normalizaci vyjádřené jako $\sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta)$ pro $-n \leq m \leq n$.

Nyní již můžeme definovat sférické harmoniky jako funkce ve tvaru

$$Y_n^m(\theta, \phi) \equiv (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}.$$

Jsou to funkce definované na jednotkové sféře a splňují relace ortogonality ve tvaru

$$\int_{\phi} \int_{\theta} Y_{n_1}^{*m_1}(\theta, \phi) Y_{n_2}^{m_2}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2}.$$

1.6.5 Sférické harmoniky se spinovou váhou s

Nyní si přiblížíme třídu funkcí zvaných sférické harmoniky se spinovou váhou s , které jsou zobecněným obyčejných sférických harmonik popsáných v kapitole 1.6.4. Budeme vycházet z článku [18] z roku 1967, který se zabývá jejich podrobnějším popisem a vlastnostmi. Tyto funkce jsou na rozdíl od obyčejných sférických harmonik závislé na dalším parametru, spinové váze s , kterou jsme definovali v kapitole 1.4. Pro trojrozměrný euklidovský prostor se sférickými souřadnicemi (r, θ, ϕ) lze spinovou váhu popsat následujícím způsobem: definujme si v něm ortonormální tetradu vektorových polí a, b, c , kde c má radiální směr, zatímco a

a b mají tečný směr ke sféře o poloměru r . Vektory a a b nejsou definovány jednoznačně, můžeme je rotovat podél osy dané c o úhel ψ – přesněji definujeme-li nový komplexní vektor m jako $m = \frac{a+ib}{\sqrt{2}}$, můžeme provést transformaci

$$m' = e^{i\psi} m.$$

Mějme nyní jakoukoliv veličinu η – řekneme, že tato veličina má spinovou váhu s , pokud se transformuje jako

$$\eta' = e^{is\psi} \eta. \quad (1.54)$$

Dále budeme volit konvenci, že reálná a imaginární část m míří podél souřadnicových čar.

Působení operátoru δ , který jsme obecněji definovali v (1.30), můžeme v našem případě pro veličinu η se spinovou váhou s psát jako [18]

$$\delta\eta = -(\sin\theta)^s \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i \csc\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) (\sin\theta)^{-s} \eta. \quad (1.55)$$

Dosazením transformace (1.54) do (1.55) dostáváme

$$(\delta\eta)' = e^{i(s+1)\psi} (\delta\eta),$$

tedy δ můžeme identifikovat jako zdvihací operátor spinové váhy (což je konzistentní s jeho dřívějším identifikováním jako operátor typu $\{1,-1\}$). Naopak snižovací operátor bude následující sdružený operátor k δ

$$\bar{\delta}\eta = -(\sin\theta)^{-s} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i \csc\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) (\sin\theta)^s \eta.$$

Nyní již můžeme za využití normálních sférických harmonik definovat sférické harmoniky se spinovou váhou s snížením nebo zvýšením jejich spinové váhy:

$${}_s Y_{lm}(\theta, \phi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{(l-s)!}{(l+s)!}} \delta^s Y_{lm}(\theta, \phi) & \text{pro } 0 \leq s \leq l \\ \sqrt{\frac{(l+s)!}{(l-s)!}} (-1)^s \bar{\delta}^{-s} Y_{lm}(\theta, \phi) & \text{pro } -l \leq s \leq 0, \end{cases} \quad (1.56)$$

Sférické harmoniky se spinovou váhou $s = 0$ jsou tedy přímo klasické sférické harmoniky.

Explicitně můžeme (1.56) vyjádřit jako

$${}_s Y_{lm}(\theta, \phi) = \left(\frac{(l+m)!(l-m)!(2l+1)}{(l+s)!(l-s)! 4\pi} \right)^{1/2} (\sin\theta/2)^{2l} \sum_r \binom{l-s}{r} \binom{l+s}{r+s-m} (-1)^{l-r-s} e^{im\phi} (\cot\theta/2)^{2r+s-m}.$$

Tyto funkce tvoří pro každé s zvlášť úplnou ortonormální sadu funkcí, jakoukoliv veličinu se spinovou váhou s tedy můžeme do ${}_s Y_{lm}$ rozvinout.

1.6.6 Legendrovy funkce 2.druhu

Legendrovy polynomy (kapitola 1.6.2) jsou jen jedno z řešení Legendrovy diferenciální rovnice (1.44), existuje ovšem druhé nezávislé řešení [16].

Podívejme se znovu na řešení Legendrovy rovnice

$$(1-x^2)\frac{d^2y(x)}{dx^2} - 2x\frac{dy(x)}{dx} + n(n+1)y(x) = 0 \quad (1.57)$$

a pokusme se najít její řešení ve formě nekonečné sumy $y = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{k+l}$. Dosazením do (1.57) dostáváme z rovnice pro první člen sumy podmínku $k(k-1) = 0$, máme tedy dva typy řešení – $k = 0$ a $k = 1$. První z nich označíme $p_n(x)$, pro jeho koeficienty platí rekurentní relace

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 & a_1 &= 0 \\ a_{l+2} &= -\frac{(n+l+1)(n-l)}{(l+1)(l+2)}a_l. \end{aligned}$$

Druhé řešení, odpovídající $k = 1$, označíme $q_n(x)$, platí pro něj

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 & a_1 &= 0 \\ a_{l+2} &= -\frac{(n+l+2)(n-l-1)}{(l+2)(l+3)}a_l. \end{aligned}$$

Celkové řešení (1.57) bude lineární kombinací $p_n(x)$ a $q_n(x)$ za předpokladu, že tato kombinace bude konvergovat. Lze ukázat, že pro obecné n bude řada konvergovat pro $x \in (-1,1)$ a bude obsahovat nekonečnou sumu, zatímco pro n přirozené máme konvergenci i v krajních bodech tohoto intervalu a suma je konečná.

Vhodnou volbou koeficientů lineární kombinace dostáváme následující vztah s Legendrovými polynomy [16]

$$P_n(x) = \begin{cases} (-1)^s \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} p_{2s}(x) & \text{pro } n = 2s, \\ (-1)^s \frac{(2s+1)!!}{(2s)!!} q_{2s+1}(x) & \text{pro } n = 2s+1, \end{cases}$$

zřejmě tedy dostáváme ještě druhý typ řešení vzniklý kombinací členů s opačnou paritou – značíme ho $Q_n(x)$ a nazýváme Legendrovy funkce 2. druhu:

$$Q_n(x) = \begin{cases} (-1)^s \frac{(2s)!!}{(2s-1)!!} q_{2s}(x) & \text{pro } n = 2s, \\ (-1)^{s+1} \frac{(2s)!!}{(2s+1)!!} p_{2s+1}(x) & \text{pro } n = 2s+1. \end{cases} \quad (1.58)$$

Tyto řady opět konvergují pro $x \in (-1,1)$, mimo tento interval divergují. Řešení lze ale rozšířit pro interval $|x| > 1$ rozvinutím do řady se zápornými koeficienty a dokonce i do celé komplexní roviny (s výjimkou bodů 1 a -1).

Ze znalosti řešení (1.57) $P_n(z)$ můžeme psát pro druhé řešení

$$Q_n(z) = P_n(z)B_n \int_{z_0}^z \frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2},$$

kde B_n je konstanta a z_0 libovolné. Tedy např. pro $Q_0(z)$ dostáváme

$$Q_0(z) = P_0(z)B_0 \int_{z_0}^z \frac{dx}{(1-x^2)[P_0(x)]^2} = A_0 + B_0 \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z},$$

kde A_0 je konstanta odpovídající vyčíslení libovolné dolní meze integrálu. Rozvinutím logaritmu do řady a porovnáním s (1.58) můžeme určit konstanty A_0 , B_0 a dostáváme

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}.$$

Podobně pro $Q_1(z)$ dostáváme

$$Q_1(z) = \frac{1}{2} z \ln \frac{1+z}{1-z} - 1,$$

funkce vyššího řádu můžeme poté určit pomocí rekurentních relací, platných ve stejném tvaru jako pro Legendrovy polynomy (1.43). Tyto vztahy platí pro reálná z na intervalu $z \in (-1,1)$. Pokud chceme vztahy rozšířit pro z komplexní mimo tento interval, získáme je nahrazením $\ln \frac{1+z}{1-z} \rightarrow \ln \frac{z+1}{z-1}$, kde vezmeme výslednou funkci spojitou všude mimo přechod přes úsečku $z \in (-1,1)$ na reálné ose.

Na závěr můžeme shrnout některé důležité vlastnosti [16] – $Q_n(z)$ diverguje v 1 a v nekonečno klesá k nule, pro paritu platí $Q_n(-z) = (-1)^{n+1}Q_n(z)$.

V analogii s přidruženými Legendrovými polynomy zavádíme také přidružené Legendrovy funkce 2. druhu

$$Q_n^m(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} Q_n(z),$$

které opět splňují diferenciální rovnici (1.50) a platí pro ně stejné rekurentní relace (1.51).

1.6.7 Hypergeometrické funkce

Nyní se budeme zabývat následující obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu:

$$x(1-x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + (c - (a+b+1)x) \frac{dy(x)}{dx} - aby(x) = 0,$$

kde a , b , c jsou konstanty a rovnice je zřejmě symetrická v koeficientech a , b . Tato rovnice se nazývá hypergeometrická rovnice a jedno možné řešení je tzv. hypergeometrická funkce [16] vyjádřená pomocí řady jako

$$y(x) = {}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \quad c \neq 0, -1, -2, -3, \dots, \quad (1.59)$$

kde jsme použili Pochhammerův symbol, definovaný následujícím způsobem:

$$(a)_0 = 1 \quad \wedge \quad (a)_n = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}.$$

Řada (1.59) konverguje pro $x \in (-1,1)$ pokud $c > a + b$ a pro $x = -1$ pokud $c > a + b - 1$.

Podívejme se nyní na podobnost mezi Legendrovou (1.57) a hypergeometrickou rovnicí (1.59). Porovnáním snadno zjistíme, že přechodem $x \rightarrow \frac{1-x}{2}$, $a = -n$, $b = n + 1$, $c = 1$ dostaneme z (1.59) rovnici (1.57). Hypergeometrické funkce jsou tedy obecnější třídou funkcí a Legendrovy polynomy (včetně přidružených a Legendrových funkcí 2.druhu, jak uvidíme dále) jsou jejich speciálním případem. Jejich vzájemný vztah tedy můžeme psát po dosazení speciálních hodnot parametrů hypergeometrické funkce následovně:

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right), \quad (1.60)$$

podobně získáme vztah pro přidružené Legendrovy polynomy

$$P_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!} {}_2F_1\left(m-n, m+n+1; m+1; \frac{1-x}{2}\right). \quad (1.61)$$

Legendrovy funkce 2. druhu zase můžeme převést na hypergeometrické funkce pomocí vztahu [7]

$$F(a, b; 2b; z) = 2^{2b} \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + b)}{\Gamma(2b - a)} z^{-b} (1-z)^{\frac{1}{2}(b-a)} e^{i\pi(a-b)} Q_{b-1}^{b-a}\left(\frac{2}{z} - 1\right). \quad (1.62)$$

2. Studovaná řešení

V této kapitole stručně shrneme publikované články, zabývající se polem proudové smyčky okolo Kerrovy černé díry, a postup, jakým v nich bylo pole určeno. Toto shrnutí poté využijeme v následujících kapitolách k dalším výpočtům.

Nadále budeme používat následující značení: Pokud budeme mluvit o proudové smyčce (ať už v ekvatoriální rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$ nebo mimo ni pro obecné $\theta = \theta_0$), budeme vždy myslet smyčku umístěnou symetricky vzhledem k počátku (tedy vzhledem k černé díře) na poloměru $r = r_0$. Také veličiny počítané v bodě $r = r_0$ budeme někdy značit zkráceně pouze dolním indexem 0 (tedy např. $\Delta_0 = r_0^2 - 2Mr_0 + a^2$ apod.) – toto samozřejmě neplatí pro veličiny typu $\phi_0(r, \theta)$ nebo $R_0(r)$, které jsou označeny stejným indexem z jiného důvodu, u nich bude ale závislost na r jasně zřetelná z kontextu. V některých případech budeme používat pro zjednodušení zápisu substituce

$$u \equiv \frac{r - M}{\sqrt{M^2 - a^2}} \quad \text{a} \quad x \equiv \frac{r - r_-}{r_+ - r_-}, \quad (2.1)$$

kde $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$, zřejmě tedy platí $2x = u + 1$.

2.1 Chitre a Vishveshwara

Článek [19] z roku 1975 řeší elektromagnetické pole proudové smyčky umístěné v ekvatoriální rovině Kerrovy černé díry, poté určuje jeho asymptotické chování ve velkých vzdálenostech a na závěr studuje nabíjení černé díry způsobené vlivem elektrického pole smyčky.

Článek pracuje v NP formalismu s použitím Kinnersleyho tetřady (1.25) a NP veličin zavedených v (1.21), (1.26). Dále pracuje s Teukolskyho rovnicí (1.37) pro veličinu $\psi = \frac{\phi_2}{\rho^2}$, která přejde do následujícího tvaru:

$$-\Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + (\cot^2 \theta + 1) \psi = 4\pi J.$$

Proudová hustota je zvolena tak, aby lokálně nerotující pozorovatel (jehož ortonormální tetřada je dána (1.8)) naměřil v rovině $((r), (\theta))$ proud I , čímž dostáváme v Boyerových-Lindquistových souřadnicích

$$J^\mu = \left(0, 0, 0, \frac{I}{r_0^2} \left(\frac{r_0^2 - 2Mr_0 + a^2}{r_0^2 + 2Ma^2/r_0 + a^2} \right)^{1/2} \delta(r - r_0) \delta(\cos \theta) \right).$$

Rozvojem ψ a J do řad

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{l=1}^{\infty} R_l(r) {}_{-1}S_l^0(\theta) \\ J &= \sum_{l=1}^{\infty} J_l(r) {}_{-1}S_l^0(\theta) \end{aligned}$$

sférických harmonik se spinovou váhou -1

$${}_{-1}S_l^0(\theta) = \left(\frac{2l + 1}{4\pi l(l + 1)} \right)^{1/2} \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta}$$

dostáváme rovnici pro radiální módy

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{\Delta} R_l = -4\pi \frac{J_l(r)}{\Delta}, \quad (2.2)$$

kde

$$J_l(r) = 2\pi I \left(\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)} \right)^{1/2} \left(\frac{r_0^2 - 2Mr_0 + a^2}{r_0^2 + a^2 + 2Ma^2/r_0} \right)^{1/2} \left[-\frac{i(r_0^2 + a^2 - 2Mr_0)}{2\sqrt{2}} \delta(r - r_0) \left[\frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \right]_{\pi/2} + \frac{al(l+1)}{2\sqrt{2}r_0} (r_0^2 - 2Mr_0 + a^2) P_l(0) \delta(r - r_0) - \frac{i(a^2 + r_0^2)}{2\sqrt{2}r_0} (r^2 - 2Mr + a^2) \delta'(r - r_0) \left[\frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \right]_{\pi/2} \right].$$

Dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice (2.2) jsou

$$F_l(r) = -\frac{(2l+1)!}{2^l(l+1)!l!(M^2 - a^2)^{(l+1)/2}} \Delta \frac{dQ_l}{dr} \left(\frac{r - M}{(M^2 - a^2)^{1/2}} \right), \quad (2.3)$$

$$G_l(r) = \frac{2^l l!(l-1)!(M^2 - a^2)^{l/2}}{(2l)!} \Delta \frac{dP_l}{dr} \left(\frac{r - M}{(M^2 - a^2)^{1/2}} \right),$$

řešení nehomogenní rovnice (2.2) je pak

$$R_l(r) = \begin{cases} \frac{F_l(r)}{2l+1} \int \frac{4\pi J_l(r)}{\Delta} G_l(r) dr & \text{pro } r > r_0, \\ \frac{G_l(r)}{2l+1} \int \frac{4\pi J_l(r)}{\Delta} F_l(r) dr & \text{pro } r < r_0. \end{cases}$$

Celkem tedy dostáváme pro $r > r_0$:

$$\phi_2(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} H_l^>(r_0) \rho^2 F_l(r) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \quad (2.4)$$

a integrací Maxwellových rovnic

$$\phi_1(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{2} H_l^>(r_0) \rho^2 \left[\left(r \frac{dF_l(r)}{dr} - F_l(r) \right) P_l(\cos \theta) + \frac{ia}{2l+1} \frac{dF_l(r)}{dr} (lP_{l+1}(\cos \theta) + (l+1)P_{l-1}(\cos \theta)) \right], \quad (2.5)$$

kde

$$H_l^>(r_0) = \left(\frac{\Delta_0}{r_0^2 + a^2 + 2Ma^2/r_0} \right)^{1/2} \frac{\pi I}{\sqrt{2}l(l+1)} \left[i \left(\frac{a^2 + r_0^2}{r_0} \frac{dG_l}{dr}(r_0) - G_l(r_0) \right) \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{\pi l \Gamma((l+2)/2)}{2 \Gamma((l+1)/2)} \right) + \frac{a}{r_0} l(l+1) G_l(r_0) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\pi l \Gamma((l+1)/2)}{2 \Gamma((l+2)/2)} \right) \right].$$

V případě $r < r_0$ jsou vztahy totožné po záměně $H_l^>(r_0) \leftrightarrow H_l^<(r_0)$, $F_l \leftrightarrow G_l$.

2.2 Petterson

Článek [3] z roku 1975 určuje elektromagnetické pole nabitě proudové smyčky v ekvatoriální rovině Kerrovy černé díry a poté ukazuje, že pro minimum energie je náboj černé díry roven opačnému náboji smyčky a tento rovnovážný náboj určuje.

Článek pracuje v NP formalismu s použitím Kinnersleyho tetrády (1.25) a NP veličin zavedených v (1.21), (1.26). Úpravou Maxwellových rovnic (1.31)–(1.34) (vyloučením ϕ_1) dostáváme nejdříve vztah

$$\phi_2 = -\frac{\rho^2 \Delta}{2} \phi_0, \quad (2.6)$$

dále pak počítá s Teukolskyho rovnicí (1.37) pro ϕ_0 . Pro stacionární axiálně symetrický případ přejdou separované rovnice (1.38) a (1.39) na

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \frac{d}{dr} \left(\Delta^2 \frac{dR_0}{dr} \right) - (l-1)(l+2)R_0 &= 0, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] S &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Po substituci $R_0(r) = \Delta^{-1/2} R(r)$ a substituci u za r (2.1) dostáváme rovnici

$$(1-u^2) \frac{d^2 R}{du^2} - 2u \frac{dR}{du} + \left[l(l+1) - \frac{1}{1-u^2} \right] R = 0,$$

čímž soustava (2.7) přejde na dvě Legendrovy rovnice (1.50), jejichž řešením vychází

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{2} \Delta^{-1/2} \left[\alpha_l P_l^1(u) + \beta_l Q_l^1(u) \right] P_l^1(\cos \theta) = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{2} \left[\alpha_l \frac{dP_l(u)}{dr} + \beta_l \frac{dQ_l(u)}{dr} \right] \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Integrací Maxwellových rovnic (1.31), (1.32) po dosazení za ϕ_0 dostáváme výsledek pro ϕ_1 v následujícím tvaru:

$$\phi_1 = \rho^2 Q + \sum_{l=1}^{\infty} \rho^2 \left[\alpha_l A_l(r, \theta) + \beta_l B_l(r, \theta) \right], \quad (2.9)$$

kde

$$A_l = \frac{l(l+1)}{\rho} P_l(u) P_l(\cos \theta) - ia \sin \theta P_l(u) \frac{dP_l}{d\theta}(\cos \theta) + \Delta \frac{dP_l(u)}{dr} P_l(\cos \theta)$$

a B_l získáme z A_l záměnou $P_l(u) \rightarrow Q_l(u)$. Konstanta Q určuje náboj černé díry, což je v [3] ukázáno z tvaru vektorového potenciálu.

Jeho pro axiálně symetrický stacionární případ jediné nenulové složky A_t , A_ϕ určíme integrací

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_t}{\partial r} &= -F_{tr} & \frac{\partial A_\phi}{\partial r} &= -F_{\phi r} \\ \frac{\partial A_t}{\partial \theta} &= -F_{t\theta} & \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} &= -F_{\phi\theta}, \end{aligned}$$

kde složky tenzoru elektromagnetického pole vypočítáme z (1.22). Výsledek pak je

$$-A_t = \frac{rQ}{\Sigma} + \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{\Delta}{\Sigma} \frac{dP_l}{dr} P_l(\cos \theta) (r\alpha_l^r - a \cos \theta \alpha_l^i) + \frac{a \sin \theta}{\Sigma} P_l(u) \frac{dP_l}{d\theta} (a \cos \theta \alpha_l^r + r\alpha_l^i) \right] + \alpha_t, \quad (2.10)$$

$$A_\phi = a \sin^2 \theta \frac{rQ}{\Sigma} + \sum_{l=1}^{\infty} \left[a \sin^2 \theta \frac{\Delta}{\Sigma} \frac{dP_l}{dr} P_l(\cos \theta) (r\alpha_l^r - a \cos \theta \alpha_l^i) + \sin \theta \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} P_l(u) \frac{dP_l}{d\theta} (a \cos \theta \alpha_l^r + r\alpha_l^i) - \frac{\Delta \sin \theta}{l(l+1)} \alpha_l^i \frac{dP_l}{dr} \frac{dP_l}{d\theta} \right] + \alpha_\phi, \quad (2.11)$$

pro $r < r_0$, řešení pro $r > r_0$ lze získat záměnou $P_l(u) \rightarrow Q_l(u)$ a $\alpha_l \rightarrow \beta_l$, α_t a α_ϕ jsou konstanty (v posledním členu $\frac{\Delta \sin \theta}{l(l+1)} \alpha_l^i \frac{dP_l}{dr} \frac{dP_l}{d\theta}$ jsme doplnili v článku [3] zapomenutý faktor Δ).

Dále se článek pokouší určit konstanty α_l , β_l pro daný zdroj – ten je zde charakterizován proudovou hustotou

$$J^\mu = \frac{1}{2\pi r_0^2} (q, 0, 0, I) \delta(r - r_0) \delta(\cos \theta),$$

kde I je parametr charakterizující proud a q náboj proudové smyčky. Po dosazení do Maxwellových rovnic (1.31) a (1.32) a jejich integraci dostává vztahy pro radiální skok v místě smyčky ($r = r_0$),

$$[\phi_1] = \frac{aI - q}{r_0^2} \delta(\cos \theta),$$

$$\frac{\Delta}{2\Sigma} [\phi_0] = \frac{i}{\sqrt{2}r_0^3} [I(r_0^2 + a^2) - aq] \delta(\cos \theta),$$

které poté může porovnat se vztahy plynoucími z (2.8), (2.9):

$$[\phi_1] = \sum_{l=1}^{\infty} r_0^{-2} (\beta_l B_l - \alpha_l A_l),$$

$$[\phi_0] = \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{2} \left[\beta_l \frac{dQ_l}{dr}(u) - \alpha_l \frac{dP_l}{dr}(u) \right] P_l^1(\cos \theta).$$

Toto porovnání vede k soustavě rovnic pro α_l^r , α_l^i , β_l^r a β_l^i (kde index r značí reálnou a i imaginární část) – pro reálnou a imaginární část $[\phi_1]$ dostáváme

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left[\beta_l^r \left(\Delta \frac{dQ_l}{dr}(u) - l(l+1)rQ_l(u) \right) - \alpha_l^r \left(\Delta \frac{dP_l}{dr}(u) - l(l+1)rP_l(u) \right) \right]_{r_0} P_l(\cos \theta) + a \left(\beta_l^i Q_l(u) - \alpha_l^i P_l(u) \right)_{r_0} P_l^1(\cos \theta) = (aI - q) \delta(\cos \theta), \quad (2.12)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left[\beta_l^i \left(\Delta \frac{dQ_l}{dr}(u) - l(l+1)rQ_l(u) \right) - \alpha_l^i \left(\Delta \frac{dP_l}{dr}(u) - l(l+1)rP_l(u) \right) \right]_{r_0} P_l(\cos \theta) - a(\beta_l^r Q_l(u) - \alpha_l^r P_l(u))_{r_0} P_l^1(\cos \theta) = 0 \quad (2.13)$$

a pro reálnou a imaginární část $[\phi_0]$ máme

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left[\beta_l^r \frac{dQ_l}{dr}(u) - \alpha_l^r \frac{dP_l}{dr}(u) \right]_{r_0} P_l^1(\cos \theta) = 0,$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left[\beta_l^i \frac{dQ_l}{dr}(u) - \alpha_l^i \frac{dP_l}{dr}(u) \right]_{r_0} P_l^1(\cos \theta) = \frac{\Sigma}{\Delta r_0^3} [I(r_0^2 + a^2) - aq] \delta(\cos \theta).$$

V článku [3] je ale v tomto místě chyba. Rovnice (2.12) a (2.13) jsou napsány špatně – chybí jejich část a tím se výpočet zjednodušuje, koeficienty α a β jsou díky tomu určeny špatně (ve skutečnosti jsou i přes chybný postup špatně určeny pouze imaginární části koeficientů, reálné odpovídají správnému výsledku). Články [20] a [21] se poté zaměřují na opravu této chyby.

2.3 Bičák a Dvořák

Článek [22] z roku 1976 se zabývá výpočtem elektromagnetického pole obecného stacionárního zdroje v blízkosti Kerrovy černé díry. Speciálně jsou určeny pole bodového náboje, nabitého prstence, proudové smyčky a magnetického dipólu.

Článek pracuje v NP formalismu s použitím Kinnersleyho tetrády (1.25) a NP veličin (1.26). Místo zavedených skalárů (1.21) používá ale transformované skaláry

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}_0 &\equiv \phi_0, \\ \widetilde{\phi}_1 &\equiv \frac{(r - ia \cos \theta)^2}{(r_+ - r_-)^2} \phi_1, \\ \widetilde{\phi}_2 &\equiv \frac{(r - ia \cos \theta)^2}{(r_+ - r_-)^2} \phi_2. \end{aligned}$$

Maxwellovy rovnice (1.23) tak přejdou do tvaru

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(r_+ - r_-)^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{a}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \widetilde{\phi}_1 - (r - ia \cos \theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \widetilde{\phi}_0 \\ + ia \sin \theta \widetilde{\phi}_0 = \sqrt{2}(r - ia \cos \theta)^2 2\pi J_l, \quad (2.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(r_+ - r_-)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \widetilde{\phi}_1 + (r - ia \cos \theta) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{a}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Delta \widetilde{\phi}_0 \\ - \Delta \widetilde{\phi}_0 = \sqrt{2}(r - ia \cos \theta) \Sigma 2\pi J_m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \widetilde{\phi}_1 - (r - ia \cos \theta) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{a}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \widetilde{\phi}_2 \\ + \widetilde{\phi}_2 = -\sqrt{2} \frac{(r - ia \cos \theta)^2}{(r_+ - r_-)^2} 2\pi J_{\bar{m}}, \quad (2.15) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{a}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \tilde{\phi}_1 + (r - ia \cos \theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{\tilde{\phi}_2}{\Delta} - \frac{ia \sin \theta}{\Delta} \tilde{\phi}_2 = -\sqrt{2} \frac{\Sigma(r - ia \cos \theta)}{\Delta(r_+ - r_-)^2} 2\pi J_n.$$

Z článku Teukolského [4] víme, že můžeme rozvést ϕ_2 do sférických harmonik se spinovou váhou jako

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l {}^2R_{lm}(r) {}_{-1}Y_{lm}(\theta, \phi),$$

z Teukolskyho rovnice (1.37) dostáváme pro ${}^2R_{lm}$ vztah

$$\begin{aligned} (r^2 - 2Mr + a^2 \frac{d^2({}^2R_{lm})}{dr^2}) + \left(\frac{a^2 m^2 - 2iam(r - M)}{r^2 - 2Mr + a^2} - l(l + 1) \right) {}^2R_{lm} \\ = -4\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(r - ia \cos \theta)^2}{(r_+ - r_-)^2} \Sigma J_{2-1} \bar{Y}_{lm} \sin \theta d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (2.16)$$

kde

$$\begin{aligned} J_2 = \frac{-\Delta}{2\sqrt{2}\Sigma(r - ia \cos \theta)^2} \left[\sqrt{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{a}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{r - ia \cos \theta} \right) (r - ia \cos \theta)^2 J_{\bar{m}} \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{ia \sin \theta}{r - ia \cos \theta} \right) \frac{\Sigma(r - ia \cos \theta)}{\Delta} J_n \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Po substituci ${}^2R_{lm}(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-iZ_m} {}^2y_{lm}(x)$ s x daným (2.1) a $Z_m = \frac{am}{r_+ - r_-}$ přechází homogenní rovnice (2.16) do tvaru hypergeometrické rovnice pro ${}^2y_{lm}$, jejíž dvě nezávislá řešení lze psát jako

$$\begin{aligned} {}^2y_{lm}^{(I)} &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2iZ_m} x(x-1) F(l+2, 1-l, 2-2iZ_m; x), \\ {}^2y_{lm}^{(II)} &= (-x)^{-l} F(l, l+1-2iZ_m, 2l+2; x^{-1}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Kombinací homogenních Maxwellových rovnic (2.14) a (2.15) a rozvojem $\phi_0 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l {}^0R_{lm}(r) {}_{-1}Y_{lm}(\theta, \phi)$ získáváme vztah

$${}^0R_{lm} = \frac{2(r_+ - r_-)^2}{l(l+1)} \left(\frac{d}{dr} + \frac{iam}{\Delta} \right) \left(\frac{d}{dr} + \frac{iam}{\Delta} \right) {}^2R_{lm}$$

a po substituci ${}^0R_{lm}(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-iZ_m} {}^0y_{lm}(x)$ dále vztah

$${}^0y_{lm} = \frac{2}{l(l+1)} \frac{d^2}{dx^2} {}^2y_{lm},$$

do kterého už lze explicitně dosadit z (2.18).

Pro výpočet $\tilde{\phi}_1$ využijeme axiální symetrie a budeme předpokládat tvar

$$\tilde{\phi}_1(x, \theta, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-iZ_m} e^{im\phi} \tilde{\phi}_{1m}(x, \theta).$$

Dosazením známých vztahů do (2.14) dostáváme

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1 = & \frac{\sqrt{2}}{(r_+ - r_-)} \sum_{l,m} [l(l+1)]^{-1} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-iZ_m} \left[(l(l+1))^{1/2} \right. \\ & \left. \left((r - ia \cos \theta) \frac{d}{dx} {}_2y_{lm} - (r_+ - r_-)^2 y_{lm} \right) {}_0Y_{lm}(\theta, \phi) - ia \sin \theta \frac{d}{dx} {}_2y_{lm1} Y_{lm}(\theta, \phi) \right] \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} C \delta_{m0} e^{im\phi} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-iZ_m}, \end{aligned}$$

kde C je konstanta (člen $C\delta_{m0}$ vznikl jako integrační konstanta, jeho tvar byl určen ze zbylých Maxwellových rovnic).

Z chování jednotlivých řešení v nekonečnu a v blízkosti horizontu lze usoudit, že veličiny označené (I) odpovídají vnitřnímu a (II) vnějšímu řešení.

Pro zdroj, který se nachází mezi poloměry r_1 a r_2 ($r_1 < r_2$), dostáváme tedy pro původní veličiny ϕ_0 , ϕ_1 , ϕ_2 :

$$\phi_0 = \sum_{l,m} a_{lm} 2(l(l+1))^{-1} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-iZ_m} \frac{d^2}{dx^2} ({}_2y_{lm}^{(I)}) {}_1Y_{lm},$$

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \frac{\sqrt{2}(r_+ - r_-)}{(r - ia \cos \theta)^2} \sum_{l,m} a_{lm} (l(l+1))^{-1} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-iZ_m} \left[(l(l+1))^{1/2} ((r - ia \cos \theta) \right. \\ & \left. \frac{d}{dx} {}_2y_{lm}^{(I)} - (r_+ - r_-)^2 y_{lm}^{(I)}) {}_0Y_{lm} - ia \sin \theta \frac{d}{dx} ({}_2y_{lm}^{(I)}) {}_1Y_{lm} \right] + \frac{E_a}{(r - ia \cos \theta)^2}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\phi_2 = \frac{(r_+ - r_-)^2}{(r - ia \cos \theta)^2} \sum_{l,m} a_{lm} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-iZ_m} {}_2y_{lm-1}^{(I)} {}_1Y_{lm}. \quad (2.20)$$

Tyto vztahy jsou platné pro $r_+ \leq r < r_1$, vztahy pro $r > r_2$ dostaneme záměnou $(I) \rightarrow (II)$ a $E_a \rightarrow E_b$, $a_{lm} \rightarrow b_{lm}$ (toto jsou konstanty závislé na zdroji elektromagnetického pole).

Dále jsou po určení obecného tvaru pole v článku dopočtené konstanty příslušné několika různým zdrojům. Pro naše účely se ale zmíníme pouze o nenabitě proudové smyčce v ekvatoriální rovině. Ta je v [22] popsána proudovou hustotou ve tvaru

$$J^\mu = \left(0, 0, 0, \frac{I}{r_0} \left(\frac{\Delta_0}{A_0} \right)^{1/2} \right) \delta(r - r_0) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

tak, aby celkový proud měřený lokálně nerotujícím pozorovatelem byl roven I . Z (2.17) dostáváme

$$\begin{aligned} {}^2J_{lm} = & -\frac{\Delta \delta_{m0}}{\sqrt{2}(r_+ - r_-)^2} \pi I \left(\frac{\Delta_0}{A_0} \right)^{1/2} \left[i(r_0^2 + a^2) {}_{-1}\bar{Y}_{l0} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \delta'(r - r_0) + \right. \\ & \left. + \left(i r_{0-1} \bar{Y}_{l0} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) - a(l(l+1))^{1/2} {}_0\bar{Y}_{l0} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \right) \delta(r - r_0) \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

řešení celé nehomogenní rovnice (2.16) můžeme pak získat z řešení homogenní rovnice:

$${}^2R_{lm}(x) = {}^2R_{lm}^{(I)}(x) \int \frac{4\pi^2 J_{lm}(\xi)^2 R_{lm}^{(II)}(\xi)}{\xi(\xi-1)W({}^2R_{lm}^{(I)}, {}^2R_{lm}^{(II)}), \xi} d\xi + \\ - {}^2R_{lm}^{(II)}(x) \int \frac{4\pi^2 J_{lm}(\xi)^2 R_{lm}^{(I)}(\xi)}{\xi(\xi-1)W({}^2R_{lm}^{(I)}, {}^2R_{lm}^{(II)}), \xi} d\xi,$$

kde $W({}^2R_{lm}^{(I)}, {}^2R_{lm}^{(II)}, \xi)$ je wronskián ${}^2R_{lm}^{(I)}, {}^2R_{lm}^{(II)}$ v ξ . Ten lze vyjádřit jako

$$W({}^2R_{lm}^{(I)}, {}^2R_{lm}^{(II)}, \xi) = \frac{(2l+1)\Gamma(2-2iZ_m)}{(l+1)\Gamma(l+1-2iZ_m)},$$

čímž dostáváme obecný vzorec pro koeficienty a_{lm}, b_{lm} :

$$a_{lm} = -4\pi \frac{(l+1)\Gamma(l+1-2iZ_m)}{(2l+1)\Gamma(2-2iZ_m)} \int_{x_1-\epsilon}^{x_2+\epsilon} \frac{{}^2J_{lm}(\xi)^2 R_{lm}^{(II)}(\xi)}{\xi(\xi-1)} d\xi.$$

b_{lm} dostáváme záměnou $(II) \rightarrow (I)$.

Vidíme, že (2.21) se skládá z členů úměrných $\Delta\delta(r-r_0)$ a $\Delta\delta'(r-r_0)$. Pro ty lze podle [22] v případě $a < M$ získat vyjádření

1. pro ${}^2J_{lm} = C\Delta\delta(r-r_0)$, $C = \text{konst.}$

$$a_{lm} = -4\pi C (r_+ - r_-) \frac{(l+1)\Gamma(l+1-2iZ_m)}{(2l+1)\Gamma(2-2iZ_m)} \left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^{-iZ_m} (-x_0)^{-l} \\ F(l, l+1-2iZ_m, 2l+2; x_0^{-1}),$$

$$b_{lm} = -4\pi C (r_+ - r_-) \frac{(l+1)\Gamma(l+1-2iZ_m)}{(2l+1)\Gamma(2-2iZ_m)} \left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^{iZ_m} x_0(x_0-1) \\ F(l+2, 1-l, 2-2iZ_m; x_0).$$

2. pro ${}^2J_{lm} = C\Delta\delta'(r-r_0)$, $C = \text{konst.}$

$$a_{lm} = -4\pi C \frac{(l+1)\Gamma(l+1-2iZ_m)}{(2l+1)\Gamma(2-2iZ_m)} \left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^{-iZ_m} (-x_0)^{-l} \left[\frac{iZ_m}{x_0(x_0-1)} \right. \\ \left. F(l, l+1-2iZ_m, 2l+2; x_0^{-1}) + \frac{l}{x_0} F(l+1, l+1-2iZ_m, 2l+2; x_0^{-1}) \right],$$

$$b_{lm} = -4\pi C \frac{(l+1)\Gamma(l+1-2iZ_m)}{(2l+1)\Gamma(2-2iZ_m)} \left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^{iZ_m} (-x_0)^{-l} [iZ_m \\ F(l+2, 1-l, 2-2iZ_m; x_0) + (1-2iZ_m)F(l+1, -l, 1-2iZ_m; x_0)].$$

Z (2.21) tedy máme celkem

$$a_{lm} = \frac{\delta_{m0} 4\pi^2 I}{\sqrt{2}(r_+ - r_-)} \frac{(l+1)!!}{(2l+1)!} \left(\frac{\Delta_0}{A_0}\right)^{1/2} (-x_0)^{-l} \left[i \frac{r_0^2 + a^2}{r_+ - r_-} {}_{-1}\bar{Y}_{l0} \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \right. \\ \left. \frac{l}{x_0} F(l+1, l+1, 2l+2; x_0^{-1}) + \left(i r_{0-1} \bar{Y}_{l0} \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - a(l(l+1))^{1/2} {}_0\bar{Y}_{l0} \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \right) \right. \\ \left. F(l, l+1, 2l+2; x_0^{-1}) \right], \quad (2.22)$$

$$b_{lm} = \frac{\delta_{m0}4\pi^2 I}{\sqrt{2}(r_+ - r_-)} \frac{(l+1)!!}{(2l+1)!} \left(\frac{\Delta_0}{A_0}\right)^{1/2} \left[i \frac{r_0^2 + a^2}{r_+ - r_-} {}_{-1}\bar{Y}_{l0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \right. \\ \left. F(l+1, -l, 1; x_0) + \left(i r_{0-1} \bar{Y}_{l0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - a(l(l+1))^{1/2} {}_0\bar{Y}_{l0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \right) \right. \\ \left. x_0(x_0 - 1)F(l+2, 1-l, 2; x_0) \right]. \quad (2.23)$$

Článek [22] v tento moment obsahuje pravděpodobně překlep, místo zde uvedeného členu $\left(\frac{\Delta_0}{A_0}\right)^{1/2}$ je ve vyjádření a_{lm} , b_{lm} člen $\left(\frac{\Delta_0}{\Sigma_0}\right)^{1/2}$. Ten se ale nezdá být konzistentní s předchozím výpočtem ani s výsledky ostatních článků (podrobněji viz kapitola 3).

2.4 Znajek

Článek [20] z roku 1977 počítá elektromagnetické pole nabitě proudové smyčky axiálně symetricky umístěné ne nutně v ekvatoriální rovině Kerrovy černé díry, navíc je vypočten potenciál indukovaný na černé díře.

Článek pracuje v NP formalismu s použitím NP veličin (1.26) a (1.21), na rozdíl od všech ostatních článků ale využívá jinou tetrádu – tou je symetrická nulová tetráda popsaná v kapitole 1.4, vzniklá z Kinnersleyho tetrády (1.25) transformací (1.27), (1.28) s $r = \sqrt{\frac{\Delta}{2\Sigma}}$ a $e^{i\psi} = -\rho\sqrt{\Sigma}$.

Z kapitoly 1.4 víme, že skaláry ϕ_0 , ϕ_1 a ϕ_2 jsou popořadě typu $\{2,0\}$, $\{0,0\}$, $\{-2,0\}$, a tedy víme, jak se budou transformovat. Znajek proto ve svém článku využívá obecné řešení Pettersona (2.6), (2.8), (2.9), které pouze transformuje do podoby

$$\phi_0^c = -\rho\sqrt{\Delta} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\alpha_l \frac{dP_l(u)}{dr} + \beta_l \frac{dQ_l(u)}{dr} \right) P_l^1(\cos\theta), \\ \phi_1^c = \rho^2 \sum_{l=0}^{\infty} (\alpha_l A_l + \beta_l B_l), \\ \phi_2^c = -\phi_0^c,$$

kde členy s α_l odpovídají vnitřnímu a členy s β_l vnějšímu řešení, člen α_0 je nulový a β_0 bude nulový pro nenabitou černou díru.

Dále určuje složky vektorového potenciálu, které se shodují s výsledkem Pettersona (2.10), (2.11), až na faktor 2 ($A_\mu(\text{Znajek}) = 2A_\mu(\text{Petterson})$).

K určení α_l , β_l užívá proudovou hustotu ve tvaru

$$J^\mu = \frac{1}{2\pi\Sigma} (q, 0, 0, I) \delta(r - r_0) \delta(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

tak, aby smyčka v místě (r_0, θ_0) měla celkový náboj q a proud $I/2\pi$. Integrací Maxwellových rovnic (1.23) v radiálním směru přes infinitezimální interval dostáváme skok v ϕ_1^c , ϕ_0^c :

$$[\phi_1^c] = \frac{q - a \sin^2 \theta_0 I}{\Sigma_0} \delta(\cos\theta - \cos\theta_0), \\ [\phi_0^c] = -\frac{i}{\Sigma_0 \sqrt{\Delta_0}} \left((r_0^2 + a^2) I - aq \right) \sin\theta_0 \delta(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Znajek poté porovnává tento skok se skokem vyjádřeným z obecného řešení ϕ_0 , ϕ_1 :

$$(r_0 - ia \cos \theta)[\phi_0^c] = \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{\Delta_0} (U_l + iW_l) P_l^1(\cos \theta),$$

$$(r_0 - ia \cos \theta)^2[\phi_1^c] = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\Delta_0 P_l(\cos \theta) (U_l + iW_l) - l(l+1)r_0 P_l(\cos \theta) (V_l + iX_l) + ia(V_l + iX_l) \frac{l(l+1)}{2l+1} (lP_{l+1}(\cos \theta) + (l+1)P_{l-1}(\cos \theta)) \right),$$

kde zavádí výhodné značení

$$U_l + iW_l = \frac{1}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(\beta_l \frac{dQ_l}{du}(u_0) - \alpha_l \frac{dP_l}{du}(u_0) \right),$$

$$V_l + iX_l = \beta_l Q_l(u_0) - \alpha_l P_l(u_0),$$

a ve vztahu pro ϕ_1 využil rekurentních relací, čímž se zbavil problému s kombinací Legendrových polynomů a přidružených Legendrových polynomů, které nejsou navzájem ortogonální.

Znajek poté určuje koeficienty zvlášť pro případ smyčky s nulovým proudem v Carterově systému a pro případ smyčky s nulovým Carterovým nábojem a výsledek určí jako jejich součet. Určení těchto koeficientů přejde na řešení rekurentní rovnice, kde navíc využívá nutnosti existence Schwarzschildovy limity $a = 0$. Celkový výsledek pak je

$$\beta_0 = -\frac{q}{2\sqrt{M^2 - a^2}},$$

$$\beta_l^r = \frac{2l+1}{\Sigma_0 \sqrt{M^2 - a^2} 2l(l+1)} \left(-\frac{\Delta_0 r_0 (q - a \sin^2 \theta_0 I) P_l(\cos \theta_0)}{\sqrt{M^2 - a^2}} \frac{dP_l(u_0)}{du} + a \cos \theta_0 \sin \theta_0 \left((r_0^2 + a^2) I - aq \right) P_l^1(\cos \theta_0) P_l(u_0) \right), \quad (2.24)$$

$$\beta_l^i = \frac{2l+1}{\Sigma_0 \sqrt{M^2 - a^2} 2l(l+1)} \left(\sin \theta_0 r_0 \left((r_0^2 + a^2) I - aq \right) P_l^1(\cos \theta_0) P_l(u_0) + \frac{1}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(a \cos \theta_0 \Delta_0 (q - a \sin^2 \theta_0 I) P_l(\cos \theta_0) - \frac{\sin \theta_0 P_l^1(\cos \theta_0)}{l(l+1)} I \Sigma_0 \Delta_0 \right) \frac{dP_l(u_0)}{du} \right), \quad (2.25)$$

koeficienty α_l^r a α_l^i dostáváme záměnou $P_l(u_0) \rightarrow Q_l(u_0)$, $\alpha_0 = 0$.

2.5 Moss

Článek [21] z roku 2011 shrnuje předchozí publikované výsledky a opravuje výsledek článku Pettersona [3].

Článek pracuje v NP formalismu s použitím Kinnersleyho tetřady (1.25) a NP veličin (1.21), (1.26). Řeší Teukolskyho rovnici (1.37) pro veličinu $\psi = -\Delta\phi_0$, čímž dostává obecné řešení

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l P_{l,r}(u) P_l^1(\cos\theta) + \beta_l Q_{l,r}(u) P_l^1(\cos\theta). \quad (2.26)$$

Dále je rekonstruován výsledek vektorového potenciálu Pettersona (2.10), (2.11). Proudová hustota zdroje je zvolena jako

$$J^\mu = \left(\frac{q}{2\pi r_0^2}, 0, 0, \frac{I}{r_0^2} \right) \delta(r - r_0) \delta(\cos\theta)$$

a z radiální části nehomogenní Teukolskyho rovnice tedy dostáváme pro $R_l = \int_{-1}^1 \Psi P_l^1(\cos\theta) d\cos\theta$

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{\Delta} R_l = F(r) \frac{d\delta(r - r_0)}{dr} + G(r) \delta(r - r_0) \quad (2.27)$$

se zavedeným značením

$$F(r) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{4\pi I(r_0^2 + a^2) - 2aq}{r_0} P_l^1(0),$$

$$G(r) = -\frac{i}{\sqrt{2}} 4\pi I P_l^1(0) + \frac{l(l+1)}{\sqrt{2}} \frac{4\pi a I - 2q}{r_0} P_l(0).$$

Integrací (2.27) získáváme explicitní vztahy pro α_l a β_l :

$$\beta_l^r = \frac{l+1/2}{l(l+1)} \frac{1}{w} \frac{4\pi a I - 2q}{r_0} \frac{dP_l}{dr}(u_0) P_l(0), \quad (2.28)$$

$$\beta_l^i = \frac{l+1/2}{l(l+1)} \frac{1}{w} \left(\frac{4\pi I(r_0^2 + a^2) - 2aq}{r_0 \Delta(r_0)} P_l(u_0) - \frac{4\pi I}{l(l+1)} \frac{dP_l}{dr}(u_0) \right) P_l^1(0), \quad (2.29)$$

kde $w = \frac{r_+ - M}{\Delta(r_0)}$ a koeficienty α_l dostaneme záměnou $P_l(u) \rightarrow Q_l(u)$.

3. Porovnání studovaných řešení

Nyní řešení popsaná v kapitole 2 analyticky porovnáme, čímž ověříme, jestli jsou navzájem konzistentní.

Článek Znajeka [20] vychází z článku Pettersona [3], využívá jeho obecné řešení (2.8), (2.9) a (2.6) pro skaláry ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 , pouze po transformaci nulové tetrády opravuje jeho chybný výpočet koeficientů α_l, β_l . Jeho vyjádření vektorového potenciálu se liší o faktor 2:

$$A_\mu(\text{Znajek}) = 2A_\mu(\text{Petterson}).$$

Porovnáním (2.8) a (2.26) vidíme, že pro obecné řešení Mosse [21] a Znajeka [20] (skalárů ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 vyjádřených vzhledem ke stejné nulové tetradě) platí pro $r > r_0$

$$\begin{aligned}\phi(\text{Moss}) &= \sum_l \frac{\beta_l(\text{Moss})}{\sqrt{2}} f(\theta, r, l), \\ \phi(\text{Znajek}) &= \sum_l \sqrt{2} \beta_l(\text{Znajek}) f(\theta, r, l),\end{aligned}\tag{3.1}$$

kde $f(\theta, r, l)$ je pro oba případy shodná funkce, a pro $r < r_0$ lze psát obdobný vztah s α_l . Odpovídající vztah lze psát i pro vektorové potenciály určené v obou článcích. Proto zbývá porovnat vyjádření koeficientů α_l a β_l . Zaměříme se pouze na β_l , porovnání pro α_l by proběhlo naprosto analogicky. Článek Znajeka pracuje s případem nabitě smyčky umístěné i mimo ekvatoriální rovinu v rovině určené úhlem $\theta = \theta_0$, zatímco článek Mosse pracuje se zdrojem v ekvatoriální rovině, proto musíme pro (2.24), (2.25) provést nejdříve limitu $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, čímž získáváme

$$\beta_l^r(\text{Znajek}) = \frac{2l+1}{2l(l+1)} \frac{\Delta_0(aI-q)}{r_0 \sqrt{M^2-a^2}} P_l(0) \frac{dP_l}{dr}(u_0),$$

$$\begin{aligned}\beta_l^i(\text{Znajek}) &= \frac{2l+1}{2l(l+1)} \frac{1}{r_0^2 \sqrt{M^2-a^2}} \left(r_0((r_0^2+a^2)I - aq) P_l(u_0) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{I r_0^2 \Delta_0}{l(l+1)} \frac{dP_l}{dr}(u_0) \right) P_l^1(0).\end{aligned}$$

Dále se podíváme na zavedení proudových hustot z obou článků:

$$\begin{aligned}J^\mu(\text{Znajek}) &= \frac{1}{2\pi \Sigma_0} (q, 0, 0, I) \delta(r-r_0) \delta(\cos\theta - \cos\theta_0) \\ &\stackrel{\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}}{=} \frac{1}{2\pi r_0^2} (q, 0, 0, I) \delta(r-r_0) \delta(\cos\theta), \\ J^\mu(\text{Moss}) &= \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{q}{2\pi}, 0, 0, I \right) \delta(r-r_0) \delta(\cos\theta).\end{aligned}$$

Zřejmě tedy můžeme přes tuto volnost v definici I, q řešení porovnat využitím vztahu $I(\text{Znajek}) = 2\pi I(\text{Moss})$, $q(\text{Znajek}) = q(\text{Moss})$, po jehož užití z (2.28), (2.29) dostáváme

$$\beta_l(\text{Znajek}) = \frac{1}{2} \beta_l(\text{Moss})$$

a porovnáním s (3.1) vidíme, že se tato řešení až na zavedení proudové hustoty neliší, řešení Znajeka je pouze obecnější.

Nyní budeme porovnávat řešení Chitrehu [19] s ostatními. Jeho řešení je vyjádřeno pomocí funkcí $F_l(r)$, $G_l(r)$ (2.3), ty si můžeme vyjádřit stručně jako

$$\begin{aligned} F_l(r) &= K \Delta \frac{dQ_l}{dr}(u), \\ G_l(r) &= -\frac{1}{K} \frac{2l+1}{l(l+1)} \Delta \frac{dP_l}{dr}(u), \end{aligned}$$

kde K je konstanta. Dále je potřeba znát derivaci těchto funkcí, kterou můžeme vyjádřit pomocí Legendrovy diferenciální rovnice (1.44) a užitím $\frac{d}{dr} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - a^2}} \frac{d}{du}$ jako

$$\begin{aligned} \frac{dF_l}{dr}(r) &= Kl(l+1)Q_l(u), \\ \frac{dG_l}{dr}(r) &= -\frac{1}{K} \frac{2l+1}{\sqrt{M^2 - a^2}} P_l(u). \end{aligned}$$

S využitím (1.52) pro případy $m = 0$ a $m = 1$,

$$\begin{aligned} P_l(0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\pi l \Gamma(\frac{l+1}{2})}{2 \Gamma(\frac{l+2}{2})} \\ P_l^1(0) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{\pi l \Gamma(\frac{l+2}{2})}{2 \Gamma(\frac{l+1}{2})}, \end{aligned}$$

dostáváme pro ϕ_2 z (2.4) v případě $r > r_0$

$$\begin{aligned} \phi_2(\text{Chitre}) &= \sum_l \frac{\pi I}{\sqrt{2}} \frac{2l+1}{l(l+1)} \left(\frac{\Delta_0}{r_0^2 + a^2 + 2Ma^2/r_0} \right)^{1/2} \frac{\Delta \rho^2}{\sqrt{M^2 - a^2}} \frac{dQ_l}{dr}(u) \\ &\frac{dP_l}{d\theta}(\cos \theta) \left[i \left(-\frac{a^2 + r_0^2}{r_0} P_l(u_0) + \frac{\Delta_0}{l(l+1)} \frac{dP_l}{dr}(u_0) \right) P_l^1(0) + \frac{a\Delta_0}{r_0} \frac{dP_l}{dr}(u_0) P_l(0) \right] = \\ &= \Delta \rho^2 \sum_l K H_l^>(r_0) \frac{dQ_l}{dr}(u) \frac{dP_l}{d\theta}(\cos \theta) = -\frac{\Delta \rho^2}{\sqrt{2}} \sum_l \beta_l \frac{dQ_l}{dr}(u) \frac{dP_l}{d\theta}(\cos \theta), \end{aligned}$$

kde jsme zavedli β_l analogicky k řešení Znajeka, které pro ϕ_2 můžeme vyjádřit z (2.6), (2.8) jako

$$\phi_2(\text{Znajek}) = -\frac{\Delta \rho^2}{\sqrt{2}} \sum_l \beta_l \frac{dQ_l}{dr}(u) \frac{dP_l}{d\theta}(\cos \theta)$$

s β_l danými (2.25), (2.24). Porovnáním těchto výrazů tedy dostáváme

$$\beta_l(\text{Chitre}) = 2\pi \left(\frac{\Delta_0}{r_0^2 + a^2 + 2Ma^2/r_0} \right)^{1/2} \frac{I(\text{Chitre})}{I(\text{Znajek})} \beta_l(\text{Znajek}), \quad (3.2)$$

analogicky bychom dostali výraz pro $r < r_0$ a α_l . Nyní se podívejme na ϕ_1 (2.5). Užitím rekurentních vztahů (1.43), (1.51) získáme vztah

$$\frac{l(l+1)}{2l+1} (lP_{l+1}(\cos \theta) + (l+1)P_{l-1}(\cos \theta)) = l(l+1) \cos \theta P_l(\cos \theta) - \sin \theta P_l^1(\cos \theta),$$

pomocí kterého můžeme upravit (2.5) do tvaru

$$\phi_1(\text{Chitre}) = \sum_l \sqrt{2} K H_l^>(r_0) \rho^2 \left(- \left(\frac{l(l+1)}{\rho} r Q_l(u) + \Delta \frac{dQ_l}{dr}(u) \right) P_l(\cos \theta) + \right. \\ \left. + i a \sin \theta Q_l(u) P_l^1(\cos \theta) \right).$$

Porovnáním s (2.9) vidíme, že dostáváme opět vztah konzistentní s (3.2), stejně tak v případě $r < r_0$ bychom dostali analogicky vztah pro α_l . Porovnáním proudových hustot

$$J^\mu(\text{Znajek}) = \frac{1}{2\pi \Sigma_0} (q, 0, 0, I) \delta(r - r_0) \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) \\ \stackrel{\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, q=0}{=} \frac{1}{2\pi r_0^2} (0, 0, 0, I) \delta(r - r_0) \delta(\cos \theta), \\ J^\mu(\text{Chitre}) = \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{r_0^2 - 2Mr_0 + a^2}{r_0^2 + 2Ma^2/r_0 + a^2} \right)^{1/2} (0, 0, 0, I) \delta(r - r_0) \delta(\cos \theta)$$

zjišťujeme tedy, že se řešení opět liší pouze v zavedení proudu I ,

$$I(\text{Chitre}) = \frac{I(\text{Znajek})}{2\pi} \left(\frac{r_0^2 - 2Mr_0 + a^2}{r_0^2 + 2Ma^2/r_0 + a^2} \right)^{-1/2},$$

což je konzistentní s (3.2) ($\beta_l(\text{Chitre}) = \beta_l(\text{Znajek})$).

Řešení Chitrehovo je oproti předchozím složitější díky derivacím funkcí $F_l(r)$, $G_l(r)$ (a tedy druhým derivacím Legendrových polynomů), které obsahuje, zároveň ale výhodně vyjadřuje úhlovou část pomocí obyčejných Legendrových polynomů namísto přidružených, což se ukazuje i v článku Znajeka (viz [20]) jako výhodné při další úpravě výrazů k určení koeficientů α_l , β_l .

Podívejme se na závěr na řešení Bičáka [22]. To je vyjádřené pomocí hypergeometrických funkcí a sférických harmonik se spinovou váhou. Tři různé harmoniky, které v případě proudové smyčky používá, můžeme podle (1.56) vyjádřit pomocí Legendrových polynomů jako

$${}_0Y_{l0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} P_l(\cos \theta), \\ {}_1Y_{l0} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} P_l^1(\cos \theta), \\ {}_{-1}Y_{l0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} P_l^1(\cos \theta).$$

Hypergeometrické funkce, které používá, můžeme podle (1.60) a (1.62) vyjádřit pomocí Legendrových polynomů a Legendrových funkcí 2. druhu následujícím způsobem:

$${}^2y_{l0}^{(II)} = (-x)^{-l} F(l, l+1, 2l+2; x^{-1}) = \frac{(-1)^{l+1} (2l+2)!}{(l+1)!(l+1)!} \frac{\Delta}{2\sqrt{M^2 - a^2}} \frac{dQ_l}{dr}(u), \\ {}^2y_{l0}^{(I)} = x(x-1) F(l+2, 1-l, 2; x) = \frac{(-1)^{l+1}}{l(l+1)} \frac{\Delta}{2\sqrt{M^2 - a^2}} \frac{dP_l}{dr}(u),$$

(3.4)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[{}^2y_{l0}^{(II)} \right] &= l(-x)^{-l-1} F(l+1, l+1, 2l+2; x^{-1}) = \frac{(-1)^{l+1} (2l+2)!}{(l-1)!(l+1)!} Q_l(u), \\ \frac{d}{dx} \left[{}^2y_{l0}^{(I)} \right] &= -F(l+1, -l, 1; x) = (-1)^{l+1} P_l(u).\end{aligned}\tag{3.5}$$

Dosazením (3.3)–(3.5) do vztahů pro ϕ_1 (2.19) a ϕ_2 (2.20) a užitím $a_{lm} \sim \delta_{m0}$, $b_{lm} \sim \delta_{m0}$ zjišťujeme, že mají tyto vztahy stejný tvar jako obecné řešení Znajeka pro ϕ_1 (2.9) a ϕ_2 (2.6). Dále budeme používat tvar a_{lm} a b_{lm} , jak je uvedený v (2.22) a (2.23) – dosazením do těchto vztahů dostáváme koeficienty ve tvaru

$$a_{l0} = \frac{(-1)^l \pi^2 I}{\sqrt{2}(M^2 - a^2)} \left(\frac{\Delta_0}{A_0} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} \left[i(r_0^2 + a^2) l(l+1) P_l^1(0) Q_l(u_0) + \right. \\ \left. - \left(i r_0 P_l^1(0) - l(l+1) a P_l(0) \right) \Delta_0 \frac{dQ_l}{dr}(u_0) \right],$$

$$b_{l0} = \frac{(-1)^l \pi^2 I}{\sqrt{2}(M^2 - a^2)} \left(\frac{\Delta_0}{A_0} \right)^{1/2} \frac{l!(l-1)!}{(2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} \left[i(r_0^2 + a^2) l(l+1) P_l^1(0) \right. \\ \left. P_l(u_0) - \left(i r_0 P_l^1(0) - l(l+1) a P_l(0) \right) \Delta_0 \frac{dP_l}{dr}(u_0) \right],$$

jejich dosazením do obecného řešení vidíme, že se opět obě řešení liší až na konstantu a že po zavedení koeficientů α_l (Bičák), β_l (Bičák) v řešení Bičáka analogicky k řešení Znajeka (stejným způsobem jako v předchozím případě),

$$\beta_l^r(\text{Bičák}) = \frac{\pi I}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(\frac{\Delta_0}{A_0} \right)^{1/2} \frac{2l+1}{l(l+1)} a \Delta_0 P_l(0) \frac{dP_l}{dr}(u_0),$$

$$\beta_l^i(\text{Bičák}) = \frac{\pi I}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(\frac{\Delta_0}{\Sigma_0} \right)^{1/2} \frac{2l+1}{l(l+1)} \left[i(r_0^2 + a^2) P_l^1(0) P_l(u_0) \right. \\ \left. - \left(i r_0 P_l^1(0) - l(l+1) a P_l(0) \right) \frac{\Delta_0}{l(l+1)} \frac{dP_l}{dr}(u_0) \right]$$

(analogicky α_l (Bičák)), můžeme psát srovnání

$$\beta_l(\text{Bičák}) = 2\pi r_0 \left(\frac{\Delta_0}{A_0} \right)^{1/2} \frac{I(\text{Bičák})}{I(\text{Znajek})} B_l(\text{Znajek}).\tag{3.6}$$

Porovnáním proudových hustot

$$\begin{aligned}J^\mu(\text{Znajek}) &= \frac{1}{2\pi r_0^2} (0, 0, 0, I) \delta(r - r_0) \delta(\cos \theta), \\ J^\mu(\text{Bičák}) &= \frac{1}{r_0} \left(\frac{\Delta_0}{A_0} \right)^{1/2} (0, 0, 0, I) \delta(r - r_0) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

dostáváme

$$I(\text{Znajek}) = 2\pi r_0 \left(\frac{\Delta_0}{A_0} \right)^{1/2} I(\text{Bičák})$$

a porovnáním s (3.6) vidíme, že se řešení shodují.

Řešení Bičáka je na první pohled ze všech řešení vyjádřeno nejsložitějším způsobem, což je ale způsobeno tím, že článek řeší obecnější situaci libovolného stationárního zdroje EM pole (tedy ne pouze proudové smyčky, ale i např. bodového zdroje nebo nabitého prstence), proto je řešení vyjádřeno pomocí obecnějších tříd funkcí.

4. Limity studovaných řešení

V této kapitole vypočítáme a znázorníme některé speciální limity řešení popsaných v kapitole 2. Mimo jiné také určíme pole smyčky v blízkosti extrémní Kerroy černé díry a ověříme, jestli dochází k Meissnerově efektu.

4.1 Hodnoty ve speciálních místech

Nejprve se podíváme na limity v radiálním nekonečnu, na vnějším horizontu události a statické mezi, v ekvatoriální rovině a na ose symetrie. Budeme zkoumat, jak v těchto limitech vypadá magnetické pole měřené lokálně nerotujícím pozorovatelem definovaným v kapitole 1.1.2, tedy

$$\begin{aligned} B_{(r)} &= \frac{1}{\sqrt{A} \sin \theta} F_{\theta\phi} = \frac{1}{\sqrt{A} \sin \theta} A_{\phi,\theta}, \\ B_{(\theta)} &= \sqrt{\frac{\Delta}{A}} \frac{1}{\sin \theta} F_{\theta r} = -\sqrt{\frac{\Delta}{A}} \frac{1}{\sin \theta} A_{\phi,r}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

V limitě radiálního nekonečna bude dominantní příspěvek ze sumy člen odpovídající $l = 1$, pro který z řešení Znajeka dostáváme

$$\begin{aligned} \beta_1^r &= 0, \\ \beta_1^i &= \frac{3}{8} I \frac{(2M \frac{a^2}{r_0} - a^2 - r_0^2)}{M^2 - a^2}, \\ A_\phi &\sim 2\beta_1^i \left(-a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{\Delta}{\Sigma} \frac{dQ_1}{dr}(u) - \sin^2 \theta r \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} Q_1(u) + \frac{\sin^2 \theta \Delta}{2} \frac{dQ_1}{dr}(u) \right). \end{aligned}$$

Po asymptotickém rozvoji derivace tohoto výrazu a ponecháním pouze 1. členu rozvoje dostáváme pro magnetické pole

$$\begin{aligned} B_{(r)} &= \frac{I}{2} \left(a^2 + r_0^2 - \frac{2Ma^2}{r_0} \right) \frac{2 \cos \theta}{r^3}, \\ B_{(\theta)} &= \frac{I}{2} \left(a^2 + r_0^2 - \frac{2Ma^2}{r_0} \right) \frac{\sin \theta}{r^3}, \end{aligned}$$

což je konzistentní s výsledkem, který byl obdržen pro stejnou limitu v článku [19]. Jak je v tomto článku poukázáno, odpovídá tato limita magnetickému poli magnetického dipólu $\vec{B} = \frac{|\mu|}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$ s magnetickým momentem rovným $\mu = \frac{I}{2} \left(a^2 + r_0^2 - \frac{2Ma^2}{r_0} \right)$.

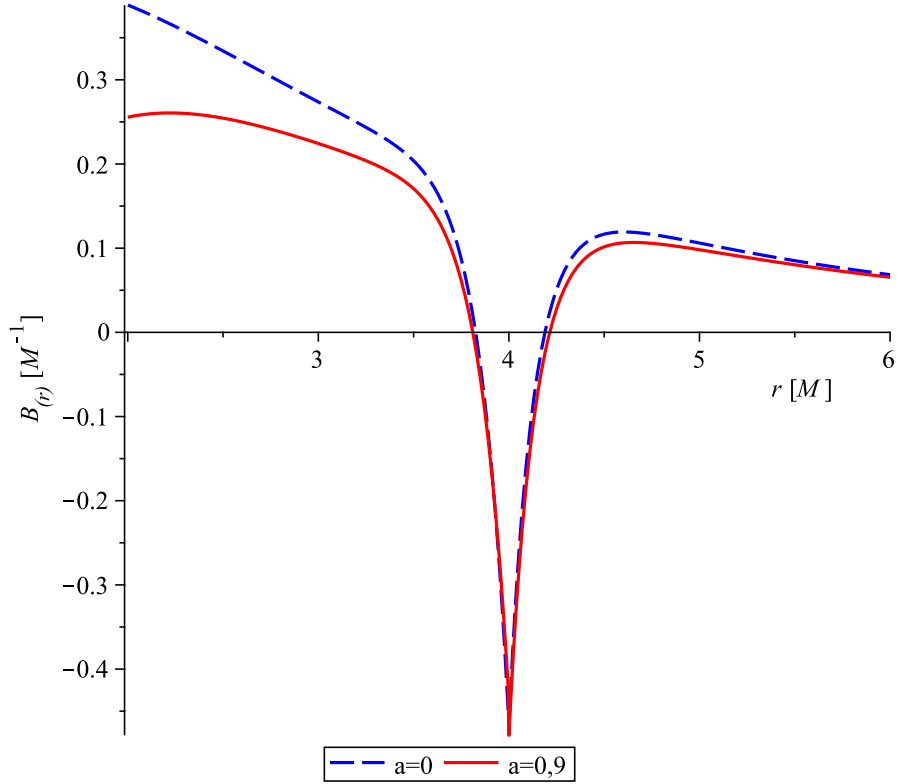
Horní polovina osy symetrie odpovídá limitě $\theta \rightarrow 0$ a dolní polovina limitě $\theta \rightarrow \pi$ (obě tedy limity $\sin \theta \rightarrow 0$). Pomocí (4.1) můžeme v této limitě vyjádřit $B_{(\theta)}$ jako

$$\begin{aligned} B_{(\theta)} &= -\sqrt{\frac{2\Delta}{A}} \sum_l P_l^1(\pm 1) \left(\pm \alpha_l^r a \left(\frac{r^2 + a^2}{\Sigma} P_l(u) \right)_{,r} + \alpha_l^i \left(r \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} P_l(u) \right)_{,r} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_l^i}{l(l+1)} \left(\Delta \frac{dP_l}{dr}(u) \right)_{,r} + \text{členy } \alpha \rightarrow \beta \text{ a } P_l(u) \rightarrow Q_l(u) \right), \end{aligned}$$

zřejmě tedy z $P_l^1(\pm 1) = 0$ vychází, že na ose $B_{(\theta)} = 0$. Pro $B_{(r)}$ na horní polovině osy $\theta = \pi$ dostáváme vztah

$$B_{(r)} = \frac{2}{r^2 + a^2} \sum_l \left(\Delta \frac{dP_l}{dr}(u) \left(\frac{2ar\alpha_l^r}{r^2 + a^2} - \frac{2a^2\alpha_l^i}{r^2 + a^2} + \alpha_l^i \right) - l(l+1)P_l(u) \left(a\alpha_l^r + r\alpha_l^i \right) \right),$$

který je pro dvě různé hodnoty parametru a vyneseno v grafu 4.1.



Obrázek 4.1: Magnetické pole $B_{(r)}$ na ose symetrie pro $a=0$ a $a=0,9$, $I=1$, $M=1$, $r_0=4M$.

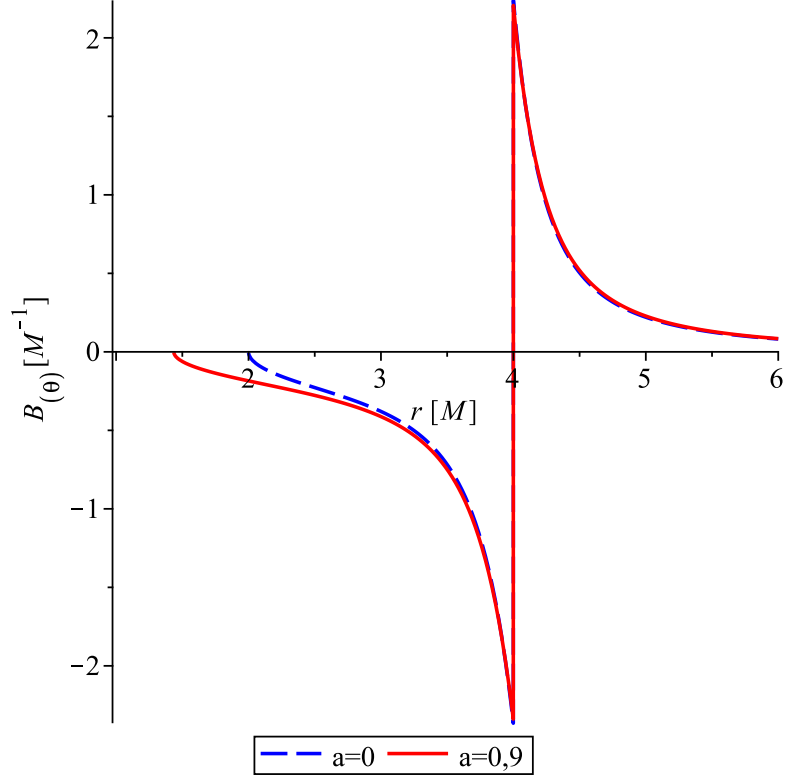
Z (4.1) dostáváme pro ekvatoriální rovinu vztah

$$B_{(\theta)} = -2 \left(\frac{\Delta}{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta} \right)^{1/2} \sum_l \frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha_l^r \frac{a\Delta}{r} \frac{dP_l}{dr}(u) P_l(0) + \alpha_l^i P_l^1(0) \left(\frac{r^2 + a^2}{r} P_l(u) - \frac{\Delta}{l(l+1)} \frac{dP_l}{dr}(u) \right) + \text{členy } \alpha \rightarrow \beta \text{ a } P_l(u) \rightarrow Q_l(u) \right),$$

který je vykreslený v grafu 4.2. Pro různá a se průběh téměř neliší, až na část blízko horizontu, kde řešení klesá k nule. Vykresleny jsou proto pro porovnání jen dvě hodnoty – $a = 0$ a $a = 0,9$.

Pro radiální pole v ekvatoriální rovině dostáváme

$$B_{(r)} = \frac{2}{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta}} \sum_l \left(\alpha_l^r \frac{a\Delta}{r} \frac{dP_l}{dr}(u) P_l^1(0) + \alpha_l^i \left(\frac{a^2\Delta}{r^2} \frac{dP_l}{dr}(u) P_l(0) + \left(\frac{r^2 + a^2}{r} P_l(u) - \frac{\Delta}{l(l+1)} \frac{dP_l}{dr}(u) \right) \frac{dP_l^1}{d\theta}(0) \right) + \text{členy } \alpha \rightarrow \beta \text{ a } P_l(u) \rightarrow Q_l(u) \right).$$



Obrázek 4.2: Magnetické pole $B_{(\theta)}$ v ekvatoriální rovině pro $a=0$ a $a=0,9$, $I=1$, $M=1$, $r_0=4M$.

Z [7] víme, že $P_l(0) \sim \cos \frac{\pi l}{2}$, $P_l^1(0) \sim \sin \frac{\pi l}{2}$ a $\frac{dP_l^1}{d\theta}(0) \sim \sin \frac{\pi}{2}(l+1)$, zároveň víme, že $\alpha_l^r, \beta_l^r \sim P_l(0)$ a $\alpha_l^i, \beta_l^i \sim P_l^1(0)$ – tedy každý člen v $B_{(r)}$ je součinem členu nulového pro l sudé a členu nulového pro l liché. Celkově tedy musí být $B_{(r)}$ v ekvatoriální rovině identicky nulové.

Nyní se podíváme na limitu pro vnější horizont $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$. Platí, že $B_{(\theta)} \sim \frac{\sqrt{\Delta}}{\sin \theta}$, Δ je na horizontu nulové a zbylé členy, které $B_{(\theta)}$ obsahuje ($\sim \frac{1}{A}$, $\sim \frac{1}{\Sigma}$), jsou v této limitě regulární, tedy celkově na horizontu kromě zatím nejasného případu $\theta = 0, \pi$ platí, že $B_{(\theta)} = 0$. Toto ale zřejmě platí i pro $\theta = 0, \pi$, jak jsme zjistili v předchozí analýze limity magnetického pole na ose symetrie. Radiální část magnetického pole $B_{(r)}$ lze pomocí (4.1) vyjádřit v této limitě jako

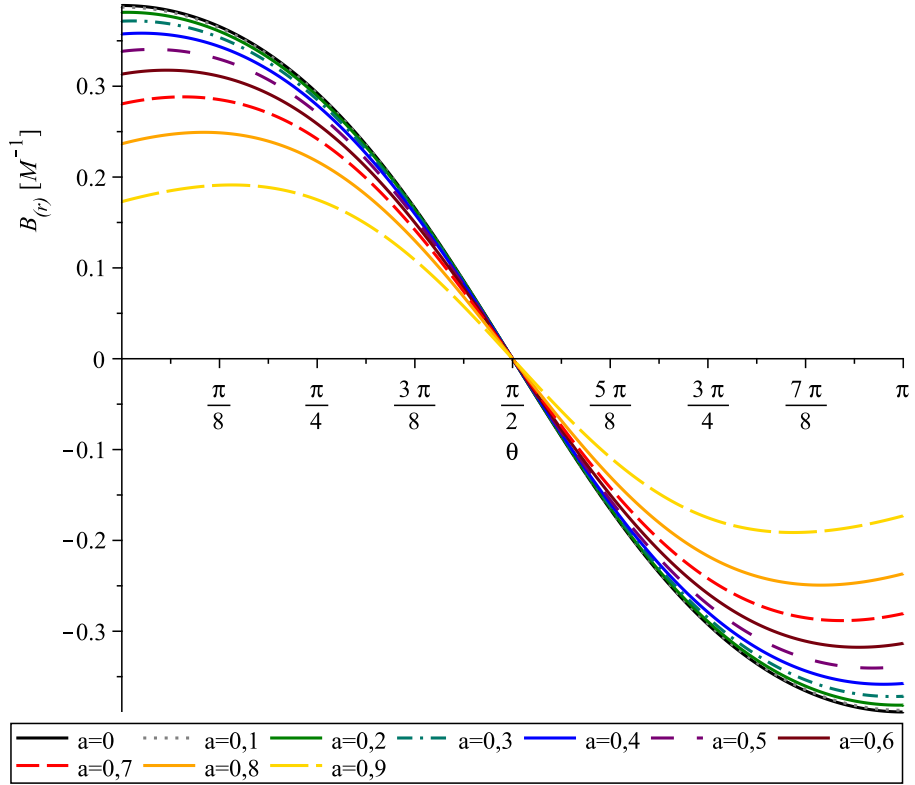
$$B_{(r)} = \frac{1}{Mr_+ \sin \theta} \sum_l \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{2Mr_+ \sin \theta}{2Mr_+ - (a \sin \theta)^2} P_l(1) P_l^1(\cos \theta) (\alpha_l^i r_+ + \alpha_l^r a \cos \theta) \right), \quad (4.2)$$

tento výsledek je pro různé hodnoty parametru a vykreslen v grafu 4.3.

V limitě vnější statické meze nedochází při analytických úpravách k výraznému zjednodušení vztahů pro magnetické pole, proto jsme limitu určili numericky v programu MAPLE. Průběh $B_{(r)}$, $B_{(\theta)}$ je vyneseno v grafech 4.4, 4.5.

4.2 Extrémní černá díra, Meissnerův efekt

Jak je vidět z využití substitucí (2.1) s výrazem $\sqrt{M^2 - a^2}$ ve jmenovateli, předpokládali jsme v řešení z kapitoly 2, že $a < M$. Tím jsme ovšem nezahrnuli případ



Obrázek 4.3: Magnetické pole $B_{(r)}$ na vnějším horizontu událostí pro různé hodnoty a , $I=1$, $M=1$, $r_0=4M$.

extrémní černé díry, tedy černé díry s $a = M$. Nyní se na tento případ podíváme zvlášť. Analogicky s postupem Pettersona [3] (kapitola 2.2) přechází rovnice (2.7) po substituci $R_0(r) = \Delta^{-1/2}R(r)$ a $x \equiv \frac{r}{M} - 1$ na rovnici

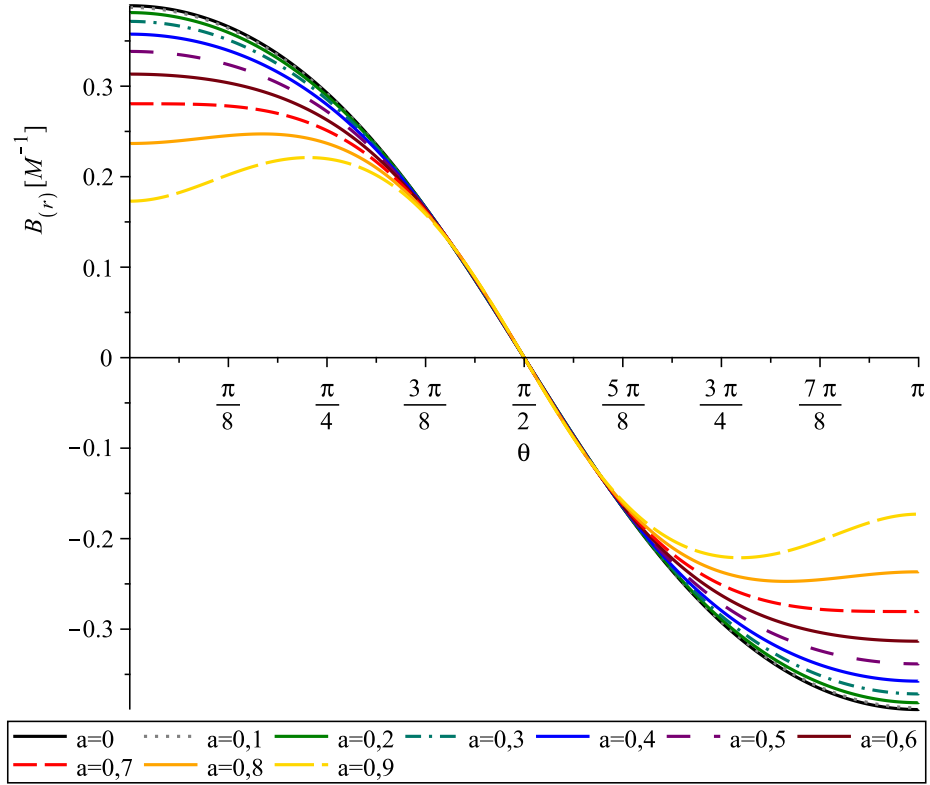
$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dR(x)}{dx} \right) = l(l+1)R(x),$$

jejíž dvě nezávislá řešení můžeme volit jako x^l a $x^{-(l+1)}$ (což lze nahlédnout po dosazení předpokladu, že řešení má tvar nekonečné sumy). Namísto obecného řešení pro ϕ_0 uvedeného dříve (2.26),

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l P_{l,r}(u) P_l^1(\cos \theta) + \beta_l Q_{l,r}(u) P_l^1(\cos \theta), \quad (4.3)$$

dostáváme analogické řešení

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{\Delta^{-1/2}}{\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l x^l P_l^1(\cos \theta) + \beta_l x^{-(l+1)} P_l^1(\cos \theta) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \frac{x^{l-1}}{M} P_l^1(\cos \theta) + \beta_l \frac{x^{-(l+2)}}{M} P_l^1(\cos \theta). \end{aligned} \quad (4.4)$$



Obrázek 4.4: Magnetické pole $B_{(r)}$ na statické mezi pro různé hodnoty a , $I=1$, $M=1$, $r_0=4M$.

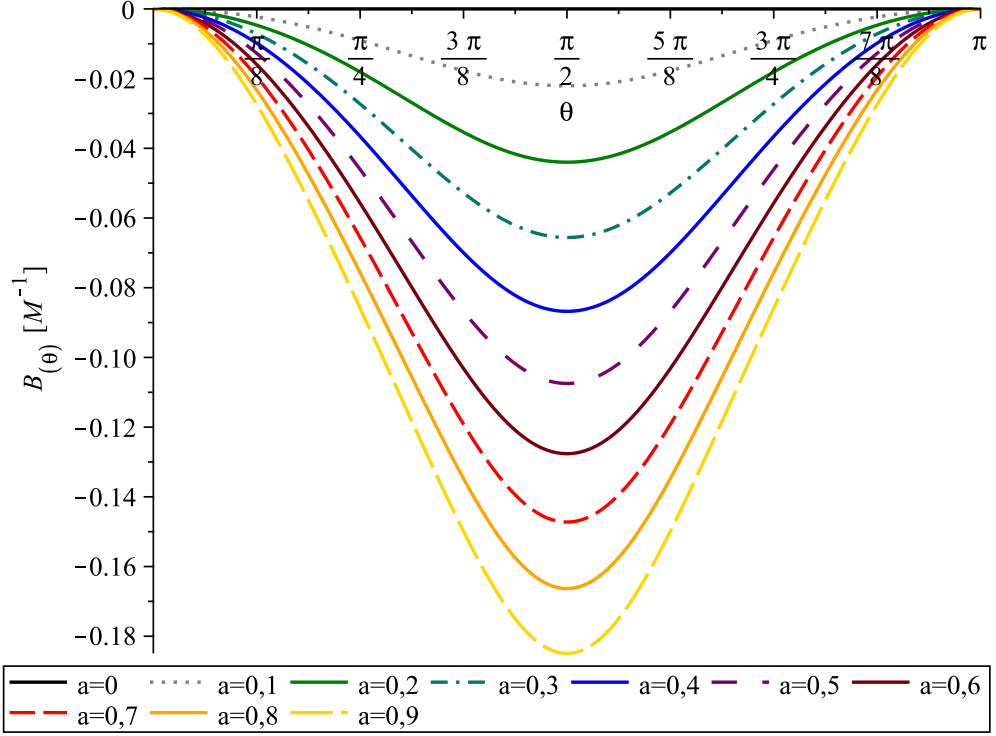
Integrací Maxwellových rovnic (1.31), (1.32) získáme obecné řešení pro ϕ_1 :

$$\phi_1 = \frac{\alpha_l \rho^2}{2} \left(\frac{1}{\rho} (l+1) x^l P_l(\cos \theta) - iM \sin \theta \frac{x^l}{l} P_l^1(\cos \theta) + M x^{l+1} P_l(\cos \theta) \right) + \frac{\beta_l \rho^2}{2} \left(-\frac{1}{\rho} l x^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) + iM \sin \theta \frac{x^{-(l+1)}}{l+1} P_l^1(\cos \theta) + M x^{-l} P_l(\cos \theta) \right),$$

kde $\rho = -\frac{1}{r-iM \cos \theta}$. Můžeme si také všimnout, že toto řešení lze získat přímo z (2.9) záměnou

$$\begin{aligned} P_{l,r} &\rightarrow \frac{x^{l-1}}{M} & (P_l &\rightarrow \frac{x^l}{l}) \\ Q_{l,r} &\rightarrow \frac{x^{-(l+2)}}{M} & (Q_l &\rightarrow -\frac{x^{-(l+1)}}{l+1}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

To plyne z porovnání (4.4) a (4.3) a z faktu, že při odvození ϕ_1 byl dále využitý pouze vztah $\frac{d}{dr} (\Delta P_{l,r}(u)) = l(l+1)P_l(u)$ (a stejný vztah pro $P_l \rightarrow Q_l$), který zůstává v platnosti i po záměně (4.5) (po které $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ přechází na $\Delta = (r-M)^2 = (Mx)^2$).



Obrázek 4.5: Magnetické pole $B_{(\theta)}$ na statické mezi pro různé hodnoty a , $I=1$, $M=1$, $r_0=4M$.

Analogicky můžeme získat obecný vztah pro vektorový potenciál (2.11)

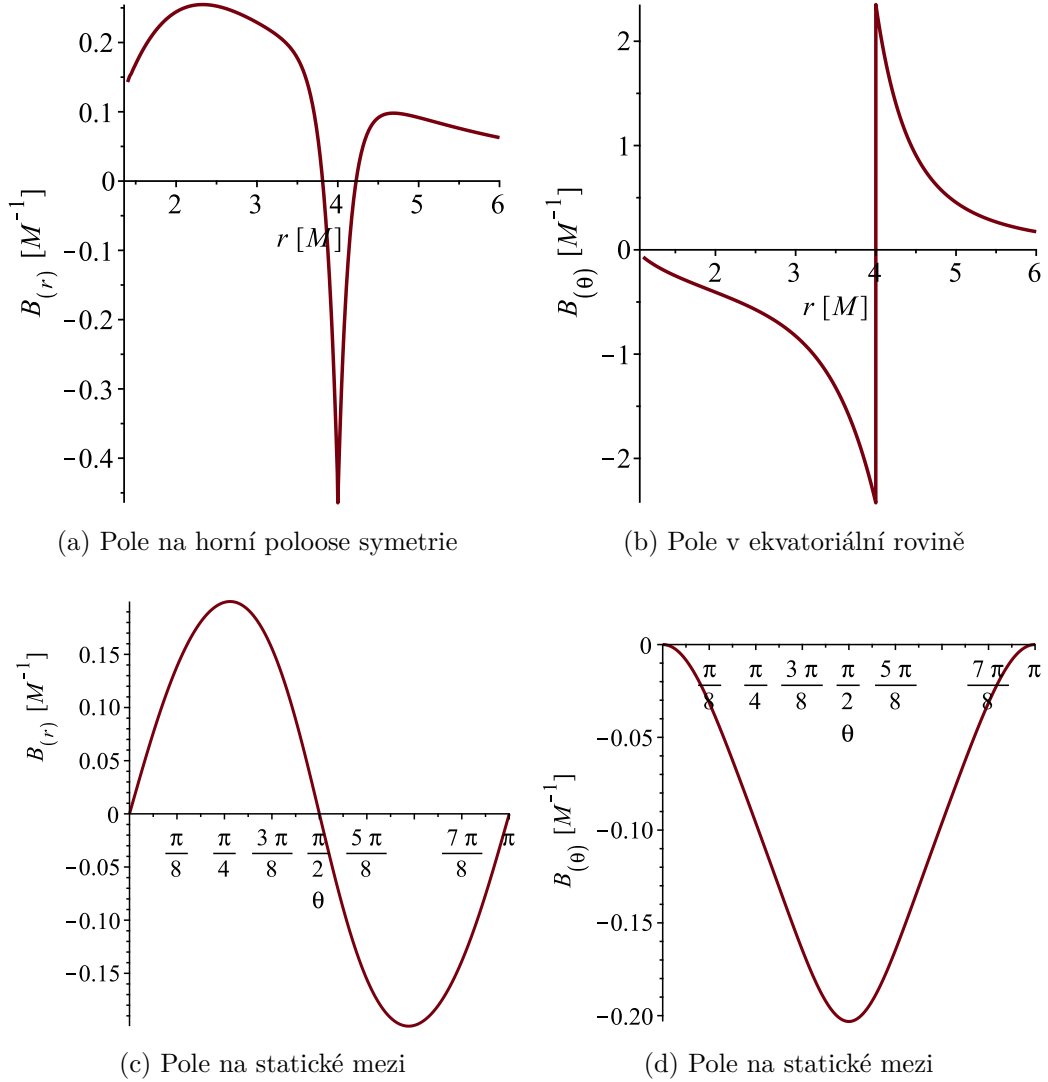
$$\begin{aligned}
A_\phi = \sum_l \left(\frac{\Delta}{\Sigma} x^{l-1} \sin^2 \theta P_l(\cos \theta) (r\alpha_l^r - M \cos \theta \alpha_l^i) + \frac{r^2 + M^2}{\Sigma} \frac{x^l}{l} \sin \theta P_l^1(\cos \theta) \right. \\
\left. (M \cos \theta \alpha_l^r + r\alpha_l^i) - \frac{\alpha_l^i \Delta}{l(l+1)} \frac{x^{l-1}}{M} P_l^1(\cos \theta) \sin \theta + \right. \\
\left. + \frac{\Delta}{\Sigma} x^{-(l+2)} \sin^2 \theta P_l(\cos \theta) (r\beta_l^r - M \cos \theta \beta_l^i) - \frac{r^2 + M^2}{\Sigma} \frac{x^{-(l+1)}}{l+1} \sin \theta P_l^1(\cos \theta) \right. \\
\left. (M \cos \theta \beta_l^r + r\beta_l^i) - \frac{\beta_l^i \Delta}{l(l+1)} \frac{x^{-(l+2)}}{M} P_l^1(\cos \theta) \sin \theta \right), \quad (4.6)
\end{aligned}$$

kde $\Sigma = r^2 + M^2 \cos^2 \theta$.

Koeficienty α_l , β_l určíme stejným postupem jako v kapitole 2.5 z rovnice (2.27) po provedení záměny (4.5), čímž dostáváme

$$\begin{aligned}
\alpha_l^r &= -\frac{2\pi MI}{r_0} x_0^{-l} P_l(0), \\
\alpha_l^i &= \frac{2\pi I}{l(l+1)} \left(1 + l \frac{(r_0^2 + M^2)}{r_0 M x_0} \right) x_0^{-l} P_l^1(0), \\
\beta_l^r &= \frac{2\pi MI}{r_0} x_0^{l+1} P_l(0), \\
\beta_l^i &= \frac{2\pi I}{l(l+1)} \left(1 - (l+1) \frac{(r_0^2 + M^2)}{r_0 M x_0} \right) x_0^{l+1} P_l^1(0).
\end{aligned}$$

Nyní ve stručnosti shrneme některé limity tohoto řešení. Podobně jako v případě $a < M$ je $B_{(\theta)}$ na ose symetrie a $B_{(r)}$ v ekvatoriální rovině nulové, zbylé limity pro osu symetrie, ekvatoriální rovinu a statickou mez jsou vykresleny v grafech 4.6. Všimněme si, že naším postupem jsme získali limitu extrémní černé díry řešení Mosse [21], v grafu jsme proto použili koeficienty (4.2) přenásobené příslušným faktorem tak, aby odpovídaly řešení Znajeka [20] a mohli jsme je tedy porovnat s grafy pro $a < M$ – porovnáním vidíme, že limity vychází navzájem konzistentně.



Obrázek 4.6: Magnetické pole smyčky na poloměru $r_0=4M$ s $I=1$ okolo extrémní Kerrový černé díry s $M=a=1$.

Speciálně se ale zaměříme na důležitou limitu horizontu událostí $r \rightarrow M$ ($x \rightarrow 0$), konkrétně se podívejme na tok magnetického pole Φ skrz plochu horizontu. Obecně můžeme tok magnetického pole skrz plochu S vyjádřit pomocí tenzoru elektromagnetického pole jako [1]

$$\Phi = \int_S F,$$

pro plochu $r = M$ tedy dostáváme

$$\Phi = \int (F_{\theta\phi})_{r=M} d\theta d\phi = \int (F_{\theta\phi})_{x=0} d\theta d\phi.$$

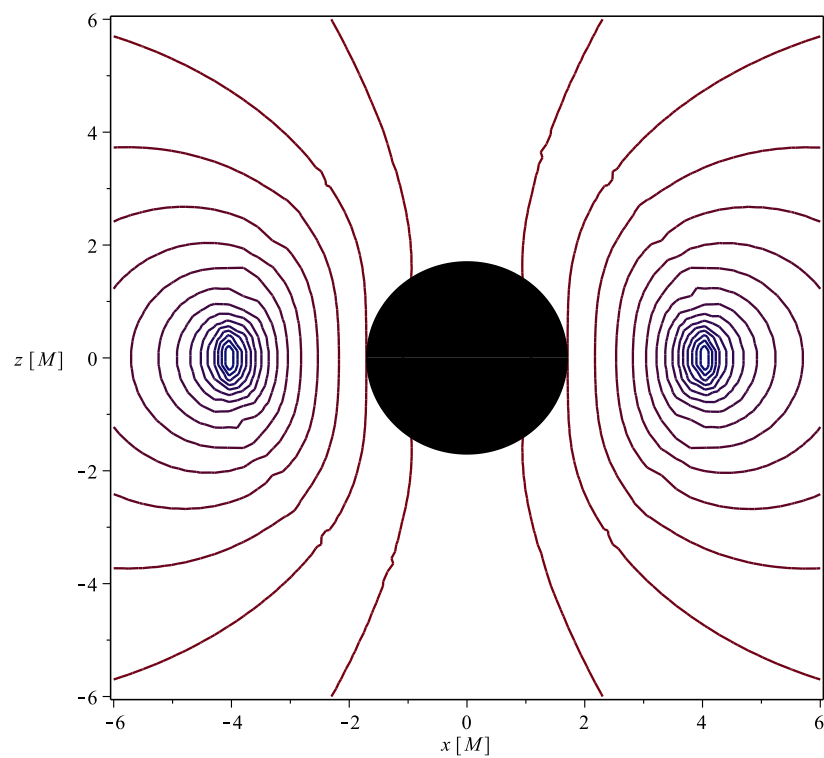
Dosazením $F_{\theta\phi} = A_{\phi,\theta}$ z (4.6) a po provedení limity $x \rightarrow 0$ získáváme výraz

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} F_{\theta\phi} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_l \left(Mx^{l+1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin^2 \theta (\alpha_l^r - \cos \theta \alpha_l^i)}{1 + \cos^2 \theta} P_l(\cos \theta) \right) + \right. \\ \left. + 2M \frac{x^l}{l} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta (\cos \theta \alpha_l^r + \alpha_l^i)}{1 + \cos^2 \theta} P_l^1(\cos \theta) \right) - \alpha_l^i \frac{Mx^{l+1}}{l(l+1)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(P_l^1(\cos \theta) \sin \theta \right) \right), \end{aligned}$$

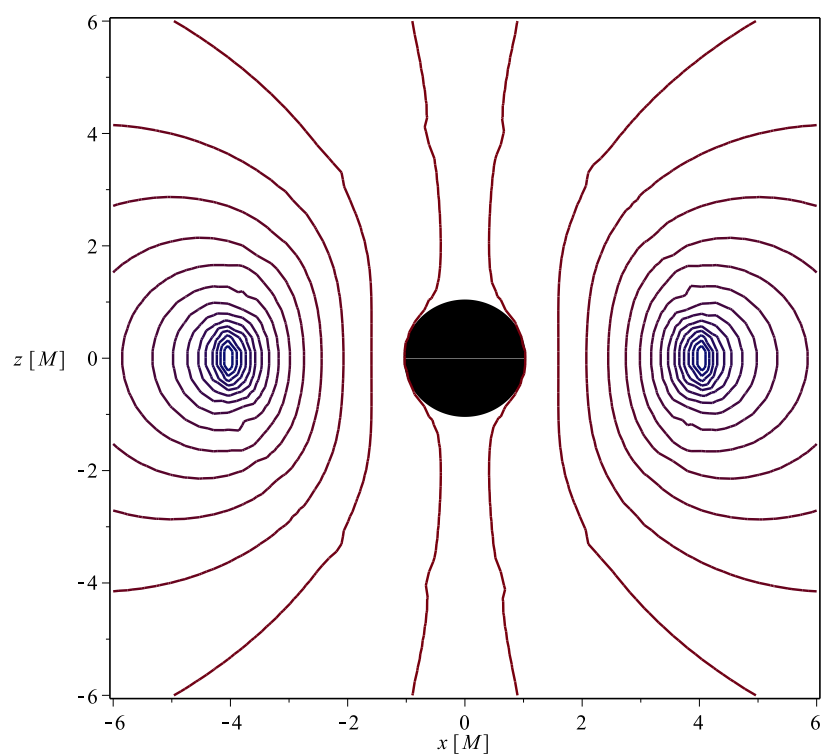
tedy zřejmě $(F_{\theta\phi})_{x=0} = 0$ a magnetický tok skrz horizont je v případě extrémní černé díry nulový.

Jev, kdy černá díra blížící se k extrémnímu stavu začne vypuzovat vnější magnetické pole, se nazývá Meissnerův efekt (v analogii se stejným jevem, který nastává u supravodičů při přechodu z normálního do supravodivého stavu) [23]. Kromě našeho speciálního případu pole proudové smyčky jsou magnetická pole vypuzována pro libovolné axiálně symetrické stacionární zdroje v okolí extrémní Kerrovy černé díry [24] a dokonce i pro případ extrémní nabitě černé díry. Tento jev byl potvrzen kromě slabých linearizovaných polí i pro silná pole a exaktní řešení (viz [24], [23], [25], [26]).

Názorná ilustrace tohoto jevu je v grafu 4.7, kde jsou vykresleny magnetické siločáry pro dvě různé hodnoty rotačního parametru – $a=0,7$, při které zatím nedochází k vypuzování magnetického pole, a $a=0,999$, která se blíží k extrémnímu řešení a dochází k Meissnerovu efektu.



(a) $a=0,7$



(b) $a=0,999$

Obrázek 4.7: Magnetické siločáry pro pole smyčky umístěné na $r_0=4M$ okolo Kerrovy černé díry ($M=1$).

5. Pole proudového disku

Nyní se podíváme, jak by v naší modelové situaci vypadalo pole celého proudového disku. Zaměříme se na jednodušší případ disku okolo Schwarzschildovy černé díry, pro nějž je vektorový potenciál jedné proudové smyčky popsán následovně (konkrétně uvažujeme řešení Znajeka v limitě $a \rightarrow 0$, podrobnosti viz [27]):

$$A_\phi = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l^i \sin \theta \left(r P_l(u) - \frac{r^2 - 2Mr}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right) P_l^1(\cos \theta),$$

$$\alpha_l^i = \frac{I}{M} \frac{2l+1}{2l(l+1)} \left(r_0 Q_l(u_0) - \frac{r_0^2 - 2Mr_0}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u_0)}{dr_0} \right) P_l^1(0),$$

pro $r < r_0$, pro $r > r_0$ dostáváme A_ϕ záměnou $\alpha \rightarrow \beta$, $P_l(u) \leftrightarrow Q_l(u)$.

Budeme-li nadále uvažovat pouze nehmotné testovací smyčky, bude pro jejich pole platit princip superpozice, tedy pro celkový potenciál n smyček, kde vektorový potenciál j -té smyčky (umístěné na poloměru r_0^j) označíme A_ϕ^j , platí

$$A_\phi = \sum_{j=1}^n A_\phi^j.$$

Jako příklad uvádíme porovnání magnetického pole jedné smyčky umístěné na poloměru $r_0=4M$ a dvou smyček umístěných na poloměrech $r_0=3M$ a $r_0=4M$. V grafech 5.1 je znázorněné magnetické pole měřené stojícím pozorovatelem

$$B_{(r)} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} A_{\phi, \theta},$$

$$B_{(\theta)} = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r \sin \theta} A_{\phi, r}$$

pro oba případy a v grafech 5.3 a 5.2 limity na horizontu událostí a v ekvatoriální rovině.

Pro spojitý disk mezi poloměry r_{01} a r_{02} o dané proudové hustotě $J(r_0)$ (vyjadřující proudový profil v disku) přechází suma v integrál

$$A_\phi = \int_{r_{01}}^{r_{02}} J(r_0) A_\phi(r_0) dr_0 = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \sin \theta P_l^1(\cos \theta) \left(\alpha'_l \left(r P_l(u) - \frac{r^2 - 2Mr}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right) + \beta'_l \left(r Q_l(u) - \frac{r^2 - 2Mr}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u)}{dr} \right) \right),$$

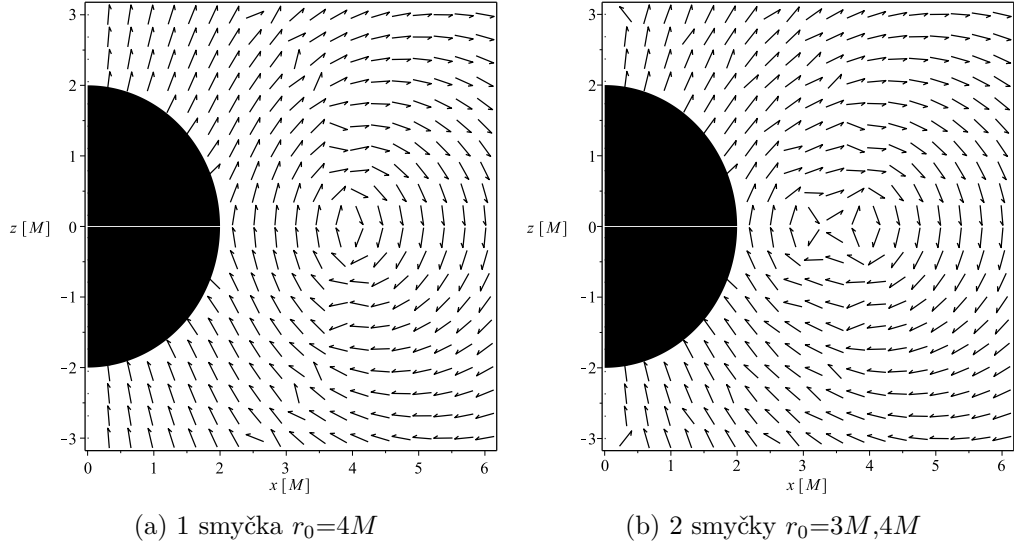
kde

$$\alpha'_l = \frac{2l+1}{2l(l+1)} P_l^1(0) \int_{r_{01}}^{r_{02}} J(r_0) H(r_0 - r) \left(r_0 Q_l(u_0) - \frac{r_0^2 - 2Mr_0}{lM(l+1)} \frac{dQ_l(u_0)}{dr_0} \right) dr_0$$

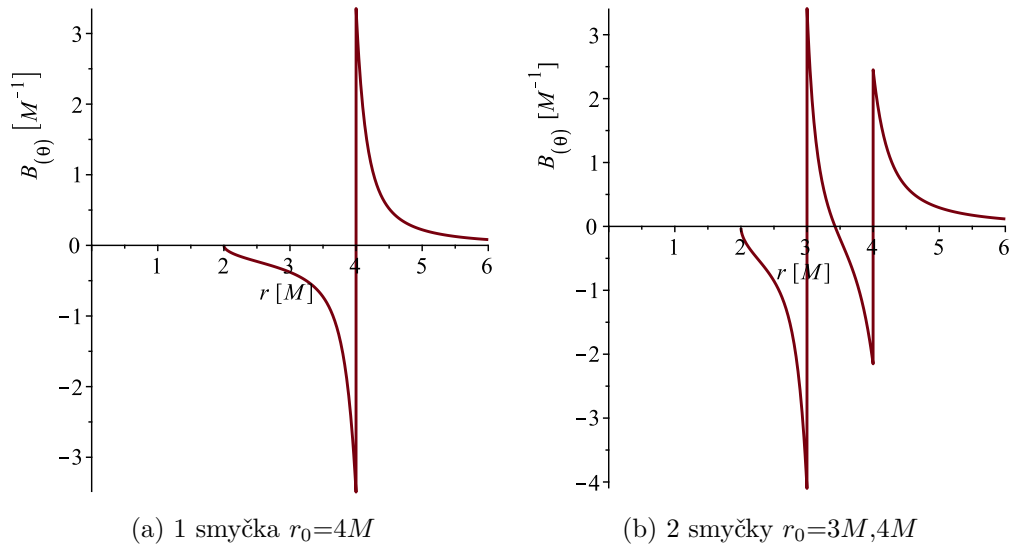
a

$$\beta'_l = \frac{2l+1}{2l(l+1)} P_l^1(0) \int_{r_{01}}^{r_{02}} J(r_0) H(r - r_0) \left(r_0 P_l(u_0) - \frac{r_0^2 - 2Mr_0}{lM(l+1)} \frac{dP_l(u_0)}{dr_0} \right) dr_0,$$

$H(x)$ zde značí Heavisideovu funkci.

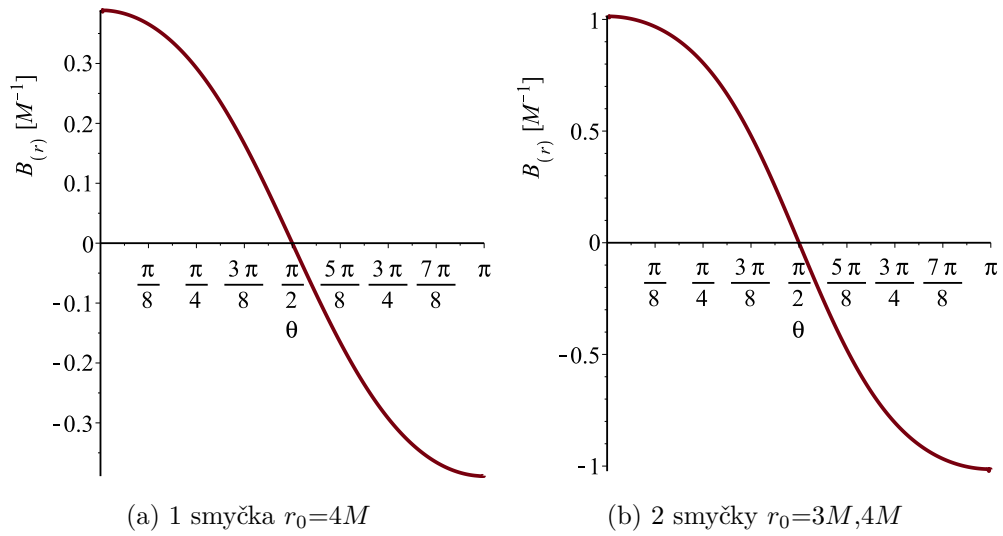


Obrázek 5.1: Magnetické pole jedné a dvou smyček s $I=1$ okolo Schwarzschildovy černé díry s $M=1$.

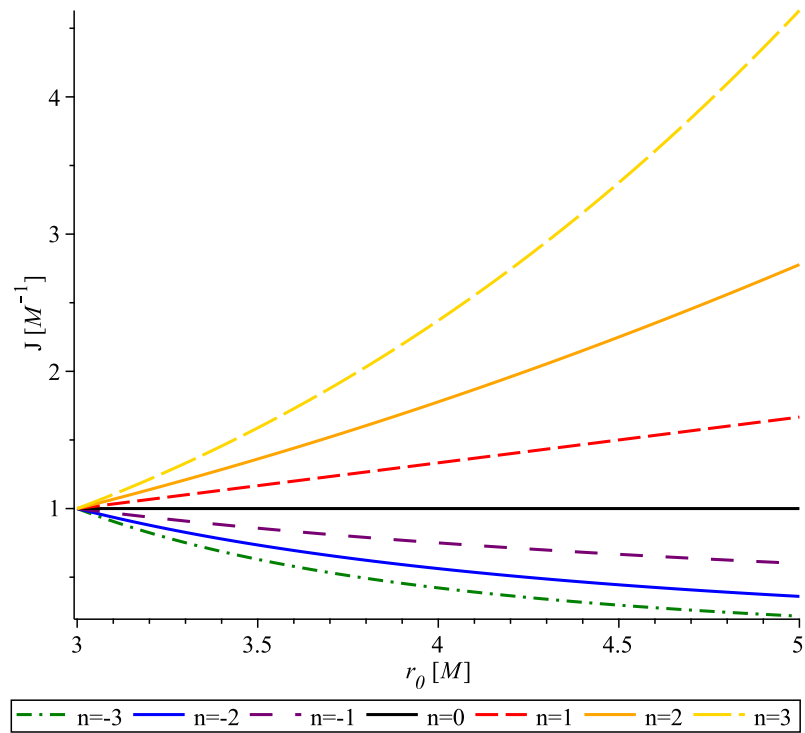


Obrázek 5.2: Limity magnetického pole jedné a dvou smyček s $I=1$ okolo Schwarzschildovy černé díry s $M=1$ v ekvatoriální rovině.

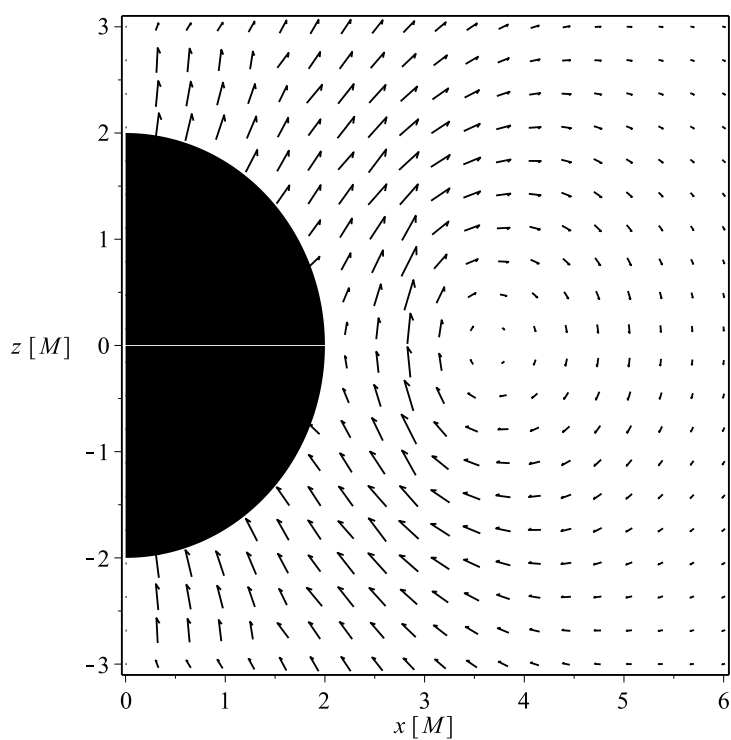
Určovali jsme pole takového spojitého disku v nejjednodušším případě proudové hustoty $J(r_0) = M^{-1}$ a poté ho porovnávali s poli disku o proudové hustotě $J(r_0) = \left(\frac{r_0}{r_{01}}\right)^n M^{-1}$, kde $n = -1, -2, -3, 1, 2, 3$. Integrace byla provedena numericky pomocí programu MAPLE. Disk jsme uvažovali v mezích $r_0 \in \langle 3M, 5M \rangle$, různé proudové hustoty jsou znázorněny v grafu 5.4. V grafu 5.5 je vidět porovnání magnetického pole pro dva případy $n = -3, 3$. V grafech 5.6 a 5.7 jsou vykresleny speciální limity pole v ekvatoriální rovině a na horizontu událostí.



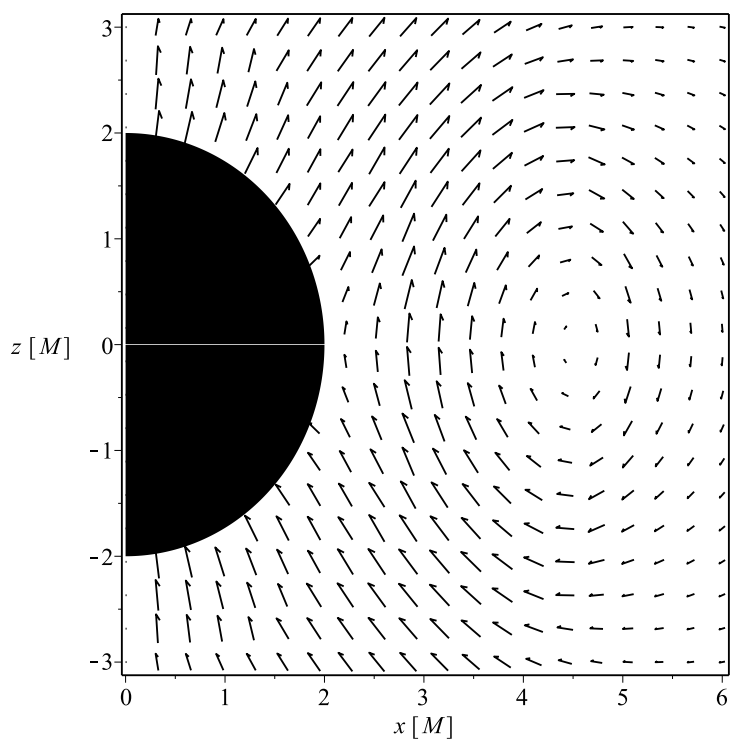
Obrázek 5.3: Limity magnetického pole jedné a dvou smyček s $I=1$ okolo Schwarzschildovy černé díry s $M=1$ na horizontu událostí.



Obrázek 5.4: Profily proudových hustot $J(r_0) = \left(\frac{r_0}{r_{01}}\right)^n M^{-1}$ v proudovém disku.

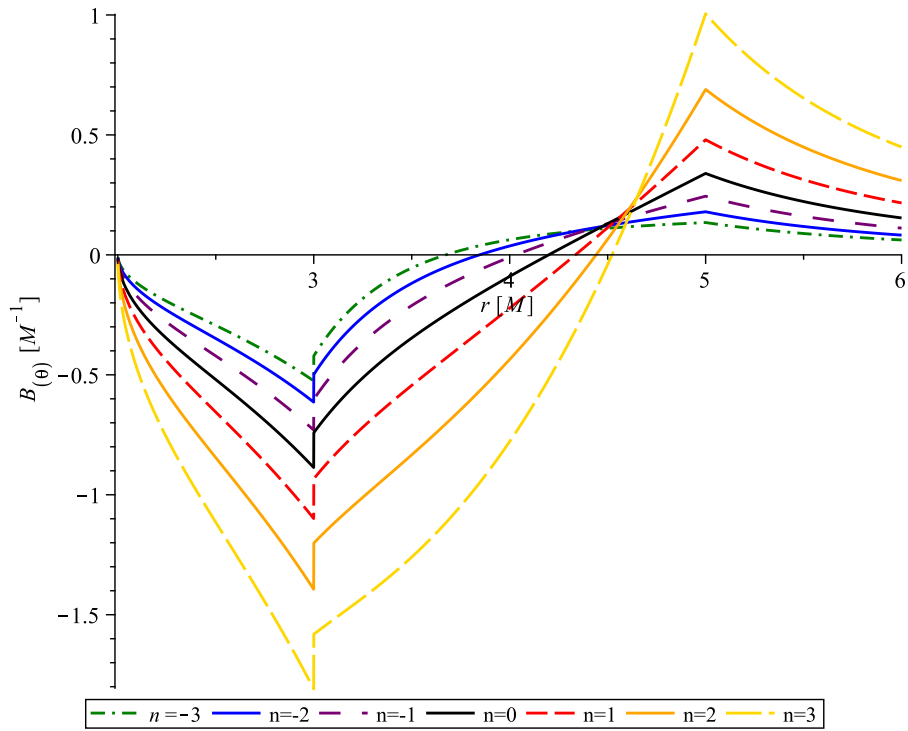


$$(a) J(r_0) = \left(\frac{r_{01}}{r_0}\right)^3 M^{-1}$$

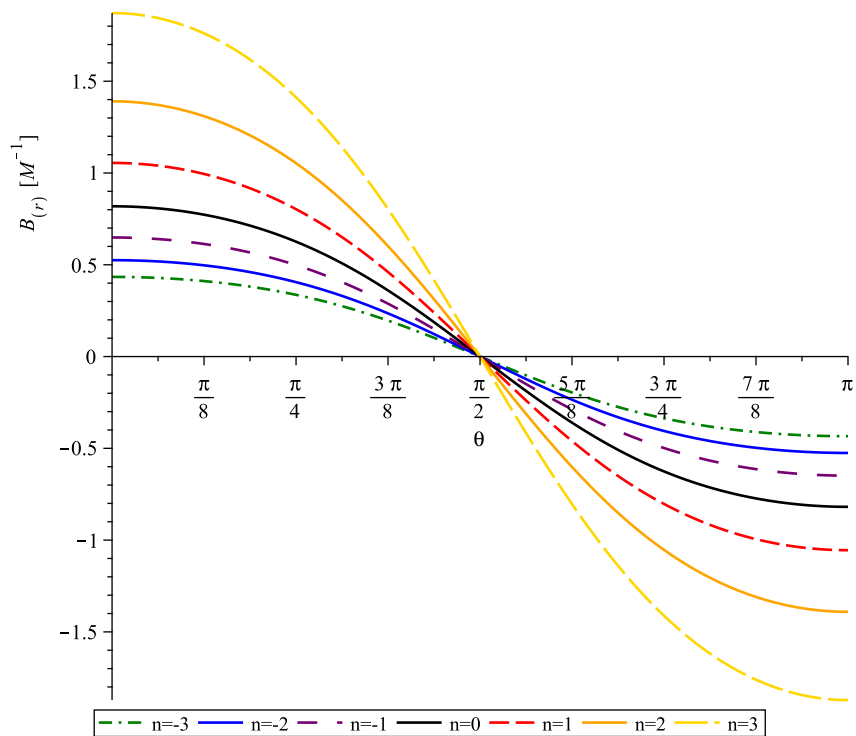


$$(b) J(r_0) = \left(\frac{r_0}{r_{01}}\right)^3 M^{-1}$$

Obrázek 5.5: Magnetické pole pro dvě různé proudové hustoty proudového disku okolo Schwarzschildovy černé díry s $M=1$.



Obrázek 5.6: Magnetické pole $B_{(\theta)}$ v ekvatoriální rovině pro různé hodnoty proudové hustoty $J(r_0) = \left(\frac{r_0}{r_{01}}\right)^n M^{-1}$.



Obrázek 5.7: Magnetické pole $B_{(r)}$ na horizontu událostí pro různé hodnoty proudové hustoty $J(r_0) = \left(\frac{r_0}{r_{01}}\right)^n M^{-1}$.

Závěr

V této diplomové práci jsme se zabývali polem testovací proudové smyčky umístěné v ekvatoriální rovině symetricky vzhledem ke Kerrově černé díře (popř. k Schwarzschildově černé díře).

Nejdříve jsme shrnuli matematický aparát potřebný k řešení této úlohy a postup řešení publikovaný v pěti různých článcích. Konkrétně se jedná o články následujících autorů: Chitre a Vishveshwara [19], Petterson [3], Bičák a Dvořák [22], Znajek [20] a Moss [21]. Tato řešení jsme analyticky porovnali, čímž jsme ověřili, že jsou navzájem konzistentní. Poté jsme je využili k výpočtu limit v několika významných místech – v radiálním nekonečnu, na vnějším horizontu událostí a statické mezi, v ekvatoriální rovině a na ose symetrie a tyto limity jsme graficky znázornili. Dále jsme určili magnetické pole pro limitu extrémní černé díry a ověřili jsme platnost Meissnerova efektu.

Na závěr jsme pro zjednodušený případ Schwarzschildovy černé díry určili pro několik různých proudových hustot pole zjednodušeného modelu proudového disku, který jsme chápali jako superpozici testovacích proudových smyček.

Seznam použité literatury

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Gravitation. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [2] V. Frolov and I. Novikov. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*, volume 96 of *Fundamental Theories of Physics*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1998.
- [3] J. A. Petterson. Stationary axisymmetric electromagnetic fields around a rotating black hole. *Phys. Rev. D*, 12:2218–2225, 1975.
- [4] S. A. Teukolsky. Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational electromagnetic and neutrino field perturbations. *Astrophys. J.*, 185:635–647, 1973.
- [5] J. M. Bardeen, W. H. Press, and S. A. Teukolsky. Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *Astrophys. J.*, 178:347–370, 1972.
- [6] D. L. Wiltshire, M. Visser, and S. M. Scott. *The Kerr Spacetime: Rotating Black Holes in General Relativity*. Cambridge University Press, New York, 2009.
- [7] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. U.S. Dept. of Commerce, National Bureau of Standards, Washington, D.C., 10th edition, 1972.
- [8] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [9] E. Newman and R. Penrose. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys.*, 3(3):566–578, 1962.
- [10] A Z. Petrov. The classification of spaces defining gravitational fields. *Gen. Rel. Grav.*, 32:1665–1685, 2000.
- [11] F. A. E. Pirani. Invariant formulation of gravitational radiation theory. *Phys. Rev.*, 105:1089–1099, 1957.
- [12] R. Geroch, A. Held, and R. Penrose. A space-time calculus based on pairs of null directions. *J. Math. Phys.*, 14(7):874–881, 1973.
- [13] R. L. Znajek. Black hole electrodynamics and the carter tetrad. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 179(3):457–472, 1977.
- [14] B. Carter. Global structure of the Kerr family of gravitational fields. *Phys. Rev.*, 174:1559–1571, 1968.
- [15] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, London, 3rd edition, 1920.

- [16] G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. USA: Academic Press, USA, 6th edition, 2005.
- [17] M. T. Vaughn. *Introduction to Mathematical Physics*. Physics textbook. Wiley-VCH, Weinheim, 2007.
- [18] J. N. Goldberg, A. J. Macfarlane, E. T. Newman, F. Rohrlich, and E. C. G. Sudarshan. Spin-s spherical harmonics and δ . *J. Math. Phys.*, 8(11):2155–2161, 1967.
- [19] D. M. Chitre and C. V. Vishveshwara. Electromagnetic field of a current loop around a Kerr black hole. *Phys. Rev. D*, 12:1538–1543, 1975.
- [20] R. Znajek. Charged current loops around Kerr holes. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 182:639–646, 1978.
- [21] I. G. Moss. Black holes with current loops revisited. *Phys. Rev. D*, 83:124046, 2011.
- [22] J. Bičák and L. Dvořák. Stationary electromagnetic fields around black holes. II. general solutions and the fields of some special sources near a Kerr black hole. *Gen. Rel. Grav.*, 7(12):959–983, 1976.
- [23] N. Gürlebeck and M. Scholtz. The Meissner effect for weakly isolated horizons. *Phys. Rev. D*, 95, 2017.
- [24] J. Bičák, V. Karas, and T. Ledvinka. Black holes and magnetic fields. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 2(S238):139–144, 2006.
- [25] J. Bičák. Black holes under external influence. *Pramana*, 55(4):481–496, 2000.
- [26] V. Karas and Z. Budinová. Magnetic fluxes across black holes in a strong magnetic field regime. *Physica Scripta*, 61(2):253–256, 2000.
- [27] Z. Vlasáková. Pole proudových smyček kolem černých děr. Bakalářská práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2017.