

Univerzita Karlova v Praze
Fakulta sociálních věd
Institut ekonomických studií

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2008

Pavol Stanek

Univerzita Karlova v Praze
Fakulta sociálních věd
Institut ekonomických studií

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
Chaotické správanie v ekonomických modeloch

Autor práce: **Pavol Stanek**

Vedoucí práce: **Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.**

Datum obhajoby: **2008**

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil pouze uvedené prameny a literaturu.

V Praze dne podpis studenta

Rád by som sa na tomto mieste poďakoval Doc. RNDr. Miroslavovi Zelenému, Ph.D. za cenné rady, čas a ochotu, ktorú mi venoval pri tvorbe tejto práce.

Abstrakt

Bakalárska práca sa zaoberá problematikou modelovania ekonomických procesov pomocou diferenčných rovníc prvého rádu. Skúma výskyt možného komplikovaného správania, známeho pod pojmom chaos.

V prvej kapitole je vyložený matematický aparát, pomocou ktorého je presne vymedzený pojem chaotického správania. Nasleduje tvrdenie určujúce jednoduchú postačujúcu podmienku pre chaotickosť. Jej dôkaz odhaľuje, ako chaos vzniká.

V druhej kapitole je skonštruovaný modifikovaný Cobwebov model, ktorý popisuje veľkosť produkcie firmy v čase. Konkrétne rozoberá situáciu, keď firma nevie, aká bude predajná cena v aktuálnom období. Disponuje iba informáciou o cene z predchádzajúceho obdobia. Na tomto modeli sú demonštrované výsledky z prvej kapitoly.

Abstract

This bachelor's thesis concerns with the issue of modelling economic processes using difference equations of the first order. It investigates the occurrence of a possible complicated behaviour, generally known as chaos.

The first section explains the mathematical apparatus, which exactly defines the term chaotic behaviour. Statement that determines a simple sufficient condition for chaotic behaviour follows. Its proof reveals the emergence of chaos.

In the second section, there is constructed a modified cobweb model, which describes firm's volume of production in time. Specifically, it discusses the situation, when the firm has no information about the price in the current period. The firm has at its disposal only information about the price from the previous period. The results from the first section are demonstrated on this model.

Obsah

1	Úvod	3
2	Pojem chaosu a chaotického správania	5
2.1	Diferenčné rovnice prvého rádu	5
2.1.1	Grafická analýza	6
2.2	Jednoduchá dynamika	8
2.2.1	Stacionárne a cyklické trajektórie	8
2.2.2	Konvergenca trajektórií	10
2.2.3	Stabilita	10
2.3	Chaos	11
2.3.1	Hromadné body	11
2.3.2	Li-Yorkov chaos	13
2.3.3	Li-Yorkova veta	17
3	Cobwebov model	24
3.1	Mikroekonomická analýza firmy	24
3.1.1	Statická analýza	25
3.1.2	Tvorba ceny	26
3.1.3	Dynamická analýza	27
3.2	Analýza modelu	29
3.2.1	Grafická analýza	29
3.2.2	Stacionárne body	31
3.2.3	Chaotické správanie	34
3.2.4	Zisk	35

4 Záver	38
Literatura	39

1

Úvod

Odhalenie príčin zmien ekonomických veličín v čase nám pomáha lepšie porozumieť reálnej ekonomike a zlepšuje našu schopnosť predikcie ďalšieho vývoja ekonomiky. Časový vývoj veličín modelujeme pomocou takzvaných dynamických modelov, ktoré využívajú matematický aparát diferenčných a diferenciálnych rovníc.

Najtypickejším príkladom je skúmanie procesu prispôsobovania. Predstavme si, že v ekonomike existuje rovnovážny stav, kedy sú všetky veličiny nemenné. Nás zaujíma, ako sa bude vyvíjať celý systém, ak sa teraz nachádza mimo rovnovážny stav. Skúmame, či sa po istom čase vráti do rovnovážneho stavu, alebo či sa aspoň s rastúcim časom k tomuto stavu približuje. Ukazuje sa, že ak je vývoj určený nelineárnymi rovnicami, môže byť rovnovážny stav veľmi nestabilný a pri sebemenšom vychýlení sa celý systém začne správať komplikovane. Buď cyklicky s vysokou periódou alebo úplne neperiodicky. Tento fenomén sa nazýva chaos. Pritom v ekonómii je celý rad problémov, kde si s modelovaním pomocou lineárnych funkcionálnych rovníc nevystačíme.

V prípade, keď čas vnímame ako spojitú veličinu, modeluje vývoj pomocou diferenciálnych rovníc. Avšak potom je k vzniku chaotického správania nutné, aby systém obsahoval aspoň tri veličiny. To znamená, že systém je popísaný pomocou sústavy aspoň troch diferenciálnych rovníc. Naopak, ak použijeme diferenčné rovnice, teda keď čas vnímame ako diskretnú veličinu, môže sa fenomén chaotického správania objaviť už

prípade ak systém obsahuje jednu veličinu. Práve týmto druhým prípadom sa budeme zaoberať.

Značnú časť prvej kapitoly sa budeme venovať presnému zavedeniu pojmu chaotického správania. Ďalej uvedieme vetu z článku [3], hovoriacu o postačujúcej podmienke pre výskyt chaosu. Jej dôkaz nám umožní bližšie nahliadnuť ako chaos vzniká.

V druhej kapitole skonštruujeme modifikovaný Cobwebov model firmy. Na tomto modeli demonštrujeme výsledky z prvej kapitoly.

2

Pojem chaosu a chaotického správania

2.1 Diferenčné rovnice prvého rádu

Budeme sa zaoberať modelmi s diskretným časom. Čas teda vnímame nie kontinuálne ale v izolovaných bodoch, násobkoch nejakej časovej jednotky. Navyše sa obmedzíme na situáciu, keď je modelovaný proces charakterizovaný v danom časovom okamihu jediným číslom.

Definícia 2.1.1 (*system*)

Nech je daný interval $D \subset \mathbb{R}$ a funkcia $\theta : D \rightarrow D$. Potom **diferenčnou rovnicou prvého rádu** rozumieme rovnicu v tvare

$$x_{t+1} = \theta(x_t), \quad x_t \in D, t \in \mathbb{N},$$

kde neznámou je postupnosť $\{x_t\}$. Množinu D nazývame **obor prípustných hodnôt** a dvojicu (θ, D) nazývame **system**.

Koncept systému nám umožňuje modelovať najrozličnejšie procesy majúce podobu časového radu. Pre ilustráciu uveďme jednoduchý príklad, ktorý je sformalizovaním Malthusových úvah o populačnom raste. Oborom prípustných hodnôt je interval $[0, \infty]$, pretože záporná populácia nemá praktický zmysel. Riadiaca funkcia θ priraduje každému $y \in [0, \infty]$ hodnotu $(1+r)y$, kde parameter $0 < r < 1$ vyjadruje rozdiel

miery pôrodnosti a miery úmrtnosti povedzme za rok. Náš model potom popisuje vývoj veľkosti populácie v čase.

Ak sa systém v čase $t = 0$ nachádza v stave x_0 (tzv. **počiatočná podmienka**), môžeme diferenčnú rovnicu chápať ako rekurzívny predpis, ktorý jednoznačne determinuje ďalší vývoj systému. Stav v každom ďalšom okamihu dostaneme iteráciou zobrazenia θ . Tento fakt je motiváciou k zavedeniu nasledujúceho značenia,

$$\theta^n(x) = \underbrace{\theta \circ \theta \circ \dots \circ \theta}_{n\text{-krát}}(x).$$

Definícia 2.1.2 (trajektória a orbita)

Postupnosť

$$\tau(x) = (x, \theta(x), \theta^2(x), \dots, \theta^n(x), \dots)$$

nazývame **trajektóriu** s počiatočnou podmienkou x . Množinu bodov, cez ktoré trajektória prechádza, teda množinu $\gamma(x) = \{x, \theta(x), \theta^2(x), \dots\}$ nazývame **orbitou** s počiatočnou podmienkou x .

2.1.1 Grafická analýza

Spôsob, akým je trajektória generovaná, sa dá ľahko demonštrovať na **fázovom diagrame**. Fázový diagram je graf, ktorého horizontálna os znázorňuje stav veličiny v čase t a vertikálna stav v čase $t + 1$. Závislosť je určená funkciou θ . Začneme na horizontálnej osi s počiatočnou podmienkou x_0 . Keď vynesieme hodnotu θ v bode x_0 , dostaneme na vertikálnej osi hodnotu x_1 - stav v ďalšom okamihu. Ak chceme pokračovať musíme hodnotu x_1 preniesť na horizontálnu os. To spravíme jednoducho pomocou identického zobrazenia. Teraz môžeme rovnakým spôsobom pokračovať v určovaní hodnoty veličiny v ďalších okamihoch.

Postup je znázornený na obr.2.1 pre $\theta = -\frac{5}{2}x(x - 1)$ a počiatočnú podmienku $x_0 = 0,05$.

θ

θ^t

obr. 2.1: Fázový diagram

2.2 Jednoduchá dynamika

Cesta, po ktorej sa vydá trajektória z počiatočnej podmienky, môže byť niekedy ľahko popísateľná. Napríklad v prípade, ak trajektória po niekoľkých krokoch zavíta do bodu v ktorom už raz bola. Potom je navždy odsúdená opakovať dovtedy prejdenu trasu.

Inou príjemnou vlastnosťou môže byť skutočnosť, že sa trajektória postupom času približuje k istej hodnote. Tieto a iné vlastnosti budú teraz predmetom nášho záujmu.

2.2.1 Stacionárne a cyklické trajektórie

Definícia 2.2.1 (*stacionárne a periodické trajektórie*)

*Nech (θ, D) je systém. Hovoríme, že trajektória $\tau(x)$ je ***k*-periodická** ak platí $\theta^k(x) = x$ a zároveň $\theta^n(x) \neq x$ pre všetky $n < k$. V prípade, ak $k = 1$ hovoríme, že trajektória je **stacionárna** (resp. že bod x je **stacionárny**). Pre $k > 1$ hovoríme niekedy o ***k*-cyklických trajektóriach**.*

Upozorníme, že v definícii sa za periódu považuje najmenšie číslo k s vlastnosťou $\theta^k(x) = x$, preto je určené jednoznačne. Ak je teda trajektória k -periodická, potom v zmysle definície nie je napríklad $2k$ -periodická.

Stacionárne správanie môžeme chápať ako rovnovážny stav systému. Je dôležité vedieť nájsť stacionárne body, alebo aspoň vedieť o ich existencii. Situácia je ľahko čitateľná z fázového diagramu. Priamo z definície vyplýva, že množina bodov počiatočných podmienok stacionárnych trajektórií je totožná s množinou pevných bodov zobrazenia θ . Na fázovom diagrame sú to práve body ležiace v priesečníku funkcie θ a priamky prechádzajúcej počiatkom so sklonom 45° .

V prípade, ak situácia nie je natoľko prehľadná, aby sme ju zachytili na fázovom diagrame, môžeme použiť nasledujúce dve vety, ktoré určujú postačujúce podmienky pre existenciu stacionárneho bodu.

Veta 2.2.2 *Nech (θ, D) je systém. Nech je θ spojitá na intervale D a nech existujú body $a, b \in D$ splňujúce $\theta(a) < a$, $\theta(b) > b$. Potom existuje bod $\xi \in [a, b]$ taký, že trajektória $\tau(\xi)$ je stacionárna.*

Dôkaz. Definujeme pomocnú funkciu $f(x) := \theta(x) - x$. Funkcia f je rozdielom dvoch spojitých funkcií a preto je spojitá na D . Ďalej platí:

$$\begin{aligned} f(a) &= \theta(a) - a < 0 \\ f(b) &= \theta(b) - b > 0 \end{aligned}$$

Aplikáciou Darbouxovej vety o nadobúdaní medzihodnôt [2, Veta 4.19] na interval $[f(a), f(b)]$ dostávame $\xi \in [a, b]$ s vlastnosťou $f(\xi) = 0$. Čo znamená, že $\theta(\xi) - \xi = 0$, odkiaľ tvrdenie bezprostredne plynie. ■

Veta 2.2.3 *Nech (θ, D) je systém a nech existujú uzavreté intervaly I, J splňujúce $I \subsetneq J \subset D$ a $\theta(I) = J$. Potom existuje bod $\xi \in I$ taký, že trajektória $\tau(\xi)$ je stacionárna.*

Dôkaz. Buď $J = [c, d]$. Pretože $\theta(I) = J$, existujú $a, b \in I$ spĺňajúce $\theta(a) = c$ a $\theta(b) = d$. Zároveň pretože $I \subsetneq J$, platí $c < a$ a $d > b$. Teraz stačí aplikovať predchádzajúcu vetu. ■

Naše úvahy sa dajú zovšeobecniť aj pre cyklické trajektórie. Z definície plynie, že bod x je počiatkom k -cyklickej trajektórie, ak je pevným bodom zobrazenia θ^k a zároveň pre všetky $n < k$ nie je pevným bodom zobrazenia θ^n . Pre postačujúcu podmienku existencie k -cyklickej trajektórie je možné zovšeobecniť obe vety tak, že namiesto zobrazenia θ budeme brať zobrazenie θ^k .

2.2.2 Konvergencia trajektórií

V tejto kapitole sa posunieme od skúmania jednej trajektórie k skúmaniu vzájomnej polohy dvoch trajektórii. Formalizujeme intuitívnu predstavu, že dve trajektórie sa s rastúcim časom správajú stále podobnejšie. Inak povedané, že sa k sebe navzájom približujú.

Definícia 2.2.4 (*konvergencia trajektórií*)

*Nech (θ, D) je systém. Nech τ a κ sú dve trajektórie s počiatočnými podmienkami x a y ležiacimi v D . Hovoríme, že τ a κ **vzájomne konvergujú** ak platí*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\theta^k(x) - \theta^k(y)| = 0.$$

Dôležitý je najmä špeciálny prípad, keď je jedna z trajektórií stacionárna. Vtedy definícia zodpovedá situácii, keď jedna trajektória konverguje k určitej hodnote.

2.2.3 Stabilita

S pojmom konvergencie trajektórií úzko súvisí otázka stability. Stabilita trajektórie znamená, že pri malej zmene počiatočnej podmienky sa nezmení limitné správanie trajektórie.

Definícia 2.2.5 *Nech (θ, D) je systém a $\tau(x)$ je trajektória s $x \in D$. Hovoríme, že trajektória τ je **asymptoticky stabilná** (resp. bod x je **asymptoticky stabilný**) ak existuje $\delta > 0$ tak, že pre všetky $y \in (x - \delta, x + \delta) \cap D$ trajektórie $\tau(x)$ a $\kappa(y)$ vzájomne konvergujú.*

Pre stabilitu stacionárnych bodov existuje jednoduchá postačujúca podmienka.

Veta 2.2.6 *Nech (θ, D) je systém a zobrazenie θ je spojito diferencovateľné. Ak stacionárny bod $x \in D$ spĺňa podmienku $|\theta'(x)| < 1$, potom je asymptoticky stabilný.*

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že $|\theta'(x)| < 1$. Potom zo spojitosti θ' vyplýva existencia $\delta > 0$ a $\xi \in (0, 1)$ takého, že

$$\forall y \in [x - \delta, x + \delta] \subset D : |\theta'(y)| \leq \xi < 1.$$

Potrebuje o každom takomto y ukázať, že $\tau(y)$ konverguje k x . Zvoľme $y_0 \in [x - \delta, x + \delta]$. Keďže vo všetkých bodoch medzi y_0 a x je $|\theta'| \leq \xi$, musí $\theta(y_0)$ padnúť do intervalu $[x - \xi \delta, x + \xi \delta]$. Na bod $\theta(y_0)$ môžeme použiť tú istú úvahu a dostaneme $\theta^2(y_0) \in [x - \xi^2 \delta, x + \xi^2 \delta]$. Indukciou dostávame, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\theta^n(y_0) \in [x - \xi^n \delta, x + \xi^n \delta].$$

Pretože $\xi^n \delta \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$, musí platiť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta^n(y_0) = x.$$

■

2.3 Chaos

Chaotické správanie si intuitívne predstavujeme ako nepravidelné, zdanlivo náhodné. Asi by sme očakávali, že trajektórie v takomto systéme nebudú periodické a ani nebudú konvergovať k žiadnej hodnote. Našou snahou bude zaviesť pojem chaosu spĺňajúci tieto predstavy.

2.3.1 Hromadné body

Definícia 2.3.1 *Nech $\{x_n\}$ je postupnosť reálnych čísel a nech existuje vybraná podpostupnosť $\{x_{n_k}\}$ taká, že*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = A \in \mathbb{R}.$$

*Potom číslo A nazývame **hromadným bodom** postupnosti $\{x_n\}$.*

Pre popis chaotického správania potrebujeme zaviesť pojmy **limes superior** a **limes inferior**. Uvažujme obmedzenú reálnu postupnosť $\{x_n\}$. K nej definujeme postupnosti $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ nasledovne:

$$y_n := \sup\{x_k : k \geq n, k \in \mathbb{N}\},$$

$$z_n := \inf\{x_k : k \geq n, k \in \mathbb{N}\}.$$

Prvky postupnosti $\{y_n\}$ sa vytvárajú tak, že sa berie supremum istej množiny. Môžeme pozorovať, že s rastúcim n sa táto množina určite nezhväčšuje. Tým pádom sa nemôže zväčšovať ani jej supremum. Preto je postupnosť $\{y_n\}$ nerastúca. Analogicky sa dá nahliadnuť, že postupnosť $\{z_n\}$ je neklesajúca. Pretože limita monotónnej postupnosti vždy existuje, môžeme definovať

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

Na rozdiel od limity postupnosti, ktorá existovať môže ale nemusí, limes inferior a limes superior existujú vždy.

Užitočnosť celej konštrukcie pre naše aplikácie ukazuje nasledujúca veta.

Veta 2.3.2 *Nech $\{x_n\}$ je obmedzená reálna postupnosť. Potom $\limsup x_n$ je maximálny a $\liminf x_n$ je minimálny hromadný bod postupnosti $\{x_n\}$.*

Dôkaz. Dôkaz predvedieme len pre $\limsup x_n$. Pre $\liminf x_n$, by sa vykonal analogicky.

Označme $S := \limsup x_n$. Ďalej definujme množinu

$$N_1 := \{j \in \mathbb{N}; x_j \in [S - 1/2, S + 1/2]\}$$

a označme $n_1 := \min\{N_1\}$. Číslo n_1 je prvý taký index, že x_{n_1} padne do intervalu $[S - 1/2, S + 1/2]$. Ak sú definované množiny N_1, N_2, \dots, N_k a indexy n_1, n_2, \dots, n_k , definujeme

$$N_{k+1} := \left\{ j \in \mathbb{N}; x_j \in \left[S - \left(\frac{1}{2}\right)^k, S + \left(\frac{1}{2}\right)^k \right] \right\}$$

a označíme $n_{k+1} := \min\{N_{k+1} \setminus \{n_1, \dots, n_k\}\}$. Ak by bola množina na pravej strane prázdna, znamenalo by to, že od istého indexu neleží v intervale $[S - (1/2)^k, S + (1/2)^k]$ žiadny bod postupnosti $\{x_n\}$, čo je spor s definíciou limes superior. Indexy n_i sú preto definované korektne. Pretože $N_1 \supset N_2 \supset \dots$ a zároveň $n_i \neq n_j$ pre $i \neq j$, je postupnosť indexov $\{n_i\}$ rastúca. Dostávame vybranú postupnosť $\{x_{n_i}\}$ konvergujúcu k S . Bod S je teda hromadným bodom postupnosti $\{x_n\}$.

Maximalitu ukážeme sporom. Predpokladajme, že existuje $T > S$ hromadný bod $\{x_n\}$. Zvoľme $\epsilon < \frac{T-S}{2}$. Z definície limes superior potom vyplýva, že v intervale $(T - \epsilon, \infty)$ neleží žiadny bod postupnosti $\{x_n\}$. Čo je spor s tým, že T je hromadný bod. ■

Na záver tohto paragrafu definujeme pojmy vypovedajúce o veľkosti nekonečných množín.

Definícia 2.3.3 *Nech A je abstraktná množina. Hovoríme, že A je **spočítateľná**, ak existuje bijektívne zobrazenie medzi množinou A a množinou prirodzených čísel. Množinu označujeme ako **nespočítateľnú** ak nie je spočítateľná a zároveň je nekonečná.*

Triviálnym príkladom spočítateľnej množiny je množina \mathbb{N} všetkých prirodzených čísel. Spočítateľnou množinou je aj množina \mathbb{Q} všetkých racionálnych čísel. Množina \mathbb{R} všetkých reálnych čísel je už nespočítateľná a teda oveľa väčšia.

2.3.2 Li-Yorkov chaos

S práve zavedenými pojmami sa môžeme pustiť do definície chaotickeho správania. Nasledovná definícia pochádza z práce [3]. Táto definícia nie je jedinou používanou. Existuje niekoľko rôznych definícií chaosu, ktoré nie sú navzájom ekvivalentné.

obr. 2.2: Chaotické trajektórie

obr. 2.3: Vzdialenosť trajektórií

Definícia 2.3.4 *Hovoríme, že systém (θ, D) je **chaotický**, ak spĺňa nasledujúce podmienky:*

(P1) *Pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $p_k \in D$ tak, že trajektória $\tau(p_k)$ je k -periodická.*

(P2) *Ďalej existuje nespočítateľná množina $S \subset D$ neobsahujúca žiadne periodické body taká, že pre všetky $r, s \in S, r \neq s$ platí,*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta^t(r) - \theta^t(s)| > 0 \quad (\text{P2.a})$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |\theta^t(r) - \theta^t(s)| = 0 \quad (\text{P2.b})$$

a pre všetky periodické body p_k z (P1) platí,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta^t(r) - \theta^t(p_k)| > 0. \quad (\text{P2.c})$$

Podmienky P2.a a P2.b vypovedajú o vzájomnej polohe trajektórií $\tau(r)$ a $\tau(s)$. Tie sa nekonečne veľakrát od seba vzdialia, ale zároveň sa nekonečne veľakrát k sebe priblížia, a to ľubovoľne blízko. Na obr. 2.2 je znázornený priebeh dvoch takýchto trajektórií. V grafe na obr. 2.3 sú vynesené ich vzájomné vzdialenosti.

Po množine S obsahujúcej neperiodické body sa požaduje aby bola veľká v zmysle definície 2.3.3.

Lemma 2.3.5 *Nech I je interval a $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie. Nech J je ľubovoľný uzavretý interval spĺňajúci $J \subset G(I)$. Potom existuje $Q \subset I$ uzavretý interval taký, že $G(Q)=J$.*

Dôkaz. Buď $J = [G(p), G(q)]$. Predpokladajme, že $p \leq q$ (dôkaz pre $p \geq q$ je analogický). Označme

$$u = \sup\{x \in [p, q], G(x) = G(p)\}$$

$$v = \inf\{x \in [p, q], G(x) = G(q), x \geq u\}.$$

Množina, z ktorej berieme supremum, určite obsahuje bod p a množina, z ktorej berieme infimum, určite obsahuje bod q . Navyše sú obe množiny obmedzené, pretože sú podmnožinami intervalu $[p, q]$. Z [2, Veta 4.10] potom vyplýva, že u a v existujú. Zrejme platí $u \leq v$. Chceme ukázať, že $G[u, v] = J$.

Spojitosť G nám dáva $G(u) = G(p)$ a $G(v) = G(q)$, a teda $G[u, v] \supset J$. Predpokladajme, že existuje y , pre ktoré platí $y \in G[u, v]$ a zároveň $y \notin J$. Ak je $y < G(p)$, existuje vďaka spojitosti G také $z \in (u, v]$, že platí $G(z) = G(p)$. To je ale spor s definíciou u . Prípade $y > G(q)$ vedie analogicky k sporu s definíciou v . Máme $G[u, v] \subset J$ a $G[u, v] = J$. ■

Lemma 2.3.6 *Nech $\theta : D \rightarrow D$ je spojité zobrazenie a $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť kompaktných intervalov spĺňajúcich $I_n \subset D$ a $I_{n+1} \subset \theta(I_n)$. Potom existuje postupnosť kompaktných intervalov $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ takých, že $Q_{n+1} \subset Q_n \subset D$ a $\theta^n(Q_n) = I_n$.*

Dôkaz. Definujme $Q_0 = I_0$. Potom $\theta^0(Q_0) = I_0$, kde θ^0 chápeme ako identické zobrazenie. Predpokladajme existenciu intervalu Q_{n-1} , pre ktorý platí $\theta^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$. Potom $I_n \subset \theta(I_{n-1}) = \theta^n(Q_{n-1})$. Použitím Lemmy 2.3.5 pre $G = \theta^n$, $I = Q_{n-1}$ a $J = I_n$ dostávame $Q_n \subset Q_{n-1}$ také, že $\theta^n(Q_n) = I_n$. Tým je dôkaz indukciou hotový. ■

Posledné tvrdenie je veľmi užitočný nástroj na skúmanie dynamických systémov. Ak sa nám podarí nájsť v definičnom obore systému (θ, D) postupnosť intervalov $\{I_n\}$ spĺňajúcich požadované predpoklady, potom nám Lemma 2.3.6 zaručuje existenciu počiatočnej podmienky

$x_0 \in D$ takej, že trajektória $\tau(x_0)$ vždy v i -tom okamihu navštíví i -tý interval. Hľadaná počiatočná podmienka leží v prieniku intervalov Q_n . Ten je neprázdny, pretože sa jedná o postupnosť do seba vnorených kompaktných intervalov. Teda môžeme napísať:

$$x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_n \Rightarrow \theta^n(x_0) \in I_n. \quad (\text{A1})$$

2.3.3 Li-Yorkova veta

Teraz uvidíme kľúčové tvrdenie z Li-Yorkovho článku [3]. Jeho obsahom je jednoduchá podmienka zaručujúca chaotičnosť systému. Dôkaz, ako uvidíme, sa podstatným spôsobom opiera o myšlienku Lemmy 2.3.6.

Veta 2.3.7 (*Li-Yorke*)

Nech (θ, D) je systém, kde θ je spojité zobrazenie. Nech existuje bod $a \in D$, pre ktorý body $b = \theta(a)$, $c = \theta^2(a)$ a $d = \theta^3(a)$ splňajú

$$d \leq a < b < c \quad (\text{alebo } d \geq a > b > c),$$

potom je systém (θ, D) chaotický.

V prípade, že bod a je 3 - periodický, sú predpoklady vety splnené. To opodstatňuje názov článku [3].

Dôkaz. Postupne dokážeme všetky vlastnosti z definície chaotického chovania.

Ďalej budeme používať značenie $K = [a, b]$ a $L = [b, c]$.

Najprv dokážeme existenciu trajektórie s ľubovoľnou periódou. Zvoľme ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$. Definujme postupnosť intervalov $\{J_n^k\}_{n=0}^\infty$ nasledovne: $J_n^k := L$ pre $n = 0, 1, 2, \dots, k-2$ a $J_{k-1}^k := K$. Zvyšné intervaly dodefinujeme indukzívne: $J_{n+k}^k := J_n^k$ pre $n = 0, 1, 2, \dots$. V prípade, že je $k = 1$, definujeme $J_n^k := L$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Voľbu intervalov J_n^k demonštruje nasledujúca schéma:

$$\begin{array}{cccccccc}
n & 0 & 1 & 2 & \dots & k-2 & k-1 & k & \dots \\
J_n^k & L & L & L & \dots & L & K & L & \dots
\end{array}$$

Na postupnosť $\{J_n^k\}$ použijeme Lemma 2.3.6 a dostávame postupnosť kompaktných intervalov Q_n . Platí $\theta^k(Q_k) = J_k^k = L = Q_0$. Zároveň ale $Q_k \subset Q_0$. Podľa vety 2.2.3 existuje $p_k \in Q_k$ fixný bod zobrazenia θ^k . Zostáva ukázať, že p_k nie je menšej periódy než k . Táto povinnosť pochopiteľne odpadá v prípade, ak je $k = 1$.

Z konštrukcie intervalov J_n^k vyplýva, že trajektória $\tau(p_k)$ ostáva v prvých $k - 2$ iteráciách v intervale L . Ak by bola jej perióda menšia než k , je jasné, že trajektória $\tau(p_k)$ by nikdy neopustila interval L . V $k-1$. iterácii však musí padnúť do intervalu K . Preto je nutne $\theta^{k-1}(p_k) = b$. Lenže b sa zobrazuje na c a následne na d , čo neleží v L . Teda $\theta^{k+1}(p_k) \notin L$, čo je spor s tým, že trajektória $\pi(p_k)$ zostáva navždy v L . Tým je dokázaná vlastnosť $P1$.

K dôkazu existencie množiny S z $P2$ budeme potrebovať tri pomocné tvrdenia.

Tvrdenie 2.3.8 *Uvažujme systém Ω všetkých nula-jednotkových postupností. Teda postupností, ktorých prvky sú z množiny $\{0, 1\}$. Tvrdíme, že pre každé $\alpha \in [0, 1]$ existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in \Omega$ s vlastnosťou*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = \alpha. \quad (\text{T1})$$

Dôkaz. Označme

$$s_n := \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

Nech zvolíme postupnosť $\{a_n\}$ akokoľvek, vždy bude platiť

$$|s_{n+1} - s_n| \leq \frac{1}{n}. \quad (2.1)$$

Ak by totiž bolo $a_{n+1} = 1$, potom by platilo

$$|s_{n+1} - s_n| = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}{n+1} - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i + 1 - \sum_{i=1}^n a_i}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Naopak, ak by bolo $a_{n+1} = 0$, potom

$$\begin{aligned} |s_{n+1} - s_n| &= \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}{n+1} \\ &= \frac{(n+1) \sum_{i=1}^n a_i - n \sum_{i=1}^n a_i}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Zvoľme $\alpha \in [0, 1]$. Postupnosť $\{a_n\}$ definujeme indukzívne podľa $k \in \mathbb{N}$. Bude sa skladať zo striedajúcich sa sekvencií núl a jednotiek. Dĺžka jednotlivých sekvencií bude daná rastúcou postupnosťou prirodzených čísel $\{l_k\}_{k=0}^{\infty}$. Vždy v k -tom kroku bude dĺžka príslušnej sekvencie daná rozdielom $l_k - l_{k-1}$.

Položme $l_0 = 0$. V prvom kroku, teda pre $k = 1$, definujeme $a_1 = 1$ a položíme $l_1 = 1$. Pre čiastočný súčet zrejme platí $s_{l_1} = 1 \in [\alpha - 1/k, \alpha + 1/k]$. Aby sme čiastočný súčet priblížili k α , dodefinujeme v druhom kroku sekvenciu núl. Pre $k = 2$ teda definujeme $a_{l_1+1} = \dots = a_{l_2} = 0$. Sekvencia núl by mala byť taká dlhá, aby opäť platilo, že $s_{l_2} \in [\alpha - 1/k, \alpha + 1/k]$. To však vo všeobecnom prípade nemusí platiť. Na základe odhadu (2.1) môžeme ale zaručiť existenciu takého l_2 , že $s_{l_2} \in [\alpha - 1/k - 1/l_2, \alpha + 1/k]$.

V k -tom kroku postupujeme nasledovne:

Ak je $s_{l_{k-1}} \geq \alpha$, definujeme

$$a_{l_{k-1}+1} = \dots = a_{l_k} = 0.$$

Pritom $l_k > l_{k-1}$ volíme tak, aby $s_{l_k} \in [\alpha - 1/k - 1/l_k, \alpha + 1/k]$.

Ak je $s_{l_{k-1}} < \alpha$ definujeme

$$a_{l_{k-1}+1} = \dots = a_{l_k} = 1.$$

Pritom $l_k > l_{k-1}$ volíme tak, aby $s_{l_k} \in [\alpha - 1/k, \alpha + 1/k + 1/l_k]$.

Všeobecne pre každé k dostávame

$$s_{l_k} \in \left[\alpha - \frac{1}{k} - \frac{1}{l_k}, \alpha + \frac{1}{k} + \frac{1}{l_k} \right].$$

Pretože je postupnosť $s_{l_k}, \dots, s_{l_{k+1}}$ monotónna platí, že

$$\forall n \geq l_k : s_n \in \left[\alpha - \frac{1}{k} - \frac{1}{l_k}, \alpha + \frac{1}{k} + \frac{1}{l_k} \right].$$

A preto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\alpha - \frac{1}{k} - \frac{1}{l_k}, \alpha + \frac{1}{k} + \frac{1}{l_k} \right] = \alpha.$$

Tvrdenie 2.3.9 *Nech $\{a_n\}, \{b_n\} \in \Omega$ a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = r, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i = s,$$

kde $r \neq s$. Potom tvrdíme, že množina $\{n \mid a_n \neq b_n\}$ je nekonečná.

Dôkaz. Pre spor predpokladajme, že množina $\{n \mid a_n \neq b_n\}$ je konečná. To znamená, že

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : a_n = b_n.$$

Počítajme

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n_0} (a_i - b_i) + \sum_{i=n_0+1}^n (a_i - b_i) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_0} (a_i - b_i) \rightarrow 0, \quad \text{pre } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

To je spor s predpokladom, že $r \neq s$.

Tvrdenie 2.3.10 *Nech $\{a_n\}, \{b_n\} \in \Omega$ a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = r, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i = s,$$

pričom $r, s \in (3/4, 1)$. Potom množina $\{n \mid a_n = b_n = a_{n+1} = b_{n+1} = 1\}$ je nekonečná.

Dôkaz. Pre spor predpokladajme, že je uvažovaná množina konečná. To znamená, že

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : a_n + a_{n+1} + b_n + b_{n+1} \leq 3.$$

Počítajme

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n_0} (a_i + b_i) + \sum_{i=n_0+1}^n (a_i + b_i) \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \left(K + \frac{n}{2} 3 \right) \rightarrow \frac{3}{2}, \quad \text{pre } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zároveň ale $r + s > 3/2$, čo je spor.

Teraz sa dostávame k samotnému dôkazu (*P2*).

Zvoľme $\alpha \in (3/4, 1)$. K nemu nájdeme postupnosť $\{a_k\} \in \Omega$ s vlastnosťou T1. Definujme postupnosť intervalov $\{I_n^\alpha\}_{n=0}^\infty$,

$$I_{k^2}^\alpha = \begin{cases} K, & \text{ak } a_k = 1, \\ L, & \text{ak } a_k = 0 \end{cases}$$

a v prípade ak index n nie mocninou prirodzeného čísla definujeme $I_n^\alpha = L$.

V postupnosti intervalov $\{I_n^\alpha\}$ môže po intervale L nasledovať interval K alebo L . Po intervale K ale vždy nasleduje interval L . Zo spojitosti funkcie θ máme podľa [2, Vety 4.19], že $\theta(L) \supset [c, d] \supset (L \cup K)$ a zároveň $\theta(K) \supset [b, c] = L$. Tým sme overili predpoklady Lemmy 2.3.6. Podľa (A1) môžeme potom nájsť bod $x^\alpha \in D$ tak, že trajektória $\tau(x^\alpha)$ postupne prechádza intervalmi z postupnosti $\{I_n^\alpha\}$.

Bod x^α nemôže byť periodický. Ak by bol totiž, povedzme k -periodický, musela by trajektória $\tau(x^\alpha)$ navždy ostať v L . To vyplýva z faktu, že v postupnosti $\{I_n^\alpha\}$ existuje sekvencia aspoň k po sebe idúcich intervalov L . Zároveň ale $\tau(x^\alpha)$ aspoň raz navštívi interval K . Lenže $K \cap L = b$ a $\theta(b) = d \notin L$.

Pre $\alpha, \beta \in (3/4, 1)$, $\alpha \neq \beta$ sú trajektórie $\tau(x^\alpha)$ a $\tau(x^\beta)$ rôzne a tým

pádom aj $x^\alpha \neq x^\beta$. Množina $S = \{x^\alpha, \alpha \in (3/4, 1)\}$ je teda nespočítateľná.

Z konštrukcie postupnosti $\{I_n^\alpha\}$ vyplýva,

$$I_n^\alpha = K \Rightarrow I_{n+1}^\alpha = I_{n+2}^\alpha = L. \quad (2.2)$$

Pretože $\theta^2(b) = d \leq a$ a zobrazenie θ^2 je spojité, existuje $\delta > 0$ spĺňajúce

$$\forall x \in [b - \delta, b] : \theta^2(x) < \frac{b + d}{2}. \quad (2.3)$$

Ak by pre nejaké $k \in \mathbb{N}$ platilo $\theta^k(x^\alpha) \in [b - \delta, b] \subset K$, potom podľa (2.2) $\theta^{k+2}(x^\alpha) \in L$ a zároveň podľa (2.3) $\theta^{k+2}(x^\alpha) \in K$, čo nie je možné. Žiadna trajektória s počiatočnou podmienkou $x^\alpha, \alpha \in (3/4, 1)$ teda nikdy nepadne do intervalu $[b - \delta, b]$.

Z Tvrdenia 2.3.9 vyplýva, že pre x^α a $x^\beta, \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in (3/4, 1)$ existuje nekoňčne veľa indexov i takých, že $\theta^i(x^\alpha) \in K$ a $\theta^i(x^\beta) \in L$ alebo $\theta^i(x^\alpha) \in L$ a $\theta^i(x^\beta) \in K$. Preto

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta^t(r) - \theta^t(s)| \geq \delta > 0,$$

čím je dokázané (P2.a).

K dôkazu (P2.c) si stačí uvedomiť, že pre každé $\alpha \in (3/4, 1)$ a $k \in \mathbb{N}$ existuje nekonečne veľa indexov i , pre ktoré je $I_i^\alpha = L$ a $J_i^k = K$. Ďalej môžeme použiť rovnakú argumentáciu ako pri (P2.a).

Zostáva nám dokázať vlastnosť (P2.b). Pretože $\theta(b) = c$ a $\theta(c) = d \leq a$, existuje postupnosť intervalov $\{[b^n, c^n]\}_{n=0}^\infty$ taká, že

- (a) $\theta(b^{n+1}) = c^n, \theta(c^{n+1}) = b^n$
- (b) $[b, c] = [b^0, c^0] \supset [b^1, c^1] \supset \dots \supset [b^n, c^n] \supset \dots$
- (c) $\theta([b^{n+1}, c^{n+1}]) \subset [b^n, c^n]$.

Označme

$$b^* = \lim_{n \rightarrow \infty} b^n,$$

$$c^* = \lim_{n \rightarrow \infty} c^n.$$

Potom podľa (a) musí platiť $\theta(b^*) = c^*$ a $\theta(c^*) = b^*$. Aby sme dokázali (P2.b) musí byť naša voľba postupnosti intervalov $\{I_n^\alpha\}$ špecifickejšia. Vždy keď $a_k = a_{k+1} = 1$ definujeme

$$I_n^\alpha = \begin{cases} [b^{2k-(2j-1)}, b^*] & n = k^2 + (2j - 1), \\ [c^*, c^{2n-2j}] & n = k^2 + 2j, \quad \text{kde } j=1 \dots n. \end{cases}$$

Pretože pre všetky $i \in \mathbb{N}$ sú intervaly $[b^i, b^*]$ a $[c^*, c^i]$ podmnožinami L , ostávajú doteraz dokázané výsledky v platnosti.

Zvolme $\alpha, \beta \in (3/4, 1)$ a nájdime príslušné body x^α a x^β .

Zvolme $\epsilon > 0$. Potom

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |b^n - b^*| < \epsilon/2.$$

Podľa Tvrdenia 2.3.10 existuje nekonečne veľa indexov $j > N$ takých, že $\theta^{j^2+1}(x^\alpha), \theta^{j^2+1}(x^\beta) \in [b^{2j-1}, b^*]$. A preto

$$|\theta^{j^2+1}(x^\alpha) - \theta^{j^2+1}(x^\beta)| < \epsilon.$$

Pretože ϵ bolo zvolené ľubovone dostávame

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |\theta^t(x^\alpha) - \theta^t(x^\beta)| = 0.$$

■

3

Cobwebov model

Cobwebov model sa snaží popísať prispôsobovací proces na trhu. Konkrétne rozoberá situáciu, keď dochádza k časovému posunu medzi rozhodnutiami o ponúkanom a dopytovanom množstve. Ako názorný príklad typicky slúži tvorba ceny v poľnohospodárstve. Uvažujme trh s pšenicom. Producenti sa v základnom období rozhodujú, aké množstvo pšenice vysadia. Po dozretí, teda v nasledujúcom období, bude táto pšenica predávaná na trhu a v závislosti na dopyte bude určená jej cena. Pre nás je dôležité, že v čase, keď producenti rozhodujú o vyrábanom množstve pšenice, nedisponujú informáciou o cene, za akú bude predávaná.

Naším cieľom bude popis vývoja veľkosti produkcie firmy v čase. Pomocou vybudovaného matematického aparátu formalizujeme naše úvahy a ukážeme, že aj v tomto pomerne jednoduchom modeli dochádza k fenoménu chaotického správania.

3.1 Mikroekonomická analýza firmy

V tejto kapitole budeme analyzovať správanie firmy. Najprv sa zameriame na rozhodovanie firmy v jednom konkrétnom období, teda na statickú analýzu. Neskôr budeme skúmať zmeny správania firmy v čase.

3.1.1 Statická analýza

Za cieľ firmy budeme považovať maximalizáciu zisku v danom období. V čase, keď firma prijíma rozhodnutie o veľkosti produkcie y , nie je známa cena, za ktorú bude produkt predávaný. Preto je firma schopná maximalizovať iba svoj očakávaný zisk π^e . Ten je daný ako rozdiel celkových očakávaných príjmov a celkových nákladov.

Predpokladajme, že firma očakáva cenu p^e . Celkové očakávané príjmy potom budú $p^e y$. Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že funkcia minimalizovaných nákladov má tvar $C(y) = h + cy$, kde h predstavuje fixné náklady. Náklady na výrobu jednej jednotky sú konštantné a rovné c . Pre očakávaný zisk potom platí

$$\pi^e(y) = (p^e - c)y - h.$$

Firma je limitovaná vo svojich rozhodnutiach veľkosťou svojho kapitálu F . Pre jednoduchosť modelu budeme predpokladať neexistenciu kapitálového trhu. Firma preto môže v danom období investovať len do výšky svojich aktuálnych finančných zdrojov. Nemá možnosť získať finančné prostriedky inak, napríklad pôžičkou. Vyjadrené formálne, musí platiť $C(y) \leq F$.

Veľkosť skutočného zisku je neistá, závisí na skutočnej cene v čase, keď produkt vstupuje na trh. S tým je spojené riziko. Ak totiž firma vyrobí príliš mnoho výrobkov, môže sa stať, že predajná cena bude prinízka. Výnosy firmy potom nebudú dostatočné na to, aby firma pokryla vysoké investície spojené s produkciou. Averzia voči tomuto riziku sa prejavuje neochotou investovať nad istú úroveň y^u . Akým spôsobom je determinovaná táto hodnota, ukážeme neskôr.

Firma bude v danom období ponúkať množstvo výrobku, ktoré maximalizuje jej očakávaný zisk za podmienok obmedzeného kapitálu F a averzie voči riziku. Ponuku firmy môžeme zapísať ako

$$S(p^e, F, y^u) = \underset{y}{\operatorname{argmax}} \{(p^e - c)y \mid C(y) \leq F, y \in [0, y^u]\}.$$

Ak je $p^e < c$, firma očakáva že nepokryje ani svoje variabilné náklady.

Navyše so zväčšujúcim sa výstupom rastie jej očakávaná strata. Preto firma zanechá výrobu a ponúkané množstvo bude nulové.

V opačnom prípade, ak $p^e > c$, bude optimálna voľba produkcie závisieť od parametrov F a y^u . Funkcia očakávaného zisku je rastúca na svojom definičnom obore $[0, \infty]$ a teda nemá žiadne lokálne maximum. Firma bude vyrábať maximálne dostupné množstvo a preto bude v bode optima určite aktívne aspoň jedno z obmedzení. Dôležitú úlohu hrá hodnota

$$y^m = \frac{F - h}{c}.$$

Je to hodnota výstupu pri ktorej sú práve spotrebované všetky finančné zdroje F . Ak by bolo $y^u < y^m$, nebude hodnota y^m finančne dostupná. Aktívne bude obmedzenie averzie voči riziku a ponúkané množstvo bude y^u . V prípade ak $y^u \geq y^m$ bude aktívne finančné obmedzenie F a ponúkané množstvo bude y^m . Celkovo, za podmienky $p^e > c$, môžeme ponuku firmy vyjadriť ako

$$S(p^e, F, y^u) = \begin{cases} 0, & \text{ak } y^m \leq 0; \\ y^m, & \text{ak } y^m \in (0, y^u); \\ y^u, & \text{ak } y^m \geq y^u. \end{cases}$$

3.1.2 Tvorba ceny

Pre ďalšiu analýzu je dôležité vedieť, akým spôsobom je určená skutočná cena výrobku. Za týmto účelom budeme skúmať trh ako celok.

Predpokladajme, že na trhu pôsobí n navzájom indentických firiem. Celková ponuka, ktorá vstupuje na trh, bude mať veľkosť

$$Y = n S(p^e, F, y^u).$$

Táto ponuka je pre dané obdobie fixná. O funkcii dopytu $D(p)$ budeme predpokladať, že má najjednoduchší možný tvar

$$D(p) = \begin{cases} A - \mu p, & p \in [0, A/\mu]; \\ 0, & p \in (A/\mu, \infty), \end{cases} \quad \text{kde } A > 0, \mu > 0.$$

Funkcia $D(p)$ nadobúda v bode 0 kladnú hodnotu rovnú A . Z bodu 0 klesá konštantnou rýchlosťou do bodu A/μ , od ktorého počínajúc má hodnotu nula. Tieto podmienky nám okrem iného zaručujú existenciu inverznej funkcie dopytu $D^{-1}(\cdot)$ na intervale $[0, A]$. Ak bude mať celková ponuka veľkosť A , bude už predajná cena nulová. Preto aj pre ponuku väčšiu než A bude predajná cena nulová. Inverznú funkciu dopytu môžeme zapísať ako

$$D^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}(A - x), & x \in [0, A]; \\ 0, & x \in (A, \infty). \end{cases}$$

Na strane dopytu budeme predpokladať vysokú konkurenciu, vďaka ktorej trh rýchlo dosiahne ekvilibrium. Skutočná cena pre dané obdobie je potom

$$p = D^{-1}(Y) = D^{-1}(n S(p^e, F, y^u)).$$

3.1.3 Dynamická analýza

Doteraz sa všetky naše úvahy obmedzovali na jedno obdobie. Teraz sa budeme snažiť popísať zmeny v správaní firmy medzi jednotlivými obdobiami.

Najprv sa zameriame na to, ako firma utvára svoje očakávania o cene. Uvedomme si, že firma nedisponuje informáciou o tvare krivky dopytu. Jediné, čo je schopná pozorovať, je cena v predchádzajúcom období. To, aká by bola táto cena v prípade zmeny ponúkaného množstva, zostáva neznáme. Pretože firma nemá žiadne ďalšie relevantné informácie, prijmeme predpoklad o naivných očakávaniach vývoja ceny. To znamená, že firma v každom období očakáva takú istú cenu, aká bola v predchádzajúcom období. Podľa predchádzajúceho paragrafu môžeme napísať

$$p_{t+1}^e = p_t = D^{-1}(n y_t).$$

Aby sme popísali vývoj veľkosti produkcie v čase, musíme taktiež analyzovať, ako sa menia v čase parametre F a y^u , ktoré produkciu spoluurčujú.

Všimnime si, že v prípade, keď je aktívne obmedzenie voči riziku, firma nespotrebováva všetky svoje finančné zdroje. V tomto prípade budeme predpokladať, že firma na začiatku nasledujúceho obdobia vypláca mimoriadne dividendy d práve vo výške nespotrebovaných finančných zdrojov. Zapísané formálne

$$\begin{aligned}d_{t+1} &= F_t - C(y_t) \\ &= F_t - c y_t - h.\end{aligned}$$

Pretože predpokladáme neexistenciu kapitálového trhu a všetky nespotrebované finančné zdroje z predchádzajúceho obdobia boli vyplatené vo forme dividend, je všetok súčasťný kapitál tvorený výnosmi z predchádzajúceho obdobia. Teda

$$\begin{aligned}F_{t+1} &= y_t p_t \\ &= y_t D^{-1}(n y_t).\end{aligned}$$

Opatrnosť firmy vyjadríme pomocou parametra $\beta > 0$, ktorý vyjadruje o koľko percent je firma maximálne ochotná navýšiť veľkosť produkcie oproti predchádzajúcemu obdobiu. Vývoj investičného stropu y^u je daný rovnicou

$$y_{t+1}^u = (1 + \beta)y_t.$$

Teraz môžeme vyjadriť vývoj veľkosti produkcie firmy v čase jedinou diferenciálnou rovnicou,

$$\begin{aligned}y_{t+1} &= \theta(y_t) \\ &= S(p_{t+1}^e, F_{t+1}, y_{t+1}^u) \\ &= S(D^{-1}(n y_t), y_t D^{-1}(n y_t), (1 + \beta)y_t).\end{aligned}$$

Definičný obor funkcie θ je možné rozdeliť na tri disjunktné množiny D_0, D_1, D_2 , podľa toho, ktoré obmedzenie je v jednotlivých bodoch aktívne. Funkcia θ potom nadobúda hodnoty

$$\theta(y) = \begin{cases} 0, & y \in D_0; \\ \frac{1}{c}(y D^{-1}(ny) - h), & y \in D_1; \\ (1 + \beta)y, & y \in D_2. \end{cases}$$

Podľa našej statickej analýzy sú jednotlivé definičné obory určené nasledovne:

$$D_0 := \{y \mid y D^{-1}(ny) - h < 0\} \cup \{y \mid D^{-1}(ny) < c\};$$

$$D_1 := \{y \mid (1 + \beta)y \leq \frac{1}{c}(y D^{-1}(ny) - h)\} \setminus D_0;$$

$$D_2 := \{y \mid (1 + \beta)y > \frac{1}{c}(y D^{-1}(ny) - h)\} \setminus D_0.$$

3.2 Analýza modelu

Skonstruovali sme model, ktorý určuje vývoj veľkosti produkcie firmy v čase. Našou úlohou teraz bude preskúmať správanie tohto modelu.

3.2.1 Grafická analýza

Riadiaca funkcia θ má pomerne komplikovaný tvar. Názornejšiu predstavu o tom, ako je trajektória zachytávajúca vyrábané množstvo generovaná, si môžeme utvoriť z grafickej analýzy.

Do fázového diagramu zakreslíme krivku výnosov

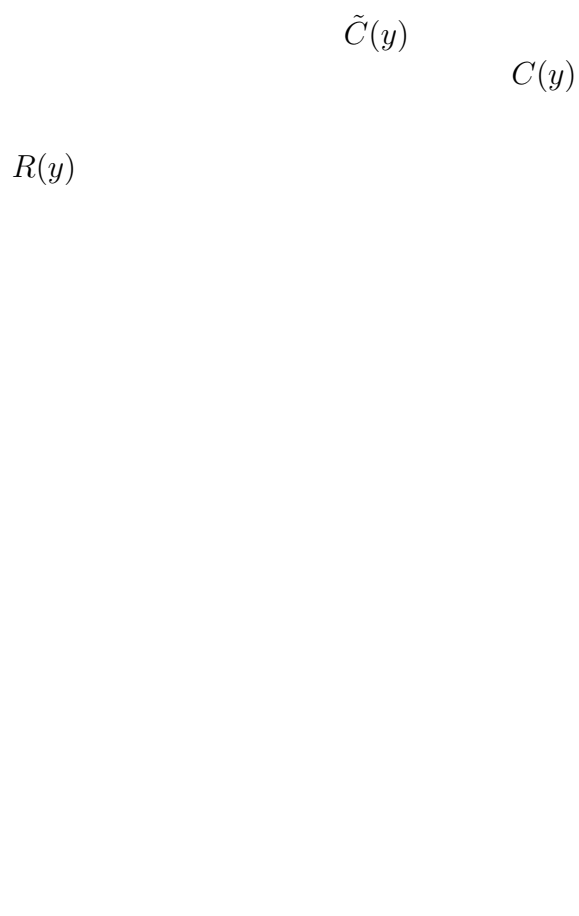
$$\begin{aligned} R(y) &= yp = y D^{-1}(ny) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\mu}(Ay - ny^2), & \text{pre } y \in [0, A/n]; \\ 0, & \text{pre } y \geq A/n. \end{cases} \end{aligned}$$

Funkcia $R(y)$ je nenulová iba na intervale $(0, A/n)$. Zároveň je na tomto intervale konkávna.

Ak je terajšia veľkosť produkcie rovná y , potom produkcia v nasledujúcom období, kvôli averzii voči riziku, nebude prevyšovať úroveň $(1 + \beta)y$. Náklady na výrobu tohto množstva sú

$$\begin{aligned} \tilde{C}(y) &= C((1 + \beta)y) \\ &= h + c(1 + \beta)y. \end{aligned}$$

Firma buď investuje celý svoj výnos $R(y)$ z predchádzajúceho obdobia, alebo vypláca mimoriadne dividendy a investuje len do výšky $\tilde{C}(y)$.



obr. 3.1: Vývoj produkcie firmy

Veľkosť investície I je vždy daná ako $\min\{R(y), \tilde{C}(y)\}$. Zistiť aká bude veľkosť produkcie v ďalšom období je už teraz jednoduché. Pomôže nám k tomu inverzná nákladová funkcia. Platí

$$y_{t+1} = C^{-1} \left(\min\{R(y_t), \tilde{C}(y_t)\} \right).$$

Situácia je znázornená na obr.3.1.

3.2.2 Stacionárne body

V kapitole 2.2.1 sme formulovali postačujúce podmienky pre existenciu stacionárnych bodov. Základným predpokladom týchto tvrdení je spojitost riadiacej funkcie.

Označme

$$\begin{aligned}\theta_0(y) &:= 0; \\ \theta_1(y) &:= \frac{1}{c} (R(y) - h); \\ \theta_2(y) &:= (1 + \beta) y.\end{aligned}$$

Funkciu θ je teraz možné zapísať ako

$$\theta(y) = \begin{cases} \theta_0(y), & y \in D_0; \\ \min\{\theta_1(y), \theta_2(y)\}, & y \in \mathbb{R} \setminus D_0. \end{cases}$$

Pretože funkcie θ_1 a θ_2 sú spojité, je spojitá na množine $\mathbb{R} \setminus D_0$ aj funkcia $\min(\theta_1, \theta_2)$. Zostáva nám vyšetriť spojitost θ v hraničných bodoch množiny D_0 .

Bod y patrí do množiny D_0 práve vtedy, keď $R(y) - h < 0$ alebo $D^{-1}(ny) < c$. Uvažujme prvú podmienku. Zaujímajú nás teda tie y , kde $R(y) = h$. Podmienka je splnená v dvoch bodoch. Označme ich y_1^0 a y_2^0 , pričom $y_1^0 < y_2^0$. Evidentne

$$\min\{\theta_1(y_i^0), \theta_2(y_i^0)\} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Prvá podmienka teda spojitost funkcie θ nepokazí. Druhú podmienku je možné upraviť

$$\begin{aligned}D^{-1}(ny) &< c \\ ny &> D(c) \\ y &> \frac{D(c)}{n}.\end{aligned}$$

Pri prvej úprave sa obracia nerovnosť, pretože D je klesajúca funkcia. Taktiež využívame fakt, že funkcia D je prostá.

$$y_1^0 \quad \tilde{y}^l \quad y_1^m \quad \bar{y} \quad y_2^m \quad \tilde{y}^r \quad \hat{y} \quad y_2^0$$

obr. 3.2: Riadiaca funkcia

Od bodu $\hat{y} := D(c)/n$ je teda funkcia θ nulová. Aby sme zistili, aké hodnoty má funkcia θ na ľavom okolí bodu \hat{y} , počítajme:

$$\begin{aligned} \min\{\theta_1(\hat{y}), \theta_2(\hat{y})\} &= \min \left\{ \frac{1}{c}(\hat{y} D^{-1}(n \hat{y}) - h), (1 + \beta) \hat{y} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{D(c)}{n} - \frac{h}{c}, (1 + \beta) \frac{D(c)}{n} \right\} \\ &= \frac{D(c)}{n} - \frac{h}{c}. \end{aligned}$$

Hodnota $D(c)/n - h/c$ môže byť kladná. Preto všeobecne nemáme zaručenú spojitosť θ v bode \hat{y} . Pre nás je ale dôležitý fakt

$$\lim_{y \rightarrow \hat{y}^-} \theta(y) < \hat{y} \tag{3.1}$$

Riadiaca funkcia θ je znázornená na obr.3.2. Na grafe sa taktiež nachádza identická funkcia. Ako sme si rozmysleli v kapitole 2.2.1, stacionárne body sú práve tie, kde sa tieto krivky pretínajú. Teraz je vidieť,

prečo je pre nás taká dôležitá vlastnosť (3.1). Avšak aby situácia vyzerala ako na našom obrázku, teda aby sa krivky preťali v dvoch rôznych bodoch, musí pre nejaké y platiť $\theta_2(y) > y$. Z konkávnosti $R(y)$ vyplýva, že funkcia $\theta_2(y) - y = (1/c)(R(y) - h) - y$ nadobúda maximum v jedinom bode. Označme tento bod \bar{y} . Predpokladajme, že

$$\theta_2(\bar{y}) > \bar{y}.$$

Na intervale $[y_1^0, \bar{y}]$ a $[\bar{y}, \hat{y}]$ môžeme teraz aplikovať Vetu 2.2.2. Tým sme dokázali existenciu dvoch stacionárnych bodov \tilde{y}^l a \tilde{y}^r . Pritom $\tilde{y}^l < \tilde{y}^r$. Tretím a posledným stacionárnym bodom je triviálne bod $\tilde{y}^0 = 0$.

Preskúmame teraz stabilitu týchto bodov. Pre y ležiace na ľavom okolí bodu \tilde{y}^l platí $\theta(y) < y$. Naopak, pre y z pravého okolia \tilde{y}^l platí $\theta(y) > y$. Z toho vyplýva, že $\theta'(\tilde{y}^l) > 1$. Navyše, pretože funkcia $\theta_2(y)$ je konkávna, je $\theta'(y) > 1$, pre všetky $y \in (y_0^1, \tilde{y}^l)$. Preto

$$\forall y \in (y_0^1, \tilde{y}^l) \exists n \in \mathbb{N} : \theta^n(y) \in D^0.$$

Povedané slovami, ak firma v prvom období nedosiahne úroveň produkcie aspoň \tilde{y}^l , jej produkcia bude v nasledujúcich obdobiach klesať, až kým nebude nulová.

Bod \tilde{y}^u sa nachádza napravo od bodu \bar{y} , a preto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(y) - y}{\partial y}(y^u) &< 0 \\ \theta'(y^u) &< 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Bohužiaľ nie sme schopní odhadnúť zdola deriváciu funkcie θ v bode \tilde{y}^u . Môžeme však podľa Vety 2.2.6 tvrdiť, že ak $\theta'(\tilde{y}^u) > -1$, potom je bod \tilde{y}^u asymptoticky stabilný.

Ako vedľajší produkt predchádzajúcej analýzy ľahko dostaneme presný popis množín D^1 , D^2 a D^3 . Označme ešte y_1^m a y_2^m dvojicu bodov, pre ktoré $\theta_1(y_i^m) = \theta_2(y_i^m)$, $i = 1, 2$. Pričom $y_1^m < y_2^m$. Teraz môžeme

napísať:

$$\begin{aligned} D_0 &= [0, y_1^0] \cup [\hat{y}, \infty); \\ D_1 &= (y_1^0, y_1^m) \cup (y_2^1, \hat{y}); \\ D_2 &= [y_1^m, y_2^m]. \end{aligned}$$

3.2.3 Chaotické správanie

Predpokladajme, že $\theta'(\tilde{y}^u) < -1$. Pri zmene parametra β , pochopiteľne, zostáva tento fakt v platnosti. Pre dané β budeme značiť riadiacu funkciu θ_β . Určite existuje $\beta^* > 0$ také, že

$$\theta'_{\beta^*+}(y_2^M) = 0.$$

Potom pre dané $\beta \in (0, \beta^*]$ nadobúda funkcia θ maximum v bode y_2^M . Označme toto maximum y_β^M . Teda

$$y_\beta^M = \max_{y \geq 0} \theta_\beta(y).$$

Firma, ktorá dosiahne svoj maximálny výstup y_β^M , bude v nasledujúcom období vyrábať množstvo $\theta(y_\beta^M)$. Ak bude táto hodnota menšia než \tilde{y}^l , potom určite $\theta^n(y_\beta^M) = 0$ pre nejaké $n \geq 0$ a firma po konečnom počte periód skrachuje. To znamená, že za podmienky $\theta(y_\beta^M) < \tilde{y}^l$, trajektórie firmy, ktoré sa v určitom okamihu dostatočne priblížia potenciálnemu maximu nevyhnutne končia v nule. Uvedomme si, že čím väčšia je hodnota parametra β , tým menšie je $\theta(y_\beta^M)$. Samozrejme len v rozmedzí $(0, \beta^*]$. Teda čím viac je firma odvážnejšia v navyšovaní produkcie, tým je náchylnejšia k bankrotu.

Funkcia θ_2 nezávisí na hodnote β a má tvar

$$\theta_2 = -\frac{1}{c\mu} (n y^2 - A y + h \mu).$$

Ak bude vedúci koeficient $n/(c\mu)$ dostatočne veľký, potom

$$\theta(y_\beta^M) \leq \frac{y_\beta^M}{(1 + \beta)^2}, \quad \text{pre } \beta \in (0, \beta^*].$$

Predpokladajme teraz, že $\theta(y_{\beta^*}^M) \geq y_1^m > \tilde{y}^l$. Potom pre všetky $\beta \in (0, \beta^*)$ trajektórie začínajúce v intervale $[y^l, y^M]$ nikdy tento interval neopustia. Navyiac

$$\theta^{-1}(y_{\beta}^M) = \frac{y_{\beta}^M}{1 + \beta} \quad \text{a} \quad \theta^{-2}(y_{\beta}^M) = \frac{y_{\beta}^M}{(1 + \beta)^2}.$$

Celkovo máme

$$\theta^{-2}(y_{\beta}^M) < \theta^{-1}(y_{\beta}^M) < y_{\beta}^M \geq \theta(y_{\beta}^M).$$

Podľa Vety 2.3.7 je pre všetky hodnoty parametra β z intervalu $(0, \beta^*)$ systém $(\theta^{\beta}, [y^l, y^M])$ chaotický.

3.2.4 Zisk

Keď sa firma nachádza v ekvilibriu \tilde{y} , platí

$$\tilde{y} = \theta(\tilde{y}) = \frac{1}{c} (R(\tilde{y}) - h).$$

Pre zisk dostávame

$$\pi(\tilde{y}) = R(\tilde{y}) - C(\tilde{y}) = R(\tilde{y}) - c y - h = 0.$$

Zisk firmy v ekvilibriu je konštantný a nulový. Ukázali sme, že za určitých podmienok sa v modeli objavuje fenomén chaotického správania. Množstvo trajektórií vyrábaného množstva firmy nekonverguje k y^u , ale zdanlivo náhodne fluktuuje v intervale $[y^l, y^M]$. Pre takéto trajektórie bude aj zisk v jednotlivých obdobiach premenlivý. Nás bude zaujímať priemerná hodnota zisku z dlhodobého hľadiska. Teda hodnota

$$E(\pi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \pi(y_t).$$

Uvažujme trajektóriu $\tau(y_0) = \{y_i\}_{i=0}^{\infty}$, kde $y_0 \in [y^l, y^M]$. Interval $[y^l, y^M]$, v ktorom sa táto trajektória pohybuje, je podmnožinou $D^1 \cup D^2$. Preto

$$y_{t+1} = \min \left\{ (1 + \beta) y_t, \frac{1}{c} (y_t D^{-1}(y_t) - h) \right\}.$$

Ak $y_t \in D^1$, potom $y_{t+1} = (1/c) (y_t D^{-1}(y_t) - h)$ a

$$C(y_{t+1}) = y_t D^{-1}(y_t).$$

Naopak, ak $y_t \in D^2$, potom $y_{t+1} = (1 + \beta) y_t < (1/c) (y_t D^{-1}(y_t) - h)$.
Vzhľadom k faktu, že funkcia nákladov $C(y)$ je rastúca, máme

$$C(y_{t+1}) = c(1 + \beta) y_t + h < y_t D^{-1}(y_t).$$

Počítajme

$$\begin{aligned} E(\pi) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \pi(y_t) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t D^{-1}(n y_t) - C(y_t) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\sum_{\substack{s|y_s \in D^1 \\ 1 \leq s \leq T}} y_s D^{-1}(n y_s) - C(y_s) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{s|y_s \in D^2 \\ 1 \leq s \leq T}} y_s D^{-1}(n y_s) - C(y_s) \right) \\ &\geq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\sum_{\substack{s|y_s \in D^2 \\ 1 \leq s \leq T}} y_s D^{-1}(n y_s) - y_{s-1} D^{-1}(n y_{s-1}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{s|y_s \in D^2 \\ 1 \leq s \leq T}} y_s D^{-1}(n y_s) - y_{s-1} D^{-1}(n y_{s-1}) \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T y_t D^{-1}(n y_t) - y_{t-1} D^{-1}(n y_{t-1}) \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T R_t - R_{t-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (R_T - R_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ukázali sme, že v našom modeli, aj keď sa produkcia firmy vyvíja neperiodicky, nebude firma z dlhodobého hľadiska v strate. Preto firma nebude mať tendencie k ukončeniu výroby.

4

Záver

Náš modifikovaný Cobwebov model je úplne deterministický. Budúci vývoj produkcie je presne určený diferenčnou rovnicou. Náhoda v modeli nemá miesto. Napriek tomu model pre niektoré hodnoty parametra β generuje komplikované trajektórie, ktoré vyzerajú, akoby boli dielom náhody. Toto narúša našu intuitívnu predstavu o deterministických procesoch.

Ak sme sa v ekonómii rozhodli používať deterministické metódy, musíme brať v úvahu možnosť výskytu chaotického správania. Analýza modelov sa potom môže stať technicky veľmi náročná a jej výsledky len ťažko ekonomicky interpretovateľné.

Eventuálna ďalšia analýza by smerovala k presnejšiemu popisu množiny všetkých chaotických trajektórií. V skutočnosti informácia o tom, že je táto množina nespočítateľná, nie je veľmi významná. Užitočnejšie by bolo vedieť, akú časť definičného oboru riadiacej funkcie táto množina zaberá. K tomu je nutný komplikovanejší matematický aparát prevažne z teórie miery, ktorý však presahuje tento text.

Literatúra

- [1] Day R. H.: *Complex Economic Dynamics , Vol. I*, MIT Press, Cambridge MA, 1994
- [2] Hájková V., John O., Kalenda O., Zelený M.: *Matematika*, MATFYZPRESS, Praha, 2006
- [3] Li T.Y., Yorke J.A.: *Period Three Implies Chaos*, The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 10 (Dec., 1975), pp. 985-992