Univerzita Karlova v Praze
Fakulta sociálních věd

Institut ekonomických studií

Jindřich Jurkovič

Teorie optimálního řízení v ekonomické aplikaci

Bakalářská práce

Praha, 2008

Bibliografický záznam

Jurkovič, Jindřich: *Teorie optimálního řízení v ekonomické aplikaci – bakalářská práce* Univerzita Karlova v Praze, Fakulta sociálních věd, Institut ekonomických studií, Praha 2008, 37 stran, vedoucí práce Doc. RNDr. Ondřej Kalenda Ph.D.

Autor práce:	Jindřich Jurkovič
Vedoucí práce:	Doc. RNDr. Ondřej Kalenda Ph.D.
Oponent práce:	Prof. RNDr. Ing. František Turnovec CSc.
Datum obhajoby:	2008

Hodnocení:

Abstrakt

Bakalářská práce *Teorie optimálního řízení v ekonomické aplikaci* se zabývá problematikou napasování matematické teorie na ekonomickou aplikaci. V prvé řadě chce nechat nahlédnout do teorie optimálního řízení v její obecnější formě; za tímto účelem formuluje obecnou optimalizační úlohu a jednu z klíčových částí teorie: podmínky optimality – tzn. podmínky, které musí řešení takové úlohy splňovat. Aplikace těchto podmínek je demonstrována na mikroekonomickém modelu firmy, která využívá toku svých příjmů k investicím do svých zásob kapitálu s přirozenou tendencí stárnout. Pro tento model jsou pak formulovány, a do značné míry i rozřešeny, podmínky optimality. Práce zároveň ukazuje, na jaké problémy je možné při aplikaci narazit, a jakou oběť na teorii si tyto praktické problémy mnohdy žádají.

Klíčová slova: dynamická optimalizace, optimální řízení, mikroekonomický model, investice do kapitálu, řízení zadané diferenciální rovnicí

Abstract

The bachelor thesis *Optimal Control Theory in Economic Application* deals with an issue of customizing a mathematical theory for the economic application. First of all it aims to provide an insight into the optimal control theory in its more general form; in order to do so, it states a general optimization problem and one of the essential parts of the theory – the optimality conditions, i.e. conditions to be met by any solution to the stated problem. To demonstrate the application of these conditions, we use a microeconomic model of a firm which transfers part of its income into investment into its capital resources with a natural tendency to decay. For such model the optimality conditions are derived and – to a great extent – solved. At the same time, the thesis shows which problems could arise during the application and what possible sacrifice would these practical issues make to the theory.

Keywords: dynamic optimization, optimal control, microeconomic model, investment into capital, control by differential equation

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval doc. RNDr. Ondřeji Kalendovi, Ph.D.[1] za jeho aktivní přístup při vedení mé bakalářské práce, za jeho cenné rady i za konstruktivní kritické připomínky. Stejně tak patří můj dík RNDr. Ondřeji Součkovi[2] za jeho motivující upřímný zájem o mou práci a za četné rozhovory, které jsme na dané téma vedli.

Prohlášení

1. Prohlašuji, že jsem předkládanou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu a prameny v ní uvedené.

2. Souhlasím s tím, aby práce byla zpřístupněna pro studijní účely, a to jak v tištěné, tak v přiložené elektronické podobě.

V Praze dne 1.7.2008 Jindřich Jurkovič

[1]Katedra matematické analýzy, MFF–UK
[2]Katedra geofyziky, MFF–UK

Obsah

Úvod

Mikroekonomie ve své *učebnicové* podobě poskytuje analýzu optimálního chování spotřebitele či firmy v daném okamžiku za daných okolností – těmi mohou být například preference spotřebitele, důchodová omezení, technologie výroby. Optimálním chováním pak rozumí takové jednání, které maximalizuje užitek v případě spotřebitele, či zisk v případě firmy. Přestože se v ní objevují i pojmy jako *komparativní dynamika*, pravdou zůstává, že její rámec je svou podstatou *statický* – jako takový pak umožňuje stanovovat a porovnávat ideální hodnoty (spotřeby, vstupů, výstupů, atd.) za různých okolností, které jsou pro daný případ považovány za neměnné.

Jakmile se však tyto okolnosti začnou vyvíjet v čase, její analýza se velmi rychle ukáže být nedostatečná, a to dokonce i v případě, kdy se vývoj oněch okolností řídí jasnými a nám předem známými pravidly a jejich stav v budoucnosti jsme schopni jednoduchým způsobem predikovat. Je proto třeba zvolit jiný přístup, který zkoumání takových *evolučních systémů* umožní. Matematická *teorie optimálního řízení*[3] jeden z takových přístupů nabízí.

Teorie optimálního řízení ve své nejobecnější podobě využívá matematický aparát, jenž je natolik abstraktní, že se hodí ke zkoumání širokého spektra optimalizačních problémů, ekonomické nevyjímaje. Pro její ekonomickou aplikaci hovoří také to, že shodně s ní chápe *optimalitu* ve smyslu *maximalizačním* (resp. *minimalizačním*) – tzn. ve smyslu hledání extrémů. Zejména vhodná je pro aplikace, v nichž hrají klíčovou roli diferenciální či integrální rovnice, nebo jejich soustavy.

Univerzálnost tohoto přístupu je však zároveň jeho Achillovou patou; vysoká míra abstrakce s sebou nese nutnost dobře se orientovat v pokročilých partiích matematiky, a to v rozsahu, který nelze v ekonomické oblasti rozumně vyžadovat. Matematická náročnost se tak stává tou největší překážkou jednoduchému začlenění teorie optimálního

[3] nebo též *moderní teorie optimalizace*

řízení do repertoáru nástrojů ekonomie. Práce je psána s přesvědčením, že vhodnou volbou objektů na obecné úrovni teorie lze tuto překážku překonat.

Na jedné straně existuje řada kvalitních publikací, za všechny uveďme například knihu [1], které rozvíjejí optimalizační teorii jako matematickou disciplínu. Motivační příklady v nich uváděné mají obvykle fyzikální tématiku, neboť se užití teorie předpokladá hlavně tam. Na straně druhé pak vznikají ekonomicky zaměřená díla, která používají výsledků této teorie často poněkud vágním způsobem. Na vyhraněném typu problému se jeho počítáním jakoby odnikud vynořují tvrzení a předpoklady, přičemž teorii samotné se nevěnuje dostatečná pozornost. Ztrácí se na obecnosti, a tím i na aplikovatelnosti v jiných případech. A to je velká škoda.

Tato práce volí jiný postup: Nejprve formuluje část teorie optimálního řízení matematicky, tedy přesně, přičemž snahou je nalézt vhodnou míru abstrakce, pro kterou by nebylo třeba tak pokročilé matematiky, a přesto by dovolovala uchopit typově rozmanitější sadu problémů. Je jasné, že se jedná o kompromis. Přesto by měla poskytnout *základní představu* o tom, jak teorie optimálního řízení funguje a z jakých premis při tom vychází. Logika výstavby teoretické části vychází z poznámek k přednášce prof. Ing. Tomáše Roubíčka, DrSc. – Úvod do teorie optimalizace – kterou přednáší na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy. Z nich v upravené podobě přebírá i znění Vět v sekci 1.6. Co se týče matematického zázemí, práce skromně předpokládá znalost matematiky na úrovni knih [4] až [6] a základy lineární algebry.

Vazba optimálního řízení na ekonomii nebude zpočátku příliš zjevná. To by měla napravit početní část, kde je na konkrétním modelu, krok za krokem, ukázána nejen užitečnost této teorie, ale i některé problémy, které s sebou snaha o její aplikaci přináší. Z nich se pak rodí ony dodatečné předpoklady, které z teorie nijak neplynou. Potřeba konkrétních výsledků tak bude zcela jistě na úkor celkové rigoróznosti početní části.

Zdá se, že česky psaná literatura, která by se zabývala tímto tématem v kontextu ekonomie, v podstatě neexistuje. Tento fakt přispěl k rozhodnutí napsat práci v češtině, a tím možná zpřístupnit základní vhled do teorie ještě více. Pro větší srozumitelnost je text poset množstvím komentářů a poznámek. Jejich délka se liší, některé obsahují i vzorce; pro větší přehlednost je tedy konec poznámky značen symbolem ♣.

Kapitola 1

Teoretická část

Na vymezeném prostoru není možné prezentovat optimalizační teorii v celé její úplnosti. Chceme-li ji navíc dále aplikovat na ekonomii, nebylo by to ani účelné. Tato kapitola proto představuje optimalizační teorii v míře obecnosti nezbytně nutné k pochopení jejích základních principů, která však zároveň zcela postačuje pro zvolené ekonomické aplikace.

1.1 Předmět optimalizace

Základním objektem, o jehož chování se v rámci teorie optimálního řízení budeme zajímat, je funkcionál;

Definice 1 *Funkcionál.* Libovolné zobrazení Φ z množiny M do prostoru *reálných čísel*, tzn. $\Phi : M \to \Re$, nazveme *funkcionálem* na M.

Cílem optimalizace je pak nalezení minima (resp. maxima) daného funkcionálu, to znamená nalezení těch prvků z přípustné množiny vzorů v M, v nichž daný funkcionál nabývá minima (resp. maxima) v přípustné množině hodnot v $\Re$. Za tímto účelem zavedeme v následujících několika sekcích pojmový aparát, který vyústí ve formulaci podmínek optimality ve formě matematických vět.

Přestože nás budou zajímat objekty na obecnější úrovni, než s jakými se běžně pracuje v základních kurzech matematické analýzy a lineární algebry, v celé teoretické části by měla být patrná snaha o její co nejjednodušší podání. Podmínky optimality by pak měly připomínat jejich ekvivalent z konečné dimenze.

1.2 Základní pojmy

Definice 2 *Banachův prostor.* Lineární normovaný prostor, který je úplný vzhledem k metrice indukované[1] jeho normou, nazveme Banachovým prostorem.

Definice 3 *Uspořádání.* Mějme nějakou množinu M. Relaci $R \subset (M \times M)$ nazveme uspořádáním na M a označíme $\leq_R$, je-li R zároveň

- (a) reflexivní, tzn. $\forall x \in M: \quad x \leq_R x$
- (b) tranzitivní, tzn. $\forall x, y, z \in M: \quad (x \leq_R y \ \&\ y \leq_R z) \Rightarrow (x \leq_R z)$
- (c) slabě antisymetrická, tzn. $\forall x, y \in M: \quad (x \leq_R y \ \&\ y \leq_R x) \Rightarrow (x = y)$.

O množině M pak řekneme, že je *uspořádána* relací R. O prvcích $x, y \in M$ řekneme, že jsou *srovnatelné* vzhledem k R, je-li $x \leq_R y$ nebo $y \leq_R x$.

Definice 4 *Konvexní kužel.* Nechť X je lineární prostor, $K \subset X$. Řekneme, že K je *konvexním kuželem* (v X), je-li uzavřená na součet vektorů a na nezáporné násobky vektoru skalárem, to znamená

$$(\forall x_1, x_2 \in K: \ x_1 + x_2 \in K) \ \&\ (\forall x \in K \ \forall a \in \Re_0^+: \ ax \in K) \ .$$

Definice 5 *Uspořádání kuželem.* Nechť X je lineární prostor a K je nějaký konvexní kužel (v X) *neobsahující přímku.* Uspořádání $\leq$ na X zavedeme kuželem K takto:

$$\forall x_1, x_2 \in X: \quad (x_1 \leq x_2) \Leftrightarrow (x_2 - x_1 \in K) \ .$$

Říkáme, že X je uspořádán kuželem K. Symbolem X_0^+ pak označíme množinu

$$X_0^+ \equiv \{x : x \in X, \ \mathbf{0} \leq x\} \ ,$$

kde tučně vysázenou nulou se má na mysli *nulový prvek* v X.

Poznámka 1 Není těžké ověřit, že uspořádání kuželem (neobsahujícím přímku) je skutečně uspořádáním ve smyslu Definice 3. Navíc se na něj přenáší lineární struktura prostoru (resp. kuželu). Stejně tak není težké si všimnout, že *ne všechny* prvky prostoru jsou v takovém uspořádání srovnatelné. V Definici 5 je pak $X_0^+ = K$. Tuto drobnou redundanci ve značení zachováme pro větší srozumitelnost i dále. ♣

[1] tj. metrice definované vztahem $d(x_1, x_2) \equiv ||x_1 - x_2||$, v němž $|| \cdot ||$ je norma prostoru

1.3 První formulace úlohy

Na tomto místě již máme dostatek pojmů k formulování samotné optimalizační úlohy. Nejprve – snad poněkud vágně – slovně: Optimalizujeme stav nějakého stavového systému pomocí nějaké proměnné, přičemž měřítkem úspěšnosti našeho snažení nám je hodnota nějakého funkcionálu.

Úloha 1 *Nechť U je lineární normovaný prostor, X, Y a Λ jsou Banachovy prostory, přičemž prostor Λ nechť je navíc uspořádaný kuželem K. Minimalizujte funkcionál $\Phi(u, y)$ za podmínek*

$$\Psi(u, y) = \mathbf{0}, \quad B(u, y) \leq \mathbf{0}, \quad u \in U,\ y \in Y,$$

kde $\Phi : U \times Y \to \Re, \quad \Psi : U \times Y \to X, \quad B : U \times Y \to \Lambda.$

Za takto formulovanou úlohou se skrývá představa, že před sebou máme stavový systém, prozatím dosti abstraktní, jenž podléhá jistým *objektivním* zákonům (např. fyzikálním, ekonomickým, apod.) a jehož stavy, reprezentované v úloze proměnou y, lze v souladu s těmito zákony ovlivňovat prostřednictvím řídicí proměnné – pro tu se ujalo označení u. Spolu jsou svázány takzvanou *stavovou rovnicí*, $\Psi = 0$. Ta tedy v úloze představuje fyzikální model světa, v němž optimalizujeme.

Vazbou poněkud jiného typu je nerovnost $B \leq 0$. Jejím prostřednictvím klademe jak na stavy systému y, tak na řízení u, další omezující podmínky, vyplývající z konkrétní aplikace, které stavová rovnice nemá důvod reflektovat. Pro ekonomické aplikace budou typické nejrůznější formy rozpočtových omezení.

Má-li u být skutečně *řízením* v pravém smyslu, je jen přirozené požadovat, aby jím byl stav systému určen jednoznačně. V dalším tedy budeme často předpokládat

$$\forall u \in U \quad \exists!\ y \in Y : \quad \Psi(u, y) = \mathbf{0}\ , \tag{1.1}$$

a tuto funkční závislost budeme značit ψ, čili $y = \psi(u)$. Pro funkci ψ budeme dále v textu používat také slovo *odezva*.

Poznámka 2 Značením ψ se chce zdůraznit, že tato závislost vyplývá právě z jednoznačnosti řešení stavové rovnice. Je ovšem dobré mít na paměti, že splnění předpokladu (1.1) samo o sobě neznamená, že je funkce ψ analyticky vyjádřitelná. ♣

Lze-li požadavek (1.1) reprezentovat nějakou explicitně (analyticky) vyjádřitelnou funkcí ψ, je užitečné dosadit ji za y. Přepisy

$$\begin{array}{rcccl} \Phi(u,y) & = & \Phi(u,\psi(u)) & = & \phi(u) \\ B(u,y) & = & B(u,\psi(u)) & = & \beta(u) \end{array} \qquad (1.2)$$

se tvar Úlohy 1 formálně zjednoduší:

Úloha 2 *Nechť U je lineární normovaný prostor, Λ je Banachův prostor uspořádaný kuželem K. Minimalizujte funkcionál $\phi(u)$ za podmínek*

$$\beta(u) \leq \mathbf{0}, \quad u \in U,$$

kde $\phi : U \to \Re, \quad \beta : U \to \Lambda$.

Tento tvar úlohy vezmeme za výchozí při vyslovení podmínek optimality. Předtím ale zavedeme některé další pojmy a sjednotíme si chápání pojmu derivace (v nekonečně-dimenzionálních prostorech).

1.4 Některé další pojmy

V této sekci definujeme několik elementárních pojmů z několika oblastí matematiky, které se dříve či později budou hodit. Na rozdíl od pojmů další sekce o derivaci, nejsou tyto spolu tak bezprostředně provázány. V zájmu přehlednosti jsou ale sdruženy zde, aby se v dalším textu osamoceně nepovalovaly na různých místech mezi odstavci.

Definice 6 *Prostor lineárních spojitých operátorů.* Mějme lineární normované prostory X a Y. Symbolem $\mathcal{L}(X,Y)$ označíme množinu všech spojitých lineárních operátorů zobrazujících X do Y. (Všimneme si, ž $\mathcal{L}(X,Y)$ tvoří také lineární prostor.)

Definice 7 *Norma v $\mathcal{L}(X,Y)$.* Nechť X, Y jsou lineární *normované* prostory, $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$ jejich normy. Pak v prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$ zavedeme normu

$$\|A\|_{\mathcal{L}} \equiv \sup_{x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}, \quad A \in \mathcal{L}(X,Y) \ . \qquad (1.3)$$

Poznámka 3 Když už jsme zmínili jednu konkrétní normu, je na místě zmínit i další normy, které se v aplikacích běžně vyskytnou. V praxi se například často setkáme s optimalizací na prostorech reálných funkcí definovaných na nějakém intervalu. Pro ty zavedeme nejdříve *supremovou* normu. Pro integrovatelné funkce pak zavedeme L^p-normu[2]. ♣

Definice 8 *Supremová norma.* Mějme prostor omezených funkcí $f : I \to \Re$ na $I \subset \Re^n$. Supremovou normu $\|\cdot\|_\infty$ zavedeme v tomto prostoru následnovně:

$$\|f\|_\infty \equiv \sup_{x\in I} |f(x)| \ . \tag{1.4}$$

Definice 9 *L^p-norma.* Mějme prostor reálných funkcí $L^p(I)$, $I \subset \Re^n$.

$$\|f\|_{L^p} \equiv \left(\int_I |f(x)|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} \ . \tag{1.5}$$

Definice 10 *Duální prostor.* Mějme lineární normovaný prostor M. *Duálním prostorem* (nebo *duálem*) k M budeme rozumět prostor $M^* \equiv \mathcal{L}(M, \Re)$.

Definice 11 *(Přirozená) dualita.* Nechť V je lineární normovaný prostor. Dualitou v prostoru V nazveme – a symbolem $\langle\cdot,\cdot\rangle$ označíme – bilineární formu[3]

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \ V^* \times V \to \Re \ . \tag{1.6}$$

Definice 12 *Uspořádání duálu.* Je-li V lineární normovaný prostor s uspořádáním $\leq_V$, pak na jeho duálu zavedeme uspořádání $\leq_{V^*}$ takto:

$$\forall w^* \in V^* : \quad (\mathbf{0}^* \leq_{V^*} w^*) \Leftrightarrow (\forall v \in V : \ (\mathbf{0} \leq_V v) \Rightarrow (0 \leq \langle w^*, v\rangle) \ ) \ , \tag{1.7}$$

kde $\mathbf{0}^*$ označuje nulový prvek duálu[4].

Definice 13 *Skládání zobrazení.* Symbol $\circ$ budeme používat pro skládání zobrazení (operátorů) a budeme jím mít na mysli toto; Jsou-li $f : A \to B$ a $g : B \to C$, potom

$$g \circ f : A \to C \ , \tag{1.8}$$

a to tak, že kdykoliv jsou $f(a) = b$ a $g(b) = c$ pro nějaké $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, potom

$$[g \circ f](a) \equiv g(f(a)) = c \ . \tag{1.9}$$

Definice 14 *Lipschitzovská spojitost.* Nechť X, Y jsou lineární normované prostory, $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$ jejich normy. Funkci $f : X \to Y$ nazveme *Lipschitzovsky spojitou*, pokud

$$\exists k \in \Re \quad \forall x_1, x_2 \in X : \quad \|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \leq k\|x_1 - x_2\|_X \ . \tag{1.10}$$

[2]prostorem $L^p(I)$ označujeme prostor měřitelných funkcí f, jejichž p-tá mocnina z absolutní hodnoty, čili $|f|^p$, má na I konečný integrál – přesněji viz například [6]

[3]definici bilineární formy viz např. v [8]

[4]všimněme si, že se opět jedná o uspořádání kuželem

1.5 Derivujeme v nekonečné dimenzi

Definice 15 *Derivace ve směru.* Mějme lineární normované prostory A a B, funkci $g : A \to B$ a nechť $a, s \in A$. Derivací funkce g v bodě a ve směru s nazveme symbol $[\partial g(a)](s)$, jemuž přiřadíme hodnotu

$$[\partial g(a)](s) \equiv \lim_{h \to 0^+} \frac{g(a+hs) - g(a)}{h} \ , \tag{1.11}$$

existuje-li limita (v normě v B) na pravé straně.

Poznámka 4 Při zachování značení předchozí definice lze alternativně na derivaci ve směru s nahlížet jako na obyčejnou derivaci zprava v bodě 0 vektorové funkce

$$f : \Re \to B, \quad f(h) \equiv g(a+hs) \qquad \clubsuit$$

Definice 16 *Gâteaux.* Nechť A, B jsou opět lineární normované prostory. Řekneme, že funkce $g : A \to B$ je v bodě $a \in A$. *Gâteauxovsky diferencovatelná* (zkráceně $\mathcal{G}$-dif), jestliže existuje spojitý lineární operátor $G_a \in \mathcal{L}(A, B)$ takový, že

$$\forall s \in A : \quad G_a(s) = [\partial g(a)](s) \ . \tag{1.12}$$

Operátor G_a nazveme *Gâteauxovým diferenciálem* funkce g v bodě a.

Definice 17 *Fréchet.* Nechť A, B jsou lineární normované prostory a nechť funkce $g : A \to B$ je v bodě $a \in A$ Gâteauxovsky diferencovatelná. Platí-li navíc

$$\lim_{\|s\|_A \to 0} \frac{g(a+s) - g(a) - [\partial g(a)](s)}{\|s\|_A} = 0, \tag{1.13}$$

pak o funkci g říkáme, že je v bodě a *Fréchetovsky diferencovatelná* (zkráceně $\mathcal{F}$-dif).

Definice 18 *Spojitá diferencovatelnost.* Nechť A, B jsou lineární normované prostory a nechť funkce $g : A \to B$ je $\mathcal{G}$-dif v každém bodě okolí $\mathcal{U}_a$ nějakého pevného $a \in A$ (její Gâteauxův diferenciál v bodě $w \in \mathcal{U}_a$ označíme G_w). Řekneme, že funkce g je v bodě a *spojitě diferencovatelná*, pokud platí

$$\lim_{w \to a} G_w = G_a \tag{1.14}$$

(vzhledem k normám $\| \cdot \|_A$ a $\| \cdot \|_{\mathcal{L}}$)[5].

[5]tzn. $\forall \varepsilon \in \Re^+ \quad \exists \delta \in \Re^+ : \quad 0 < \|w - a\|_A < \delta \Rightarrow \|G_w - G_a\|_{\mathcal{L}} < \varepsilon$

Definice 19 *Parciální derivace ve směru.* Nechť X, Y, Z a V jsou lineární prostory, V navíc normovaný, $g : X \times Y \times Z \to V$ a nechť $(x, y_0, z) \in X \times Y \times Z$ a $h \in \Re$. Parciální derivací v proměnné y funkce g v bodě (x, y_0, z) ve směru $s \in Y$ nazveme

$$[\partial_y g(x, y_0, z)](s) \equiv \lim_{h \to 0} \frac{g(x, y_0 + hs, z) - g(x, y_0, z)}{h} , \tag{1.15}$$

existuje-li limita na pravé straně.

Definice 20 *Parciální Gâteaux.* Nechť X, Y, Z a V jsou lineární prostory, Y a V normované. Řekneme, že $g : X \times Y \times Z \to V$ je v bodě $(x, y_0, z) \in X \times Y \times Z$ *parciálně Gâteauxovsky diferencovatelná* (zkráceně parciálně $\mathcal{G}$-dif) v proměnné y, jestliže existuje spojitý lineární operátor $G_{y_0} \in \mathcal{L}(Y, V)$ takový, že

$$\forall s \in Y : \quad G_{y_0}(s) = [\partial_y g(x, y_0, z)](s) . \tag{1.16}$$

Operátor G_{y_0} nazveme *parciálním Gâteauxovým diferenciálem* v proměnné y funkce g v bodě (x, y_0, z).

Definice 21 *Parciální Fréchet.* Nechť X, Y, Z a V jsou lineární prostory, Y a V normované, a nechť funkce $g : X \times Y \times Z \to V$ je v bodě $(x, y_0, z) \in X \times Y \times Z$ parciálně $\mathcal{G}$-dif v proměnné y. Platí-li navíc

$$\lim_{\|s\|_Y \to 0} \frac{g(x, y_0 + s, z) - g(x, y_0, z) - [\partial_y g(x, y_0, z)](s)}{\|s\|_Y} = 0, \quad s \in Y, \tag{1.17}$$

pak o funkci g říkáme, že je v bodě (x, y_0, z) *parciálně Fréchetovsky diferencovatelná* (zkráceně parciálně $\mathcal{F}$-dif) v proměnné y.

Definice 22 *Spojitá parciální diferencovatelnost.* Nechť $A \equiv X \times Y \times Z$ a V jsou lineární normované prostory a nechť funkce $g : A \to V$ má v každém bodě nějakého okolí pevně zvoleného $a_0 \in A$ parciální Gâteauxův diferenciál v proměnné y (označíme jej $G_{y,w}$, kde $w \in \mathcal{U}_{a_0}$). Řekneme, že g je v bodě a_0 *spojitě parciálně diferencovatelná*, je-li zobrazení $f : w \mapsto G_{y,w}$ spojité v bodě a_0 (vzhledem k normám $\| \cdot \|_A$ a $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(Y,V)}$).

Poznámka 5 Přestože znějí předchozí (parciální) definice jen pro prostřední proměnnou y, jsou univerzální pro libovolnou proměnnou. Stačí si všimnout, že vhodným přeznačením sousedních prostorů X a Z získáme pro funkci více proměnných definice pro parciální diferencovatelnosti v libovolné její proměnné. ♣

1.6 Podmínky optimality

Konečně jsme vyzbrojeni dostatečným pojmovým aparátem potřebným k formulaci podmínek optimality. Jak bylo předesláno v závěru sekce 1.3, začneme nejprve tou jednodušší a názornější formulací úlohy.

Věta 1 *Nutné podmínky.* Předpokládejme znění a objekty Úlohy 2. Nechť $\phi(u)$ a $\beta(u)$ jsou $\mathcal{G}$-dif pro všechna u a $\mathrm{int}(X_0^+) \neq \emptyset$. Pak pro každé řešení $\overset{\star}{u}$ existují multiplikátory $\lambda_0 \in \Re$ a $\lambda \in \Lambda^*$ takové, že zároveň platí:

$$\begin{aligned} \forall \tilde{u} \in U: \quad \lambda_0[\partial\phi(\overset{\star}{u})](\tilde{u}) + \langle \lambda, [\partial\beta(\overset{\star}{u})](\tilde{u}) \rangle &= 0 && (1.18) \\ \langle \lambda, \beta(\overset{\star}{u}) \rangle &= 0 && (1.19) \\ \mathbf{0} \leq (\lambda_0, \lambda) &\neq \mathbf{0}\ . && (1.20) \end{aligned}$$

Je-li navíc pro nějaký směr $\tilde{u} \in U$

$$[\partial\beta(\overset{\star}{u})](\tilde{u}) < \mathbf{0}\ , \tag{1.21}$$

pak $\lambda_0 = 1$.

Poznámka 6 Znění Věty 1 skutečně evokuje Větu o Lagrangeových multiplikátorech[6], čili Větu o vázaných extrémech. Vhodnou volbou prostorů ($\Re^n$) a dualit na nich (skalární součin) vynikne podobnost s ní ještě více. Ostatně, multiplikátory λ_0 a λ zde plní stejnou funkci jako v konečné dimenzi; převádějí úlohu s vázanými extrémy na úlohu, ve které se sice pohybujeme v bohatším prostoru, ale už bez omezení.

Podmínka (1.21) má pak geometrickou[7] interpretaci; říká, že na hranici omezení existuje směr, jež nás posílá ostře do oblasti vymezené funkcí β. V takovém případě nám ovšem relevantní informaci o prostoru kolem nás dává i funkcionál ϕ. Jinými slovy, podmínka (1.21) říká, zda hraje hodnota ϕ v úloze vůbec nějakou roli. ♣

Není-li závislost $y = \psi(u)$ explicitně vyjádřitelná, nebo explicitní vyjádření sice existuje, ale je příliš složité a není ku prospěchu věci s ním pracovat, je potřeba podmínky optimality zapsat v jiném, obecnějším tvaru, který odpovídá formulaci Úlohy 1. K tomu nám dopomáhej i následující lemma.

[6] viz například [5]

[7] v geometrii nekonečně-dimenzionálních prostorů

Lemma 1 *Adjungovaná úloha.* Předpokládejme znění a objekty Úlohy 1. Dále nechť je splněn předpoklad (1.1), s Lipschitzovsky spojitou odezvou ψ, dále nechť $\psi(u_0) = y_0$ a funkce Ψ a B jsou v bodě (u_0, y_0)

- (a) parciálně Fréchetovsky diferencovatelné v proměnné y,
- (b) parciálně Gâteauxovsky diferencovatelné v proměnné u,
- (c) spojitě parciálně diferencovatelné v proměnné u

a konečně nechť rovnice

$$P \circ [\partial_y \Psi(u_0, y_0)] \quad = \quad [\partial_y B(u_0, y_0)] \tag{1.22}$$

má řešení $P \in \mathcal{L}(X, \Lambda)$. Pak funkce $\beta(u) \equiv B(u, \psi(u))$ je v bodě u_0 $\mathcal{G}$-dif a platí

$$[\partial\beta(u_0)] = [\partial_u B(u_0, y_0)] - P \circ [\partial_u \Psi(u_0, y_0)] \ . \tag{1.23}$$

Poznámka 7 Rovnici (1.22) se říká *adjungovaná rovnice.* Jak z ní odvodit tvrzení lemmatu, nastiňuje sled vztahů, který však nelze považovat za důkaz; ♣

Náznak důkazu Lemmatu 1: Když $\beta(u_0) = B(u_0, y_0) = B(u_0, \psi(u_0))$, pak diferenciál $[\partial\beta(u_0)]$ je podle pravidla o diferenciálu složeného operátoru

$$[\partial\beta(u_0)] = [\partial_u B(u_0, y_0)] + [\partial_y B(u_0, y_0)] \circ [\partial\psi(u_0)] \ . \tag{1.24}$$

Nyní jen zopakujeme předpoklad Lemmatu 1, že existuje nějaký operátor P, který řeší adjungovanou rovnici (1.22), a její levou stranu dosadíme do (1.24):

$$[\partial\beta(u_0)] = [\partial_u B(u_0, y_0)] + P \circ [\partial_y \Psi(u_0, y_0)] \circ [\partial\psi(u_0)] \ . \tag{1.25}$$

Dále zderivujeme rovnici $\Psi(u, y) = 0$ z Úlohy 1

$$[\partial_u \Psi(u_0, y_0)] + [\partial_y \Psi(u_0, y_0)] \circ [\partial\psi(u_0)] = 0 \tag{1.26}$$

a necháme na ni působit operátor P

$$P \circ [\partial_u \Psi(u_0, y_0)] + P \circ [\partial_y \Psi(u_0, y_0)] \circ [\partial\psi(u_0)] = 0 \ . \tag{1.27}$$

Vyjádříme-li si teď z rovnice (1.27) její druhý sčítanec a dosadíme jej do rovnice (1.25), získáme okamžitě rovnici shodnou s (1.23), čili s tvrzením Lemmatu 1. □

Věta 2 *Podmínky optimality.* Předpokládejme znění a objekty Úlohy 1, $\mathrm{int}(X_0^+) \neq \emptyset$. Nechť je splněn předpoklad (1.1), s Lipschitzovsky spojitou odezvou ψ. Nechť $(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})$ je řešením úlohy, funkce Ψ a B jsou v bodě $(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})$

(a) parciálně Fréchetovsky diferencovatelné v proměnné y,

(b) parciálně Gâteauxovsky diferencovatelné v proměnné u,

(c) spojitě parciálně diferencovatelné v proměnné u

a inverzní operátor k $[\partial_y \Psi(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})]$ je omezený spojitý operátor.
Pak existují multiplikátory $\lambda_0 \in \Re$, $\lambda \in \Lambda^*$ a $\xi \in X^*$ takové, že podmínky

$$\begin{aligned}
\lambda_0[\partial_u \Phi(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})](\tilde{u}) + \langle \lambda, [\partial_u B(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})](\tilde{u})\rangle - \langle \xi, [\partial_u \Psi(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})](\tilde{u})\rangle &= 0 && (1.28)\\
\lambda_0[\partial_y \Phi(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})](\tilde{y}) + \langle \lambda, [\partial_y B(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})](\tilde{y})\rangle - \langle \xi, [\partial_y \Psi(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})](\tilde{y})\rangle &= 0 && (1.29)\\
\langle \lambda, B(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})\rangle &= 0 && (1.30)\\
\mathbf{0} \le (\lambda_0, \lambda) &\neq \mathbf{0} && (1.31)
\end{aligned}$$

zároveň platí pro všechna $\tilde{u} \in U$ a $\tilde{y} \in U$.
Je-li dále P řešením adjungované rovnice a existuje-li $\tilde{u} \in U$ takové, že

$$[\partial_u B(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y}) - P \circ \partial_u \Psi(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})](\tilde{u}) < \mathbf{0} \tag{1.32}$$

pak navíc $\lambda_0 = 1$.

Poznámka 8 Na první pohled je vidět podobnost Věty 2 s Větou 1. Jejich vzájemný vztah pak bude zcela zřejmý, položíme-li

$$\begin{aligned}
P &\equiv [\partial_y B(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})] \circ [\partial_y \Psi(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})]^{-1} && (1.33)\\
\xi &\equiv \lambda \circ P + \lambda_0[\partial_y \Phi(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})] \circ [\partial_y \Psi(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{y})]^{-1}\ . && (1.34)
\end{aligned}$$

Pak (1.28) plyne z (1.18) a Lemmatu 1, rovnice (1.29) je dána definicí ξ. Ekvivalence podmínek (1.19) a (1.30) je evidentní z volby β v Lemmatu 1, a konečně podmínka (1.32) je přímočarou aplikací tvrzení Lemmatu 1 na podmínku (1.21). ♣

Kapitola 2

Početní část

Následující příklad uvažuje model firmy investující do obnovy svých kapitálových zdrojů. Zadání je převzato z knihy [3, *str. 200, ex. 4*], s několika odchylkami;

Předně, původní úlohu hledání optima v *nekonečném* časovém horizontu nahradíme úlohou hledání optima v *konečném* horizontu T, který teď vystupuje jako parametr modelu. Důvod je prostý: celočíselné hodnoty času v modelu vystupují jako *roky*. Zároveň v něm vystupuje konstanta zastupující úrokovou míru (o ní za chvíli). Ani ty nejsmělejší plány nemohou počítat s neměnnou úrokovou mírou, o technologii výroby nemluvě, na dlouhá léta dopředu, tím méně na stovky a tisíce generací dopředu[1]. Plánovat v nekonečném časovém horizontu je jednoduše nesmysl.

Další změna tedy spočívá v zacházení s úrokovou mírou. Označíme-li si úrokovou míru (resp. diskontní sazbu) jako d_r, pak diskontovat v čase t budeme výrazem

$$e^{-rt} \equiv e^{-t\ln(1+d_r)} = (1+d_r)^{-t} \ . \tag{2.1}$$

Konstantu r tedy chápeme jakou konstantu *odvozenou* z úrokové míry vztahem

$$r = \ln(1+d_r) \ , \tag{2.2}$$

nikoliv úrokovou míru samotnou, jak se často myslí.

Poslední změnou je pak podmínka omezující výši investic. V modelu má dle zadání firma v každém okamžiku krýt náklady na své investice z okamžitých výnosů. Nicméně, nerovnost uvedená v [3] tento požadavek nijak nereflektuje, její tvar je navíc stěží odůvodnitelný a s největší pravděpodobností se jedná o chybu. V modelu zde prezentovaném je proto nahrazena smysluplnější podmínkou (2.11).

[1] a nekonečno je i tak stále v nedohlednu

2.1 Model firmy investující do obnovy kapitálu

Firma financuje své investice do kapitálu pouze z vlastních zdrojů tak, že v každém časovém okamžiku rozděluje výnosy plynoucí z aktuálního stavu kapitálu mezi investice a čistý zisk kapitálu. Jakou má firma zvolit strategii při určování toku svých investic, aby v průběhu předem stanoveného období vygenerovala co největší čistý zisk upravený o diskontní faktor?

Nechť κ označuje stav kapitálu a $R(\kappa)$ jsou výnosy plynoucí z kapitálu (vztažené na jednotku času). Písmeno ι ať značí tok investic v daném okamžiku, $C(\iota)$ bude představovat náklady na investici ι. O funkcích R a C předpokládejme

$$R(0) = 0, \qquad R'(\kappa) > 0, \qquad R''(\kappa) < 0 \tag{2.3}$$

$$C(0) = 0, \qquad C'(\iota) > 0, \qquad C''(\iota) > 0 \ , \tag{2.4}$$

přičemž nerovnosti ať platí pro kladné hodnoty ι a κ. Přirozeně očekáváme, že jak kapitál, tak investice nabývají pouze nezáporných hodnot. Počáteční stav kapitálu nechť je k_0. Aby měla úloha vůbec smysl, ať je

$$k_0 > 0 \ . \tag{2.5}$$

V modelu dále vystupuje míra přirozeného úbytku kapitálu za jednotku času,

$$b = konst., \quad b \in \langle 0; 1) \ , \tag{2.6}$$

a konstanta r určená z úrokové míry vzorcem (2.2).

Stav kapitálu je tedy v čase zvětšován[2] investicemi na straně jedné, ale zároveň zužován a sužován přirozeným úbytkem na straně druhé. Problém tedy zní:

Maximalizujte

$$\int_0^T e^{-tr}(R(\kappa(t)) - C(\iota(t)))\ dt \tag{2.7}$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \kappa'(t) &= \iota(t) - b\kappa(t) \ , & (2.8) \\ \kappa(0) &= k_0 \ , & (2.9) \\ 0 &\leq \iota(t) \ , & (2.10) \\ C(\iota(t)) &\leq R(\kappa(t)) \ . & (2.11) \end{aligned}$$

[2] v případě kladných investic, samozřejmě

2.2 Identifikace problému

Problém ztotožníme s Úlohou 1; Předně, řízením modelu je $\iota(t)$, nezáporná reálná funkce definovaná na uzavřeném intervalu $\langle 0; T\rangle$. Stavovou proměnnou je pak $\kappa(t)$.

Zákony Ψ definující vztah mezi nimi jsou vyjádřeny diferenciální rovnicí (2.8), s počáteční podmínkou (2.9). Aby rovnice splňovala (1.1), musí být funkce κ alespoň po částech hladká – pro řízení ι pak z tvaru (2.8) plyne, že je po částech spojité[3].

Omezujícími podmínkami B jsou pak podmínky (2.10) a (2.11) a funkcionál Φ se dostane z funkcionálu (2.7). Pojďme si vše sepsat:

Minimalizovaný funkcionál:

$$\Phi(\iota, \kappa) = -\int_0^T e^{-tr}(R(\kappa(t)) - C(\iota(t)))\, dt \tag{2.12}$$

Stavová rovnice:

$$\Psi(\iota, \kappa) = \begin{pmatrix} \kappa' - \iota + b\kappa \\ \kappa(0) - k_0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{2.13}$$

Omezující podmínky:

$$B(\iota, \kappa) = \begin{pmatrix} -\iota \\ C(\iota) - R(\kappa) \end{pmatrix} \leq \mathbf{0} \tag{2.14}$$

Poznámka 9 Integrál (2.12) má opačné znaménko než ten v (2.7). To proto, že integrál (2.7) máme *maximalizovat*, zatímco z teoretické části umíme pouze *minimalizovat*! Stačí si ovšem uvědomit, že $\max\{f\} = \min\{-f\}$. ♣

Prostory U, Y, X a Λ z Věty 2 jsou tedy v modelu tyto:

$$U = \{\iota; \quad \iota : \langle 0, T\rangle \to \Re, \quad \iota \text{ je po částech spojitá}\} \tag{2.15}$$

$$Y = \{\kappa; \quad \kappa : \langle 0, T\rangle \to \Re, \quad \kappa \text{ je po částech hladká}\} \tag{2.16}$$

$$X = U \times \Re \tag{2.17}$$

$$\Lambda = U \times U \tag{2.18}$$

Pro výše definované funkce Φ, Ψ a B tedy spočteme jejich parciální diferenciály, resp. jejich parciální směrové derivace a odvodíme podmínky optimality.

[3]Po částech spojitou funkcí rozumíme funkci omezenou na svém definičním oboru, spojitou až na konečně mnoho bodů, ve kterých však má vlastní jednostranné limity. Po částech hladkou funkcí pak máme na mysli spojitou funkci, jejíž derivace je po částech spojitá.

2.3 Odvození podmínek optimality

2.3.1 Výpočty parciálních směrových derivací

Parciální derivace spočítáme dosazením do definičního vztahu (1.11) Definice 15.

Parciální směrové derivace funkce Ψ

$$\begin{aligned}
&[\partial_\iota \Psi(\iota,\kappa)](\tilde{\iota}) = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(\kappa' - (\iota + h\tilde{\iota}) + b\kappa, \kappa(0) - k_0) - (\kappa' - \iota + b\kappa, \kappa(0) - k_0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(-h\tilde{\iota}, 0)}{h} = \\
&= (-\tilde{\iota}, 0)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
&[\partial_\kappa \Psi(\iota,\kappa)](\tilde{\kappa}) = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{((\kappa + h\tilde{\kappa})' - \iota + b(\kappa + h\tilde{\kappa}), [\kappa + h\tilde{\kappa}](0) - k_0) - (\kappa' - \iota + b\kappa, \kappa(0) - k_0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(h\tilde{\kappa}' + bh\tilde{\kappa}, h\tilde{\kappa}(0))}{h} = \\
&= (\tilde{\kappa}' + b\tilde{\kappa}, \tilde{\kappa}(0))
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Parciální směrové derivace funkce B

$$\begin{aligned}
&[\partial_\iota B(\iota,\kappa)](\tilde{\iota}) = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(-(\iota + h\tilde{\iota}), C(\iota + h\tilde{\iota}) - R(\kappa)) - (-\iota, C(\iota) - R(\kappa))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(-h\tilde{\iota}, C(\iota + h\tilde{\iota}) - C(\iota))}{h} = \\
&= (-\tilde{\iota}, C'(\iota)\tilde{\iota})
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
&[\partial_\kappa B(\iota,\kappa)](\tilde{\kappa}) = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(-\iota, C(\iota) - R(\kappa + h\tilde{\kappa})) - (-\iota, C(\iota) - R(\kappa))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(0, -R(\kappa + h\tilde{\kappa}) + R(\kappa))}{h} = \\
&= (0, -R'(\kappa)\tilde{\kappa})
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Poznámka 10 Zastavme se u posledních rovností vztahů (2.21) a (2.22); Limity mají být dle definice počítány v příslušných normách. V bodovém smyslu jsou rovnosti zřejmé. Pro ověření jejich platnosti např. v supremové normě pak použijeme Lagrangeovu Větu o střední hodnotě – užití demonstrujeme hned v dalším výpočtu. ♣

Parciální směrové derivace funkcionálu Φ

$$
\begin{aligned}
&[\partial_\iota \Phi(\iota,\kappa)](\tilde{\iota}) = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_0^T e^{-rt}(C(\iota+h\tilde{\iota}) - R(\kappa))\;dt - \int_0^T e^{-rt}(C(\iota) - R(\kappa))\;dt}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \int_0^T \frac{e^{-rt}(C(\iota+h\tilde{\iota}) - C(\iota))}{h}\;dt = \\
&= \int_0^T e^{-rt} C'(\iota)\tilde{\iota}\;dt
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\partial_\kappa \Phi(\iota,\kappa)](\tilde{\kappa}) = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_0^T e^{-rt}(C(\iota) - R(\kappa+h\tilde{\kappa}))\;dt - \int_0^T e^{-rt}(C(\iota) - R(\kappa))\;dt}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \int_0^T \frac{e^{-rt}(-R(\kappa+h\tilde{\kappa}) + R(\kappa))}{h}\;dt = \\
&= -\int_0^T e^{-rt} R'(\kappa)\tilde{\kappa}\;dt
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Poznámka 11 V posledním kroku výpočtů (2.23) a (2.24) jsme zaměnili pořadí limity a integrálu. Podrobný rozbor toho, kdy je to proveditelné, viz např. [6, *článek 13.12.*]. Ukážeme postup pouze pro (2.23) – v případě (2.24) se pak argumentuje obdobně.

Ospravedlnění vztahu (2.23): Jde o to ukázat, že argument integrálu pro $h \to 0^+$ konverguje a jeho absolutní hodnota je na intervalu $\langle 0, T\rangle$ omezená konstantou. Pak má na tomto intervalu integrovatelnou majorantu – onu konstantu – a lze použít Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci.

Předně tedy ukážeme[4] konvergenci argumentu integrálu. Člen e^{-rt} nezávisí na h, nemusíme se jím tedy zabývat. Z Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje pro každou dvojici (h,t) takové $\theta_{(h,t)} \in (0,1) \subset \Re$, že

$$
\frac{C(\iota_{(t)} + h\tilde{\iota}_{(t)}) - C(\iota_{(t)})}{h} = C'\big(\iota_{(t)} + \theta_{(h,t)} h \tilde{\iota}_{(t)}\big)\;\tilde{\iota}(t)\;. \tag{2.25}
$$

Pro $h \to 0^+$ jde pravá (a tedy i levá) strana výrazu k $C'(\iota_{(t)})\;\tilde{\iota}(t)$.

[4] čímž učiníme zadost i Poznámce 10

Nyní stačí ukázat omezenost (2.25); Vzhledem k tomu, že nás zajímá limitní chování pro h blízké nule, můžeme se omezit na h například z intervalu $(0, 1)$. Funkce ι a $\tilde{\iota}$ jsou omezené samotnou volbou prostoru, ve kterém žijí – viz (2.15). Zvolíme-li v prostoru U například supremovou normu[5], pak

$$\exists A \in \Re^{+} \quad \forall t \in \langle 0, T\rangle : \quad (\ |\iota(t)| \leq \|\iota\|_U < A\ )\ \&\ (\ |\tilde{\iota}(t)| \leq \|\tilde{\iota}\|_U < A\ )\ . \tag{2.26}$$

Členy $\theta(h, t)$ i h z (2.25) jsou kladné, omezené jedničkou. To ale znamená, že i *celý argument* funkce C' je v (2.25) omezený, když z trojúhelníkové nerovnosti je

$$\left|\iota(t) + \theta(h,t) h\tilde{\iota}(t)\right| \leq \left|\iota(t)\right| + \left|\theta(h,t) h\tilde{\iota}(t)\right| < A + 1 \cdot 1 \cdot A = 2A\ , \tag{2.27}$$

Kde A je z (2.26). Z vlastností funkce C – viz (2.4) – pak víme že C' zobrazuje omezenou množinu opět na omezenou množinu. Z (2.4) a z (2.27) je pak

$$0 < C'\big(\iota(t) + \theta(h,t) h\tilde{\iota}(t)\big) \leq C'(2A) \tag{2.28}$$

a (2.25) je proto v absolutní hodnotě omezen číslem $C'(2A)A$, a to na *celém* intervalu $\langle 0, T\rangle$, což plyne z volby A v (2.26).

Jsou tak splněny *oba* předpoklady Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci a záměnu limity a integrálu v (2.23) lze tedy provést. $\square$

Ve druhém případě, v odvození (2.24), lze pak postupovat podobně, s jednou malou kličkou. Omezenost R' jako funkce času lze totiž zaručit jen tak, že použijeme (2.5) a diferenciální rovnici (2.8), abychom ukázali, že pro ι splňující (2.10) se $\kappa(t)$ nemůže na *konečném* intervalu $\langle 0, T\rangle$ libovolně blížit nule, v níž může být hodnota $R'(\kappa)$ potenciálně nekonečná – podmínky (2.3) to nevylučují. $\clubsuit$

V další odstavci postupně dosadíme právě spočtené směrové derivace (2.19), (2.20), (2.21), (2.22), (2.23) a (2.24) do rovnic (1.28), (1.29) a (1.30) Věty 2. Z nich pak odvodíme konkrétní podmínky optimality pro řízení našeho modelu.

[5] otázku vhodnosti volby normy v U necháme otevřenou

2.3.2 Dosazení do podmínek optimality

Abychom mohli dosadit do rovnic (1.28), (1.29) a (1.30), měli bychom v prvé řadě vědět, jak vypadají multiplikátory λ a ξ, čili prvky příslušných duálů Λ^* a X^* (s λ_0 problém nemáme – je to prostě číslo). Nám ovšem stačí vědět, jak se tyto chovají v dualitách rovnic Věty 2. Multiplikátory proto nahradíme dvojicemi

$$\lambda \quad \to \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in L^1(\langle 0, T\rangle) \times L^1(\langle 0, T\rangle) \tag{2.29}$$

$$\xi \quad \to \quad (\xi_1, \xi_2) \in L^1(\langle 0, T\rangle) \times \Re \ . \tag{2.30}$$

Podmínka (1.31) se pak přenese na funkce λ_1 a λ_2 v uspořádání prostoru $L^1(\langle 0, T\rangle)$, které nechť je shodné s uspořádáním prostoru funkcí U a buď definováno tak, že

$$(\mathbf{0} \leq \lambda_i) \Leftrightarrow (\forall t \in \langle 0, T\rangle : \ 0 \leq \lambda_{i(t)}) \ , \tag{2.31}$$

kde nulovým prvkem $\mathbf{0}$ přirozeně chápeme nulovou funkci na intervalu $\langle 0, T\rangle$.

Poznámka 12 Proč právě prostor L^1? Ten zde volíme proto, abychom dali jasný smysl dualitám (viz dále). Ty jsou pak konečné a argumenty jednotlivých integrálů lze zastřešit jedním integrálem. Teorie však nezaručuje, že reprezentanti multiplikátorů v L^1 skutečně existují. (Zkrátka zkoušíme, zda je tam *náhodou* nenajdeme.) ♣

První podmínka

Vzorce (2.19), (2.21) a (2.23) dosadíme do (1.28). Jednotlivé členy (duality) pak vypadají následovně:

$$\lambda_0[\partial_\iota \Phi(\iota, \kappa)](\tilde{\iota}) \;=\; \lambda_0 \int_0^T e^{-rt} C'(\iota_{(t)})\tilde{\iota}_{(t)} \ dt \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda, [\partial_\iota B(\iota, \kappa)](\tilde{\iota})\rangle &= \int_0^T \lambda_{1(t)}(-\iota_{(\tilde{t})}) \ dt + \int_0^T \lambda_{2(t)} C'(\iota_{(t)})\tilde{\iota}_{(t)} \ dt = \\ &= \int_0^T \tilde{\iota}_{(t)}(\lambda_{2(t)} C'(\iota_{(t)}) - \lambda_{1(t)}) \ dt \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} \langle \xi, [\partial_\iota \Psi(\iota, \kappa)](\tilde{\iota})\rangle &= \int_0^T \xi_{1(t)}(-\tilde{\iota}_{(t)}) \ dt + \xi_2 \cdot 0 = \\ &= -\int_0^T \xi_{1(t)}\tilde{\iota}_{(t)} \ dt \end{aligned} \tag{2.34}$$

a podmínka (1.28) tak má tvar rovnice

$$\int_0^T \tilde{\iota}(\lambda_0 e^{-rt} C'(\iota) + (\lambda_2 C'(\iota) - \lambda_1) + \xi_1) \ dt \ = \ 0 \ , \tag{2.35}$$

která má platit pro libovolný směr (resp. funkci) $\tilde{\iota}$. To ovšem znamená, že

$$\lambda_0 e^{-rt} C'(\iota) + \lambda_2 C'(\iota) - \lambda_1 + \xi_1 \ = \ 0 \ . \tag{2.36}$$

Druhá podmínka

Vzorce (2.20), (2.22) a (2.24) dosadíme do (1.29). Jednotlivé členy jsou

$$
\begin{aligned}
\lambda_0[\partial_\kappa \Phi(\iota,\kappa)](\tilde{\kappa}) &= -\lambda_0 \int_0^T e^{-rt} R'(\kappa(t))\tilde{\kappa}(t)\ dt && (2.37)\\
\langle \lambda, [\partial_\kappa B(\iota,\kappa)](\tilde{\kappa})\rangle &= \int_0^T \lambda_1(t)\cdot \mathbf{0}\ dt + \int_0^T -\lambda_2(t) R'(\kappa(t))\tilde{\kappa}(t)\ dt = \\
&= -\int_0^T \lambda_2(t) R'(\kappa(t))\tilde{\kappa}(t)\ dt && (2.38)\\
\langle \xi, [\partial_\kappa \Psi(\iota,\kappa)](\tilde{\kappa})\rangle &= \int_0^T \xi_1(t)(\tilde{\kappa}'(t) + b\tilde{\kappa}(t))\ dt + \xi_2\tilde{\kappa}(0) = \\
&= \int_0^T \xi_1(t)\tilde{\kappa}'(t)\ dt + \int_0^T \xi_1(t) b\tilde{\kappa}(t)\ dt + \xi_2\tilde{\kappa}(0) = \\
&\overset{p.p.}{=} [\xi_1(t)\tilde{\kappa}(t)]_0^T - \int_0^T \xi_1'(t)\tilde{\kappa}(t)\ dt + \int_0^T \xi_1(t) b\tilde{\kappa}(t)\ dt + \xi_2\tilde{\kappa}(0) = \\
&= \int_0^T \tilde{\kappa}(t)(b\xi_1(t) - \xi_1'(t))\ dt + \xi_1(T)\tilde{\kappa}(T) - \xi_1(0)\tilde{\kappa}(0) + \xi_2\tilde{\kappa}(0) \\
& && (2.39)
\end{aligned}
$$

a z podmínky (1.29) tak dostáváme rovnici

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \tilde{\kappa}[(\xi_1' - b\xi_1) - R'(\kappa)(\lambda_0 e^{-rt} + \lambda_2)]\ dt \quad - \\
-\xi_1(T)\tilde{\kappa}(T) + \xi_1(0)\tilde{\kappa}(0) - \xi_2\tilde{\kappa}(0) \quad = \quad 0\ , \qquad (2.40)
\end{aligned}
$$

která má opět platit pro libovolný směr (funkci) $\tilde{\kappa}$. Má-li platit pro všechny $\tilde{\kappa}$, pak musí platit také pro takové funkce $\tilde{\kappa}$, které mají $\tilde{\kappa}(0) = \tilde{\kappa}(T) = 0$. To znamená, že pro všechny $\tilde{\kappa}$ (bez ohledu na jejich počáteční či koncové hodnoty) musí platit

$$\int_0^T \tilde{\kappa}[(\xi_1' - b\xi_1) - R'(\kappa)(\lambda_0 e^{-rt} + \lambda_2)]\ dt = 0\ ,$$

což podobně jako v předchozím případě (1. podmínce optimality) vede na podmínku

$$(\xi_1' - b\xi_1) - R'(\kappa)(\lambda_0 e^{-rt} + \lambda_2) = 0\ ,$$

čili na diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty s pravou stranou

$$\xi_1' - b\xi_1 = R'(\kappa)(\lambda_0 e^{-rt} + \lambda_2)\ . \qquad (2.41)$$

Při jejím splnění se rovnice (2.40) změní tvar na

$$\xi_1(T)\tilde{\kappa}(T) - \xi_1(0)\tilde{\kappa}(0) + \xi_2\tilde{\kappa}(0) \quad = \quad 0\ , \qquad (2.42)$$

pro který provedeme stejnou úvahu jako o pár řádků výše; Má-li vztah (2.42) platit pro všechny $\tilde{\kappa}$, musí platit i pro ty, které mají $\tilde{\kappa}(0) = 0$, resp. $\tilde{\kappa}(T) = 0$. Dosazením jednoho, resp. druhého, do (2.42) dostaneme dvě podmínky:

$$\xi_1(T) = 0 \tag{2.43}$$

$$\xi_2 = \xi_1(0) \, . \tag{2.44}$$

Poznámka 13 Při odvození vztahu (2.39) je v kroku označeném $\overset{p.p.}{=}$ použita technika *per partes*. To lze pouze za předpokladu, že funkce ξ_1 je po částech hladká. Žádná taková vlastnost ξ_1 ale z teorie neplyne! Nicméně, v opačném případě podmínka optimality (1.29) buď zachová integrální tvar, nebo ξ_1' bude znamenat derivaci ve smyslu distribucí. Chceme-li se vyhnout potřebě pracovat s takovým objektem (a to opravdu chceme), musíme se k předpokladu hladkosti po částech uchýlit[6]. Jedná se však o velký ústupek teorie jednoduššímu počítání (tentokrát už poslední). ♣

Třetí podmínka

Konečně, do třetí podmínky (1.30) dosadíme (2.14):

$$\begin{aligned} \langle \lambda, B(\iota, \kappa) \rangle &= \int_0^T -\lambda_{1(t)}\iota_{(t)} \, dt + \int_0^T \lambda_{2(t)}(C(\iota_{(t)}) - R(\kappa_{(t)})) \, dt = \\ &= \int_0^T \lambda_{2(t)}(C(\iota_{(t)}) - R(\kappa_{(t)})) - \lambda_{1(t)}\iota_{(t)} \, dt \, . \end{aligned} \tag{2.45}$$

Dostaneme tak přímo rovnici

$$\int_0^T \lambda_2(C(\iota) - R(\kappa)) - \lambda_1 \iota \, dt = 0 \, , \tag{2.46}$$

se kterou se ale ještě nespokojíme – vnitřek integrálu má totiž znaménko. Z Věty 2 jsou $\lambda_{1,2} \geq 0$, což ve spojení s (2.10) a (2.11) znamená, že argument integrálu (2.46) je menší nebo roven 0 a rovnice tak musí být splněna bodově, tzn.

$$\lambda_2(C(\iota) - R(\kappa)) - \lambda_1 \iota = 0 \tag{2.47}$$

Tvar (2.47) však stále říká něco víc: $\lambda_2(C(\iota) - R(\kappa)) \leq 0$, zatímco $\lambda_1 \iota \geq 0$. To ale znamená, že rovnice (2.47) může být splněna pouze tehdy, jsou-li *oba* členy rovny nule. Z jedné rovnice tak rázem máme dvě,

$$\lambda_2(C(\iota) - R(\kappa)) = 0 \tag{2.48}$$

$$\lambda_1 \iota = 0 \, . \tag{2.49}$$

[6] autoři [3] předpokládají silněji dokonce hladkost všech multiplikátorů na celém intervalu

2.3.3 Rekapitulace podmínek

Obecné podmínky optimality, zavedené Větou 2 tedy porodily následujíci sadu rovnic: (2.36), (2.41), (2.43), (2.44), (2.48) a (2.49). Letmým pohledem na ně zjistíme, že multiplikátor ξ_2 je obsažen pouze v (2.44), a to navíc tak, že je mu přiřazeno nějaké reálné číslo. Vzhledem k tomu, že na ξ_2 nejsou kladeny žádné podmínky, nemá vztah (2.44) žádnou vypovídací hodnotu. Z dalších úvah jej proto můžeme směle vyloučit. Ostatní rovnice si sepišme do přehledné soustavy

$$\left.\begin{array}{rrcl} \text{(i)} & \lambda_0 e^{-rt}C'(\iota) + \lambda_2 C'(\iota) - \lambda_1 + \xi_1 & = & 0 \\ \text{(ii)} & \xi_1' - b\xi_1 & = & R'(\kappa)(\lambda_0 e^{-rt} + \lambda_2) \\ \text{(iii)} & \xi_1(T) & = & 0 \\ \text{(iv)} & \lambda_2(C(\iota) - R(\kappa)) & = & 0 \\ \text{(v)} & \lambda_1 \iota & = & 0\ . \end{array}\right\} \tag{2.50}$$

Přidejme podmínky ze zadání

$$\kappa'(t) = \iota(t) - b\kappa(t) \tag{2.8}$$

$$\kappa(0) = k_0 \tag{2.9}$$

$$0 \leq \iota(t) \tag{2.10}$$

$$C(\iota(t)) \leq R(\kappa(t)) \tag{2.11}$$

a další předpoklady pro řešitelnost, jednak ze sekce 2.2, jednak z Poznámky 13:

$$\kappa \quad \text{je po částech hladká,} \tag{2.51}$$

$$\iota \quad \text{je po částech spojitá,} \tag{2.52}$$

$$\xi_1 \quad \text{je po částech hladké.} \tag{2.53}$$

Z vlastností (2.3) a (2.53) pak z rovnice (2.50.ii) zřejmě plyne

$$\lambda_2 \quad \text{je po částech spojitá} \tag{2.54}$$

a z vlastností (2.4), (2.53) a (2.54) pak z rovnice (2.50.i) máme, že

$$\lambda_1 \quad \text{je po částech spojitá.} \tag{2.55}$$

Z Věty 2 navíc o multiplikátorech λ víme

$$0 \leq \lambda_0, \quad \mathbf{0} \leq \lambda_1, \quad \mathbf{0} \leq \lambda_2, \quad (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \neq (0, \mathbf{0}, \mathbf{0})\ . \tag{2.56}$$

Všechny rovnice a podmínky máme pěkně pohromadě a můžeme se je pokusit vyřešit. Tomuto snažení věnujeme celý zbytek kapitoly.

2.4 Rozřešení podmínek optimality

Z Věty 2 víme, že v optimu je $\lambda_0 \geq 0$. Je-li ovšem $\lambda_0 > 0$, pak jí vydělíme *všechny* rovnice soustavy (2.50); Vzhledem ke tvaru soustavy se tím pouze přeškálují ostatní multiplikátory, aniž by byly rovnosti porušeny, a na místech, kde se původně nacházela λ_0, se objeví jednička.

Hledání řešení tak lze rozdělit na dva případy, a to na $\lambda_0 = 0$ a na $\lambda_0 = 1$. Přeškálované multiplikátory ve druhém případě označíme stejně jako ty původní. V obou případech shledáme užitečným rozřešení diferenciálních rovnic (2.50.ii) a (2.8):

Diferenciální rovnice pro ξ_1

Z diferenciální rovnice (ii) soustavy (2.50) si odvodíme vzorec pro ξ_1:

$$
\begin{array}{rcll}
\xi_1'(t) - b\xi_1(t) & = & R'(\kappa(t))(\lambda_0 e^{-rt} + \lambda_2(t)) & /e^{-bt} \\
e^{-bt}\xi_1'(t) - be^{-bt}\xi_1(t) & = & e^{-bt}R'(\kappa(t))(\lambda_0 e^{-rt} + \lambda_2(t)) & \\
(e^{-bt}\xi_1(t))' & = & e^{-bt}R'(\kappa(t))(\lambda_0 e^{-rt} + \lambda_2(t)) & / \int_t^T \\
e^{-bT}\xi_1(T) - e^{-bt}\xi_1(t) & = & \int_t^T e^{-b\tau}R'(\kappa(\tau))(\lambda_0 e^{-r\tau} + \lambda_2(\tau))\; d\tau & /e^{bt} \\
e^{b(t-T)}\xi_1(T) - \xi_1(t) & = & \int_t^T e^{b(t-\tau)}R'(\kappa(\tau))(\lambda_0 e^{-r\tau} + \lambda_2(\tau))\; d\tau &
\end{array}
$$

což dává pro $\xi_1(t)$ vzorec

$$
\xi_1(t) \quad = \quad e^{b(t-T)}\xi_1(T) - \int_t^T e^{b(t-\tau)}R'(\kappa(\tau))(\lambda_0 e^{-r\tau} + \lambda_2(\tau))\; d\tau. \tag{2.57}
$$

Diferenciální rovnice pro κ

Podobně jako v předchozích řádcích si z (2.8) vyjádříme κ:

$$
\begin{array}{rcll}
\kappa'(t) + b\kappa(t) & = & \iota(t) & /e^{bt} \\
e^{bt}\kappa'(t) + be^{bt}\kappa(t) & = & e^{bt}\iota(t) & \\
(e^{bt}\kappa(t))' & = & e^{bt}\iota(t) & / \int_0^t \\
e^{bt}\kappa(t) - e^{b.0}\kappa(0) & = & \int_0^t e^{b\tau}\iota(\tau)\; d\tau & /e^{-bt} \\
\kappa(t) - e^{-bt}\kappa(0) & = & \int_0^t e^{b(\tau-t)}\iota(\tau)\; d\tau &
\end{array}
$$

což dává pro $\kappa(t)$ vzorec

$$
\kappa(t) \quad = \quad e^{-bt}\kappa(0) + \int_0^t e^{b(\tau-t)}\iota(\tau)\; d\tau \tag{2.58}
$$

Z něj se pak snadno nahlédne, že za předpokladu (2.5) je okamžitě také

$$\kappa(t) \geq e^{-bt}\kappa(0) > 0, \quad t \in \langle 0, T\rangle \ , \tag{2.59}$$

neboť první sčítanec (2.58) je vždy kladný, a druhý sčítanec je vždy nezáporný, jak plyne z podmínky (2.10). Pro funkci R to pak díky jejím vlastnostem (2.3) automaticky znamená, že také

$$R(\kappa_{(t)}) > 0, \quad t \in \langle 0, T\rangle \ . \tag{2.60}$$

Z informací (2.3), (2.4), (2.52) a (2.60) se pak nabízí možnost zkoumat zvlášť intervaly, na kterých nastává jedna ze tří možností

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ C(\iota_{(t)}) \ < \ R(\kappa_{(t)}) && (2.61)\\ 0 \ &< \ C(\iota_{(t)}) \ = \ R(\kappa_{(t)}) && (2.62)\\ 0 \ &< \ C(\iota_{(t)}) \ < \ R(\kappa_{(t)}) \ , && (2.63)\end{aligned}$$

přičemž vlastnosti (2.4) implikují $\iota(t) = 0$ pro první z možností a $\iota(t) > 0$ pro zbylé dvě. Zkoumaných intervalů je pak konečně mnoho – opět to plyne z vlastností (2.3), (2.4), (2.51) a (2.52). A teď už k samotnému rozboru případů λ_0.

2.4.1 Případ $\lambda_0 = 0$

Soustava (2.50) bude mít pro $\lambda_0 = 0$ tvar

$$\left.\begin{array}{rrcl} \text{(i)} & \lambda_2 C'(\iota) - \lambda_1 + \xi_1 & = & 0 \\ \text{(ii)} & \xi_1' - b\xi_1 & = & R'(\kappa)\lambda_2 \\ \text{(iii)} & \xi_1(T) & = & 0 \\ \text{(iv)} & \lambda_2(C(\iota) - R(\kappa)) & = & 0 \\ \text{(v)} & \lambda_1 \iota & = & 0 \ . \end{array}\right\} \tag{2.50$_0$}$$

Jednotlivé možnosti (2.61), (2.62) a (2.63) nejprve zkoumejme na posledním intervalu. Je-li intervalů n, označme si jej I_n.

Nechť na intervalu I_n je $0 = C(\iota) < R(\kappa)$

…tzn. předpokládáme (2.61). Pak z vlastností (2.4) funkce C je na tomto intervalu $\iota(t) = 0$ a rovnice (2.50$_0$.v) je triviálně splněna pro libovolnou λ_1. Z rovnice (2.50$_0$.iv) a z předpokladu (2.61) je pak

$$\lambda_2(t) = 0, \quad t \in I_n\ . \tag{2.64}$$

Dosadíme tedy $\lambda_2 = 0$ do rovnice (2.50_0.ii), nebo alternativně[7] do (2.57). Při použití terminální podmínky (2.50_0.iii) tak pro ξ_1 dostáváme, že

$$\xi_1(t) = 0, \quad t \in I_n\ . \tag{2.65}$$

Dosazením předchozích dvou multiplikátorů do rovnice (2.50_0.i) pak ovšem máme i

$$\lambda_1(t) = 0, \quad t \in I_n\ . \tag{2.66}$$

Na intervalu I_n je tedy

$$\lambda_0 = \lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \xi_1(t) = 0, \quad t \in I_n\ . \tag{2.67}$$

Nechť na intervalu I_n je $0 < C(\iota) = R(\kappa)$

...tzn. předpokládáme (2.62). Rovnice (2.50_0.iv) je pak triviálně splněna pro libovolnou λ_2. Z vlastností (2.4) funkce C je na tomto intervalu $\iota(t) > 0$, tedy i $C'(\iota) > 0$, a z rovnice (2.50_0.v) plyne

$$\lambda_1(t) = 0, \quad t \in I_n\ . \tag{2.68}$$

Po dosazení do $\lambda_1 = 0$ do první rovnice soustavy dostaneme rovnici

$$\lambda_2(t)C'(\iota(t)) = -\xi_1(t), \quad t \in I_n\ , \tag{2.69}$$

do které dosadíme vztah (2.57) spolu s terminální podmínkou (2.50_0.iii). Dostaneme

$$\lambda_2(t)C'(\iota(t)) = \int_t^T e^{b(t-\tau)} R'(\kappa(\tau))\lambda_2(\tau)\ d\tau, \quad t \in I_n\ . \tag{2.70}$$

Poznámka 14 Kroky, které budou následovat, mají za cíl jediné: převést rovnici (2.70) do tvaru odpovídajícímu *Gronwallově nerovnosti* z teorie obyčejných diferenciálních rovnic ve znění, v jakém je uvedena například v [1, *Corollary 2.1.3*].Tu pak použijeme pro omezení růstu funkce λ_2. ♣

[7] spolu s $\lambda_0 = 0$

Funkce C má inverzní funkci, která je rostoucí a kladná na $\Re^+$ – vše opět elementárně plyne z vlastností (2.4). Je tedy

$$\iota(t) = [C^{-1} \circ R](\kappa(t)), \quad t \in I_n \ . \tag{2.71}$$

Nejmenší teoretická hodnota, jaké by $\iota(t)$ mohlo nabýt, se pak určí z nejmenší teoretické hodnoty $\kappa(t)$ – ta je dána ze vztahu (2.59) hodnotou $k_0 e^{-bT}$. Dosazením této konstanty do vzorce (2.71) je proto

$$0 < A \equiv [C^{-1} \circ R](k_0 e^{-bT}) \leq \iota(t), \quad t \in I_n \ . \tag{2.72}$$

Funkce C' je rostoucí a kladná na $\Re^+$ – vše opět přímo z (2.4). Je proto také

$$0 < A_0 \equiv C'(A) \leq C'(\iota(t)), \quad t \in I_n \ , \tag{2.73}$$

kde A je z předchozího vztahu. Rovnici (2.70) si tak za použití právě definovaného A_0 můžeme přepsat na nerovnost

$$\lambda_2(t) A_0 \leq \int_t^T e^{b(t-\tau)} R'(\kappa(\tau)) \lambda_2(\tau) \ d\tau, \quad t \in I_n \ , \tag{2.74}$$

kterou dále upravíme na tvar

$$\lambda_2(t) e^{-bt} \leq \int_t^T A_0^{-1} R'(\kappa(\tau)) \lambda_2(\tau) e^{-b\tau} \ d\tau, \quad t \in I_n \ . \tag{2.75}$$

Tento tvar už má všechny znaky Gronwallovy nerovnosti, ze které plyne, že

$$\lambda_2(t) e^{-bt} = 0, \quad t \in I_n \ . \tag{2.76}$$

To ale znamená, že i

$$\lambda_2(t) = 0, \quad t \in I_n \ . \tag{2.77}$$

Dosazením $\lambda_2 = 0$ do vztahu (2.69) je pak také

$$\xi_1(t) = 0, \quad t \in I_n \ . \tag{2.78}$$

Na intervalu I_n tak opět platí (2.67) – všechny multiplikátory jsou na něm nulové. Vyšetříme ještě poslední možnost . . .

<u>**Nechť na intervalu I_n je $0 < C(\iota) < R(\kappa)$**</u>

…tzn. předpokládáme (2.63). Pak z vlastností (2.4) funkce C je na tomto intervalu $\iota(t) > 0$ a z rovnice (2.50$_0$.v) je pak

$$\lambda_1(t) = 0, \quad t \in I_n \ . \tag{2.79}$$

Z (2.63) a rovnice (2.50$_0$.iv) je pak také

$$\lambda_2(t) = 0, \quad t \in I_n \ . \tag{2.80}$$

Dosazením obou do první rovnice soustavy (2.50$_0$.i) je ovšem i

$$\xi_1(t) = 0, \quad t \in I_n \ . \tag{2.81}$$

Všechny multiplikátory jsou tedy na I_n nulové, stejně jako v případě (2.67).

Rozborem případů jsme zjistili, že je-li $\lambda_0 = 0$, pak na posledním intervalu jsou pro každou z možností (2.61), (2.62) a (2.63) hodnoty všech multiplikátorů nulové, tzn. platí (2.67).

Terminální podmínka $\xi_1(t_n) = 0$ se tak přesouvá do času t_{n-1}; rovnici (2.50$_0$.iii) proto můžeme nahradit podmínkou

$$\xi_1(t_{n-1}) = 0$$

(a mez $T = t_n$ ve vztahu (2.57) nahradíme mezí t_{n-1}).

Celý postup pak můžeme opakovat. Intervalů je konečný počet n. Po n krocích, kdy postupně nulujeme multiplikátory, tedy dospíváme k závěru, že tyto jsou nulové na *celém* intervalu $\langle 0, T\rangle$ a funkce λ_1 a λ_2 odpovídají nulovému prvku daného prostoru, přičemž $\lambda_0 = 0$ z předpokladu. To je však v rozporu s tvrzením Věty 2. Z předpokladu $\lambda_0 = 0$ jsme tak dospěli ke sporu.

Nezbývá než konstatovat, že v uvažovaném modelu je λ_0 nenulová a přejít ke zkoumání případu, kdy $\lambda_0 = 1$.

2.4.2 Případ $\lambda_0 = 1$

Stejně jako v předchozím případě, napišme si tvar soustavy (2.50) pro $\lambda_0 = 1$:

$$\left.\begin{array}{rrcl} \text{(i)} & e^{-rt}C'(\iota) + \lambda_2 C'(\iota) - \lambda_1 + \xi_1 & = & 0 \\ \text{(ii)} & \xi_1' - b\xi_1 & = & R'(\kappa)(e^{-rt} + \lambda_2) \\ \text{(iii)} & \xi_1(T) & = & 0 \\ \text{(iv)} & \lambda_2(C(\iota) - R(\kappa)) & = & 0 \\ \text{(v)} & \lambda_1 \iota & = & 0\ . \end{array}\right\} \qquad (2.50_1)$$

a stejně jako v předchozím případě budeme zkoumat, jak vypadá řešení této soustavy na intervalech (2.61) – (2.63).

Ještě předtím si ale všimneme, jakou dodatečnou informaci nám teď poskytuje vztah (2.57). Je-li totiž $\lambda_0 = 1$, pak

$$\xi_1(t) \;=\; e^{b(t-T)}\xi_1(T) - \int_t^T e^{b(t-\tau)} R'(\kappa(\tau))(e^{-r\tau} + \lambda_2(\tau))\; d\tau. \qquad (2.82)$$

První člen pravé strany v (2.82) je díky terminální podmínce (2.50_1.iii) nulový, zatímco argument integrálu je *ostře* větší než nula, což plyne z (2.56) (resp. z Věty 2) a z vlastností (2.3) funkce R. Hodnota integrálu je proto na intervalech nenulové délky také kladná. To ovšem znamená, že

$$\xi_1(t) < 0, \quad t \in \langle 0, T)\ . \qquad (2.83)$$

A teď už k jednotlivým možnostem.

Nechť na intervalu I_k je $0 = C(\iota) < R(\kappa)$

…tzn. předpokládáme (2.61). Pak z vlastností (2.4) funkce C je na tomto intervalu $\iota(t) = 0$ a rovnice (2.50_1.v) je triviálně splněna pro libovolnou λ_1. Z rovnice (2.50_1.iv) a z předpokladu (2.61) je pak

$$\lambda_2(t) = 0, \quad t \in I_k\ . \qquad (2.84)$$

Dosazením $\lambda_2 = 0$ do rovnice (2.50_1.i) získáme vztah ξ_1 a λ_1:

$$\xi_1(t) = \lambda_1(t) - e^{-rt}C'(0), \quad t \in I_k \qquad (2.85)$$

a jelikož podle Věty 2 je $0 \le \lambda_1(t)$, pak s použitím poznatku (2.83) můžeme ξ_1 uzavřít do hranic

$$-e^{-rt}C'(0) \le \xi_1(t) < 0, \quad t \in I_k \ . \tag{2.86}$$

Zároveň pro něj musí platit vztah upravený (2.82) s $\lambda_2 = 0$

$$\xi_1(t) \ = \ e^{b(t-t_k)}\xi_1(t_k) - \int_t^{t_k} e^{b(t-\tau)}R'(\kappa(\tau))e^{-r\tau}\, d\tau, \quad t \in I_k \ , \tag{2.87}$$

v němž jsme mez T nahradili[8] koncovým bodem t_k intervalu I_k.

Poznámka 15 Na tomto místě si můžeme všimnout zajímavého postřehu: Budeme-li na chvíli uvažovat takovou nákladovou funkci C, pro níž je $C'(0) = 0$, pak ξ_1, které by splňovalo podmínku (2.86) neexistuje, což zcela vylučuje možnost na nějakém intervalu *neinvestovat.* To dobře koresponduje se situací, kdy mezní příjem z investice (skrze její příspěvek k celkovému kapitálu) převyšuje její mezní náklady. Když $C'(0) = 0$, pak se investovat – byť by to mělo být málo – vyplatí vždy. ♣

Bude-li $I_k = I_n$ koncovým intervalem, pak $t_k = t_n = T$ a díky podmínce (iii) soustavy (2.50_1) bude mít vztah (2.87) tvar

$$\xi_1(t) \ = \ -\int_t^{T} e^{b(t-\tau)}R'(\kappa(\tau))e^{-r\tau}\, d\tau, \quad t \in I_n \ , \tag{2.88}$$

což se má ale rovnat také pravé straně (2.85), takže

$$\lambda_1(t) \ = \ e^{-rt}C'(0) - \int_t^{T} e^{b(t-\tau)}R'(\kappa(\tau))e^{-r\tau}\, d\tau, \quad t \in I_n \ . \tag{2.89}$$

Víme, že $0 \le \lambda_1(t)$ z Věty 2, proto je i

$$0 \le e^{-rt}C'(0) - \int_t^{T} e^{b(t-\tau)}R'(\kappa(\tau))e^{-r\tau}\, d\tau, \quad t \in I_n \ , \tag{2.90}$$

což si zapíšeme ve tvaru

$$\int_t^{T} e^{(b+r)(t-\tau)}R'(\kappa(\tau))\, d\tau \le C'(0), \quad t \in I_n \ . \tag{2.91}$$

Získali jsme tak další testovací podmínku, s níž můžeme testovat taková řízení, která na nějakém koncovém intervalu I_n splňují předpoklad (2.61). Zároveň s tím si na ní můžeme ověřit platnost závěrů Poznámky 15; pro $C'(0) = 0$ musí totiž interval, přes který v (2.91) integrujeme, mít nulovou délku.

[8] není-li totiž I_k posledním intervalem, pak v integrálu z (2.82) *není nutně všude* $\lambda_2 = 0$

Nechť na intervalu I_k je $0 < C(\iota) = R(\kappa)$

...tzn. platí (2.62) a rovnice (2.50_1.iv) je triviálně splněna pro libovolnou λ_2. Z vlastností (2.4) funkce C je pak na tomto intervalu $\iota(t) > 0$ a z rovnice (2.50_1.v) je

$$\lambda_1(t) = 0, \quad t \in I_k \ . \tag{2.92}$$

Dosazením $\lambda_1 = 0$ do rovnice (2.50_1.i) získáme rovnici

$$C'(\iota(t))(e^{-rt} + \lambda_2(t)) + \xi_1(t) = 0, \quad t \in I_k \ , \tag{2.93}$$

jejíž úpravou dostaneme vztah

$$0 \leq \lambda_2(t) = -\frac{\xi_1(t)}{C'(\iota(t))} - e^{-rt}, \quad t \in I_k \ , \tag{2.94}$$

který za λ_2 dosadíme do rovnice (2.50_1.ii). Je pak

$$\xi_1'(t) - b\xi_1(t) \ = \ -R'(\kappa(t))\frac{\xi_1(t)}{C'(\iota(t))}, \quad t \in I_k \ , \tag{2.95}$$

čili po úpravě

$$\xi_1'(t) \ = \ \xi_1(t)\left(b - \frac{R'(\kappa(t))}{C'(\iota(t))}\right), \quad t \in I_k \ . \tag{2.96}$$

Poznámka 16 Z (2.3) a (2.4) plyne: funkce C má inverzní funkci, každá z funkcí R, C a C^{-1} je spojitá, rostoucí, kladná na $\Re^+$ a její hodnota v nule je nula[9]. Řízení ι si pak na intervalech typu (2.62) s jejich pomocí můžeme snadno vyjádřit jako funkci κ;

$$\iota(t) = (C^{-1} \circ R)(\kappa(t)), \quad t \in I_k \tag{2.97}$$

a ve všech vztazích výše je tak možné nahradit $C'(\iota(t))$ výrazem

$$C'(\iota(t)) = (C' \circ C^{-1} \circ R)(\kappa(t)), \quad t \in I_k \ . \tag{2.98}$$

Získáme tak pro multiplikátory vztahy, v nichž už nevystupuje funkce ι. ♣

Pro konkrétní funkce R a C by tak měla být diferenciální rovnice (2.96) v zásadě řešitelná. Známe-li pak hodnotu $\xi_1(t)$ v nějakém krajním bodě I_k (získáme ji třeba z hranice sousedního intervalu), můžeme pro dané řízení vyčíslit multiplikátorovou funkci ξ_1 na celém intervalu I_k a testovat ji podmínkou (2.94).

[9] tytéž vlastnosti pak platí i pro libovolné složení takových funkcí

Poznámka 17 Všimněme si dodatečné informace, kterou skrývá nerovnost (2.94). Ta vylučuje, aby *koncový* interval I_n byl typu (2.62). V čase T (přesněji, v časech t limitně se blížících k času T) by podle ní totiž muselo být[10]

$$0 = \xi_1(T) \leq -e^{-rT} C'(\iota) < 0 \ ,$$

kde poslední nerovnítko plyne z vlastností (2.98) společně s (2.59). ♣

Nechť na intervalu I_k je $0 < C(\iota) < R(\kappa)$

...tzn. platí (2.63). Pak z rovnice (2.50_1.iv), resp. z rovnice (2.50_1.v), je

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 0, \quad t \in I_k \ . \tag{2.99}$$

Dosazením $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ do rovnice (2.50_1.i) a připsáním (2.83) pak bude

$$0 > \xi_1(t) = -e^{-rt} C'(\iota(t)), \quad t \in I_k \ . \tag{2.100}$$

Za ξ_1 dosadíme[11] upravený vztah (2.82), v němž integrační mez T nahradíme integrační mezí t_k (viz poznámka pod čarou č. 8 na straně 29). Potom

$$-e^{-rt} C'(\iota(t)) = e^{b(t-t_k)} \xi_1(t_k) - \int_t^{t_k} e^{b(t-\tau)} R'(\kappa(\tau)) e^{-r\tau} \, d\tau, \quad t \in I_k \ , \tag{2.101}$$

což po jednoduché úpravě – při použití inverzní funkce k C' – dává rovnici

$$\iota(t) = [C']^{-1} \left(-e^{(r+b)t - bt_k} \xi_1(t_k) + \int_t^{t_k} e^{(r+b)(t-\tau)} R'(\kappa(\tau)) \, d\tau \right), \quad t \in I_k \ . \tag{2.102}$$

Do ní si za $\xi_1(t_k)$ dosadíme ze vztahu (2.100). Na intervalech typu (2.62) pak bude

$$\iota(t) = [C']^{-1} \left(e^{(r+b)(t-t_k)} C'(\iota(t_k)) + \int_t^{t_k} e^{(r+b)(t-\tau)} R'(\kappa(\tau)) \, d\tau \right), \quad t \in I_k \ . \tag{2.103}$$

Musíme však mít možnost procházet v integrálu hodnoty R' od koncového bodu I_k.

Poznámka 18 Poslední vztah můžeme přepsat do tvaru s dolní mezí intervalu na

$$\iota(t) = [C']^{-1} \left(e^{(r+b)(t-t_{k-1})} C'(\iota(t_{k-1})) - \int_{t_{k-1}}^{t} e^{(r+b)(t-\tau)} R'(\kappa(\tau)) \, d\tau \right), \quad t \in I_k \ , \tag{2.103'}$$

který se naopak bude hodit, budeme-li chtít hodnoty řízení určovat z minulosti, tedy souhlasně s tím jak plyne čas. (Jaký *směr času* volit, zmíníme ve shrnutí.) ♣

[10]místo $\lim_{t \to T} \xi_1(t)$ píšeme rovnou terminální podmínku (2.50_1.iii)

[11]společně s $\lambda_2 = 0$

Poznámka 19 Alternativně lze řízení ι vyjádřit i jinak. Už od Poznámky 13 předpokládáme (2.53), tzn. ξ_1 je po částech hladká funkce. Pronásobená hladkou funkcí je opět po částech hladká. Ze vztahu (2.100) pak proto plyne, že – skrze hladkost funkce C' – je i řízení ι po částech hladké na intervalech typu (2.63). Můžeme jej proto na I_k derivovat[12]. Nejprve tedy zderivujme rovnici (2.100) – dostaneme:

$$\xi_1'(t) = re^{-rt}C'(\iota(t)) - e^{-rt}C''(\iota(t))\iota'(t), \quad t \in I_k\ , \tag{2.104}$$

tuto derivaci ξ_1' pak společně s ξ_1 z (2.100) dosaďme do rovnice (2.50$_1$.ii) soustavy. Můžeme pak odvozovat;

$$\begin{aligned} re^{-rt}C'(\iota) - e^{-rt}C''(\iota)\iota'(t) + be^{-rt}C'(\iota) &= R'(\kappa)e^{-rt} \quad /e^{rt} \\ rC'(\iota) - C''(\iota)\iota'(t) + bC'(\iota) &= R'(\kappa) \\ C'(\iota)(r+b) - C''(\iota)\iota'(t) &= R'(\kappa) \end{aligned}$$

čímž dospíváme k rovnici

$$\iota'(t) = \frac{C'(\iota(t))(r+b) - R'(\kappa(t))}{C''(\iota(t))}\ . \tag{2.105}$$

Tuto rovnici bychom ostatně dostali i derivací podle času vztahu (2.103). Tvar (2.105) je však jednodušší (pro některé typy funkcí C a R se například lépe hodí pro numerickou realizaci úlohy). ♣

Je-li $\iota(t) > 0$, jak předpokládáme v (2.63), pak nerovnost (2.100) platí *vždy*, což plyne z vlastností funkce C. Ostatní multiplikátory máme nulové. Jak tedy testovat optimalitu řízení na I_k typu (2.63)?

Řízení se může pohybovat jen po trajektorii určené vztahem (2.103), resp. diferenciální rovnicí (2.105). Stačí tedy testovat, zda jej tato rovnice v nějakém čase nevyvede až na dolní či horní hranici investic, nebo dokonce za ně. Testujeme jej tedy na platnost samotného předpokladu (2.63).

Poznámka 20 Opět si všimněme přímého důsledku (2.100) a právě uvedeného pro řízení na posledním intervalu I_n. Je-li totiž I_n typu (2.63), pak limita optimálního řízení v koncovém čase $t_n = T$ musí být rovna nule, aby byla splněna terminální podmínka (2.50$_1$.iii). Do této hodnoty, tzn. $\iota(t_n) = 0$, se tedy řízení musí *trefit* z bodu $\iota(t_{n-1})$[13] po trajektorii určené vztahem (2.103), resp. diferenciální rovnicí (2.105). ♣

[12] skoro všude

[13] přesněji, z nějakého bodu $\iota(t_{n-1} + \varepsilon)$, kde ε je kladné, blízké nule

2.4.3 Shrnutí výsledků

Předně, rozborem jednotlivých případů pro (2.61), (2.62) a (2.63) jsme z předpokladu $\lambda_0 = 0$ dospěli ke sporu s Větou 2. Jinými slovy: má-li model nějaké optimální[14] řízení $\overset{\star}{\iota}$, zcela jistě *zohledňuje* hodnotu maximalizovaného (resp. minimalizovaného) funkcionálu. Pro model to znamená, že je smysluplný a úlohu má tedy smysl řešit.

Dále jsme tedy pracovali s $\lambda_0 = 1$. Rozborem jednotlivých typů intervalů (2.61), (2.62) a (2.63) jsme odvodili řadu vztahů, z nichž některým věnujeme – pro jejich praktickou využitelnost – větší pozornost. To proto, že jimi lze nějaké uvažované řízení relativně efektivně otestovat a případně tím vyloučit jeho optimalitu. V textu se na ně odvoláváme jako na *testovací podmínky*.

Nulové investice: $0 = C(\iota) < R(\kappa)$

Pro interval typu (2.61), tzn. interval, na kterém se neinvestuje, jsme uzavřeli multiplikátor ξ_1 do hranic (2.86). Můžeme jej tedy zpětně průběžně vyčíslovat od koncového bodu[15] intervalu vztahem (2.87) a testovat podmínkou (2.86), kterou jsme pro případ koncového intervalu upravili do tvaru (2.91). Speciálně jsme uvažovali takové nákladové funkce C, které mají $C'(0) = 0$[16]. Pro ně se podařilo možnost nulových investic vyloučit – viz Poznámka 15.

Maximální investice: $0 < C(\iota) = R(\kappa)$

Pro intervaly typu (2.62) jsou investice maximální a jejich výši lze snadno určit z množství kapitálu pomocí R a inverze k C. Jak vypadají multiplikátory, nevíme přesně. Je to dáno typem diferenciální rovnice (2.96) pro ξ_1, jejíž řešení je silně závislé na konkrétním tvaru funkcí R a C (např. pro numerickou aplikaci je však její tvar naopak velmi vhodný). Z ní získané ξ_1 se pak na daném intervalu testuje podmínkou (2.94). Maximální investice se podařilo vyloučit na koncovém intervalu – viz Poznámka 17. Jednoduchou úvahou ostatně dospějeme k témuž závěru; při maximálních investicích se totiž negeneruje žádný okamžitý zisk – neinvestováním na posledním intervalu proto jistě docílíme lepšího výsledku maximalizovaného funkcionálu.

[14] ve smyslu hledání extrému

[15] koncového proto, že pro ξ_1 máme *terminální* podmínku z rovnice (2.50_1.iii)

[16] tzn. minimální mezní náklady na investici jsou nulové

Střední cesta: $0 < C(\iota) < R(\kappa)$

V případě posledního typu intervalu (2.63), tzn. investuje se ostře v mezích předchozích dvou případů, je dráha investic stanovena vztahem (2.103), resp. diferenciální rovnicí (2.105). Stačí pak kontrolovat, zda tato dráha nevyvádí investice v nějakém čase *mimo* hranice předpokladu (2.63). Je-li daný interval koncový, pak se tato dráha musí navíc v koncovém čase T trefit do nuly – viz Poznámka 20.

Poslední interval I_n

Nejvíce informací máme o posledním intervalu; v něm se buď neinvestuje vůbec, nebo se investuje po dráze končící v nule, která je určená rovnicí (2.105), jak bylo popsáno.

Je-li navíc pro konkrétní funkci $C'(0) = 0$, pak podmínky optimality nedovolují neinvestovat a poslední popsaná možnost – střední cesta – je tak jediná možná. Díky tomu pak získáme hodnotu $\xi_1(t_{n-1})$ v krajním bodě intervalu ze vztahu (2.100); ta se použije pro napojení předchozího intervalu, ve kterém – jak už víme – musí být investice maximální (samozřejme za předpokladu, že intervaly jsou alespoň dva).

Naopak pro $C'(0) > 0$ (tzn. když minimální mezní náklady jsou kladné) musí být poslední interval typu (2.61), čili interval s nulovými investicemi. Nerovnost (2.100) a terminální podmínka (2.50_1.iii) totiž zjevně nemohou platit současně.

Jak postupovat při testování optimality

Předně je dobré si připomenout, že podmínky otpimality, tak jak byly zavedeny v teoretické části, jsou podmínkami *nutnými*. Z toho pak vyplývá i jejich použití. Máme-li tedy nějaké konkrétní řízení, umožňují pouze ověřit, zda by mohlo být optimálním. Jako prostředek slouží často hodnoty multiplikátorů, které jsme omezili testovacími podmínkami výše.

Pro určení směru testování je klíčový multiplikátor ξ_1. Pro něj máme *terminální* hodnotu v čase T, podmínku (2.50_1.iii). Při testování tedy musíme postupovat *odzadu*. Řízení se rozdělí na intervaly odpovídající případům (2.61) až (2.63) a v těchto intervalech se pak odzadu postupně provádí testování optimality způsobem popsaným v předchozích odstavcích. Přitom je třeba kontrolovat, zda je přechod multiplikátoru ξ_1 z jednoho intervalu do druhého spojitý.

Závěrem

Práce poskytuje náhled do obecné teorie optimálního řízení. V úvodní části zavádí pojmový aparát, díky němuž formuluje pro aplikaci jednu z nejdůležitějších částí této teorie – podmínky optimality. Ty formuluje jako *nutné* podmínky. Práce se už nezabývá tím, kdy jsou podmínky optimality zároveň postačujícími. Taktéž nechává stranou tzv. existenční věty, tzn. podmínky, za kterých má úloha řešení. Podmínky optimality jsou však formulovány tak, aby jejich použití bylo v podstatě univerzální.

V další části je pak věnována pozornost mikroekonomickému modelu firmy, která využívá toku svých příjmů k okamžitým investicím do svého kapitálu. Pro tento model jsou odvozeny podmínky optimality. V zájmu jednoduššího počítání a konkrétnějších výsledků se však od rigoróznosti teorie upouští ve dvou bodech; Za prvé, multiplikátory se nehledají v duálu podle Věty 2, ale hledají se mezi nějakými jejich reprezentaty v prostoru integrovatelných funkcí. Chce se tím dát dobrý smysl vyjádření dualit, jejichž hodnoty jsou pak omezené. Druhým úkrokem je pak předpoklad po částech hladkosti multiplikátoru ξ_1. Tento se zavádí proto, aby symbol ξ_1' znamenal běžnou derivaci, nikoliv derivaci ve smyslu distribucí.

Dospíváme tak k téměř shodným podmínkám, jako používají autoři knihy [3], s tím rozdílem, že na multiplikátory neklademe tak silné předpoklady. Navíc je jasně vidět, odkud se tyto předpoklady vzaly v souvislosti s praktickým počítáním. Nejsou tedy přímým důsledkem teorie, jak by se mohlo zdát.

Podmínky optimality jsou pro model částečně rozřešeny. Podařilo se ukázat, že optimální řízení modelu sestává maximálně ze tří typů intervalů. Jsou to intervaly, kde jsou investice buďto nulové, tzn.

$$\iota(t) = 0, \quad t \in I_k$$

nebo maximální – tj. odvozené z aktuálních příjmů aktuálního stavu kapitálu vztahem

$$\iota(t) = (C^{-1} \circ R)(\kappa(t)), \quad t \in I_k \ , \tag{2.97}$$

a nebo poslední možností jsou pak intervaly, v nichž je řízení určeno diferenciální rovnicí

$$\iota'(t) = \frac{C'(\iota(t))(r+b) - R'(\kappa(t))}{C''(\iota(t))}, \quad t \in I_k \ . \tag{2.105}$$

Všechny možnosti jsou podrobněji rozebrány v oddílu 2.4.3. Tamtéž jsou shrnuta doporučení pro praktickou realizaci testování optimality nějakého předem daného řízení. Ačkoliv nejsou podmínky optimality rozřešeny do podoby, z níž by bylo možné určit optimální řízení přímo, mají velký význam např. pro numerickou realizaci úlohy; značně omezují parametrický prostor, v němž je třeba hledat řešení. Pro komplikovanější problémy tak mohou představovat signifikantní úsporu výpočetního času.

Přirozeným rozšířením teoretické části zde prezentované by jistě bylo začlenění existenčních vět a formulace podmínek optimality jako postačujících podmínek. Větší pozornost by si pak zasloužilo studium duálních prostorů, v nichž žijí multiplikátory. Ty se totiž ukazují být největší bolístkou a v podstatě jediným zdrojem nerigoróznosti při snaze o jednoduchou aplikaci teorie. Zjednodušeně řečeno; v čím *pěknějším* prostoru hledáme řízení, v o to *nepěknějších* prostorech, jakožto duálních prostorech, žijí multiplikátory.

Jako ideální kompromis se v tomto ohledu jeví prostor funkcí L^2, jehož duál je opět prostor funkcí L^2. I přes tuto symetrii však hrozí reálná možnost, že nalezené optimum v tomto prostoru by vykazovalo silnou nespojitost, nebo by jen nebylo dostatečně hladké a nedovolovalo by uchopit problém ani numericky. To jsou však již témata překračující zamýšlený záběr této bakalářské práce.

Literatura

[1] Fattorini, Hector O.: *Infinite Dimensional Optimization and Control Theory*
Cambridge University Press 1999, ISBN 0-521-45125-6

[2] Havlíček, Karel: *Integrální počet pro začátečníky*
SNTL, Praha 1969

[3] Kamien, Morton I. & Schwartz, Nancy L.: *Dynamic Optimization*
Elsevier Science, Amsterdam 2000, ISBN 0-444-01609-0

[4] Kopáček, Jiří: *Matematická analýza pro fyziky I*
Matfyzpress, Praha 1997, ISBN 80-85863-20-0

[5] Kopáček, Jiří: *Matematická analýza pro fyziky II*
Matfyzpress, Praha 2003, ISBN 80-86732-10-X

[6] Kopáček, Jiří: *Matematická analýza pro fyziky III*
Matfyzpress, Praha 2002, ISBN 80-85863-91-X

[7] Kopáček, Jiří: *Matematická analýza pro fyziky IV*
Matfyzpress, Praha 2003, ISBN 80-86732-11-8

[8] Motl, Luboš & Zahradník, Miloš: *Pěstujeme lineární algebru*
Karolinum, Praha 2003, ISBN 80-246-0421-3