



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DISERTAČNÍ PRÁCE

Mgr. Hynek Bednář

**Podobnosti chaotického chování Lorenzova 05 modelu a
modelů ECMWF**

Katedra fyziky atmosféry

Vedoucí disertační práce: RNDr. Aleš Raidl, Ph. D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Meteorologie a klimatologie

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 17. 06. 2019

podpis

Rád bych poděkoval vedoucímu mé disertační práce RNDr. Aleši Raidlovi, Ph.D. za poskytnutí informačního zázemí a za otevřený přístup při mém vedení a Martinu Janouškovi za zprostředkování dat modelu ECMWF.

Název práce: Podobnosti chaotického chování Lorenzova 05 modelu a modelů
ECMWF

Autor: Hynek Bednář

Katedra: Katedra fyziky atmosféry

Vedoucí disertační práce: RNDr. Aleš Raidl, Ph. D.

Abstrakt: Tato práce zkoumá schopnost Lorenzova chaotického modelu z roku 2005 simulovat křivky prediktability vypočtené z ročních průměrů denních dat numerického předpovědního modelu ECMWF z období 1986-2011 a ukazuje podobnost těchto křivek Lorenzova modelu s počtem proměnných $N = 90$. Dále tato práce zkoumá aproximace křivek a diferencí křivek obou modelů s cílem korigovat parametry určené z aproximací modelu ECMWF a tím odhadnout největší Ljapunovův exponent, modelovou chybu a limitní hodnotu křivky prediktability tohoto modelu. Korekce je provedena na základě porovnání parametrů obou modelů a na základě porovnání s největším Ljapunovovým exponentem ($\lambda=0,35 \text{ den}^{-1}$) a limitní hodnotou křivky prediktability ($E_{\infty}=8,2$) Lorenzova modelu. Parametry jsou určeny z aproximací kvadratickou hypotézou s a bez modelové chyby, logaritmickou a obecnou hypotézou a hyperbolickým tangensem v úpravě s a bez modelové chyby. Výsledný odhad průměrné hodnoty největšího Ljapunovova exponentu modelu ECMWF je $\lambda=0,37 \text{ den}^{-1}$, limitní hodnoty křivky prediktability jsou odhadnuty jako nižší, než je teoreticky prezentováno a na základě porovnání modelů je představena nová metoda určení modelové chyby.

Klíčová slova: numerický předpovědní model ECMWF, Lorenzův chaotický model z roku 2005, křivka prediktability, Ljapunovův exponent, modelová chyba

Title: Similarities in chaotic behavior of Lorenz 05 model and ECMWF models

Author: Hynek Bednář

Department: Department of Atmospheric Physics

Supervisor: RNDr. Aleš Raidl, Ph. D.

Abstract: This thesis tests the ability of the Lorenz's (2005) chaotic model to simulate predictability curve of the ECMWF model calculated from data over the 1986 to 2011 period and demonstrates similarity of the predictability curves for the Lorenz's model with $N = 90$ variables. This thesis also tests approximations of predictability curves and their differentials, aiming to correct the ECMWF model estimated parameters and thus allow for estimation of the largest Lyapunov exponent, model error and limit value of the predictability curve. The correction is based on comparing the parameters estimated for the Lorenz's and ECMWF and on comparison with the largest Lyapunov exponent ($\lambda=0,35 \text{ day}^{-1}$) and limit value of the predictability curve ($E_\infty=8,2$) of the Lorenz's model. Parameters are calculated from approximations made by the Quadratic hypothesis with and without model error, as well as by Logarithmic and General hypotheses and by hyperbolic tangent employing corrections with and without model error. Average value of the largest Lyapunov exponent is estimated to be $\lambda=0,37 \text{ day}^{-1}$ for the ECMWF model, limit values of the predictability curves are estimated with lower theoretically derived values and new approach of calculation of model error based on comparison of models is presented.

Keywords: model ECMWF, Lorenz's chaotic model (2005), predictability curve, Lyapunov exponent, model error

Obsah

Úvod.....	1
1. Teoretická část	5
1.1 Lorenzův model.....	5
1.2 Numerické předpovědní modely.....	9
1.3 Křivka průměrné chyby předpovědi.....	17
1.3.1 Hypotézy popisu křivky prediktability.....	18
1.3.2 Přesnost Kvadratické hypotézy	28
1.3.3 Ansámblová předpověď'	37
2. Praktická část	41
2.1 Nastavení experimentu.....	41
2.1.1 Model L05	41
2.1.2 Model ECMWF.....	44
2.2 Porovnání křivek prediktability modelu L05 a modelu ECMWF	46
2.2.1 Varianta s počáteční chybou	46
2.2.2 Varianta s počáteční/modelovou chybou	53
2.2.3 Diskuze.....	59
2.2.4 Závěr.....	65
2.3 Odhad Ljapunovova exponentu, modelové a limitní chyby z aproximace křivky prediktability.....	66
2.3.1 Křivka prediktability modelu L05 pro variantu s počáteční chybou.....	67
2.3.2 Křivka prediktability modelu ECMWF pro variantu s počáteční chybou	75
2.3.3 Porovnání aproximací křivek prediktability modelů pro variantu s počáteční chybou	82
2.3.4 Křivka prediktability modelu L05 pro variantu s počáteční/modelovou chybou.....	88

2.3.5	Křivka prediktability modelu ECMWF pro variantu s počáteční/modelovou chybou	96
2.3.6	Porovnání aproximací křivek prediktability modelů pro variantu s počáteční/modelovou chybou	103
2.3.7	Modelová chyba a diskuze	109
2.3.8	Závěr.....	119
	Závěr	121
	Seznam použité literatury.....	124
	Seznam obrázků	131
	Seznam tabulek	140
	Seznam použitých zkratk.....	143
	Seznam publikací	144

Úvod

Původně antický pojem chaos znamená úplnou absenci řádu, formy či systematického uspořádání. Jiného významu získal tento pojem v druhé polovině 20. století s příchodem teorie chaosu a takovému chaosu se říká deterministický (Lorenz, 1995). Jak dále Lorenz (1995) uvádí, tento zdánlivý protimluv popisuje chování jistých nelineárních dynamických systémů, jejichž časový vývoj je jednoznačně popsán zákonem nebo matematickou formulí, z čehož plyne, že dva identické stavy se budou identicky časově vyvíjet. Pokud se však jedná o dva skoro identické stavy, tak místo očekávaného skoro identického vývoje je u těchto systémů pozorován vývoj, který si nemusí být vůbec podobný a po nějaké době je vztah těchto stavů stejný, jako kdyby byly voleny náhodně (v rámci daných možností). Deterministický chaos lze tedy definovat jako citlivou závislost na počátečních podmínkách (Lorenz, 1995) a nadále se vyskytující slovo chaos (již bez přívlastku deterministický) je bráno v tomto významu. Úplnou definici uvádí Pokorný (2008), který odkazuje na Daveneyovy tři podmínky chaosu pro dynamické systémy s diskretním časem (Devaney, 1989). První je již zmíněná citlivá závislost. Druhou je hustá množina periodických bodů a třetí je tranzitivnost. Přičemž z druhé a třetí podmínky plyne podmínka první (Pokorný, 2008). Detailnější informace k podmínkám viz (Pokorný, 2008).

Objevitelem tohoto chování je Edward N. Lorenz (Emanuel, 2011), který v zimě 1961 při opakované modelové simulaci atmosféry zadal jako počáteční podmínku zaokrouhlenou hodnotu z původní simulace (původně např. 0.506127 po zaokrouhlení 0.506) a místo očekávaných shodných trajektorií, se trajektorie začaly rychle rozcházet, až se průběhy kompletně oddělili (Lorenz, 1963). Lorenz si brzy uvědomil, že perfektní předpověď počasí je neuskutečnitelný sen, protože vyžaduje nejen perfektní model, ale i perfektní znalost větru, teploty, vlhkosti a ostatních meteorologických prvků, a to ve stejný čas a všude na zeměkouli. Díky těmto skutečnostem vyvstal termín prediktabilita, který má dva významy. Jedním (vlastním) je hranice do kdy, za použití perfektní procedury, je předpověď možná. Druhým (praktickým) je hranice do kdy, za použití aktuální procedury, je předpověď možná (Lorenz, 1996). Hranice je tedy dána neschopností přesného pozorování (chyba počátečních podmínek) a přesného formulování procedur časové integrace (chyba modelu). Její velikost je určena třemi parametry (Lorenz, 1996). Jedním je největší

Ljapunovovo číslo, nebo jeho přirozený logaritmus, Ljapunův exponent, které určují dlouhodobě zprůměrovaný a na jednotku času normovaný nárůst vzdálenosti dvou původně infinitezimálně vzdálených stavů ve stavové prostoru, které se vyvíjí dle stejných řídicích rovnic ((Pokorný, 2008), (Sprott, 2006)). Největší Ljapunovovo číslo či Ljapunův exponent je největší hodnota ze spektra, které je dáno jako dlouhodobě zprůměrované a na jednotku času normované míry růstu nebo poklesu os elipsoidu ve stavovém prostoru, který se dle linearizovaných řídicích rovnic vyvinul z infinitezimální sféry počátečních chyb se středem v počátečních podmínkách ((Pokorný, 2008), (Sprott, 2006)). Počet členů spektra je dán počtem nezávislých proměnných ve stavovém prostoru. Kladná hodnota největšího Ljapunovova exponentu určuje chaos. Přesněji uvádí Aligood, Sauer a Yorke (1996), že řešení dynamického systému je chaotické, pokud je při rostoucím čase omezené. Má alespoň jeden kladný Ljapunův exponent a neleží asymptoticky na periodickém atraktoru, nebo na rovnovážných bodech. Dalším parametrem je velikost chaotického atraktoru, přesněji, průměrná vzdálenost dvou náhodně zvolených bodů atraktoru. Atraktor je množina bodů ve stavovém prostoru, které jsou určeny časovým vývojem řídicích rovnic vyvíjejících se z náhodných počátečních podmínek, při vynechání počátečního přechodného jevu ((Pokorný, 2008), (Sprott, 2006)). Posledním třetím parametrem je velikost chyby počátečních podmínek.

Pro numerické předpovědní modely simulující atmosféru (Bednář, 2010) je kvůli počtu proměnných nemožné určit největší Ljapunův exponent a přesný čas hranice prediktability, a proto se při určování růstu průměrné předpovědní chyby, která se skládá z počáteční a modelové chyby (Lorenz, 1996), pracuje s jinými časovými hodnotami. Nejdéle používanou je čas, kdy se počáteční chyba zdvojnásobí. Dále je používán čas, kdy asymptotická hodnota předpovědní chyby dosáhne 25 %, 50 %, 71 % a 95 % své velikosti (Savijarvi, 1995). Tyto hodnoty leží na tzv. křivce prediktability (KP), což je křivka růstu průměrné předpovědní chyby (Lorenz, 1982). Tato křivka má tři části vývoje. Nejprve, v závislosti na velikosti počáteční chyby, je pozorován exponenciální či super-exponenciální růst. Poté se růst zpomalí, až se, při dosažení asymptotické hodnoty průměrné předpovědní chyby, nakonec úplně zastaví (Lorenz, 1996). S prvním kvantitativním popisem vývoje, tzv. kvadratickou hypotézou (KH), přišel Lorenz (1969). Znovu použita byla stejným autorem v roce 1982 (Lorenz, 1982). V roce 1987 byla Dalcherem a Kalneyovou (1987) přidána modelová chyba k dané hypotéze a úprava, která je používána dnes, byla navržena Simmonsem Mureauem a

Petroliagisem (1995). Alternativy jsou logaritmická hypotéza (*LH*) představené Trevisan, Malguzim a Fantinim (1992) a obecná hypotéza (*OH*) představená Stroe a Royer (1994). Protože je předpovědní křivka určena zpětně z průměrné hodnoty rozdílu předpovědi a skutečně naměřených hodnot, tak se k odhadu předpovědi chyby konkrétní deterministické předpovědi používá ansámblový předpovědní systém, který se skládá ze skupiny deterministických předpovědí s mírně upravenými počátečními podmínkami. Na základě velikosti rozdílu v daném čase je poté určena chyba.

Již od začátku snahy o numerickou předpověď počasí a klimatu byly numerické modely zjednodušeným popisem atmosféry. Na jedné straně je důvodem limitace výpočetní kapacitou a nutností numerického řešení rovnic řídících atmosféru a s tím i nemožnost zachycení atmosférických jevů všech časoprostorových měřítek (Bařka, 2015). V takovém případě zde vždy byla snaha o co největší přiblížení realitě a snížení chyby modelu. Druhý směr v modelování atmosférických jevů se snaží o zjednodušený popis, a to ať už z důvodu urychlení výpočtu anebo zjednodušení zkoumaného problému. Logickou metodou je vynechání jevů nedůležitých pro zkoumaný problém či zvětšení prostorového integračního kroku numerické metody (Bařka, 2015). Jinou metodou je nahrazení veličin, které popisují zkoumané, veličinami, které zkoumané nepopisují, ale jen s danými veličinami sdílejí, pro popis klíčové vlastnosti. Použitelnost těchto modelů je poté závislá na účelu, s jakým je použit (Lorenz, 1995). Příkladem může být rotující nádoba naplněná vodou, která je na kraji zahřívána a uprostřed ochlazována (Lorenz, 1995). Přestože se jedná o velmi slabé připodobnění atmosférické cirkulace, mohou být pozorovány mnohé shodné charakteristiky. Uvedme zde např. Rossbyho vlny, jejichž podobnost můžeme pozorovat při vhodném nastavení teplotního gradientu a frekvence otáček u rotující nádoby (Lorenz, 1995). Stejně je to u Lorenzova matematického modelu z roku 1996 (Lorenz, 1996), který se snaží co nejjednodušeji popsat fakt, že atmosféra je nucený disipativní systém. Asi nejznámějším je Lorenzův model z roku 1963 (Lorenz, 1963), který vznikl ze Saltzmanova modelu konvekce o sedmi proměnných (Saltzman, 1962), kde bylo pozorováno neperiodické chování při určitém nastavení, a to pouze u třech proměnných, protože ostatní konvergovaly k nule. Známým se stal pro prokázání, že velmi jednoduchý, nízko-dimenzionální, nucený a disipativní systém může vést k vysoce komplexnímu řešení, které je popsáno chaotickým („podivným“) atraktorem s fraktální strukturou, a k citlivosti na počáteční podmínky. Tvar tohoto atraktoru,

který připomíná motýlí křídla, se časem stal grafickou ikonou deterministického chaosu.

Cílem práce je korigovat parametry určené z hypotéz (*KH*, *LH*, *OH*) aproximujících křivky prediktability (KP) vypočtené z ročních průměrů dat numerického předpovědního modelu ECMWF (MEC) z období 1986–2011 a tím odhadnout největší Ljapunovův exponent, modelovou chybu a limitní hodnotu KP MEC a nalézt hypotézy, které korigované parametry nejlépe popisují. Korekce je provedena na základě porovnání parametrů hypotéz aproximujících KP MEC s parametry hypotéz aproximujících KP Lorenzova jednoduchého atmosférického modelu z roku 2005 (Lorenz, 2005) (L05) a na základě znalosti největšího Ljapunova exponentu L05 a limitní hodnoty průměrné předpovědní chyby tvořící KP u modelu L05 (u MEC jsou neznámé a lze je jen odhadnout). Aby porovnání bylo obhajitelné je dalším cílem práce najít takový počet proměnných modelu L05, takové počáteční podmínky a takový způsob výpočtu KP, který by co nejlépe popisoval KP MEC. V teoretické části (Kapitola 1.1.) je představen Lorenzův jednoduchý atmosférický model z roku 1996 (Lorenz, 1996) (L96), jeho modifikaci L05 a jsou vysvětleny principy, na kterých jsou vytvořeny. Dále (Kapitola 1.2) jsou stručně popsány numerické předpovědní modely (NPM) se zaměřením se na model Evropského centra pro střednědobou předpověď (ECMWF). V Kapitolách 1.3 a 2.1 jsou pro každý z modelů (MEC a L05) popsány metodiky výpočtu KP. KP jsou v Kapitole 1.3 teoreticky detailně popsány, speciálně jejich fáze a možné aproximace. V praktické části jsou v Kapitole 2.2 vypočteny a porovnány KP modelu L05 a MEC a je určen nejvhodnější počet proměnných L05 a nejvhodnější metoda výpočtu KP. V Kapitole 2.3 jsou vypočteny parametry hypotéz aproximujících KP u L05 a MEC. Parametry jsou porovnány, diskutovány a jsou určeny závěry naplňující cíle práce, které jsou shrnuty v Závěru (Kapitola 3.)

1. Teoretická část

1.1 Lorenzův model

Nejznámějším Lorenzovým nízko-dimenzionálním modelem je 3-dimenzionální model konvekce (Lorenz, 1963; Uruba, 2005). V této práci je jako představitel nízko-dimenzionálních atmosférických modelů použit model L05 (Lorenz, 2005). Ten vychází z L96 (Lorenz, 1996), což je nelineární model s N proměnnými popsany rovnicemi:

$$dX_n/dt = -X_{n-2}X_{n-1} + X_{n+1}X_{n-1} - X_n + F, \quad (1.1.1)$$

$n = 1, \dots, N$. X_{n-2} , X_{n-1} , X_n , X_{n+1} jsou nespecifikované meteorologické kvantify na pravidelné síti podél rovnoběžky, které nemají žádný vztah k existujícím fyzikálním veličinám. F je konstanta reprezentující vnější sílu a t je čas. Index n je kruhově propojen tj. $X_{n-N} = X_{n+N} = X_n$ a umístění kvantit si lze představit na kruhu. Nelineární členy rovnice (1.1.1) simulují advekci. Lineární členy reprezentují mechanickou a termální disipaci. Model do určité míry kvantitativně popisuje atmosférický systém, ale na rozdíl od známého Lorenzova modelu konvekce (Lorenz, 1963) není odvozen z žádné atmosférické dynamické rovnice (nelze jej získat diskretizací spojitého systému). Lorenzovou snahou (Lorenz, 1996) bylo formulovat co nejjednodušší soustavu disipativních diferenciálních rovnic s chaotickým chováním (nestabilní chování fázových trajektorií s dynamikou omezenou na konečnou část fázového prostoru), které mají některé vlastnosti společné s “reálnou” atmosférou. První ze společných vlastností (Lorenz, 1996) je ta, že advekce ($-X_{n-2}X_{n-1} + X_{n+1}X_{n-1}$) nemění celkovou energii $s^2/2$, kde $s^2 = (X_1^2 + \dots + X_N^2)/N$. Změna je definována:

$$\frac{d(s^2/2)}{dt} = \frac{1}{2N} \left(\frac{d(X_1^2)}{dX_1} \frac{dX_1}{dt} + \dots + \frac{d(X_N^2)}{dX_N} \frac{dX_N}{dt} \right) = \frac{1}{2N} \left(2X_1 \frac{dX_1}{dt} + \dots + 2X_N \frac{dX_N}{dt} \right).$$

Po dosazení z rovnice (1.1.1) dojdeme k:

$$\frac{d(s^2/2)}{dt} = -s^2 + Fr, \quad (1.1.2)$$

kde $r = (X_1 + \dots + X_N)/N$. Protože se na pravé straně rovnice (1.1.2) nevyskytují advekční členy, je neměnnost celkové energie advekci dokázána. K další ze

společných se Lorenz (Lorenz, 2005; Lorenz, a kol., 1998) zaměřuje na obecné vlastnosti systému (1.1.1). Necht' R a S^2 jsou dlouhodobé průměry r a s^2 , což znamená průměr X_n a X_n^2 přes všechna n a přes dostatečně dlouhou dobu, aby časové derivace takto zprůměrovaných hodnot byly zanedbatelně malé. Poté je časová derivace v rovnici (1.1.2) rovna nule a $S^2 = FR$. Rozptyl σ^2 proměnné X je roven $S^2 - R^2$ a po dosazení z upravené rovnice (1.1.2) vychází $\sigma^2 = R(F - R)$. Protože σ je nezáporné, tak R musí ležet mezi 0 a F . Stabilní řešení plynoucí z $\sigma^2 = 0$ nastane v případě $R = F$ tj. $S = F$. Maximální rozptyl σ^2 vycházející z $d\sigma^2/dR = 0$ nastane při $R = F/2$. Stabilitu určil Lorenz (Lorenz, 2005; Lorenz, a kol., 1998) lineární perturbační metodou (Holton, 2004), kde jsou poruchové členy x_n řádově menší než základní (stabilní) stav F . Dosazením této nové hodnoty $X_n = F + x_n$ do rovnice (1.1.1) a zanedbáním nelineárních členů vzhledem k poruchám se dojde k systému rovnic:

$$\frac{dx_n}{dt} = F(x_{n+1} - x_{n-2}) - x_n. \quad (1.1.3)$$

Řešení je hledáno (Lorenz, 2005; Lorenz a kol., 1998) ve tvaru:

$$x_n = e^{ik[n - (c_r + ic_i)t]},$$

kde k je vlnové číslo, c_r a c_i jsou reálná a imaginární složka rychlosti c a t je čas. Fyzikální smysl má pouze reálná část (Holton, 2004). x_n je tedy nyní $\text{Re}[x_n]$ ve tvaru:

$$x_n = e^{kc_i t} \cos(kn - kc_r t). \quad (1.1.4)$$

Úhlová frekvence je definována (Lorenz, 2005) jako $\omega = m + ih$, kde $m = kc_r$ a $h = kc_i$ a dosazením rovnice (1.1.4) do rovnice (1.1.3) jsou získány (Lorenz, 2005; Lorenz a kol., 1998) pro h a m následující rovnosti:

$$h = F(\cos k - \cos 2k) - 1,$$

$$m = -F(\sin k + \sin 2k).$$

Jak uvádí Lorenz (2005), tak je z rovnice (1.1.4) patrné, že aby se perturbace x_n vyvinula, tak musí být $h > 0$ tj.

$$F(\cos k - \cos 2k) > 1.$$

Maximum $(\cos k - \cos 2k) = 9/8$ je při $\cos k = 1/4$. Stabilní řešení se tedy stane nestabilním (Lorenz, 2005; Lorenz a kol., 1998) pro vlny dlouhé $2\pi/k = 4,77$ zón (zóna je vzdálenost mezi dvěma proměnnými na kružnici) a pro $F > 8/9$. (více viz (Bednář a kol., 2011) Musí platit (Lorenz, 2005; Lorenz a kol., 1998), že počet zón musí být celočíselný a musí být dělencem celkového počtu proměnných N . Například pro $N = 40$ nastane nestabilní řešení pro vlny o délce 5 zón a vlnovém čísle 8, když F přesáhne $(\cos 2\pi/5 - \cos 4\pi/5)^{-1} = (4/5)^{1/2} = 0,894$, tedy hodnotu lehce přesahující $8/9$. Z důvodu hledání podobnosti s „reálnou“ atmosférou se Lorenz (2005) zaměřil na reálnou složku úhlové frekvence m . Z ní lze určit fázovou rychlost $c_f = m/k = -(\sin k + \sin 2k)(F/k)$ a grupovou rychlost $c_g = \partial m / \partial k = -(\cos k + 2 \cos 2k)F$. Po číselném dosazení hodnot z příkladu pro $N = 40$ vyjde $c_f = -1.09$, což je definováno (Lorenz, 2005; Lorenz a kol., 1998) jako západní proudění a k $c_g = 1,17$ s kladnou hodnotou, která určuje východní proudění. Směřování fázové a grupové rychlosti je stejné se směrováním těchto rychlostí u Rossbyho vln (Holton, 2004). Rossbyho vlny jsou charakterizovány (Cooper, a kol., 2015) počtem 4–7 vln, a protože i tuto podobnost chtěl Lorenz (2005) udržet, tak se musí s modelem (1.1.1) s vlnovou délkou 5 zón pracovat s počtem proměnných $N = \langle 20; 35 \rangle$. Tato podmínka je značně limitující a nutí k hledání rozšíření modelu L96 (Lorenz, 2005).

Cílem Lorenze (2005) je zachovat neměnnost celkové energie advekcí, směrování fázové a grupové rychlosti a počet 4–7 vln, přičemž nyní pro libovolný počet proměnných N . Nejjednodušším řešením (Lorenz, 2005) by bylo zavedení dvou čísel i a j a nahrazení systému (1.1.1) systémem rovnic:

$$dX_n/dt = -X_{n-i}X_{n-j} + X_{n-i+j}X_{n+j} - X_n + F. \quad (1.1.5)$$

Kde kvadratické členy nemění energii. Směřování rychlostí je zachováno. V případě $i = 2$ a $j = 1$ jde o L96. Pro ukázkou vlnové délky a počtu vln Lorenz (2005) ukazuje příklad s $N = 120$, $i = 8$ a $j = 7$. $h = F(\cos k - \cos 2k) - 1$ z modelu L96 se změní na:

$$h = F(\cos k - \cos 8k) - 1,$$

maximum $(\cos k - \cos 8k) = 1,925$ při vlnové délce $2\pi/k = 16,24$ zón. Stabilní řešení se stane nestabilním, když $F > 0,519$ a Lorenz (2005) očekává přibližně 7 vln.

Teoreticky se zdá být problém vyřešen, ale Lorenz (2005) ukazuje pomocí numerického řešení, co se ve skutečnosti stane. Pro $F = 0,75$, tedy pro hodnotu lehce nad hranicí stability, se vytvoří očekávaných 7 vln (Lorenz, 2005). Pro $F = 1,5$ a $F = 3$ jsou vlny více neuspořádané, ale stále je rozeznatelných 7 „hlavních“ vln (Lorenz, 2005). Pro $F = 6$, $F = 12$ a $F = 24$ se již plně projevuje chaotické chování a „menší“ vlny dominují nad „hlavními“ vlnami, které nejsou k rozpoznání a systém (1.1.5) pozbývá na svém účelu (Lorenz, 2005). Pro srovnání Lorenz (2005) porovnal výsledky s L96 s $N = 30$ a zjistil, že vlnová délka „malých“ vln systému (1.1.5) a vlnová délka vln L96 je podobná. Uzavírá, že pokud se chaotické chování plně rozvine, tak jsou pro oba systémy pozorovány vlny s délkou 3-7 zón a model (1.1.5) ztrácí smysl, což testoval i pro jiné varianty N , i , j a F . Lorenz (2005) uvádí jako důvod rozpadu na „malé“ vlny fakt, že proměnné X_n nejsou korelovány a pokud je požadován „hladký“ přechod mezi proměnnými, tak možnou cestou je zavedení určitého stupně korelace (Lorenz, 2005). To je dle Lorenze (2005) možné nahrazením dvou nelineárních členů v rovnici (1.1.1) či rovnici (1.1.5) sumací mnoha nelineárních členů.

Model L05 s takovouto sumací prezentovaný Lorenzem (2005) má tvar:

$$dX_n/dt = [X, X]_{L,n} - X_n + F, \quad (1.1.6)$$

kde

$$[X, X]_{L,n} = \sum_{j=-J}^J \sum_{i=-J}^J (-X_{n-2L-i} X_{n-L-j} + X_{n-L+j-i} X_{n+L+j}) / L^2. \quad (1.1.7)$$

Pokud je L sudé, \sum' je modifikovanou sumací, kde první a poslední člen je dělen dvěma. Pokud je L liché, \sum' je běžnou sumací. $J = L/2$ pokud je L sudé a $J = (L-1)/2$ pro L liché. Pokud je $L = 1$, což vede k $J = 0$, tak se jedná o L96. Lorenz (2005) testoval systém (1.1.6) pro $N = 240$, $F = 10$ a pro různé hodnoty parametru L . Pokud je $L = 2$, tak získal skoro stejný počet vln jako pro L96. Navýšením na $L = 4$ se počet vln snížil, ale pro požadovaný počet vln byl stále příliš velký. Když bylo $L = 8$, tak systém dosáhl požadovaný počet „hlavních“ vln, s dalšími superponovanými „vedlejšími“ vlnami s menší amplitudou, které však „hlavní“ vlny nepřekryjí. Zvyšování L ($L = 16$, $L = 32$, $L = 64$) dále počet „hlavních“ vln snižuje a Lorenz (2005) uvádí, že vhodnou volbou L se dá volit počet vln systému (1.1.6).

Profil s $K = 8$, který vyhovoval nejvíce, Lorenz (2005) zobecnil na $L = N/30$. Jak uvádí Lorenz (2005), velikost Ljapunovova exponentu (LE) je pro model L05 silně závislá na velikosti parametru F a slaběji na počtu proměnných N a volba parametru není libovolná, protože s nárůstem F roste i amplituda „vedlejších“ vln, které mohou narušit požadovaný tvar profilu. Lorenz (2005) dále vypočítává, že pro podobnost chaotického chování modelu L96 s NPM nastane pro $F = 15$, $F = 16$ a doporučuje jako vhodný kompromis použít $F = 15$.

1.2 Numerické předpovědní modely

Bařka (2015) při popisu numerických předpovědních modelů (NPM) uvádí, že jádrem jsou primitivní rovnice a jedná se o dvě diagnostické (stavová a hydrostatická), které popisují vztahy mezi atmosférickými veličinami (tlak, teplota, směr a rychlost větru atd.) v daném čase, a pět prognostických, které popisují časový vývoj atmosféry a jsou vyjádřeny na základě zákonů zachování. Zákon zachování hmoty je vyjádřen rovnicí kontinuity. Zákon zachování energie je vyjádřen první větou termodynamickou. Zákon zachování hybnosti je vyjádřen druhým Newtonovým fyzikálním zákonem. Dále se uplatňuje zákon zachování vody v atmosféře a zákon zachování různých příměsí v atmosféře. Jak uvádí Bařka (2015) a Brdička, a kol. (2011), jedná se o hyperbolický systém parciálních diferenciálních rovnic, které lze v divergentním tvaru popsat:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1.2.1)$$

kde t je čas, x_j jsou prostorové souřadnice a u a f_j jsou prostorové funkce. Na pravé straně rovnice (1.2.1) může být i funkce, takové funkci se říká parametrizace (Bařka, 2015). Cílem NPM je zachytit dynamiku atmosféry. Subsystémy jako hydrosféra, litosféra, kryosféra a biosféra jsou NPM vnímány jako vnější prostředí skrz okrajové podmínky a vnější síly (Bařka, 2015).

Díky nemožnosti analytického řešení řídicích rovnic je časo-prostorové kontinuum nahrazeno 3-dimenzionální souřadnicovou sítí a sekvencí diskrétních časových kroků (Bařka, 2015; Janoušek, 2007). Bařka (2015) a Janoušek (2007) dále uvádí, že pro každý časový krok jsou vyčísleny hodnoty v bodech sítě. Horizontální rozlišení je dáno výpočetními možnostmi. Vertikální je dáno fyzikálními algoritmy

v modelu a asimilací dat. Diskretizaci primitivních rovnic lze provést metodou konečných diferencí, tedy převedením derivací na konečné difference (Bařka, 2015; Janoušek, 2007). Jiný přístup popisuje spektrální metoda (Janoušek, 2007; Mesinger a kol., 1976), která namísto síťových bodů popisuje pole pomocí konečného počtu vln tzv. spektrálních koeficientů. Výhodou je možnost analyticky přesného řešení horizontálních derivací a tím redukovat chybu numerického schématu. Nevýhodou je, že některé členy rovnic, a to především kvadratické členy a parametrizace, nelze efektivně ve spektru počítat (Janoušek, 2007). Z těchto důvodů se přechází ke kombinování spektrálních a konečně diferencních metod (Janoušek, 2007). Výpočty fyzikálních parametrizací a nelineární členy se dle Janouška (Janoušek, 2007) počítají na modelové síti jako u konečně diferencních modelů. Výsledná pole se v každém časovém kroku transformují do spektrálních koeficientů, vypočítají se derivace, oříznou se krátké vlny ze spektra a pole se transformují zpět do modelové sítě. V každém časovém kroku, jak uvádí Janoušek (2007), se tedy provádí jedna přímá a jedna zpětná transformace předpovědních polí. Globální model ECMWF, který bude nejčastěji citován, používá Fourierovu transformaci v zonálním směru (pole jsou periodická) a Legendrovu transformaci v meridionálním směru (Janoušek, 2007). Pro tyto transformace je vhodná Gaussovská síť (Dando, 2016). Dando (2016) dále uvádí, že číslo, které síť označuje, udává množství zonálních rovnoběžek mezi rovníkem a pólem (např. $N = 640$ značí 640 zonálních rovnoběžek mezi rovníkem a pólem a značí 1280 rovnoběžek celkem). Vzdálenost mezi zonálními rovnoběžkami je dána nulovou hodnotou Legendrova polynomu řádu $2N$ a důsledkem jsou nerovnoměrně vzdálené zonální rovnoběžky, neobsazení pólu bodem a neobsazení rovníku zonální rovnoběžkou (Dando, 2016). Počet bodů sítě na zonálních rovnoběžkách je pro plnou či pravidelnou verzi určen na $4N$ pro každou rovnoběžku s prvním bodem v 0° zeměpisné délky a celkový počet bodů je tedy $8N^2$ a vzdálenost mezi body na zonálních rovnoběžkách se směrem k pólům zmenšuje (Dando, 2016). Při požadavku stejné vzdálenosti mezi body na všech zonálních rovnoběžkách se jedná o redukovanou Gaussovskou síť (Dando, 2016), kde se počet bodů na zonálních rovnoběžkách směrem k pólu snižuje a je zachován první bod v 0° zeměpisné délky. Plná Gaussovská síť se označuje FXXX, redukovaná NXXX a upravená forma redukované zvaná osmistěnná se značí OXXX. XXX značí počet zonálních rovnoběžek mezi pólem a rovníkem (Dando, 2016). Janoušek (2007) zmiňuje, že globální spektrální modely, které využívají kombinaci výše zmiňovaných metod, se

označují písmenem T. T_L je označení pro lineární síť, kde je nejkratší vlnová délka reprezentována dvěma body sítě. T_Q je označení pro kvadratickou síť, kde je nejkratší vlnová délka reprezentována třemi body. T_C je označení pro kubickou síť, kde je nejkratší vlnová délka reprezentována čtyřmi síťovými body. Dále opět následuje trojice čísel, která určuje maximální vlnové číslo, kde je spektrum oříznuto. Např. T_{L799} značí lineární ořezávání na maximální vlnové délce 799, čemuž odpovídá síť $\Delta x = 2\pi R / (2 \cdot 799) = 25 \text{ km}$ (Janoušek, 2007), kde R je poloměr země. Ve vertikálním směru využívá model ECMWF hybridního $\sigma - p$ systému (Janoušek, 2007), kde p je tlak a $\sigma = p/p_s$. p_s je tlak ve zvolené referenční tlakové hladině (Arakawa a kol, 1983). Hladiny σ -systému kopírují zemský povrch ve spodní a střední troposféře a poté přecházejí v horní troposféře do p -systému, tedy do hladin konstantního tlaku, které jsou udržované také ve stratosféře a mezosféře (Janoušek, 2007). Pro vertikální diskretizaci je používána metoda konečných prvků a je označována písmenem L a počtem hladin sítě (Janoušek, 2007).

Diskretizaci časových derivací s časovým krokem Δt ovlivňuje spíše omezení na stabilitu než na přesnost (Janoušek, 2007; Mesinger a kol, 1976). Model ECMWF používá semi-implicitní, semi-lagrangeovské schéma (Janoušek, 2007). Janoušek (2007) a Bařka (2015) uvažují řídící rovnice ve tvaru $dz/dt = F(z)$, kde z je libovolná atmosférická veličina a F je nelineární funkce a rozdělují pravou stranu na lineární L , nelineární N část a na parametrizaci P tj. $dz/dt = L(z) + N(z) + P(z)$. Lineární část definují jako rychle se pohybující gravitační a popř. zvukové vlny a pro zvýšení stability aplikují implicitní schéma. Nelineární definují jako relativně pomalu se pohybující Rossbyho vlny a uvádějí, že postačuje explicitní schéma. Výsledkem je tedy dle Janouška (2007) a Bařky (2015) schéma semi-implicitní. d/dt nazývají individuální časovou změnou. V Eulerovském schématu se tato změna aproximuje pomocí lokální časové změny a advekce (Holton, 2004). Jedná se tedy o popis pomocí fixních bodů, kde však advekce zvyšuje nároky na stabilitu (Bařka, 2015). V Lagrangeovském schématu je individuální časová derivace zachována, což znamená popis souborem pohybujících se bodů (Holton, 2004). Holton (2004) dále uvádí, že advekci nepopisujeme jako lokální tendenci veličiny způsobenou prouděním z okolních bodů, ale jako celkovou změnu veličiny podél její trajektorie. Bařka (2015) dodává, že to snižuje nároky na stabilitu, ale nutí sledovat trajektorii. Dle Janouška

(2007), v modelu ECMWF používané semi-Lagrangeovské schéma jde prostřední cestou, kde v každém časovém kroku je sledována trajektorie od jiného souboru částic. Jsou to ty částice, které právě dorazí do dané oblasti sítě (Janoušek, 2007). Řídící rovnice ve tvaru $dz/dt = L(z) + N(z) + P(z)$, přepisuje Janoušek (2007) v semi-implicitním a semi-Lagrangeovském schématu na tvar:

$$\frac{z_{ijl}^{n+1} - z_O^{n-1}}{2\Delta t} = L\left(\frac{z_{ijl}^{n+1} - z_O^{n-1}}{2}\right) + N(z_M^n) + P(z_O^{n-1}), \quad (1.2.2)$$

kde n určuje hodnotu meteorologické veličiny z v čase t . $n+1$ v čase $t + \Delta t$ a $n-1$ v čase $t - \Delta t$. ijl je označení bodu sítě. O je bod trajektorie částice v čase $t - \Delta t$ a M v čase t .

Parametrizace P na pravých stranách řídicích rovnic slouží k udržení „správné“ dynamiky modelu tím, že mění hybnost a energii (Bařka, 2015). Dále je nutné parametrizovat výpočet srážek (Holton, 2004). Mezi vlivy obsažené v parametrizacích patří jevy, které jsou menšího měřítka, než je rozlišení modelu anebo jsou příliš komplexní na zjednodušený popis atmosféry (Holton, 2004). Do parametrizací především patří tok slunečního záření, uvolňování latentního tepla při srážkách, vyzařování tepelné energie do vesmíru, turbulence a difuze, výpočet především konvektivních srážek či obecně konvekce ve vlhkém vzduchu a parametrizace tření k modelování vlivu hor na pohyb atmosféry (Bealjaars, 2014; Bařka, 2015).

Primitivní rovnice a parametrizace jsou definovány a je představena metoda řešení v diskrétní formě na třídimenzióální síti. Zbývá model propojit s realitou skrz počáteční a okrajové podmínky. Bařka (2015) uvádí, že hovoříme-li o globálních modelech, tak okrajové podmínky tvoří interakce atmosféry s okolními subsystemy (oceány, litosféra, biosféra atd.). Spodní podmínky zahrnují výměnu tepla a vodní páry a definují nulovou rychlost proudění na povrchu (Bařka, 2015). Horní podmínky zahrnují výměnu záření (Bařka, 2015). Počáteční podmínky jsou získávány měřením atmosféry pomocí radiosond, z pozemních stanic, lodí, letadel, satelitů, radarů aj. a jejich rozmístění po zeměkouli je velmi nepravidelné (ECMWF, 2009). Násbíraná data projdou procesem objektivní analýzy, která interpoluje naměřená data do modelové sítě (Bařka, 2015). Bařka (2015) popisuje, že první, ne příliš přesné, pokusy spočívali v lineární interpolaci do uzlového bodu modelové sítě ze tří nejbližších měření. Ani interpolace pomocí polynomu vyššího stupně, určení interpolačního polynomu z více měřících stanic a metoda nejmenších čtverců nepřinesly dostatečnou přesnost (Bařka, 2015). Bařka (2015) dále uvádí, že jako přesnější se ukázalo použít předběžné

přibližné meteorologické pole a interpolovat pouze odchylky od tohoto pole, které jej korigují. Následující postup je například v (Bařka, 2015) nebo (Janoušek, 2007), kde označují předběžné meteorologické pole v bodě modelové sítě k jako P_k , naměřenou hodnotu na stanici j jako B_j a interpolovanou hodnotu z modelové sítě do bodu stanice PB_j , pak výsledné pole A v bodě sítě k je:

$$A_k = P_k + \sum_{j=1}^n w_{k,j} (B_j - PB_j), \quad (1.2.3)$$

kde $w_{k,j}$ jsou váhy. Výhodou je, že na rozdíl od interpolace z nepravidelné sítě do pravidelné, je interpolace obráceným směrem snadná (Bařka, 2015). Prvním metodám k určení vah se říkalo „korekční metody“ a závisely na vzdálenosti stanic a uzlů modelové sítě, ale mnohem lepší a přesnější metoda spočívá na matematické statistice. Jedná se o optimální interpolaci (Bařka, 2015). Pro snadnější pochopení metody uvažujme např. dle (Sokol, 2008) nebo (Janoušek, 2007) $k=1$, $j=1$ a $P = PB$. Rovnice (1.2.3) přejde na tvar:

$$A = P + w(B - P), \quad (1.2.4)$$

který lze přepsat na:

$$A = wB + (1 - w)P.$$

Váha w je dle (Sokol, 2008) určena z minimalizace kvadratické chyby σ_A^2 analýzy A od skutečnosti S přes soubor dat:

$$d\sigma_A^2/dw = dE\left[(wB + (1 - w)P)^2\right]/dw = 0,$$

s výsledkem $w = \sigma_P^2 / (\sigma_P^2 + \sigma_B^2)$, kde σ_P^2 je kvadratická chyba P od S (chyba předběžného pole) a σ_B^2 je kvadratická chyba B od S (chyba pozorování). Obecný zápis optimální interpolace má poté tvar (Sokol, 2008):

$$\vec{A} = \vec{P} + \vec{A}(\vec{C} + \vec{R})^{-1}(\vec{B} - \vec{PB}), \quad (1.2.5)$$

kde \vec{A} je vektor výsledného pole v bodech sítě, \vec{P} je vektor předběžného pole v bodech sítě, \vec{B} je vektor naměřených hodnot na stanicích, \vec{PB} je vektor interpolovaných hodnot předběžného pole z bodů sítě do stanic, \vec{A} je matice variancí

a kovariancí chyb předběžného pole mezi body sítě a stanicemi, \vec{C} je matice variancí a kovariancí chyb předběžného pole mezi stanicemi a \vec{R} je matice variancí a kovariancí chyb pozorování. Původní varianta, která byla navržena v šedesátých letech minulého století Gandinem (Bařka, 2015), využívala jako předběžné pole klimatické normály. Ukázalo se však, že lepší variantou předběžného pole je poslední předešlý termín předpovědi modelu (Bařka, 2015). Takto Bařka (2015) definuje asimilaci dat, která spočívá v tom, že se integruje model a nejčastěji po šesti hodinách se výsledky opravují nově naměřenými daty a tato integrace je za vývojem atmosféry zpožděna z důvodu sběru, kontroly a inicializace dat (Bařka, 2015). Hlavním problémem optimální interpolace je inverze matice $(\vec{C} + \vec{R})$ ze vztahu (1.2.5), která má obrovskou dimenzi (10^5) (Sokol, 2008), proto se celková oblast dělila na podoblasti a později byla nahrazena variační metodou (Sokol, 2008). Tato metoda hledá maximální pravděpodobnost, že analýza A je skutečností S . Za předpokladu Gaussova rozdělení se dle Sokola (2008) hledá maximum $\{p(A|S)\}$ a při zjednodušení platném ve vztahu (1.2.4) je místo skutečnosti předběžné pole $P = S + \varepsilon_p$, $E[\varepsilon_p^2] = \sigma_p^2$ a naměřená hodnota $B = S + \varepsilon_b$, $E[\varepsilon_b^2] = \sigma_b^2$. Hledá se tedy (Sokol, 2008):

$$\begin{aligned} \max \{p(A|P, B)\} &= \max \{p_{\sigma_p}(A|P) p_{\sigma_b}(A|B)\} = \\ &= \max \left\{ \frac{1}{2\pi\sigma_p\sigma_b} \left(\frac{(P-A)^2}{2\sigma_p} - \frac{(B-A)^2}{2\sigma_b} \right) \right\}, \end{aligned}$$

kde max znamená maximum. Problém lze dle Sokola (2008) převést na hledání minima funkcionálu $J(A)$:

$$J(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{(P-A)^2}{2\sigma_p} - \frac{(B-A)^2}{2\sigma_b} \right),$$

kde, jak uvádí Sokol (2008), bychom dostali stejný výsledek jako u předešlé metody. Obecně lze funkcionál $J(X)$ vyjádřit (Sokol, 2008):

$$J(\vec{X}) = \frac{1}{2} (\vec{X} - \vec{P})^T \vec{B}^{-1} (\vec{X} - \vec{P}) + \frac{1}{2} (\vec{H}\vec{X} - \vec{B})^T \vec{R}^{-1} (\vec{H}\vec{X} - \vec{B}) = J_b + J_0, \quad (1.2.6)$$

kde \vec{X} je proměnná, jejíž minimální hodnota je vektor výsledného pole \vec{A} v bodech sítě, \vec{P} je vektor předběžného pole v bodech sítě, \vec{B} je vektor naměřených hodnot na stanicích, \vec{B} je matice variancí a kovariancí chyb předběžného pole, \vec{R} je matice variancí a kovariancí chyb pozorování a \vec{H} je matice hodnot určujících vztah mezi analyzovanými proměnnými a pozorováním. V nejjednodušším případě jde o jednotkovou matici, která může zahrnovat prostorové interpolace (z bodů sítě do stanic), relaci mezi proměnnými modelu a měřenou veličinou (satelitní radiance), nebo dokonce integraci modelu (Sokol, 2008). Vektor výsledného pole \vec{A} v bodech sítě je dle Sokola (2008) získán výpočtem gradientu $J(X)$:

$$\vec{A} = \nabla J(\vec{X}) = \vec{B}^{-1}(\vec{X} - \vec{P}) + \vec{H}^T \vec{R}^{-1}(\vec{H}\vec{X} - \vec{B}) = 0. \quad (1.2.7)$$

Stejně tak jako u optimální interpolace měla metoda asimilace dat podle Sokola (2018) i u variační metody jedno omezení. Nová data se vkládala po šesti hodinách a proto byla dostupná pouze data z těchto termínů (variační metodě s touto metodou asimilace se říká 3D-Var (Holton, 2004)). Využití dat ze všech termínů bylo dosaženo metodou variační asimilace dat, které je podle dalšího rozměru (času) nazývána 4D-Var (Holton, 2004). Tvar funkcionálu (1.2.6) zůstává stejný, avšak \vec{H} je určeno linearizovaným modelem podél trajektorie předpočítané plným NPM v asimilačním okně (např. šest hodin) (Sokol, 2008). Na NPM se lze dle Bařky (2015) dívat tak, že se z počátečních dat integrací vypočtou předpovězená data a 4D-Var je úlohou inverzní, kde se hledají vstupní hodnoty modelu, které budou odpovídat daným (pozorovaným) hodnotám výstupů modelu.

Podívejme se na historické milníky vývoje modelu ECMWF, který vypočítal první předpověď v roce 1979. Informace jsou získány z (ECMWF, 2016). Jednalo se o diferenční model s rozlišením N48. V osmdesátých letech se přešlo na spektrální model s rozlišením T63/L16 (1983), T106/L19 (1985). V devadesátých letech je významný rok 1991, kdy se přešlo na Semi-Lagrangeovské schéma a na rozlišení T213/L31, rok 1996 s přechodem na 3D-Var, 1997 4D-Var, 1998 rozlišení T319/L31, 1999 T319/L50, V novém tisíciletí se dále vylepšovalo rozlišení na T511/L60 (2000), T799/L91 (2006) a T1279/L91. V roce 2007 se přešlo na nové konvekční schéma a v roce 2011 byl zaveden ansámbl asimilací dat. V roce 2018 je platné rozlišení O1280/L191 s vertikálním rozlišením uvedeném v roce 2013 a horizontálním v roce 2016. Je zde potřeba zmínit, že výše zmíněné je určeno pro jednu deterministickou

předpověď (kontrolní) z co nejpřesnějších modelových hodnot, která se počítá pro 10 dní (s výstupy každé 3 hodiny pro prvních 6 dní a každých 6 hodin pro zbylé dny) (ECMWF, 2016).

Od roku 1992 MEC též počítá ansámblovou předpověď, která v roce 2018 čítala 50 předpovědí z perturbovaných počátečních podmínek pomocí perturbovaných řídicích rovnic (ECMWF, 2012). Rozptyl časového vývoje členů ansámblu určuje úspěšnost předpovědi. Malý, resp. velký rozptyl souvisí s větší, resp. menší důvěrou v předpověď (Mládek, 2007). Dále ansámblová předpověď odhalí možné scénáře vývoje, možné extrémní jevy a celkově prodlouží předpověditelnost (Mládek, 2007).

Klíčovým faktorem k zachycení reprezentativního rozptylu je volba perturbovaných počátečních podmínek tak, aby co nejlépe zachytily hustotu pravděpodobnosti předpovědi (ECMWF, 2012). MEC používá metodu singulárních vektorů (Kalnay, 2002). Singulární vektory definují perturbace počátečních podmínek, které v čase rychle rostou. Jak uvádí Kalney (2002) singulární vektory \bar{y} jsou ty vektory, které maximalizují normu v časovém intervalu (t_0, t_1) tj.:

$$J(\bar{y}(t_0)) \equiv \|\bar{y}(t_1)\|^2 = [\tilde{L}\bar{y}(t_0)]^T \tilde{L}\bar{y}(t_0) = \langle \tilde{L}^T \tilde{L}\bar{y}(t_0), \bar{y}(t_0) \rangle, \quad (1.2.8)$$

kde \tilde{L} je “tangent linear“ model a \tilde{L}^T je adjungovaný model (Kalnay, 2002). Kalnay (2002) též odvozuje, že problém popsán rovnicí (1.2.8) lze převést na hledání vlastních čísel λ a vlastních vektorů $\hat{y}(t_0)$ matice $(\tilde{W}^{-1})\tilde{L}^T \tilde{P}^T \tilde{P}\tilde{L}\tilde{W}^{-1}$:

$$(\tilde{W}^{-1})\tilde{L}^T \tilde{P}^T \tilde{P}\tilde{L}\tilde{W}^{-1}\hat{y}(t_0) = \lambda\hat{y}(t_0), \quad (1.2.9)$$

kde $\hat{y}(t_0) = \tilde{W}\bar{y}(t_0)$ a $\hat{y}(t_0)^T \hat{y}(t_0) = 1$. \tilde{P} určuje oblast např. (30° severní šířky, 90° severní šířky), pro kterou se perturbace uvažují a \tilde{W} je norma pomocí totální energie:

$$\begin{aligned} \|\bar{y}\|_{\tilde{W}}^2 &= \bar{y}^T \tilde{W}\bar{y} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\Sigma} \left(\Delta^{-1} \rho_y \rho_y + \Delta^{-1} D_x D_x + \frac{c_p}{T_{ref}} T_y^2 + w_q \frac{L_{cond}^2}{c_p T_{ref}} q_x^2 \right) d\Sigma \frac{\partial p}{\partial \eta} d\eta + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} R_{dry} T_{ref} P_{ref} \ln \pi^2 d\Sigma, \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

kde ρ_y , D_y , T_y , q_y , $\ln \pi_y$ jsou vorticity, divergence, teplota, měrná vlhkost a logaritmus tlaku při povrchu země stavového vektoru \vec{y} , c_p je měrné teplo suchého vzduchu za stálého tlaku, L_{cond} je latentní kondenzační teplo při 0 °C, R_{dry} je plynová konstanta pro suchý vzduch, $T_{ref} = 300K$ je referenční teplota a $P_{ref} = 800 hPa$ je referenční tlak. Parametr w_q definuje relativní váhy pro měrnou vlhkost. Časový interval (t_0, t_1) je pro MEC nastaven na 48 h. Protože pro NPM s počtem proměnných $\sim 10^5 - 10^8$ není možné určit „tangent linear“ model \vec{L} využívá se Lannczsova algoritmu, který je detailněji popsán v (Almeida, 2012). Lang (2013) uvádí, že 50. různých perturbací \vec{x}_j počátečních podmínek je určeno z 50. hlavních singulárních vektorů \vec{y}_k tvarem $\vec{x}_j = \sum_{k=1}^{50} \alpha_{jk} \vec{y}_k$. Koeficient α_{jk} je určen z normálního rozdělení s šířkou rozdělení danou střední kvadratickou chybou přes mnoho opakování. Navíc jsou počáteční singulární vektory kombinovány s finálními singulárními vektory vyvinutými v počátečním čase (Lang, 2013; Kalnay, 2002). Dále Lang 2013 uvádí, že aby se zajistilo, že průměr přes všechny perturbované počáteční podmínky je vycentrován na neperturované analýze, tak se zavádí plus-mínus symetrie. Určí se perturbace \vec{x}_j pro $j = 1, 3, 5, \dots, 49$ a perturbace pro $j = 2, 4, 6, \dots, 50$ jsou mínus perturbace $j - 1$ ($\vec{x}_j = -\vec{x}_{j-1}$). Ansámblové předpovědi jsou počítány modelem s nižším rozlišením. Jak uvádí zpráva ECMWF z roku 2016 (Office, 2016). Kontrolní předpověď (předpověď z neperturovaných počátečních podmínek) je počítána na síti s horizontálním rozlišením 9 km. Ansámblové předpovědi na síti s horizontálním rozlišením 18 km pro předpovědi do 15. dní.

1.3 Křivka průměrné chyby předpovědi

V úvodu bylo zmíněno, že deterministický chaos je definován citlivostí na počáteční podmínky. Vývoj atmosféry ze dvou blízkých stavů (blízké hodnotou meteorologických prvků) v podobné roční době (podobné podmínky pro vývoj atmosféry), na základě předpokladu chaotického chování atmosféry, očekáváme divergující. V první fázi by se měl vývoj rozcházet exponenciálně s mírou růstu danou největším LE atmosféry. Poté je očekáváno zpomalení růstu, až se růst úplně zastaví.

Zastavení nastane z důvodu stejného rozdílu původně blízkých stavů jako rozdílu náhodně volených stavů (ze stejné části dne a ročního období).

1.3.1 Hypotézy popisu křivky prediktability

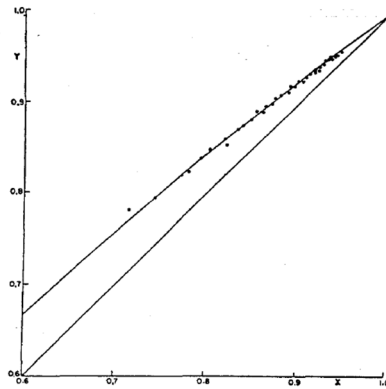
Lorenz (1969) se pokusil kvantifikovat vývoj původně blízkých stavů atmosféry, které nazval analogiemi. Pracoval s výškami tlakových hladin 200, 500 a 850 hPa získanými dvakrát denně po dobu 5 let v období 1963–1967 ze sítě National Meteorological centra o 1003 bodech pokrývající severní polokouli. Z dat byl vypočítán vážený kvadratický průměr (přes všechny body sítě a výšky tlakových hladin) rozdílu hodnot v různých časech. Volba časů pro průměr je limitována požadavkem podobnosti podmínek vývoje atmosféry, a proto jsou voleny hodnoty ve stejných měsících roků. Data byla poté normována klimatickým průměrem pro daný měsíc a zaokrouhlena na nejbližší celé číslo. Lorenz (1969) rozdělil tyto počáteční rozdíly $X(0)$ do skupin dle velikosti a pozoroval, jak se za m časových kroků vyvinou. Lorenz (1969) dále předpokládal, že se časový vývoj počátečních rozdílů řídí určitým zákonem. Exponenciální růst linearizovaného systému byl již nastíněn. Následný pokles exponenciálního růstu Lorenz (1969) připsal kvadratickému členu zákona s úvahou, že nelineární členové rovnic řídících atmosféru jsou kvadratické. Výsledný tvar hypotézy nazval Lorenz (1969) kvadratickou (označujme KH_{pp}^D) s tvarem:

$$\frac{dX(m)}{dm} = \alpha X(m) - \beta X(m)^2, \quad (1.3.1)$$

kde α, β jsou konstanty, které si jsou za předpokladu $\lim_{m \rightarrow \infty} X = 1$ rovny. Řešením rovnice při platnosti výše zmíněného předpokladu je (Lorenz, 1969):

$$X(m+n) = X(m) \left[e^{-\alpha n} + (1 - e^{-\alpha n}) X(m) \right]^{-1}. \quad (1.3.2)$$

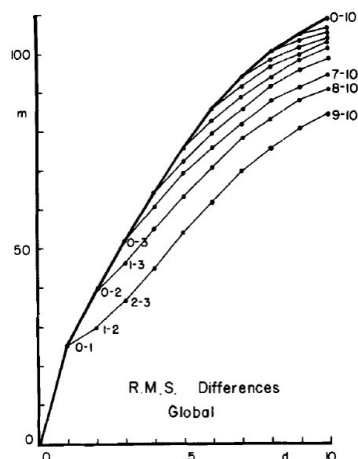
Obrázek 1.3.1 ukazuje na ose x hodnoty $X(m)$ pro m od 1 do 8 dnů (8 kroků po dnech). Na ose y je zobrazeno $Y = X(m+1)$. Body jsou určeny z analogií pro $X(m) \leq 0,95$ a jsou aproximovány rovnicí (1.3.2) metodou nejmenších čtverců s výslednou hodnotou $\alpha = 0,29 \text{ den}^{-1}$ (dále jen d^{-1}).



Obrázek 1.3.1: Pozorované hodnoty (plné tečky) vyjádřené jako $Y = X(m+1)$ k $X(m)$ pro m od 1 do 8 dnů (8 kroků po dnech) a $X(m) \leq 0,95$, které jsou aproximovány rovnicí (1.3.2) metodou nejmenších čtverců s výslednou hodnotou $\alpha = 0,29 \text{ den}^{-1}$. Přímka $Y = X$ je vložena pro referenci (převzato z (Lorenz, 1969)).

Jak uvádí Lorenz (1969) nelze vyjádření v Obrázku 1.3.1 brát jako prokázání platnosti rovnice (1.3.1). Jako důvod uvádí příliš velkou počáteční hodnotu začínající u 70% limitní hodnoty, která nespĺňuje předpoklad malé počáteční hodnoty. Dále Lorenz (1969) testoval s podobným výsledkem i kubickou hypotézu, kde v rovnici (1.3.1) nahradil kvadratický člen X^2 kubickým X^3 , ta je však obtížně teoreticky obhajitelná a tvar křivky je stočen více, než ukazují data (Lorenz, 1969). Nevhodnost kubické hypotézy ukázal Bednář, Raidl (2012) nebo Bednář a kol. (2013).

Jinou metodu určení křivky prediktability (KP) představil Lorenz (1982). Ta vycházela z výšek hladiny 500 hPa MEC (globální, 1722 bodů sítě) z období od 1. 12. 1980 do 10. 03. 1981. Ke každému bodu sítě a v každý den Lorenz (1982) přiřadil analyzovanou výšku a předpověď výšky na daný den z předešlého dne až z před deseti dny (10 předpovědí). Pro každý den a každý bod sítě určil kvadrát rozdílu mezi analyzovanou hodnotou a předpovězenými hodnotami a mezi předpověďmi navzájem. Vypočítal (Lorenz, 1982) kvadratický průměr (chyba předpovědi) přes všechny body sítě v daný den a přes všechny dny. Obrázek 1.3.2, ukazuje výslednou počáteční chybu (rozdíl) E . Čísla 0-1 resp. 0-10 u bodů tučné obalové křivky popisují průměrnou chybu mezi analýzou a předpovědí z předešlého dne (0-1) resp. chybu mezi analýzou a předpovědí vypočtenou před deseti dny. Čísla 1-2 resp. 9-10 u bodů spodní křivky popisují rozdíl mezi předpovědí z předešlého dne a z před dvěma dny (1-2) resp. před devíti a desíti dny (9-10). Ostatní křivky od spodní k tučné obalové ukazují počáteční chybu mezi předpověďmi s dvoudenním rozdílem až s devítidenním rozdílem.

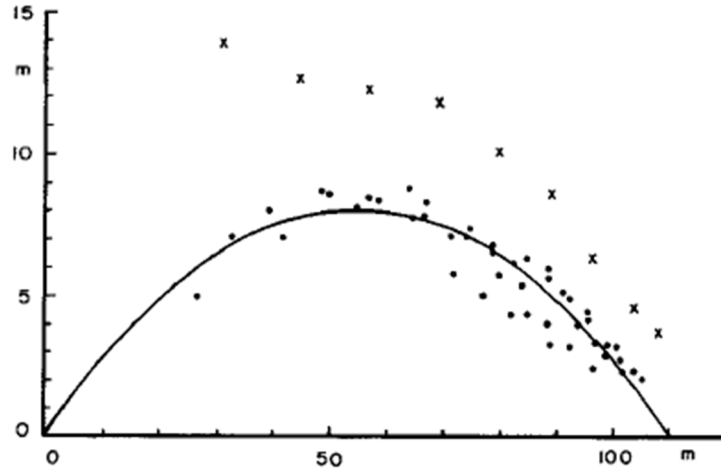


Obrázek 1.3.2: Kvadratický průměr (100-denní perioda x 11 předpovědí (0, ..., 10-denní) x 1722 bodů sítě) rozdílů E výšek hladiny 500 hPa mezi j -denní a k -denní předpovědi vytvořenou modelem ECMWF (převzato z (Lorenz, 1982)).

Dále Lorenz (1982) popisuje Obrázek 1.3.2. Tučně vyznačená obalová KP porovnávací analýzu a předpověď popisuje růst počáteční/modelové chyby a ukazuje reálný stav. Spodní tenká KP s jednodenním rozdílem předpovědi vyznačuje růst počáteční chyby a ukazuje teoretický limit, který je možné dosáhnout s perfektním modelem při dané hodnotě počáteční chyby. Křivky mezi mají stejný průběh jako spodní křivka jenom jsou horizontálně posunuté (Lorenz, 1982). Lorenz (1982) dále popisuje důvod, proč je limitní hodnota $\lim_{t \rightarrow \infty} E = E_{\infty}$ pro každou křivku jiná a argumentuje faktem, že průměr a rozptyl analyzovaných hodnot a předpovězených hodnot je jiný. Tuto skutečnost Lorenz (1982) přisuzuje nepřesnému popisu atmosféry modelem. Lorenz (1982) se opět pokusil data proložit KH_{pp}^D . Rovnice (1.3.1) má v aktuálním popisu proměnných a za předpokladu normované hodnoty $E_{\infty} = 1$ tvar:

$$\frac{dE}{dt} = \alpha(E - E^2), \quad (1.3.3)$$

kde t je čas a α je konstanta. Obrázek 1.3.3 ukazuje aproximaci KH_{pp}^D . Derivace je v případě rozdílů předpovědi (tečky) nahrazena diferencí $E_{j+1,k+1} - E_{j,k}$, kde $j = 1, \dots, 9$ a $k = 1, \dots, 10$ označují délky předpovědi a v případě rozdílů mezi předpovědi a analýzou (křížky) je nahrazena $E_{0,k+1} - E_{0,k}$, kde 0 označuje analýzu a $k = 1, \dots, 10$ označuje délku předpovědi. E k dané diferenci je nahrazeno průměrem $(E_{j+1,k+1} + E_{j,k})/2$ resp. $(E_{0,k+1} + E_{0,k})/2$. Na ose x jsou průměry na ose y difference.



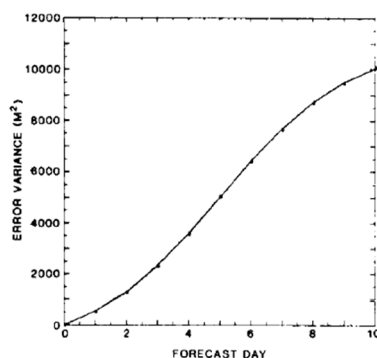
Obrázek 1.3.3: Hodnoty diferencí předpovědí $\left[\left(E_{j+1,k+1} + E_{j,k} \right) / 2, E_{j+1,k+1} - E_{j,k} \right]$ (tečka), kde $j = 1, \dots, 9$ a $k = 1, \dots, 10$ označují délky předpovědí a hodnoty diferencí analýzy a předpovědí $\left[\left(E_{0,k+1} + E_{0,k} \right) / 2, E_{0,k+1} - E_{0,k} \right]$ (křížek), kde 0 označuje analýzu a $k = 1, \dots, 10$ označuje délku předpovědi. Diference předpovědí (tečky) jsou proloženy KH (rovnice (1.3.3)) (Převzato z (Lorenz, 1982)).

Lorenz (1982) poté argumentoval, že z Obrázku 1.3.3 je patrné, že i přes rozptýl bodů diferencí předpovědí (tečky), leží na parabole KH (rovnice (1.3.3)) s $\alpha = 0,29 \text{ d}^{-1}$ (Lorenz, 1982), což je stejná hodnota jako pro α z rovnice (1.3.1). I zde, tak jako pro metodu analogií je patrné, že zde není skutečně malá počáteční chyba a tečky leží převážně u klesající poloviny paraboly.

S možnou aproximací tučné obalové křivky z Obrázku 1.3.2 přišel poprvé Dalcher a Kalnay (1987), kteří nepracovali s kvadratickým průměrem rozdílů přes všechny body sítě a dny, ale s druhou mocninou kvadratického průměru, s variancí V . Na základě (Leith, 1978) Dalcher a Kalney (1987) přidali parametr S popisující modelovou chybu ve vztahu k varianci ($\text{m}^2 \text{d}^{-1}$). Rovnice (1.3.3) s variancí V a bez předpokladu normované hodnoty, tedy s $\lim_{t \rightarrow \infty} V = V_\infty$ přejde na tvar (označme KH_{PM}^D):

$$\frac{dV}{dt} = (\alpha V + S)(1 - V/V_\infty), \quad (1.3.4)$$

kde α je míra růstu počáteční chyby. Obrázek 1.3.4 zobrazuje poměrně dobré proložení obalové křivky (Dalcher a kol, 1987) přepočítané na varianci s $\alpha = 0,43 \text{ d}^{-1}$ a $S = 21^2 \text{ m}^2 \text{d}^{-1}$, což je při $V_\infty = 105^2 \text{ m}^2$ normovaná hodnota $S/V_\infty = 0,04 \text{ d}^{-1}$.



Obrázek 1.3.4: Růst variance V . Body jsou pozorované hodnoty. Křivka je proložení řešením rovnice (1.3.4) (Převzato z (Dalcher a kol., 1987)).

S alternativou ke KH přišli Trevisan a kol. (1992), kteří argumentovali, že Lorenzova metoda analogií (Lorenz, 1969) s tak velkou počáteční hodnotou a s daty z pětiletého období nemůže dát adekvátní potvrzení této hypotézy, a i přes pozdější dokazování platnosti (Lorenz, 1982) a (Dalcher a kol., 1987) otestovali KH pomocí kvazi-geostrofického dvou-vrstvého modelu na β rovině. Autoři simulovali Lorenzovu metodu analogií (Lorenz, 1969) výpočtem normované vzdálenosti mezi všemi 19 000 stavy (60 let, 1 časový krok je 10^5 s) v 96-dimenzionálním fázovém prostoru. Výsledné hodnoty rozdělili Trevisan a kol. (1992) dle velikosti do 21 intervalů s průměrnou hodnotou v intervalu $X_j(0)$ a jejím přirozeným logaritmem $E_j(0)$, $j = 1, \dots, 21$ a pozorovali vývoj $m = 1, \dots, 10$ dní s průměrnou hodnotou v každém intervalu $X_j(m) = e^{E_j(m)}$ normovanou na $\lim_{m \rightarrow \infty} X(m) = 1$. Obrázek 1.3.5 zobrazuje difference

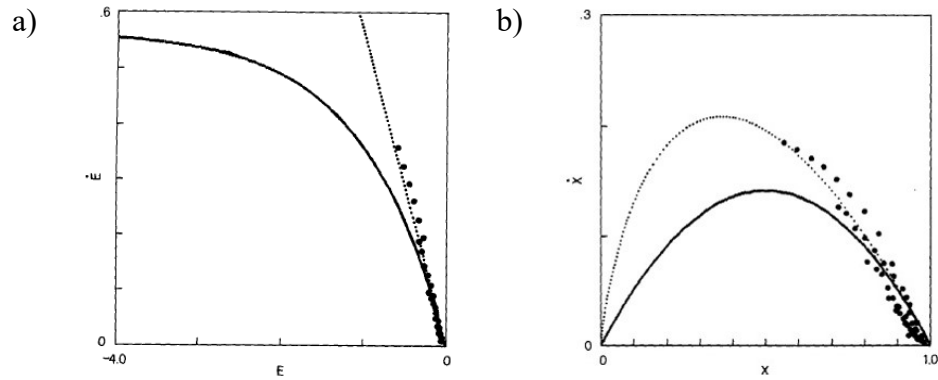
$\left[\frac{(E_j(m+1) + E_j(m))}{2}, E_j(m+1) - E_j(m) \right]$ pro $j = 2, \dots, 7$ a $m = 1, \dots, 5$ s proložením KH $\dot{E} = \alpha(1 - e^E)$ (tučná křivka) a tečnou $\dot{E} = \alpha E$ v $E = 0$ (tečkovaná přímka). Z Obrázku 1.3.5 (a) je patné, že tečna aproximuje data lépe, a že Lorenz (1969) prokazoval platnost KH z dat blízkých $[\dot{E}, E] = [0, 0]$, kde je KH dostačující.

Tečna $\dot{E} = \alpha E$ má v proměnné $X(m)$ tvar:

$$\frac{dX(m)}{dm} = -\alpha X(m) \ln[X(m)]. \quad (1.3.5)$$

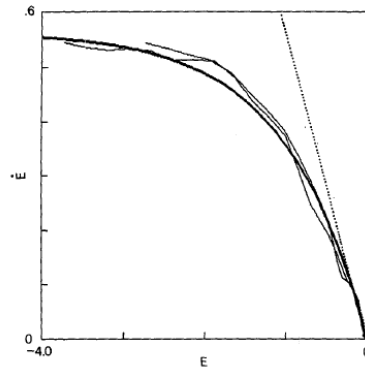
Tato LH (logaritmičká hypotéza) má řešení:

$$X(m) = X(0)^{\exp(-\alpha m)}. \quad (1.3.6)$$



Obrázek 1.3.5: a) Diference $\left[\left(E_j(m+1) + E_j(m) \right) / 2, E_j(m+1) - E_j(m) \right]$ pro $j = 2, \dots, 7$ a $m = 1, \dots, 5$ s proložením KH_{pp}^D $\dot{E} = \alpha(1 - e^E)$ (tučná křivka) a tečnou $\dot{E} = \alpha E$ v $E = 0$ (tečkovaná přímka). b) Diference $\left[\left(X_j(m+1) + X_j(m) \right) / 2, X_j(m+1) - X_j(m) \right]$ pro $j = 2, \dots, 7$ a $m = 1, \dots, 5$ s proložením KH_{pp}^D (tučná křivka) a LH (tečkovaná křivka) (Převzato z (Trevisan a kol., 1992)).

Platnost LH je též patrná z Obrázku 1.3.5 (b) s diferencí $\left[\left(X_j(m+1) + X_j(m) \right) / 2, X_j(m+1) - X_j(m) \right]$ pro $j = 2, \dots, 7$ a $m = 1, \dots, 5$ s proložením KH_{pp}^D (tučná křivka) a LH (tečkovaná křivka). Dále Trevisan a kol (1992) použili perturbační metodu, kde se základní trajektorie perturbuje chybou a společně se základní trajektorií se počítá po daný čas i trajektorie vycházející z perturbované počáteční hodnoty (Trevisan a kol., 1992). Pro výpočet průměrného růstu chyby se vychází z velkého množství opakování. Počáteční chyby byly zvoleny jako 5% a 2% limitní hodnoty (Trevisan a kol., 1992). Pro otestování platnosti hypotéz byly opět vypočteny diference $\left[\left(E_j(m+1) + E_j(m) \right) / 2, E_j(m+1) - E_j(m) \right]$ pro oba počáteční rozdíly. Obrázek 1.3.6 ukazuje proložení výsledných dat KH_{pp}^D (tučná křivka) a LH (tečkovaná přímka). Jak uvádí Trevisan a kol. (1992), je patrné, že pro počáteční chyby o velikosti 5% a 2% limitní hodnoty, které splňují exponenciální růst „malé“ chyby, je platná KH_{pp}^D . Trevisan a kol. (1992) vyslovili a Bednář a kol. (2014a) nebo (2014b) potvrdili závěr, že pro počáteční chyby, které jsou příliš velké na teoreticky očekávaný počáteční exponenciální růst je platná LH . Pro počáteční chyby velikostí, které splňují exponenciální růst, je platná KH_{pp}^D . Neúspěšně byla testována i LH s modelovou chybou (Bednář a kol., 2015).



Obrázek 1.3.6: Diference $\left[\left(E_j(m+1) + E_j(m) \right) / 2, E_j(m+1) - E_j(m) \right]$ z rozdílů vývoje „reality“ a „modelu“ pro počáteční chyby zvolené jako 5 % a 2 % limitní hodnoty (tenké plné křivky) a proložení výsledných dat KH_{PP}^D (tučná křivka) a LH (tečkovaná přímka) (převzato z (Trevisan a kol., 1992)).

Stroe a Royer (1994) nebo (1993) zobecnili kvadratický průměr $E = R^1$ z rovnice (1.3.3) a varianci $V = R^2$ z rovnice (1.3.4) na proměnnou R^p , kde p je libovolný mocnitel. Dosazení této proměnné do KH_{PP}^D (1.3.3) získali:

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{\alpha}{p} \left(1 - \left(\frac{R}{R_\infty} \right)^p \right). \quad (1.3.7)$$

Zavedením substituce $y = \ln(R)$ přejde rovnice (1.3.7) na tvar:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\alpha}{p} \left(1 - \exp[p(y - y_\infty)] \right) = f(y), \quad (1.3.8)$$

pokud $y \rightarrow -y$ pak dy/dt asymptoticky směřuje ke konstantě α/p , která určuje míru růstu malé chyby. Pro míru konvergence k limitní hodnotě platí:

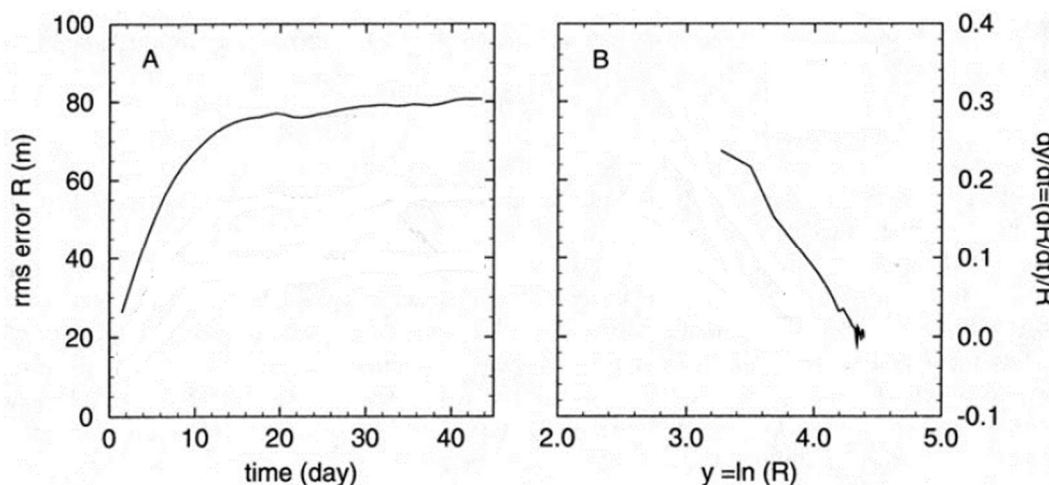
$$\left[\frac{df(y)}{dy} \right] (y = y_\infty) = -\alpha. \quad (1.3.9)$$

Pro limitní hodnotu $p = 0$ získáme rozvinutím exponenciály do Taylorova rozvoje tvar:

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha(y - y_\infty), \quad (1.3.10)$$

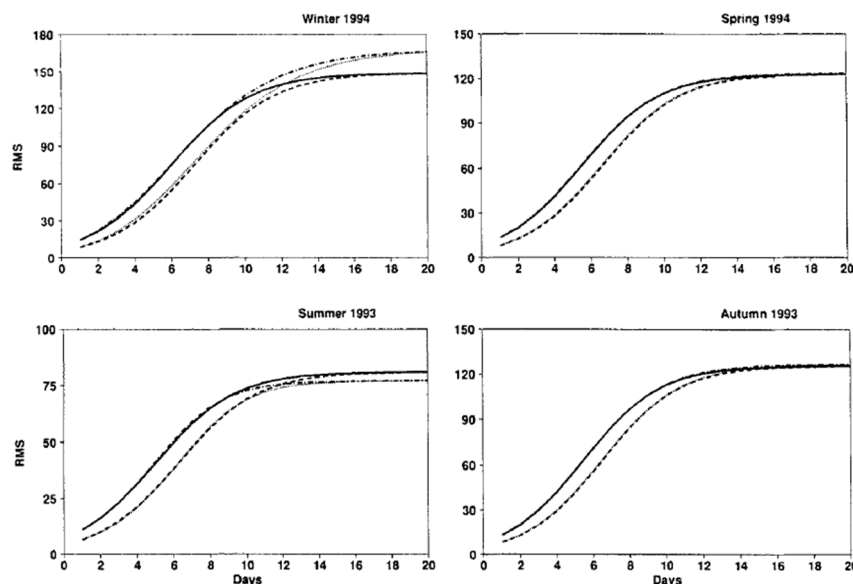
Což je v proměnné R LH rovnice (1.3.5). Rovnici (1.3.7) můžeme nazvat OH (obecná hypotéza), protože v sobě zahrnuje KH_{pp}^D určenou z kvadratického průměru ($p=1$), z variance ($p=2$) a LH ($p=0$) s mírou růstu malé počáteční chyby $\sigma = \alpha/p$ a mírou saturace α .

Stroe a Royer (1994) aproximovali OH na KP určenou metodou popsanou Lorenzem (1982) (viz výše). Použitá data byla z CNRM modelu (METEO-FRANCE, Toulouse), výšky hladiny 500 hPa, z listopadu, prosince, ledna a února z období 1983–1991, jednodenní rozdíl mezi 44-denní předpovědí (podobně jako spodní křivka v Obrázek 1.3.2 určuje pouze počáteční chybu). Obrázek 1.3.7 (A) ukazuje růst kvadratického průměru R s časem. Je z něj patrná značná počáteční chyba (30 % R_∞). Obrázek 1.3.7 (B) ukazuje diferenci $\left[\frac{y(m+1)+y(m)}{2}, y(m+1)-y(m)\right]$, kde $m=1, \dots, 44$ a $y = \ln(R)$ a snaží se zachytit rovnici (1.3.8). Je patrné (Royer a kol., 1994), že křivka je blízká lineárnímu vztahu (1.3.10) a tedy LH s $p=0$. Stroe a Royer (1994), taktéž jako Trevisan a kol. (1992) ukázali chování KP blízké LH a to i pro počáteční chybu menší než 50% limitní hodnoty (30%).



Obrázek 1.3.7: Růst počáteční chyby CNRM modelu, 44-denní předpověď přes 8 zimních období 1983 - 1991 (rozdíl výšek hladin 500 hPa pro dvě předpovědi posunutě 1 den od sebe). (A) je růst kvadratického průměru R s časem. (B) ukazují diferenci $\left[\frac{y(m+1)+y(m)}{2}, y(m+1)-y(m)\right]$, kde $m=1, \dots, 44$ a $y = \ln(R)$ (převzato z (Royer a kol., 1994)).

Další porovnání hypotéz, tentokrát KH_{pp}^D a OH provedli Simmons a kol. (1995). Data pro zimu 1993/1994 (prosinec–únor), jaro 1994 (březen–květen), léto 1993 (červen–srpen) a podzim 1993 (září–listopad), MEC, severní polokoule, výšky hladin 500 hPa po 12 hodinách, jednodenní rozdíl mezi 10-denní předpovědí (určuje pouze počáteční chybu) byla zpracována Lorenzovou metodou (Lorenz, 1982). Na základě (Stroe a kol, 1993) byly určeny para979metry p v OH s hodnotami v zimě $p = 0,6$, na jaře a podzim $p = 1$, v létě $p = 1,4$ a byly určeny počáteční chyby o velikostech 7% a 12% z E_∞ . Obrázek 1.3.8 porovnává výše zmíněné a extrapoluje data z 10-denní předpovědi na 20 dní. Je patrné (Simmons a kol., 1995), že pro prvních deset dní je vývoj obou hypotéz podobný až totožný pro všechna roční období. Pro extrapolované hodnoty v zimním období ukazuje OH ($p = 0,6$) vyšší hodnoty pro obě počáteční chyby než KH_{pp}^D (větší hodnota E_∞). V letním období ukazuje OH ($p = 1,4$) nižší hodnoty pro obě počáteční chyby než KH_{pp}^D (nižší hodnota E_∞). Pro jaro a podzim je OH ($p = 1$) totožná s KH_{pp}^D ($p = 1$). Je tedy patrné, že výhodnost hypotéz je závislá na znalosti modelové E_∞ , což bude rozebráno dále v této kapitole.

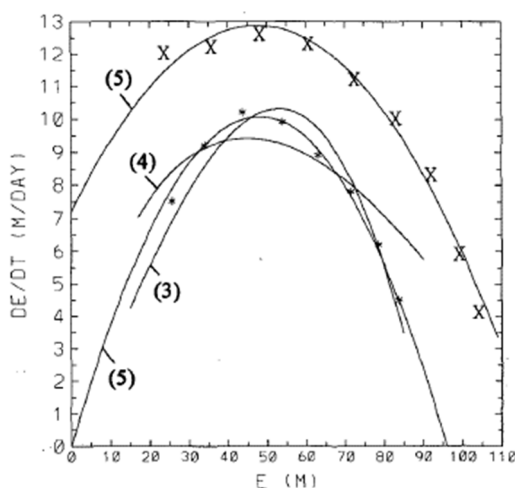


Obrázek 1.3.8: Porovnání KH_{pp}^D (tučná pro poč. chybu 12%, čárkovaná pro poč. chybu 7%) a OH (čerchovaná pro poč. chybu 12%, tenká pro poč. chybu 7%) pro všechny čtyři roční období v letech 93/94 (viz popisky v grafech) extrapolované na 20 dní. Aproximace a extrapolace vychází z MEC, severní polokoule, 500 hPa po 12 hodinách, jednodenní rozdíl mezi 10 denní předpovědí (převzato z (Simmons a kol., 1995)).

Savijarvi (1995) upravil Dalcherovu a Kalneyové (1987) verzi KH_{PM}^D s modelovou chybou použitím kvadratického průměru E místo variance V z rovnice (1.3.4). Nová verze má tvar:

$$\frac{dE}{dt} = (\alpha E + \beta)(1 - E/E_\infty), \quad (1.3.11)$$

kde α je stejné jako v předešlém testu a β je parametr určující modelovou chybu. Otestována byla na datech z NPM z National Meteorological Center USA, severní polokoule, výšky hladin 500 hPa. Data (analýza a 10 předpovědí) byla získávána denně ze Zimy 1992/93 (Savijarvi, 1995). Lorenzovou metodou (Lorenz, 1982) byla určena KP s počáteční chybou o velikosti 8 % z E_∞ , jak pro počáteční/modelovou chybu (rozdíl mezi analýzou a 1 až 10-denní předpovědí), tak pro počáteční chybu (jednodenní rozdíl mezi předpovědí).



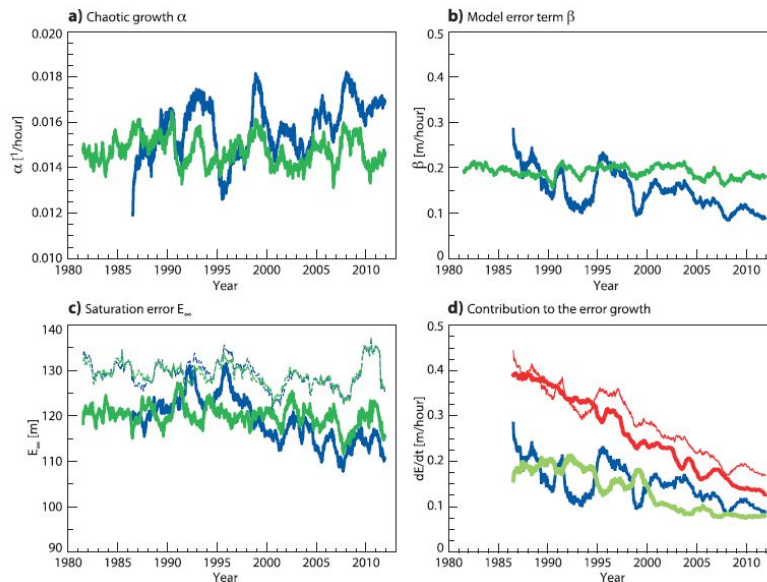
Obrázek 1.3.9: Hodnoty diferencí předpovědí s 1-denním rozdílem $\left[\frac{(E_{k,k+1} + E_{k+1,k+2})}{2}, E_{k,k+1} - E_{k+1,k+2} \right]$ (hvězdička), kde $k = 1, \dots, 8$ označuje délky předpovědí. Hodnoty diferencí analýzy a předpovědí $\left[\frac{(E_{0,k+1} + E_{0,k})}{2}, E_{0,k+1} - E_{0,k} \right]$ (křížek), kde 0 označuje analýzu a $k = 1, \dots, 9$ označuje délku předpovědi. (5) prokládané křížky je KH_{PM}^D s počáteční/modelovou chybou (rovnice (1.3.11)). (5) prokládané hvězdičkami je KH_{PP}^D s počáteční chybou (rovnice (1.3.3), nenormováno). (4) je LH , rovnice (1.3.5). (3) je KH_{PM}^D s počáteční/modelovou chybou, přepočítaná variance do kvadratického průměru (rovnice (1.3.4)) (převzato z (Savijarvi, 1995)).

Obrázek 1.3.9 ukazuje aproximaci hypotéz pro hodnoty diferencí předpovědi s 1-denním rozdílem $\left[\frac{(E_{k,k+1} + E_{k+1,k+2})}{2}, E_{k,k+1} - E_{k+1,k+2} \right]$ (hvězdička), kde $k = 1, \dots, 8$ označuje délky předpovědí. Hodnoty diferencí analýzy a předpovědi $\left[\frac{(E_{0,k+1} + E_{0,k})}{2}, E_{0,k+1} - E_{0,k} \right]$ (křížek), kde 0 označuje analýzu a $k = 1, \dots, 9$ označuje délku předpovědi. (5) prokládané křížky je KH_{PM}^D s počáteční/modelovou chybou (rovnice (1.3.11)). (5) prokládané hvězdičkami je KH_{PP}^D s počáteční chybou (rovnice (1.3.3), nenormováno). (4) je LH , rovnice (1.3.5). (3) je KH_{PM}^D s počáteční/modelovou chybou, přepočítaná variance do kvadratického průměru (rovnice (1.3.4)). Savijarvi (1995) na základě Obrázku 1.3.9 argumentuje, že pro data zatížená počáteční chybou, respektive pro data zatížená počáteční/modelovou chybou je nejlepší aproximace označená Savijarvim (1995) (5) tj. KH_{PP}^D (rovnice (1.3.11)) bez parametru β respektive KH_{PM}^D s parametrem β .

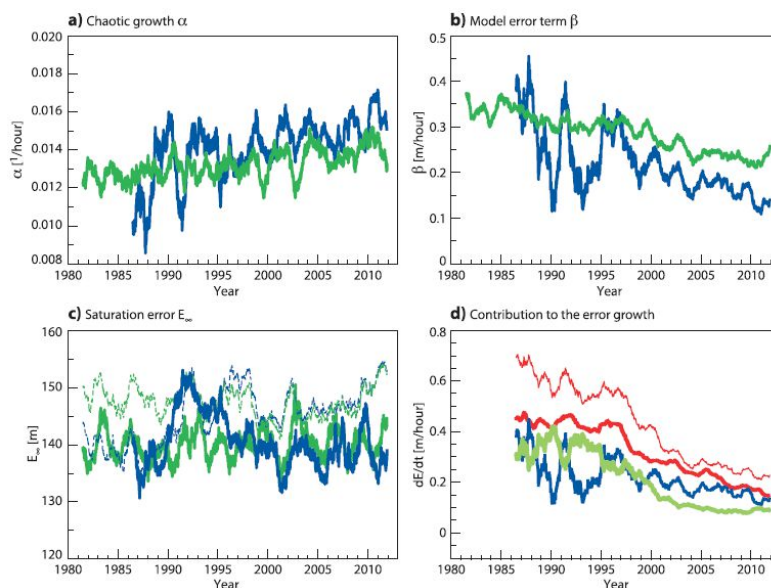
1.3.2 Přesnost Kvadratické hypotézy

Analýzu parametru α , β a E_∞ z rovnice (1.3.11) pro MEC v období 1. leden 1981–1. červen 2012 provedli Magnusson a Kallen (2013). Kvadratické průměry pro určení KP jsou vypočteny z výšek hladin 500 hPa zvlášť pro severní polokouli (20°-90° S) a jižní polokouli (20°-90° J). Do roku 1986 jsou data dostupná po 24 hodinách, poté po 12 hodinách a jsou použity 12-měsíční průměry. Do roku 1986 je analýza dána systémem platným v dané době. Po roce 1986 je použita analýza z ERA-Interim (ERA-Interim je re-analýza pomocí asimilačního systému a modelu ECMWF z roku 2006, ale s rozlišením T_L255 a 60 vertikálními hladinami). ERA-Interim (analýza i předpověď) je též použita jako alternativa k určení parametrů. Výsledné hodnoty pro rozdíl mezi analýzou a předpovědí, tj. pro počáteční/modelovou chybu ukazují Obrázky 1.3.10 a 1.3.11 (Magnusson a kol., 2013). Z nich je patrné, že parametr α pro severní polokouli leží mezi hodnotami 0,013 hodina⁻¹ (dále jen h⁻¹) (0,31 d⁻¹) a 0,018 h⁻¹ (0,43 d⁻¹), pro jižní polokouli leží mezi 0,010 h⁻¹ (0,24 d⁻¹) a 0,016 h⁻¹ (0,38 d⁻¹). I přes značnou variabilitu je patrný rostoucí trend. Parametr α získaný z ERA-Interim ukazuje míru jeho meziroční variability (Magnusson a kol., 2013). Pro

chybu modelu β je pozorován převážně klesající trend. Pro ERA-Interim by se chyba modelu měla měnit minimálně (Magnusson a kol., 2013), což je platné pro severní polokouli. Pro jižní polokouli je však patrný klesající trend, který však nemá teoretické opodstatnění (Magnusson a kol., 2013). Limitní hodnota E_∞ klesá po roce 1997 pro obě polokoule. Z hodnot ERA-Interim je patrná závislost E_∞ na modelové aktivitě. Obrázky 1.3.10 (c) a 1.3.11 (c) též ukazují nezávisle určenou a teoreticky očekávanou hodnotu $E_\infty = \sqrt{(f-c)^2 + (a-c)^2}$, kde $(f-c)$ je časově zprůměrovaný rozdíl mezi předpovědí a klimatickou hodnotou $(a-c)$ je časově zprůměrovaný rozdíl mezi analýzou a předpovědí (více viz text) (Magnusson a kol., 2013). Porovnáním hodnot obou metod je pozorována vyšší hodnota teoreticky očekávané E_∞ a tento rozdíl se v pozdějších letech zvětšuje.

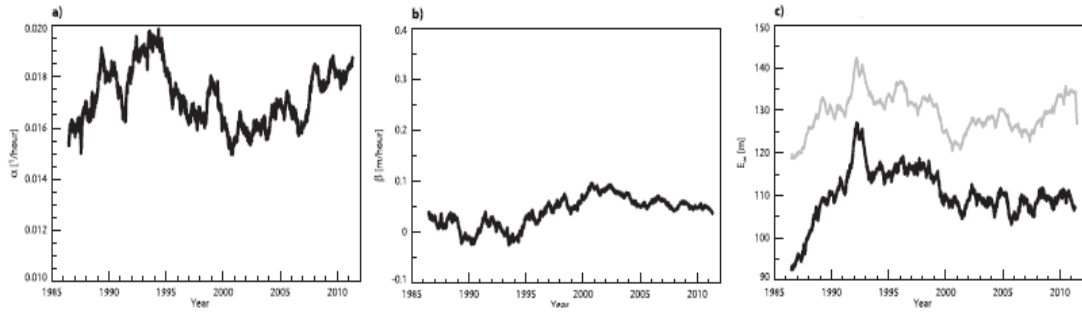


Obrázek 1.3.10: Vývoj parametrů KH_{PM}^D (rovnice (1.3.11)) pro období 1981-2012, severní polokoule. Modrou jsou označeny hodnoty z NPM, zelenou hodnoty z ERA-Interim. V (c) jsou tečkovaně vyznačeny hodnoty E_∞ určeny nezávislou metodou (viz. text). (d) Červeně plně je vyznačena míra růstu chyby mezi 24 h. a 12 h. předpovědí $(E_{0,24} - E_{0,12})/12$, modře je vyznačen příspěvek od modelové chyby (param. β), zeleně je příspěvek od počáteční chyby $(\alpha(E_{0,12} + E_{0,24}/2))$, červeně tence je vyznačen součet příspěvků od počáteční/modelové chyby (převzato z (Magnusson, a kol, 2013)).



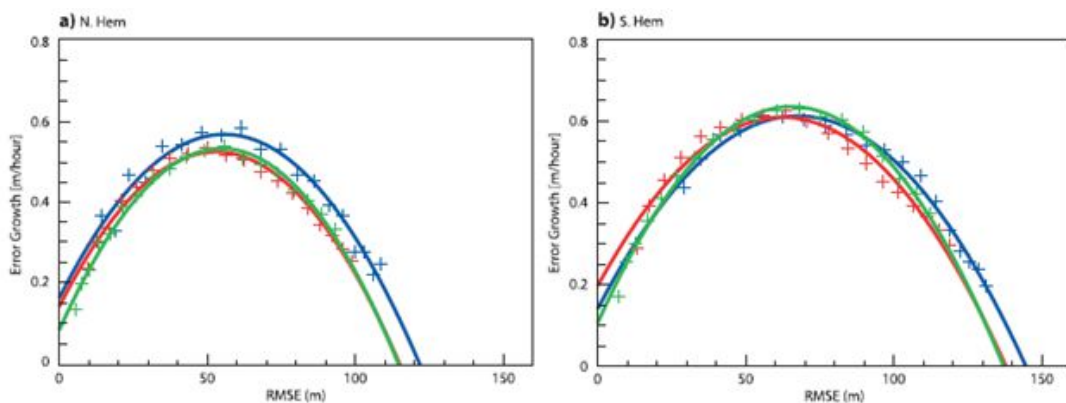
Obrázek 1.3.11: Jako Obrázek 1.3.10, ale jižní. polok. (převzato z (Magnusso, a kol, 2013)).

Obrázky 1.3.10 (d) a 1.3.11 (d) analyzují příspěvek počáteční chyby αE (zelená) a modelové chyby β (modrá) v počáteční fázi dE/dt (mezi 12 h. a 24 h.). Pro severní polokouli je pozorován (Magnusson a kol., 2013) pro celkový růst chyby v daném období (červená, tučná) pokles s postupujícími roky s hodnotou 0,38 m/h kolem roku 1990 a 0,14 m/h v 2011. K poklesu přispívá jak snižování počáteční chyby zpřesňováním analýzy, tak snižování modelové chyby (Magnusson a kol., 2013). Pokles je pozorován i pro jižní polokouli, a to ze stejných důvodů. Celkový růst chyby (červená, tučná) klesá s postupujícími roky z hodnoty 0,45 m/h kolem roku 1990 na 0,15 m/h v roce 2011 (Magnusson a kol., 2013). Tenkou červenou křivkou je vyznačen součet příspěvků počáteční/modelové chyby, který převyšuje celkový růst a naznačuje nepřesnosti v odhadu parametrů α a β (Magnusson a kol., 2013). Obrázek 1.3.12 zobrazuje vývoj parametrů KH_{PM}^D (rovnice (1.3.11)) v období 1986–2012 pro severní polokouli určených ze dvou předpovědí s 24 h. rozdílem. Pro parametr α není pozorován jasný trend a hodnoty leží mezi $0,016 \text{ h}^{-1}$ ($0,32 \text{ d}^{-1}$) a $0,020 \text{ h}^{-1}$ ($0,48 \text{ d}^{-1}$). Parametr β by měl být teoreticky nulový, což není splněno, důvodem je opět nepřesnost KH_{PM}^D (Magnusson a kol., 2013). V (c) je šedě vyznačena hodnota E_∞ určená $E_\infty = \sqrt{2(f-c)^2}$, která je také vyšší, než hodnota určena KH_{PP}^D , důvodem je i zde nepřesná aproximace KH_{PM}^D (Magnusson a kol., 2013).

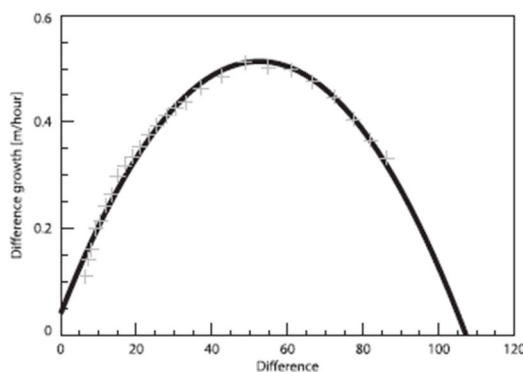


Obrázek 1.3.12: Vývoj parametrů KH_{PM}^D (rovnice (1.3.11)) v období 1986–2012 pro severní polokouli určených ze dvou předpovědí s 24 h. rozdílem. V (c) je též šedě vyznačen teoretický odhad E_∞ (viz text) (převzato z (Magnusson, a kol, 2013)).

Shrňme přesnost KH_{PM}^D představené Magnussonem a kol. (2013). Obrázek 1.3.13 zobrazuje hodnoty diferencí analýzy a předpovědí (výšky hladin 500 hPa) $\left[\frac{(E_{0,k+1} + E_{0,k})}{2}, \frac{(E_{0,k+1} - E_{0,k})}{12} \right]$ z let 1990, 2000, 2010 pro severní a jižní polokouli. Je z něj patrné, že KH_{PM}^D je adekvátní ve střední části aproximace (kromě jižní polokoule, 2010). První hodnota (křížek) pro obě polokoule a všechny roky je nižší než aproximace. Další hodnoty (křížky) ve stoupající části grafu leží převážně nad aproximací. Počáteční růst je tedy aproximací zkreslen, což zkresluje odhad parametrů α a β .



Obrázek 1.3.13: Hodnoty diferencí analýzy a předpovědí (výšky hladin 500 hPa) $\left[\frac{(E_{0,k+1} + E_{0,k})}{2}, \frac{(E_{0,k+1} - E_{0,k})}{12} \right]$ (křížek), kde 0 označuje analýzu a $k = 1, \dots, 19$ označuje délku předpovědi (předpověď na 10 dní po 12 hodinách) a proložení KH_{PM}^D (paraboly) pro severní (a) a jižní polokouli (b). Modře jsou data z roku 1990, červeně z roku 2000 a zeleně z roku 2010 (převzato z (Magnusson, a kol, 2013)).



Obrázek 1.3.14: Hodnoty diferencí předpovědí s 1-denním rozdílem (výšky hladin 500 hPa) $\left[\frac{(E_{k,k+1} + E_{k+1,k+2})}{2}, E_{k,k+1} - E_{k+1,k+2} \right]$ (křížky), kde $k = 1, \dots, 19$ $k = 1, \dots, 19$ určuje krok po 12 hodinách a proložení KH (parabola) pro data z roku 2010 (převzato z (Magnusson a kol, 2013)).

Tento fakt je patrný v Obrázcích 1.3.10 (d) a 1.3.11 (d). V Obrázku 1.3.10 (a,b) a 1.3.11 (a,b) se nepřesnost odhadu projevuje většími extrémy parametrů α , β , tam kde je α aproximací nadhodnoceno je β aproximací podhodnoceno a obráceně. Další nepřesnost aproximace může být v určení E_∞ , které je podhodnoceno cca o 7%. Obrázek 1.3.14 pro variantu pouze s počáteční podmínkou výše zmiňované potvrzuje. Parametr β je nenulový, což může být opět vysvětleno nepřesným odhadem aproximace, zároveň opět platí propojení parametrů α a β (tam kde je α největší je β nejmenší a obráceně). E_∞ je v průměru podhodnoceno o 14%.

Pro úplnost je ještě nutné určit případnou chybovost teoretických hodnot E_∞ . Jak uvádí Simmons a kol. (1995), obecně je kvadratický průměr E_j s počáteční/ /modelovou chybou určen jako průměr rozdílu j -denní předpovědi f_j a analýzy a přes celou oblast a všechny j -denní předpovědi tj. $E_j = \sqrt{\overline{(f_j - a)^2}}$. Přepsáním kolem korespondující klimatické hodnoty c je $(E_j)^2 = \overline{((f_j - c) - (a - c))^2} = \overline{(f_j - c)^2} + \overline{(a - c)^2} - 2\overline{(f_j - c)(a - c)} = (A_j)^2 + (A_a)^2 - 2\overline{(f_j - c)(a - c)}$ (Simmons a kol., 1995). A_j je kvadratický průměr odchylky f_j od klimatické hodnoty a A_a je kvadratický průměr odchylky a od klimatického průměru. S růstem předpovědní doby se předpovědní a analyzované odchylky stávají nekorelované a $\overline{(f_j - c)(a - c)} \rightarrow 0$

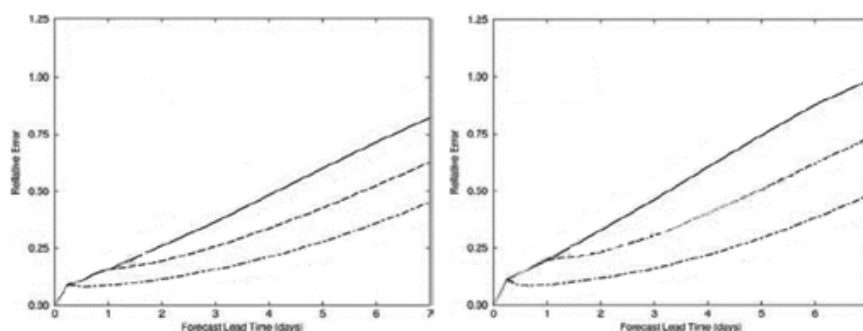
(Simmons a kol., 1995), to platí v případě, že není systematická korelace tj., že předpověď a analýza nesdílejí stejnou chybu, a nebo, že klimatický průměr není zatížen chybou. Tato systematická korelace může nastat v případě průměrování přes sezónu z důvodu společné odchylky jako např. povrchová teplota moří, a nebo, při určení klimatické hodnoty jako sezónního průměru z důvodu korelování $\overline{(f_j - c)(a - c)}$ ročním cyklem. Teoretická hodnota E_∞ , která je zobrazená v Obrázcích 1.3.10 a 1.3.11 a se kterou je dále počítáno je určena z ročních průměrů předpovědí a analýz a z denních klimatologií. Denní klimatologie jsou vypočteny tak, že ke každému dni je pro statistiku přidána okno dní. Je použita váha s maximem uprostřed okna a s postupným poklesem k nule (více v (Janoušek, 2011)). Pokud je takto vypočtená hodnota nekorelována je možno napsat (Simmons a kol., 1995):

$$E_\infty = E_j = \sqrt{(A_j)^2 + (A_a)^2}, \quad (1.3.12)$$

Pro verzi kvadratického průměru E_j s počáteční chybou je hodnota určena jako rozdíl mezi j -denní a $(j-1)$ -denní předpovědí na shodný den tj. $E_j = \sqrt{(f_j - f_{j-1})^2}$ (Simmons a kol., 1995). Přepsáním kolem korespondující klimatické hodnoty c je $(E_j)^2 = \overline{((f_j - c) - (f_{j-1} - c))^2} = \overline{(f_j - c)^2} + \overline{(f_{j-1} - c)^2} - 2\overline{(f_j - c)(f_{j-1} - c)} = (A_j)^2 + (A_{j-1})^2 - 2\overline{(f_j - c)(f_{j-1} - c)}$. A_j je kvadratický průměr odchylky f_j od klimatické hodnoty a A_{j-1} je kvadratický průměr odchylky f_{j-1} od klimatického průměru. S růstem předpovědní doby se odchylky předpovědí na totožný den stávají nekorelované a $\overline{(f_j - c)(f_{j-1} - c)} \rightarrow 0$ (Simmons a kol., 1995), to opět platí v případě, že není systematická korelace, která může nastat ze stejných důvodů jako bylo představeno výše. Teoretická hodnota E_∞ zobrazená v Obrázku 1.3.12 je určena z ročních průměrů předpovědí a z denních klimatologií (Janoušek, 2011), a pokud je nekorelována je možno napsat (Simmons a kol., 1995):

$$E_\infty = E_j = \sqrt{(A_j)^2 + (A_{j-1})^2}, \quad (1.3.13)$$

Porovnáním šedé křivky v Obrázku 1.3.12 (c) a tečkované v Obrázku 1.3.10 (c) dostáváme přibližnou rovnost hodnot (do 2 m), kromě let 1986, 1987, 1991, 1992 (porovnání je od roku 1986). Nerovnost z těchto let je v řádu jednotek procent. Jak



Obrázek 1.3.15: KP (tučně pro počáteční/modelovou chybu, čárkovaně pro počáteční chybu s hodnotami po dni, čerchovaně pro počáteční chybu s hodnotami po 6 h.), MEC, výška hladin 500 hPa, (20°- 90° S) (levý) a (20°- 90° J) (pravý), ze zimy 90/91, hodnoty jsou normalizované (převzato z (Bengtsson a kol., 2006)).

uvádí Simmons a kol. (1995) jsou tyto rozdíly dány nedostatečným popisem variability atmosféry pomocí modelu. Nerovnost z roků 86 a 87 je nejspíše dána architekturou modelů z té doby. Zajímavý je důvod, proč se v období 1991–92 nerovnost opět objeví. Jak uvádí Magnusson a Kallen (2013), důvodem byly problémy při zavádění semi-Lagrangeovského schéma. Dle představeného, teoretická hodnota E_{∞} definuje kromě výše zmiňovaných let dostatečný popis variability atmosféry pomocí modelu, což je především v dřívějších letech diskutabilních. Nedá se tedy na základě znalosti teoretické hodnoty E_{∞} určit zda KH_{PM}^D podhodnocuje odhad E_{∞} .

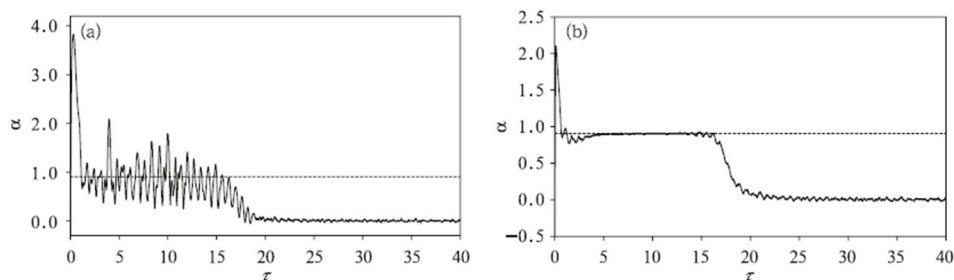
Významný vliv na hodnoty parametrů aproximace má počáteční růst a nyní je diskutováno, zda místo nevhodnosti KH_{PM}^D není nepřesnost ve výpočtu KP z modelových a analyzovaných dat. Savijarvi (1995) naznačil, že pro výpočet KP jsou analyzované hodnoty brány bez chyby, což je idealizovaný stav nezakládající se na realitě. Ve skutečnosti (jak bylo naznačeno v kapitole 1.2) existuje rozdíl mezi realitou a analýzou, který je patrný pro $E_{0,k}$ s nízkou hodnotou, pro velké hodnoty již není pro svou nízkou hodnotu postřehnutelný. Diference počítané z analyzovaných a modelových hodnot, které slouží k aproximaci hypotéz jsou poté nadhodnocené, což by nadhodnocení α mohlo vysvětlit, ale pouze pro variantu s počáteční/modelovou chybou, protože pro KP s počáteční chybou jsou hodnoty počítány z rozdílu předpovědí a analýza je použita jen u první hodnoty (rozdíl mezi analýzou a předpovědí z předešlého dne). Obrázek 1.3.15 z (Bengtsson a kol., 2006) ukazuje KP (tučně pro počáteční/modelovou chybu, čárkovaně pro počáteční chybu s hodnotami

po dni, čerchovaně pro počáteční chybu s hodnotami po 6 h.) pro NPM ECMWF, výška hladin 500 hPa, (20°- 90° S) a (20°- 90° J), ze zimy 90/91 a je z něj patrné, že hodnota v čase 12 h. (rozdíl mezi 12 h. a 6 h. předpovědí) pro spodní čerchované křivky (jak pro severní, tak pro jižní polokouli) je nižší, než hodnota v čase 6 h., která v sobě zahrnuje analyzovanou hodnotu (rozdíl mezi analýzou a 6 h. předpovědí). Vysvětlením by mohlo být právě nadhodnocení analyzované hodnoty. Tento fakt se však Magnussonem a kol. (2013) snažili snížit použitím analýzy z ERA-Interim. Otázkou zůstává, zda se jim jej podařilo eliminovat.

Možné vysvětlení pro nadhodnocené α a nenulové β pro KH_{PM}^D aproximující KP s počáteční chybou je možné, kromě nepřesnosti této aproximace, hledat i v metodě výpočtu KP. Standardní metoda představená Lorenzem (1982) vypočítá kvadratický průměr rozdílů (chyba předpovědi) přes všechny body sítě v daný den a přes všechny dny. Alternativy představili Trevisan (1993), Royer a kol. (1994), Ruiqiang a Jianping (2011) nebo Lorenz (1996), kteří argumentovali, že lepší než aritmetický nebo kvadratický průměr je průměr geometrický. Vycházeli z definice největšího globálního Ljapunova exponentu (Ruiqiang a kol., 2011):

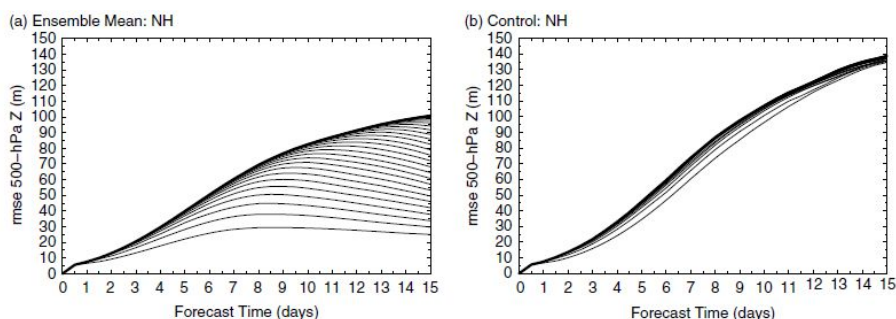
$$\lambda \approx (1/n) \sum_{j=1}^n \left((1/t) \left(\ln \left(\varepsilon_j(t) / \varepsilon_j(0) \right) \right) \right) = \\ = (1/t) \ln \left(\sqrt[n]{\varepsilon_1(t) \varepsilon_2(t) \dots \varepsilon_n(t)} / \sqrt[n]{\varepsilon_1(0) \varepsilon_2(0) \dots \varepsilon_n(0)} \right),$$

kde $\varepsilon_j(0)$ je počáteční chyba, $\varepsilon_j(t)$ je velikost chyby v čase t a je počítán průměr, přes n opakování. Pro totožné počáteční chyby $\varepsilon(0)$ je získáno z definice Ljapunova exponentu vyjádření exponenciálního růstu z geometrického průměru velikostí chyb $\sqrt[n]{\varepsilon_1(t) \varepsilon_2(t) \dots \varepsilon_n(t)} \approx \varepsilon(0) \exp(\lambda t)$. Geometrický průměr je standardně používán u Lorenzových modelů (Lorenz, 1996) a (Lorenz, 2005). Pro Lorenzův model konvekce (Lorenz, 1963), jež má tři proměnné X, Y, Z se pro určení KP nejprve vypočítá středová trajektorie. Zvolí se body na této trajektorii a ke každému bodu se přiřadí zvolený počet počátečních chyb. Poté je sledován časový vývoj z hodnot s počáteční chybou po danou dobu. V každém časovém kroku se určí Euklidovská vzdálenost ve stavovém prostoru mezi středovou a perturbovanou křivkou a určí se geometrický průměr těchto vzdáleností ve stejném čase přes všechny perturbované křivky (všechny chyby počátečních podmínek a zvolené počáteční body na středové trajektorii). Lorenzovy modely L96 (Lorenz, 1996) a L05 (Lorenz, 2005),



Obrázek 1.3.16: Vyjádření Lyapun. exponentu z KP pro Lorenzův model konvekce λ . (a) určené z aritmetického průměru. (b) určené z geometrického průměru. Tečková čára zachycuje největší Lyapunovův exponent. (převzato z (Ruiqiang a kol., 2011)).

kteří mají počet proměnných v řádu 10^1 až 10^2 , využívají pro určení KP podobné metody jako pro model konvekce s tím rozdílem, že určí aritmetický průměr kvadrátu rozdílu mezi perturbovanou a středovou křivkou přes všechny proměnné a poté geometrický průměr přes počet opakování vycházejících z různých počátečních bodů na středové trajektorii. výsledek je poté odmocněn. Jedná se tedy o kombinaci aritmetického (kvadratického) a geometrického průměru (podrobněji viz Kapitola 2.). Srovnání aritmetického a geometrického průměru pro Lorenzův model konvekce ukazuje Obrázek 1.3.16. Je z něj patrné, že vyjádření Lyapunova exponentu z KP určené z geometrického průměru zachycuje největší Lyapunovův exponent přesně, na rozdíl od vyjádření určené z aritmetického průměru. Nevhodná volba průměrování pro určení KP s počáteční chybou může dle představeného ovlivnit přesnost určení parametru α v KH_{PM}^D a mohla by vysvětlit zmiňované nadhodnocení tohoto parametru a nenulovost parametru β . Proti argumentuje Royer a kol. (1994), kteří uvádí, že na rozdíl od modelu konvekce nejsou KP určené z NPM citlivé na způsob průměrování.

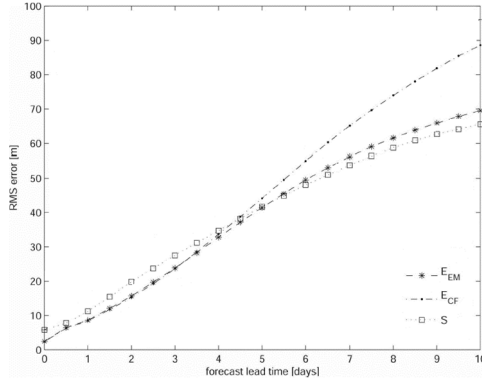


Obrázek 1.3.17: Kvadratický průměr rozdílů E výšek hladiny 500 hPa mezi j -denní a k -denní předpovědí ($j, k = 0, \dots, 10$) vytvořenou MEC pro severní polokouli a pro data ze zimy 2010–11. (a) předpověď ansámblového průměru. (b) předpověď kontrolní předpovědi. (převzato z (Froude a kol., 2013)).

1.3.3 Ansámblová předpověď

KP je též počítána pro ansámblovou předpověď. Obrázek 1.3.17 ukazuje kvadratický průměr rozdílů E výšek hladiny 500 hPa mezi j -denní a k -denní předpovědí ($j, k = 0, \dots, 10$) vytvořenou modelem ECMWF pro severní polokouli a pro data ze zimy 2010–11. Část (a) ukazuje předpověď ansámblového průměru a část (b) ukazuje předpověď kontrolní předpovědi (Froude a kol., 2013). Je patrné a očekávatelné, že chyba předpovědi ansámblového průměru je menší než chyba kontrolní předpovědi. Co není očekávatelné je výrazně nižší růst KP určené jen počáteční chybou (tenké křivky) pro předpověď ansámblového průměru, kde je po 10. dni patrný i pokles. Tento průběh odporuje teoretickému předpokladu monotónního růstu chyby do dosažení limitní hodnoty. Možné vysvětlení nabízí Froude, Bengtsson a Hodges (2013). Tvrdí, že pokles křivky značí ztrátu předpověditelnosti ansámblového průměru. Pro vysvětlení předpokládá Froude a kol. (2013) perfektní model a nekonečný počet členů ansámblu a dále uvádí, že po nějaké době integrace je předpověď pomocí ansámblového průměru identická s klimatickou hodnotou. Pokud je známa klimatická hodnota, pak daná předpověď nemá žádnou konkrétní vypovídající hodnotu (Froude a kol., 2013). Z výše zmiňovaného plyne, že předpověď pomocí ansámblového průměru prodlouží dobu předpověditelnosti, ale zvýší „vyhlazení“ pole předpovědi, což je vyjádřeno poklesem tenké křivky v Obrázku 1.3.17 (a).

Kromě určování KP u deterministické (kontrolní) předpovědi a u ansámblového průměru je též KP počítána pro směrodatnou odchylku mezi členy ansámblu (rozptyl ansámblu). Bengtsson, Magnusson a Kallen (2008) nebo Žagar, Buizza a Tribbia (2015) uvádějí, že KP určená ze střední kvadratické odchylky ansámblového průměru by teoreticky měla být identická s KP určenou směrodatnou odchylkou mezi členy ansámblu. Teoreticky to znamená, že křivky se rozcházejí v případě, kdy model a atmosféra nemají stejnou variabilitu (Bengtsson a kol., 2008). Obrázek 1.3.18 ukazuje KP ansámblového průměru, kontrolní předpovědi a rozptylu ansámblu pro MEC, výška hladin 500 hPa ze zimy 04/05. Z porovnání ansámblového průměru E_{EM} a rozptylu S je patrný blízký, avšak ne identický vývoj KP. Podobnost je však dostačující k tomu, aby byl rozptyl ansámblu v současné době používán v člancích souvisejících s prediktabilitou (např. (Žagar a kol., 2015) nebo (Žagar a kol., 2017)) s argumentací výhodnosti vzhledem k množství realizací každý den.



Obrázek 1.3.18: Střední kvadratická chyba ansámblového průměru (E_{EM}), kontrolní předpovědi (E_{CF}) a ansámblový rozptyl (S) vyvíjející se v čase předpovědi (KP) pro MEC, výška hladin 500 hPa ze zimy 04/05 (převzato z (Bengtsson a kol, 2008)).

Žagar a kol. (2017) ukazuje, na KP určené rozptylem ansámblu, jiný způsob aproximace dat. Vychází z KH_{PM}^D . (rovnice (1.3.11)). Nepracuje s diferenciální rovnicí, která je prokládána diferencí dat (viz výše), ale aproximuje přímo KP řešením KH_{PM}^D (tuto variantu označujeme KH_{PM}^{KP}) ve tvaru:

$$E(t) = A \tanh(at + b) + B, \quad (1.3.14)$$

kde A, B, a, b jsou parametry. Žagar a kol. (2017) dále vysvětluje význam parametrů. Časová derivace $E(t)$ jako funkce E je:

$$\frac{dE}{dt} = s(A + B - E)(A - B + E), \quad (1.3.15)$$

kde $s = a/A$. Za předpokladu $A, B, a, b \in \mathbb{R}$ a $A, a > 0$ platí $\max_{t \in \mathbb{R}} E(t) := E_{\max} = A + B$

a $\min_{t \in \mathbb{R}} E(t) := E_{\min} = -A + B$ a rovnici (1.3.15) lze přepsat:

$$\frac{dE}{dt} = s(E_{\max} - E)(E - E_{\min}). \quad (1.3.16)$$

Počáteční podmínka $E(0) := E_0 = A \tanh(b) + B \geq 0$ určuje parametr:

$$b = \arctan h\left(\frac{(2E_0 - E_{\min} - E_{\max})}{(E_{\max} - E_{\min})}\right),$$

dále $A = 1/2(E_{\max} - E_{\min})$, $B = 1/2(E_{\max} + E_{\min})$ a $a = sA$. Řešení rovnice (1.3.11) je:

$$E(t) = E_{\max} - \frac{(E_{\max} + \beta/\alpha)}{1 - (E_0 + \beta/\alpha) \exp[(\alpha + \beta/E_{\max})t] / (E_0 - E_{\max})}. \quad (1.3.17)$$

Využitím $\tanh(x) = 2/(1 + \exp(-2x)) - 1$ přejde rovnice (1.3.17) na:

$$E(t) = 1/2(E_{\max} - \beta/\alpha) + \quad (1.3.18)$$

$$+ 1/2(E_{\max} + \beta/\alpha) \tanh 1/2 \left[\ln((E_0 + \beta/\alpha)/(E_{\max} - E_0)) + (\alpha + \beta/E_{\max})t \right].$$

Porovnáním rovnic (1.3.14) a (1.3.18) je patrné že $A = 1/2(E_{\max} + \beta/\alpha)$, $B = 1/2(E_{\max} - \beta/\alpha)$, $a = 1/2(\alpha + \beta/E_{\max})$ a $b = 1/2 \ln((E_0 + \beta/\alpha)/(E_{\max} - E_0))$. Můžeme odvodit následující vztahy:

$$\alpha = \frac{a}{A} E_{\max}, \quad \beta = -\frac{a}{A} E_{\max} E_{\min}. \quad (1.3.19)$$

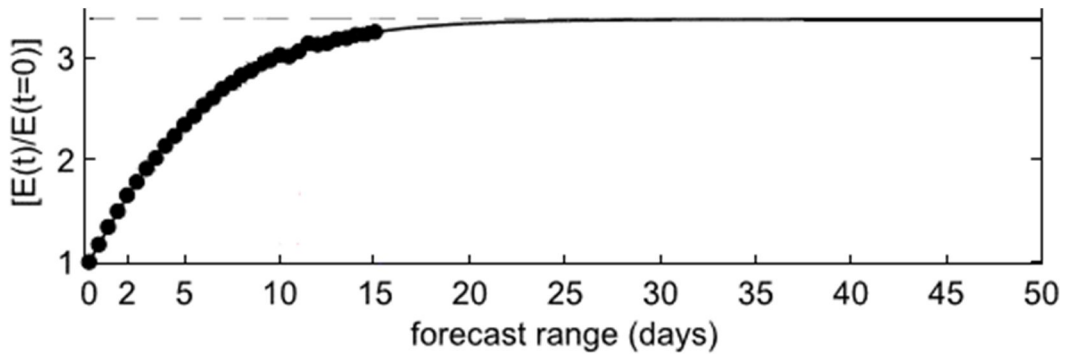
Pro KH_{PP}^D (rovnice (1.3.3)) je $\beta = 0$. Parametry rovnice (1.3.14) poté jsou $A = E_{\max}/2$, $B = E_{\max}/2$, $a = \alpha/2$ a $b = 1/2 \ln(E_0/(E_{\max} - E_0))$. (tuto variantu označujeme KH_{PP}^{KP}). Z parametru a je patrné, že $\alpha = 2a$.

Přesnost aproximace KH_{PM}^{KP} (rovnice (1.3.14)) je testována z dat 15-denní předpovědi NPM ECMWF v období 14 dní v květnu 2015 s dostupností dat každých 12 hodin (Žagar a kol., 2015). Data jsou vertikálně rozložena na $M = 50$ globálních modelů mělké vody. Horizontální pohyb je projektován do modelů mělké vody a je reprezentován Houghovými funkcemi (více viz (Žagar a kol., 2015)). Je vybráno $K = 120$ zonálních vlnových čísel a $N = 180$ meridionálních módů. Pole geopotenciální výšky, povrchového tlaku a větrů je reprezentováno komplexními koeficienty $\chi_n^k(m)$. Kvadrát ansámblového rozptylu (směrodatné odchylky) v modálním prostoru $\sum_k \sum_n \sum_m \left[\sum_n^k(m) \right]^2$ je roven rozptylu dvou složek větru a geopotenciální výšce ve fyzikálním prostoru (Žagar a kol., 2015):

$$\sum_k \sum_n \sum_m \left[\sum_n^k(m) \right]^2 =$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_m \frac{1}{P-1} \sum_{p=1}^P \left(u_p^2(\lambda_i, \varphi_j, m) + v_p^2(\lambda_i, \varphi_j, m) + \frac{g}{D_m} h_p^2(\lambda_i, \varphi_j, m) \right),$$

kde u_p , v_p a h_p jsou odchylky p -tých členů ansámblu od ansámblového průměru pro složky větru a geopotenciální výšku v bodě $(\lambda_i, \varphi_j, m)$, i je zonální index, j je meridionální index a m určuje m -tý model mělké vody s hloubkou D_m . g je tíhové zrychlení. Obrázek 1.3.19 zobrazuje normovanou KP $E(t)/E(t=0)$ pro $\sqrt{\sum_k \sum_n \sum_m \left[\sum_n^k(m) \right]^2}$ (tečky) a aproximaci rovnici (1.3.14) (plná křivka). Žagar a kol. (2017) uvádí, že aproximace pomocí KH_{PM}^{KP} rovnice (1.3.14) má střední kvadratickou chybu odchylky od dat řádu $10^{-3} - 10^{-5}$ zatímco aproximace KH_{PM}^{KP} (rovnice (1.3.11)) je zatížena střední kvadratickou chybou řádu $10^0 - 10^{-2}$.



Obrázek 1.3.19: Normovaná KP $E(t)/E(t=0)$ pro $\sqrt{\sum_k \sum_n \sum_m \left[\sum_n^k(m) \right]^2}$ (více viz text) z 15-denní předpovědi MEC v období 14 dní v květnu 2015 s dostupností dat každých 12 hodin. Hodnoty jsou označeny tečkami. Křivkou je označena aproximace KH_{PM}^{KP} (rovnice (1.3.14)) (převzato z (Žagar a kol., 2017)).

2. Praktická část

2.1 Nastavení experimentu

Tato část představí metody výpočtu KP. Jak pro výstupy z Lorenzova modelu L05, tak pro data z modelu ECMWF.

2.1.1 Model L05

Použit je Lorenzův Model L05 představen v Kapitole 1.1. (Lorenz, 2005). Připomeňme tvar řídicích rovnic:

$$dX_n/dt = [X, X]_{L,n} - X_n + F,$$

kde

$$[X, X]_{L,n} = \sum_{j=-J}^J ' \sum_{i=-J}^J ' (-X_{n-2L-i} X_{n-L-j} + X_{n-L+j-i} X_{n+L+j}) / L^2,$$

$n = 1, \dots, N$, X_{n-2} , X_{n-1} , X_n , X_{n+1} jsou nespecifikované meteorologické veličiny rovnoměrně rozmístěné podél rovnoběžky, F je konstanta reprezentující vnější sílu a t je čas. $N/L = 30$, $F = 15$ a časová jednotka je 5 dní. Počet proměnných N je zvolen: $N = 30; 60; 90; 120; 150; 360$. Z poměru N/L plyne, že $L = 1; 2; 3; 4; 5; 12$. Pro sudá L jsou hodnoty $J = 1; 2; 6$ a pro lichá $J = 0; 1; 2$. Důvod volby maximální hodnoty $N = 360$ je ten, že hodnoty největšího Ljapunovova exponentu se pro $N \geq 360$ liší jen minimálně. Pro $N = 360$ a $N = 960$ se liší až na úrovni třetího desetinného místa a systémy jsou pro naše účely skoro identické, což potvrzuje i Lorenz (2005). Lyapunovovy exponenty jsou vypočteny metodou numerické kalkulace (Spratt, 2006) a jejich hodnoty jsou zobrazeny v Tabulce 2.1.1.

Výpočet KP (Lorenz, 2005) započne zvolením náhodných hodnot X_n , $n = 1, \dots, N$. Runge-Kuttovou metodou 4. řádu s časovým krokem $\Delta t = 0,05$ (6 hodin) se integruje 14 400 časových kroků (10 let) a výsledné hodnoty $X_{0,n}$ jsou počátečními pro „skutečné“ hodnoty X_n . Počáteční „pozorované“ hodnoty vzniknou přičtením počáteční chyby $X'_{0,n} = X_{0,n} + e_{0,n}$. $e_{0,n}$ je volena náhodně z normálního rozdělení $ND(\mu; \sigma)$ se směrodatnými odchylkami σ , jejichž velikosti jsou určeny z porovnání s MEC a se střední hodnotou $\mu = 0$. Z $X_{0,n}$ a $X'_{0,n}$ integrujeme rovnice L05 (1.1.6) po 37.5 dní ($K = 150$ časových kroků). Pokud je zájem zaměřen na růst počáteční

chyby, tak je volen pro X_n a X'_n stejný počet proměnných N . Pokud je zaměřen na růst počáteční/modelové chyby, pak je brán jako perfektní model soustava rovnic s $N_0 = 360$. V tomto případě jsou X_n určeny pomocí $X_{0,n}$ a rovnicemi (1.1.6) s N_0 a X'_n pomocí $X'_{0,n}$ a (1.1.6) s $N = 30; 60; 90; 120; 150$. Velikost modelové chyby je korigována rozdílem N pro X_n a X'_n . Např. pro $N = 120$ jsou porovnány hodnoty X'_n s X_n v každém třetím bodě N_0 .

V každém časovém kroku Δt numerické integrace získáme N hodnot „skutečných“, N „pozorovaných“ a vypočteme rozdíl, který určuje velikost chyby v daném čase. Varianta s počáteční chybou je definována (Lorenz, 2005) jako:

$$e_n(k \cdot \Delta t) = X'_{k,n} - X_{k,n}, \quad (2.1.1)$$

$k = 1, \dots, K$, $n = 1, \dots, N$. Varianta s počáteční/modelovou chybou je definována (Lorenz, 2005) jako:

$$\varepsilon_n(k \cdot \Delta t) = X'_{k,n'} - X_{k,n'}, \quad (2.1.2)$$

$k = 1, \dots, K$, $n = 1, \dots, N$ (kromě N_0). $n' = 1, \dots, N$ (kromě N_0) je poloha hodnoty $X_{k,n'}$ pro $N = 360$, kde $n' = n \cdot N_0 / N$ pro $N = 30; 60; 90; 120; 150$. Zájmem je určení průměrné chyby, a to jak přes všechny hodnoty proměnných, tak přes počet opakování $M = 400$ (počet opakování kopíruje roční průměr denních dat NPM). Nové hodnoty e^2 a ε^2 jsou posledními „skutečnými“ hodnotami použitými k výpočtu předešlého opakování e^2 a ε^2 . „Pozorované“ hodnoty vzniknou stejným způsobem, jako je uvedeno výše, tj. přičtením počáteční chyby náhodně zvolené ze stejného normálního rozdělení, které bylo použito u předešlého opakování (Lorenz, 1996). Pro každé k tak získáme M hodnot. Konečné použité velikosti předpovědní chyby v daném čase jsou průměry přes všechny proměnné a počty opakování v tomtéž čase a při volbě aritmetického průměru přes M opakování je možné souhrnně psát:

$$E_a^{L05}(k \cdot \Delta t) = \sqrt{\frac{1}{M \cdot N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N e_{n,m}^2(k \cdot \Delta t)}, \quad (2.1.3)$$

$$E_a^{L05}(k \cdot \Delta t) = \sqrt{\frac{1}{M \cdot N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \varepsilon_{n,m}^2(k \cdot \Delta t)}. \quad (2.1.4)$$

Při volbě geometrického průměru přes M přejdou průměry na tvar:

$$E_g^{L05}(k \cdot \Delta t) = 2^M \sqrt{\prod_{m=1}^M \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e_{n,m}^2(k \cdot \Delta t) \right)}, \quad (2.1.5)$$

$$E_g^{L05}(k \cdot \Delta t) = 2^M \sqrt{\prod_{m=1}^M \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varepsilon_{n,m}^2(k \cdot \Delta t) \right)}. \quad (2.1.6)$$

Pro porovnání s MEC jsou výsledné průměrné hodnoty normovány limitními hodnotami KP E_∞^{L05} a E_∞^{L05} , které jsou vypočteny podobně jako teoretická limitní hodnota E_∞ představená v kapitole 1.3.2. (Simmons a kol., 1995) s tvarem:

$$E_\infty^{L05} = \sqrt{\overline{(X'_{k,n,m} - c)^2} + \overline{(X_{k,n,m} - c)^2}}, \quad (2.1.7)$$

$$E_\infty^{L05} = \sqrt{\overline{(X'_{k,n,m} - c)^2} + \overline{(X_{k,n',m} - c)^2}}, \quad (2.1.8)$$

kde X , X' , k , n , m , n' jsou stejné jako výše, $\bar{}$ značí průměr přes všechny k , n , m popř. n' a c je průměrná hodnota X popř. X' přes všechny k , n , m popř. n' , která vždy vychází z X nebo X' od kterých je odečítána. E_∞^{L05} a E_∞^{L05} byly počítány pro všechny zvolené σ (upřesněné dále), N a pro aritmetický a geometrický průměr, protože pro různá σ a metody průměru se hodnoty liší na úrovni druhého a vyššího desetinného místa, tak je počítáno s E_∞^{L05} a E_∞^{L05} pouze jako s funkcemi N . Výsledné hodnoty byly úspěšně překontrolovány E_a^{L05} , E_a^{L05} , E_g^{L05} , E_g^{L05} přes $k=120$ až 150 a zobrazuje je Tabulka 2.1.1.

N	λ^{L05}	E_∞^{L05}	E_∞^{L05}
30	0,70	8,5	8,3
60	0,29	8,0	8,1
90	0,35	8,2	8,2
120	0,32	8,2	8,2
150	0,34	8,2	8,2
360	0,34		

Tabulka 2.1.1: Hodnoty Ljapunova exponentu λ a limitní hodnoty KP E_∞^{L05} a E_∞^{L05} pro vybrané počty proměnných modelu L05.

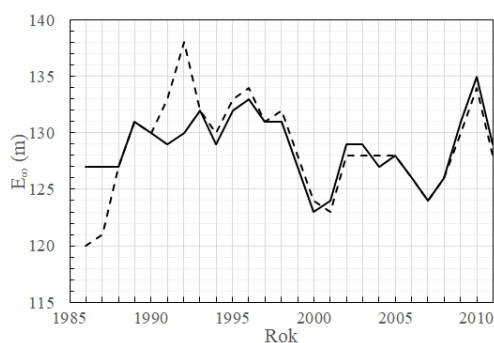
Počáteční vývoj KP modelu L05 prochází nejprve poklesem. Růst je pozorován až po prvním iteračním kroku (po 6 hodinách) a do úrovně počáteční chyby se KP dostane v druhém iteračním kroku (po 12 hodinách) Tato skutečnost je platná při variantě s počáteční chybou (E^{L05}) pro všechna zvolená N a σ . Při variantě s počáteční/modelovou chybou (E^{L05}) nebyl pokles pozorován pro $N = 30; 60$ při všech σ . Obrázek 1.3.15 prezentuje pokles KP MEC varianty rozdílu předpovědi 6 hodin (počáteční chyba). Hodnoty MEC se kterými je počítáno (analýza-předpověď, 1-denní rozdíl předpovědi) neukazují pokles. Možné vysvětlení u modelu L05 může být skutečnost, že simulovaná počáteční chyba posune počáteční stav Lorenzova modelu mimo atraktor. V prvním stádiu předpovědi převládne tendence řešení dostat se na atraktor, takže se přiblíží k referenčnímu řešení. Chaotická dynamika na atraktoru převládne až později, takže se obě řešení začnou opět vzdalovat. Toto vysvětlení podporuje jak růst pro variantu s počáteční/modelovou pro $N = 30; 60$, kde je dominantní modelová chyba a ta převládne již od počátku vývoje KP, tak skutečnost, že pro větší počáteční chybu je relativní pokles větší. Existuje tedy pokles jak u modelu L05 a tak pro určité nastavení u MEC. Prezentovaná data MEC však počáteční pokles nezaznamenávají. To značí, že rozdílnost chování modelů v počáteční fázi vývoje KP nemusí být dán nestejným popisem KP modely, ale rozdílností časového kroku pro variantu s počáteční chybou a velikostí modelové chyby pro variantu s počáteční/modelovou chybou. S KP MEC byla porovnáována jak verze modelu L05 s odfiltrováním prvních 12 hodin, tak verze neodfiltrovaná. Ukázalo se, že dynamiku KP MEC lépe popisuje varianta s odfiltrováním prvních 12 hodin (kromě verze s počáteční/modelovou chybou pro $N = 30; 60$) a nadále prezentovaná data jsou prezentována s touto úpravou.

2.1.2 Model ECMWF

Data jsou získána z ECMWF (Magnusson, 2018). Jedná se o hodnoty vypočtené z výšek hladin 500 hPa. Pro určení KP s počáteční/modelovou chybou (E^{MEC}) je obdrženo pro každý den z období 1. ledna 1986 až 31. prosince 2011 dvacet jedna středních kvadratických průměrů přes severní polokouli (20° - 90° S) (metody výpočtu jsou upřesněny v Teoretické části). Průměrované hodnoty jsou rozdíly předpovědi a analýzy na daný den. Předpovědi jsou z před 12 hodin až z před 10 dní

po 12 hodinách (20 průměrů). Zatímco předpovědi jsou odečteny z modelů platných v dané době, analýza je odečtena z ERA-Interim. Důvodem je dle Magnussona a kol. (2013) snížení korelace mezi chybami analýzy a předpovědi. Součástí dat je i rozdíl mezi analýzou odečtenou v dané době a odečtenou z ERA-Interim. Tyto rozdíly jsou brány jako hodnoty počáteční chyby. K určení KP s počáteční chybou (E^{MEC}) je obdrženo pro každý den z období 1. ledna 1986 až 31. prosince 2011 dvacet sedm středních kvadratických průměrů přes severní polokouli (20° - 90° S). Průměrované hodnoty jsou rozdíly mezi předpověďmi na daný den s jednodenním rozdílem. Jedná se o rozdíly (udáváno v hodinách): 0-24, 6-30, 12-36, 18-42, 24-48, 30-54, 36-60, 42-66, 48-72, 54-78, 60-84, 66-90, 72-96, 78-102, 84-108, 90-114, 96-120, 108-132, 120-144, 132-156, 144-168, 156-180, 168-192, 180-204, 192-216, 204-228, 216-240. Prvních 17 rozdílů je s časovým krokem vývoje chyby po šesti hodinách. Zbýlých 10 poté s krokem po dvanácti hodinách. Hodnoty pro určení KP jsou vypočteny jako roční průměry z denních dat. Je použito stejné značení průměrů jako pro model L05 a to: $E_a^{MEC}(t)$ pro aritmetický průměr z dat s počáteční chybou, $E_a^{MEC}(t)$ pro aritmetický průměr z dat s počáteční/modelovou chybou, $E_g^{MEC}(t)$ pro geometrický průměr, počáteční chyba a $E_g^{MEC}(t)$ pro geometrický průměr, počáteční/modelová chyba.

Limitní hodnoty E_∞^{MEC} a E_∞^{MEC} jsou taktéž získány z MEC, severní polokoule, hladina 500 hPa, roční průměr (Magnusson, 2018) a jsou určeny metodou popsanou v kapitole 1.3.2 (Obrázek 2.1.1). Pro obě varianty jsou limitní hodnoty blízké (rozdíl do 1 m), kromě let 1986, 1987, 1991, 1992 kde rozdíl $E_\infty^{MEC} - E_\infty^{MEC}$ je postupně 9 m, 6 m, -4 m a -8 m. Důvody jsou diskutovány v kapitole 1.3.2.



Obrázek 2.1.1: Limitní hodnoty E_∞^{MEC} (čárkovaně) a E_∞^{MEC} (plně) MEC, severní polokoule, hladina 500 hPa a roční průměry.

2.2 Porovnání křivek prediktability modelu L05 a modelu ECMWF

V této sekci jsou porovnávány normované KP (aritmetický a geometrický průměr z ročních dat) modelu L05 a MEC. Na základě normovaných počátečních podmínek MEC určených z ročních průměrů jsou určeny počáteční podmínky modelu L05. Z nich jsou vypočtené KP, a to jak pro variantu s počáteční chybou, tak pro variantu s počáteční/modelovou chybou pro L05 s $N = 30; 60; 90; 120; 150$. Na základě porovnání je pro MEC (roční průměr) určena nejbližší varianta (počet N) modelu L05. Výsledky jsou diskutovány.

2.2.1 Varianta s počáteční chybou

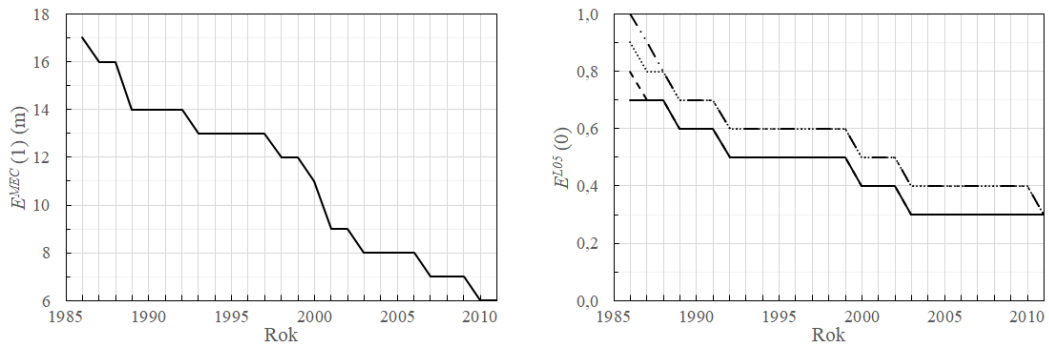
Prvním krokem je určení počátečních hodnot $E^{L05}(0)$ neboli směrodatných odchylek σ ($E^{L05}(0) \approx \sigma$), pro které $E_{Norm}^{L05}(1) = E_{Norm}^{MEC}(1)$, kde 1 značí v prvním dni. Důvodem je skutečnost, že hodnoty KP MEC jsou počítány od prvního dne (rozdíl mezi analýzou a jednodenní předpovědí). $E^{MEC}(1)$ (roční průměr, aritmetický průměr \approx geometrický průměr, 1986–2011) a $E^{L05}(0)$ pro $N = (60; 90; 120; 150)$ (varianta s počáteční chybou, aritmetický průměr \approx geometrický průměr) ukazuje Obrázek 2.2.1. $E^{L05,30}(0)$ nejsou zobrazeny, protože KP pro $N=30$ není pro porovnání vhodná z důvodů velké rozdílnosti vývoje s KP MEC. Kromě roků 1986, 87 a 2011 jsou v každém roce $E^{L05}(0)$ pro $N=60; 90$ o 0,1 menší než pro $N=120; 150$. Přehlednější souhrn Obrázku 2.2.1 je prezentován v Tabulce 2.2.1 a je z něj patrné, že pro $N=60; 90$ jsou dominantní (pokrývají nejdelší shodu s KP MEC) počáteční hodnoty $E^{L05}(0) = 0,3; 0,5$ a pro $N=120; 150$ to jsou $E^{L05}(0) = 0,4; 0,6$.

N	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
60				86-88	89-91	92-99	00-02	03-11
90			86	87-88	89-91	92-99	00-02	03-11
120		86	87-88	89-91	92-99	00-02	03-10	11
150	86	87	88	89-91	92-99	00-02	03-10	11

Tabulka 2.2.1: Shrnutí Obrázku 2.2.1 (b).

a)

b)



Obrázek 2.2.1: (a) Rozdíl analýzy a 1-denní předpovědi $E^{MEC}(1)$ (roční průměr, aritmetický průměr \approx geometrický průměr, 1986–2011). (b) Počáteční hodnoty modelu L05 $E^{L05}(0)$ pro $N = 60$ (plně), $N = 90$ (čárkovaně), $N = 120$ (tečkovaně) a $N = 150$ (čerchovaně) (varianta s počáteční chybou, aritmetický průměr \approx geometrický průměr), jejichž vývoj má v prvním dni vývoje $E_{Norm}^{L05}(1)$ stejnou normovanou hodnotu jako $E_{Norm}^{ECMWF}(1)$.

Obrázek 2.2.3 porovnává normované křivky prediktability $E_{a, Norm}$ vypočtené z aritmetického průměru. Červeně pro MEC. Černě pro L05. Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$. Některé roky nejsou z důvodu podobnosti s průběhem v jiném roce zobrazeny, a to vždy s posledním před vynecháním roční posloupnosti. Tabulka 2.2.2 shrnuje výsledné přiřazení podobných KP MEC a L05. První sloupec ukazuje počet proměnných N modelu L05. Označení “bez“ znamená bez podobnosti křivek. Druhý sloupec ukazuje roky, kdy normovaná KP vypočtená jako roční aritmetický průměr je podobná s normovanou KP modelu L05 s N v daném řádku. Třetí sloupec ukazuje procentní zastoupení počtu let, kdy KP MEC je podobná KP L05 s daným N . Z této tabulky je patrné, že v letech 1986-1988 se KP nepotkávají, protože KP modelu L05 pro všechna N roste rychleji. V období 1989-2011 existuje vždy dostatečná shoda s KP modelu L05 o nějakém N . Nejčastější shoda je pro $N = 90$ a to ve 42 % případů, dále následuje $N = 120$ s 25 %. Pro $N = 60$ a $N = 150$ je shoda z 11 % . Není patrný trend vývoje N s nárůstem let.

N	roky	%
bez	86-88	11
60	89-91	11
90	92-94; 99-01; 08-11	42
120	98; 02-07;	25
150	95-97	11

Tabulka 2.2.2: Přiřazení KP MEC ke KP L05. První sloupec: počet proměnných N modelu L05. Označení “bez“ znamená bez podobnosti křivek. Druhý sloupec: roky, kdy normovaná KP vypočtená jako roční aritmetický průměr je podobná s normovanou KP modelu L05 s N v daném řádku. Třetí sloupec: procentní zastoupení počtu let, kdy KP NPM je podobná KP L05 s daným N .

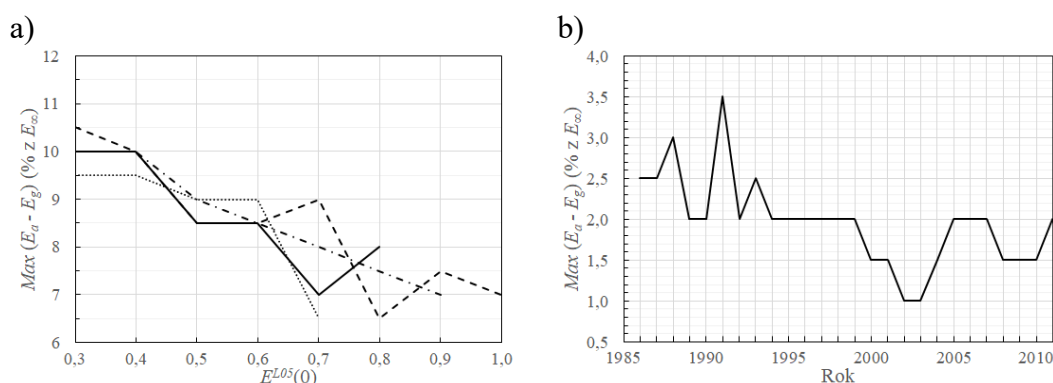
Obrázek 2.2.4 porovnává normované křivky prediktability $E_{g, Norm}$ vypočtené z geometrického průměru. Červeně pro MEC. Černě pro L05. Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$. Jsou vynechány stejné roky a ze stejného důvodu jako u Obrázku 2.2.3.

Tabulka 2.2.3 shrnuje výsledné přiřazení podobných KP MEC a L05. První sloupec ukazuje počet proměnných N modelu L05 nebo skutečnost, že normovaná KP modelu L05 pro všechna N roste rychleji ($L05 > MEC$) nebo pomaleji ($L05 < MEC$) než normovaná KP MEC. Druhý sloupec ukazuje roky, kdy dané skutečnosti nastanou. Třetí sloupec ukazuje procentní zastoupení počtu let, kdy KP MEC roste rychleji, pomaleji nebo je podobná KP L05 s daným N . Z tabulky je patrné, že varianta s geometrickým průměrem shodu KP přináší jen minimálně. Přesněji pouze z 11 % pro variantu modelu L05 s $N = 90$. Nejčastější je rychlejší růst KP MEC a to ze 78 %. Pomalejší růst KP MEC nastane z 11 %. Je patrný trend od pomalejšího růstu KP pro roky 1986-1988, přes shodu s normovanou KP modelu L05 s $N = 90$ v období 1989-1991 až po rychlejší růst KP MEC v období 1992-2011.

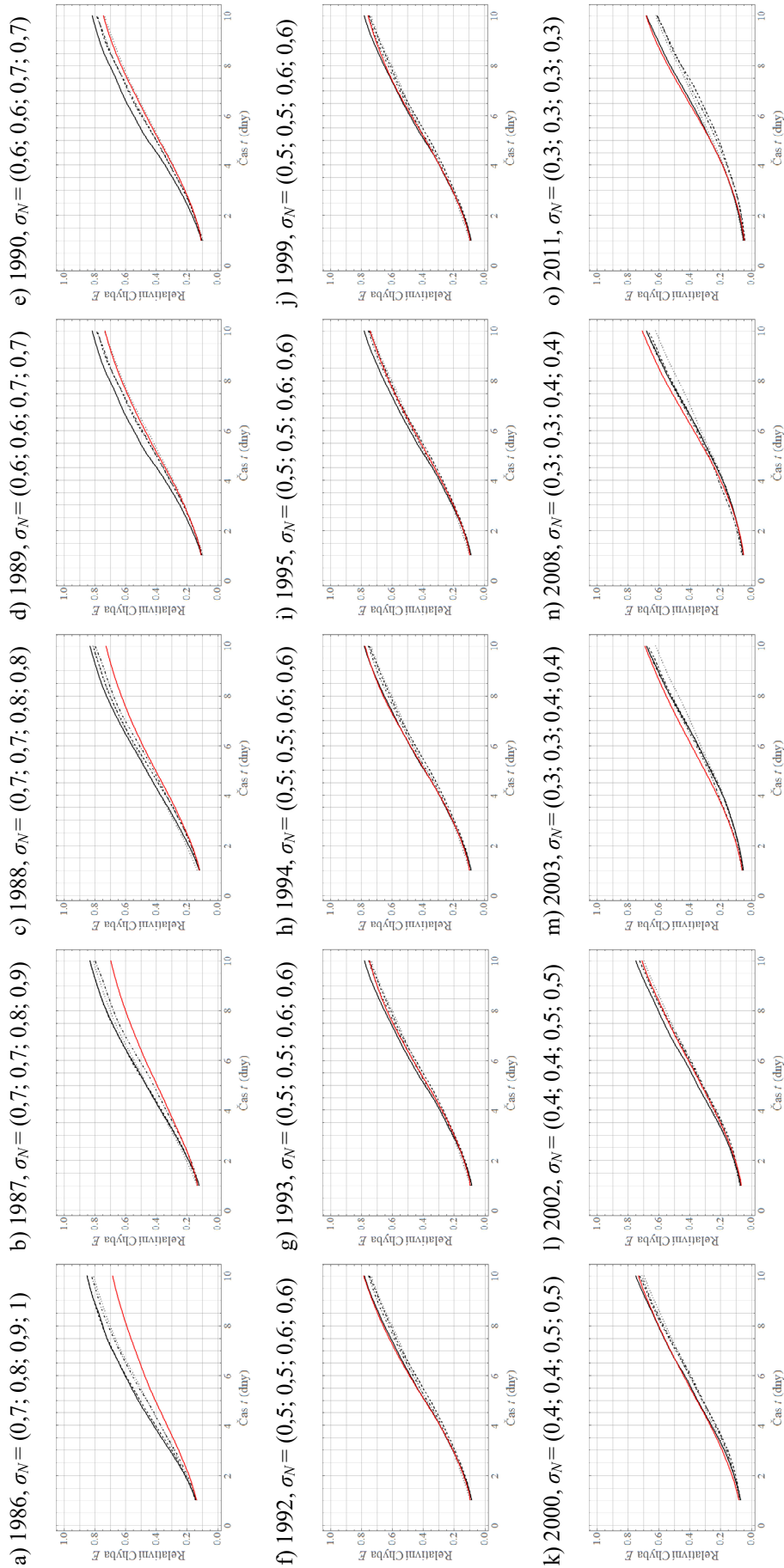
N	roky	%
L05 > ECMWF	86-88	11
90	89-91	11
L05 < ECMWF	92-11	78

Tabulka 2.2.3: Porovnání KP MEC L05. První sloupec: počet proměnných N modelu L05 nebo ukázání, u kterého modelu KP roste rychleji nebo pomaleji (>,<). Druhý sloupec: roky výskytu. Třetí sloupec: četnost výskytu.

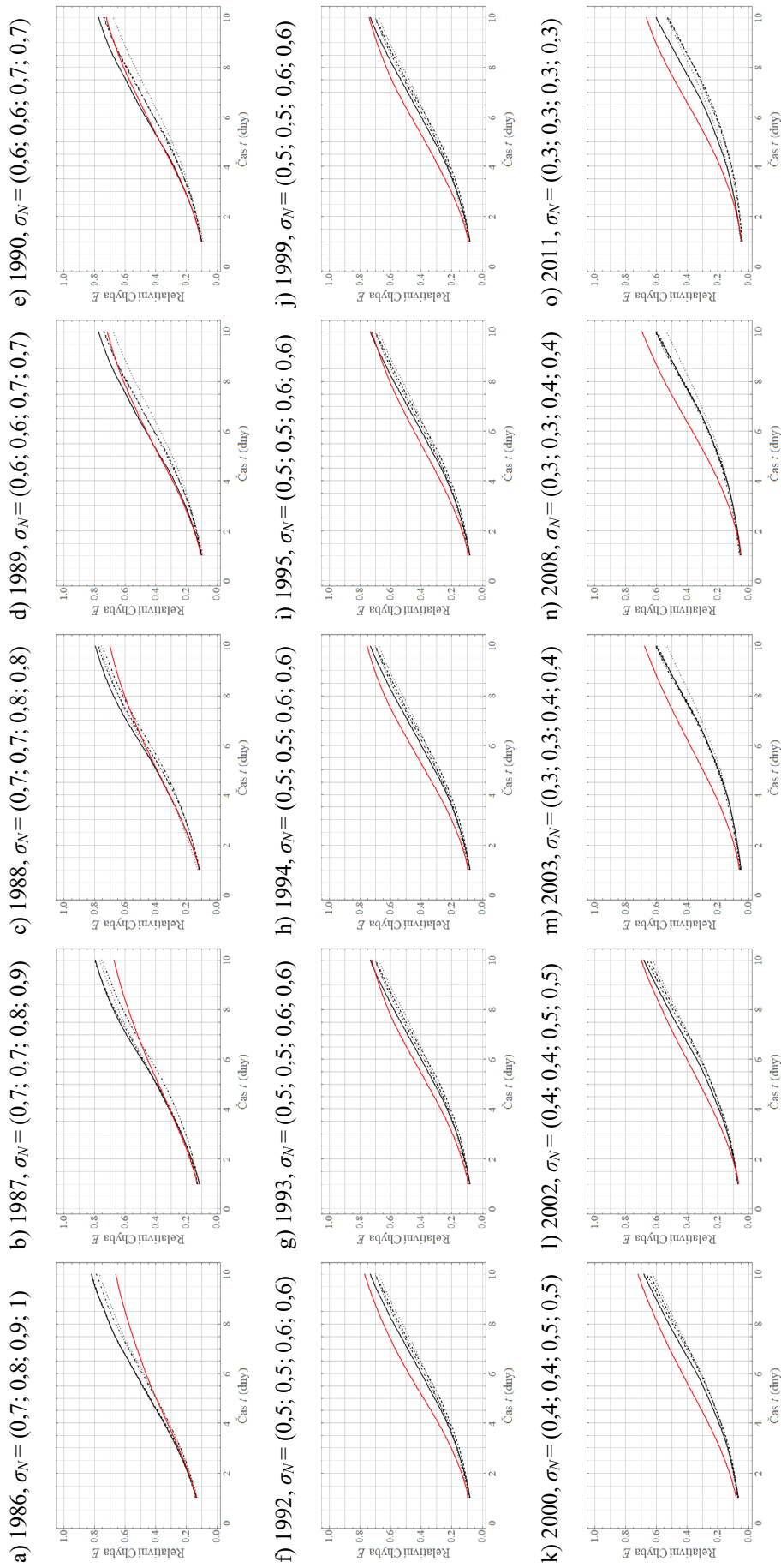
Z výše představeného je patrný nepoměr v rozdílu mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro KP modelu L05 a MEC. Obrázek 2.2.5 porovná rozdíl normovaných křivek prediktability určených aritmetickým a geometrickým průměrem $E_{a, Norm} - E_{g, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl předpovědí s jednodenním rozdílem, roční průměr). Černě pro L05 (varianta s počáteční chybou). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$. Jsou vynechány stejné roky a ze stejného důvodu jako u Obrázku 2.2.3. Obrázek 2.2.2 ukazuje maximální rozdíl mezi aritmetickým a geometrickým průměrem $Max(E_a - E_g)$ v % z E_∞ . (a) pro všechna použitá N a $E^{L05}(0)$ modelu L05. (b) pro MEC. Z Obrázků 2.2.2. a 2.2.5 je patrný jednak rozdílný průběh rozdílů aritmetického a geometrického průměru v čase pro model L05 a MEC. Zatímco pro model L05 křivka roste do maximální hodnoty, která v závislosti na N a $E^{L05}(0)$ nastane mezi pátým a devátým dnem a poté s časem klesá, tak pro MEC je křivka rozdílů průměrů ve všech letech rostoucí, a proto maximum nastává desátý den. Dalším rozdílem mezi modely je hodnota maximálního rozdíl mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Zatímco pro model L05 je hodnota maxima v závislosti na N a $E^{L05}(0)$ mezi 6,5 a 10,5 % z E_∞ , tak pro MEC je hodnota maxima v daných letech mezi 1 a 3,5 % z E_∞ s nejčastější hodnotou 2 %. V počáteční fázi (první čtyři dny) růstu KP volba aritmetického nebo geometrického průměru průběh u MEC neovlivní. U modelu L05 volba průměru průběh znatelně ovlivní.



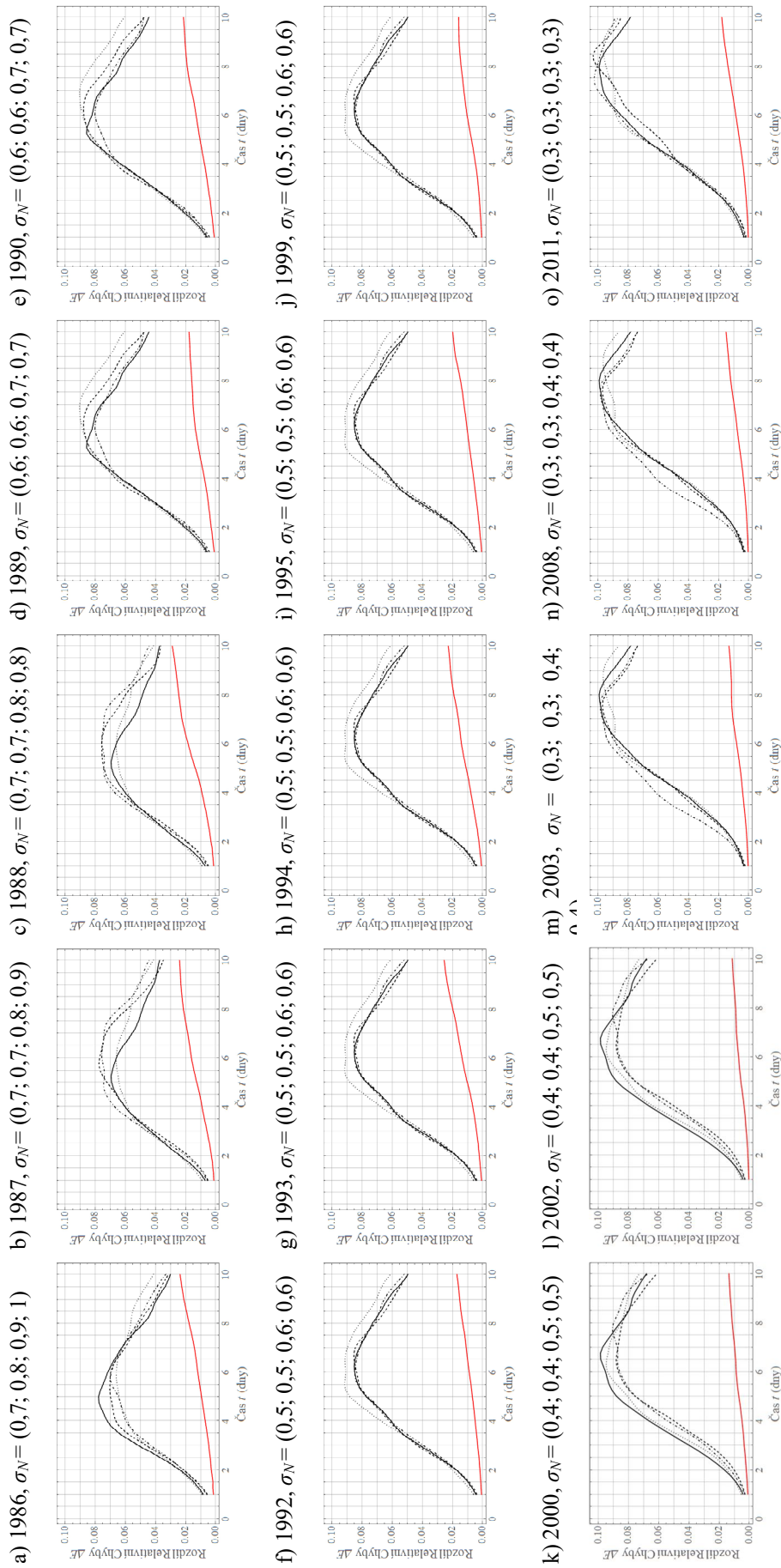
Obrázek 2.2.2: Maximální rozdíl mezi aritmetickým a geometrickým průměrem $Max(E_a - E_g)$ v % z E_∞ . (a) pro všechna použitá N a $E^{L05}(0)$ modelu L05. Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$. (b) pro MEC.



Obrázek 2.2.3: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{a, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl předpovědí s jednodenním rozdílem, roční aritmetický průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční chybou, aritmetický průměr, σ_N viz a) - o). Tečkované pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čárkované pro $N = 120$ a čárkované pro $N = 150$.



Obrázek 2.2.4: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{g, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl předpovědí s jednodenním rozdílem, roční geometrický průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční chybou, geometrický průměr, σ_N viz a) - o). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$.



Obrázek 2.2.5: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{a, Norm} - E_{g, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl předpovědí s jednodenním rozdílem, roční průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční chybou, σ_N viz a) - o). Tečkované pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čárkované pro $N = 120$ a čárkované pro $N = 150$.

2.2.2 Varianta s počáteční/modelovou chybou

Pro variantu s počáteční/modelovou chybou je počáteční chyba MEC určena jako rozdíl mezi analýzou odečtenou modelem v dané době a odečtenou z ERA-Interim. Počáteční chyba $E^{L05}(0) \approx \sigma$ modelu L05 je určena z normované hodnoty $E_{Norm}^{L05}(0)$, která je v daném roce shodná s normovanou počáteční chybou MEC $E_{Norm}^{MEC}(0)$. Obrázek 2.2.6 ukazuje výsledné hodnoty, tj. počáteční chyby $E^{MEC}(0)$ (roční průměr, aritmetický průměr \approx geometrický průměr, 1986–2011) a počáteční chyby modelu L05 $E^{L05}(0)$ pro $N = (60; 90; 120; 150)$ (varianta s počáteční/modelovou chybou, aritmetický průměr \approx geometrický průměr). $E^{L05,30}(0)$ nejsou zobrazeny, protože KP pro $N = 30$ není pro porovnání vhodná z důvodů velké rozdílnosti vývoje s KP MEC. Tabulka 2.2.4 shrnuje výsledky z Obrázku 2.2.6 (b) a je z ní patrné, že $E^{L05}(0)$ klesá od 0,7 k 0,2, kde je právě největší a nejmenší hodnota nejčastější.

Obrázek 2.2.8 porovnává normované křivky prediktability $E_{a, Norm}$ určené aritmetickým průměrem. Červeně jsou vyznačeny KP MEC (rozdíl mezi předpovědí a analýzou, roční průměr). Černě KP modelu L05 (varianta s počáteční/modelovou chybou). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$. Některé roky nejsou z důvodu podobnosti s průběhem v jiném roce zobrazeny, a to vždy s posledním před vynecháním roční posloupnosti. Z Obrázku je patrné, že pro všechna počítaná N , je největší blízkost KP MEC ve všech letech s KP modelu L05 s $N = 90$.

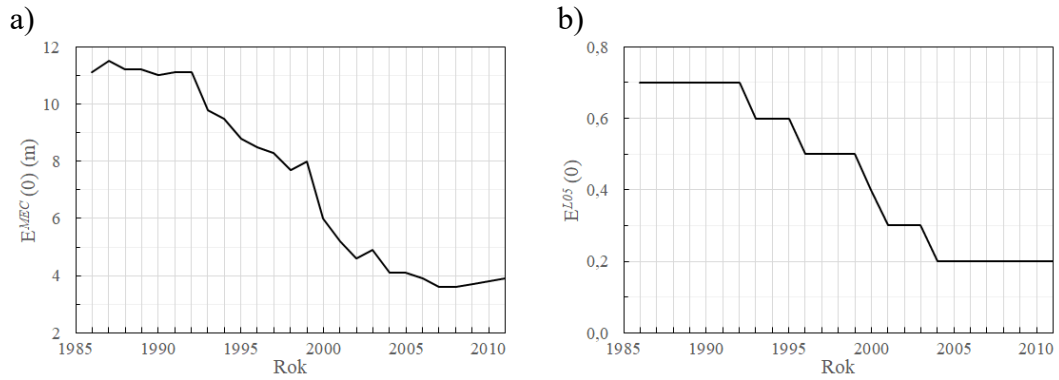
Obrázek 2.2.9 porovnává normované křivky prediktability určené z geometrického průměru. Červeně pro MEC (rozdíl mezi předpovědí a analýzou, roční průměr). Černě pro L05 (varianta s počáteční/modelovou chybou). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$. Jsou vynechány stejné roky a ze stejného důvodu jako u Obrázku 2.2.8. Z Obrázků je patrné, že normovaná KP MEC leží, až na výjimku v roce 1986, ve všech ostatních letech mezi KP modelu L05 $N = 60$ a $N = 90$. Přestože lze, tak jako při aritmetickém průměrování, označit verzi modelu L05 s $N = 90$ jako variantu s nejpodobnější KP s MEC, podobnost KP obou modelů se při použití geometrického průměrování vytrácí.

Tak jako u verze s počáteční chybou i zde je patrný nepoměr v rozdílu mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro KP modelu L05 a MEC.

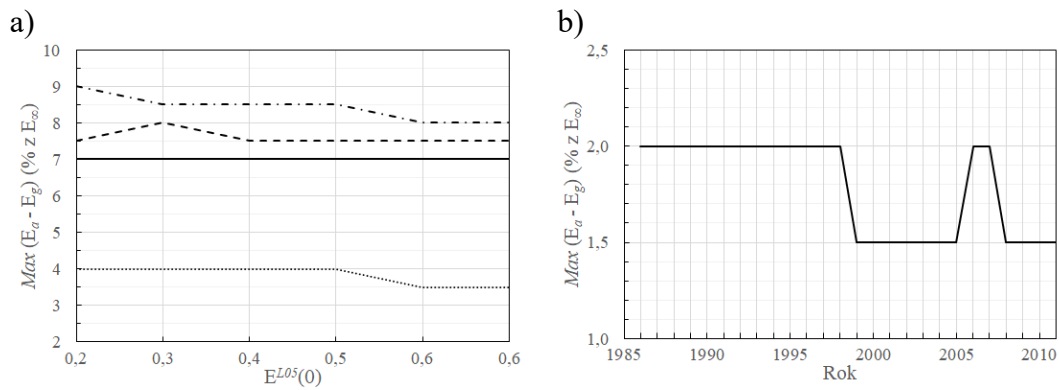
Obrázek 2.2.10 porovnáva rozdíl normovaných křivek prediktability určených aritmetickým a geometrickým průměrem $E_{a, Norm} - E_{g, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl mezi předpovědí a analýzou, roční průměr). Černě pro L05 (varianta s počáteční/modelovou chybou). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$. Jsou vynechány stejné roky a ze stejného důvodu jako u Obrázku 2.2.8. Obrázek 2.2.7 ukazuje maximální rozdíl mezi aritmetickým a geometrickým průměrem $Max(E_a - E_g)$ v % z E_∞ . (a) pro všechna použitá N a $E^{L05}(0)$ modelu L05. (b) pro MEC. Je z nich, tak jako u varianty s počáteční podmínkou, patrný jednak rozdílný průběh rozdílů aritmetického a geometrického průměru v čase pro model L05 a MEC. Zatímco pro model L05 křivka roste do maximální hodnoty, která v závislosti na N a $E^{L05}(0)$ nastane mezi pátým a osmým dnem a poté s časem klesá, tak pro MEC je křivka rozdílů průměrů ve všech letech rostoucí, a proto maximum nastává desátý den. Dalším rozdílem mezi modely je hodnota maximálního rozdílu mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Zatímco pro model L05 je hodnota maxima v závislosti na N a $E^{L05}(0)$ mezi 3,5 a 9 % z E_∞^{L05} (čím větší modelová chyba, tím nižší hodnota maxima), tak pro MEC je hodnota maxima v daných letech mezi 1,5 a 2 % z E_∞^{MEC} s nejčastější hodnotou 2 %. V počáteční fázi (první čtyři dny) růstu KP volba aritmetického nebo geometrického průměru průběh u MEC neovlivní. U modelu L05 volba průměru průběh zřetelně ovlivní a pro všechna N je ovlivněn velmi podobně.

$E^{L05}(0)$	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
rok	86-92	93-95	96-99	00	01-03	04-11
%	27	11	16	4	11	31

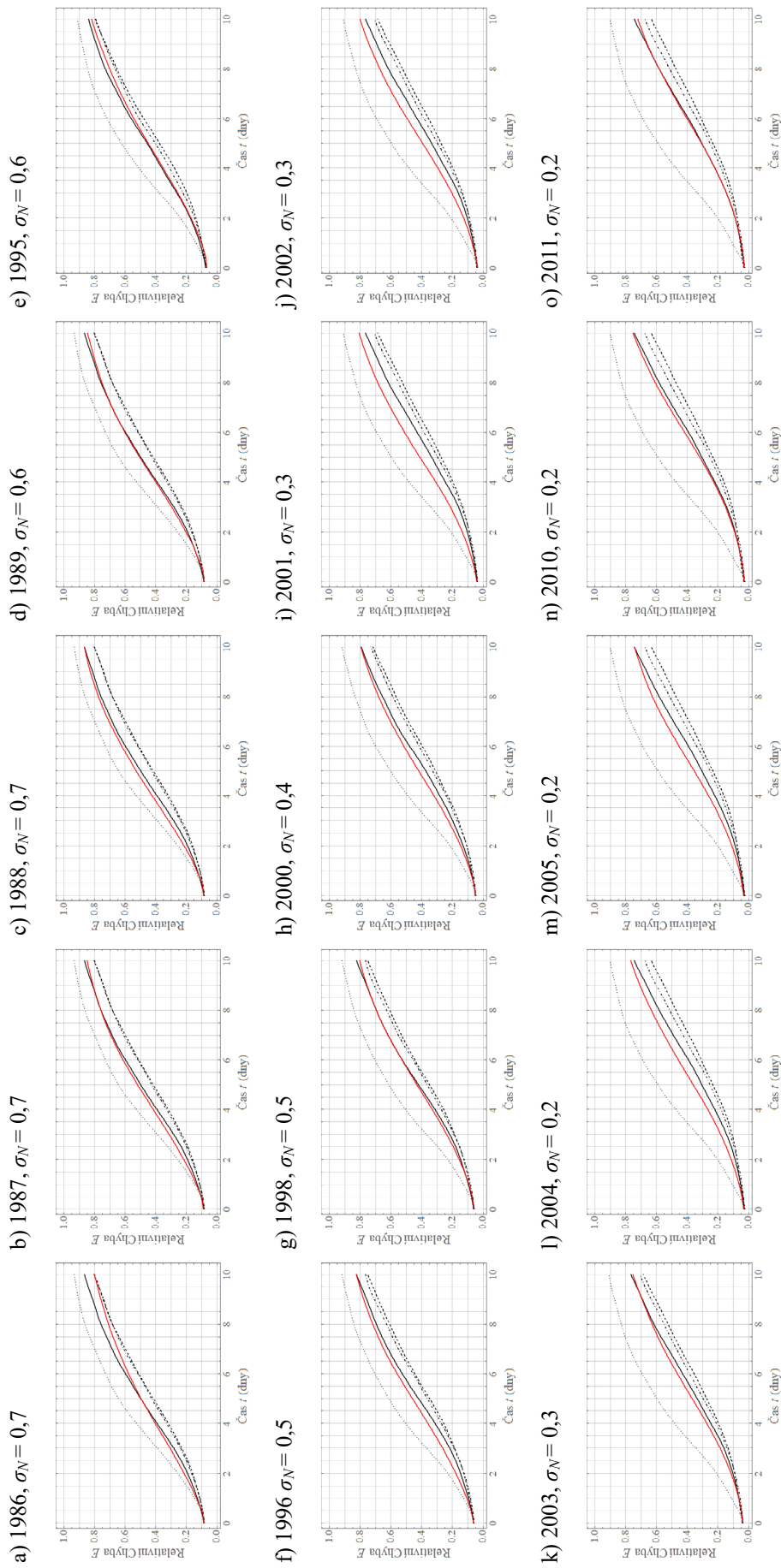
Tabulka 2.2.4: Shrnutí Obrázku 2.2.6.



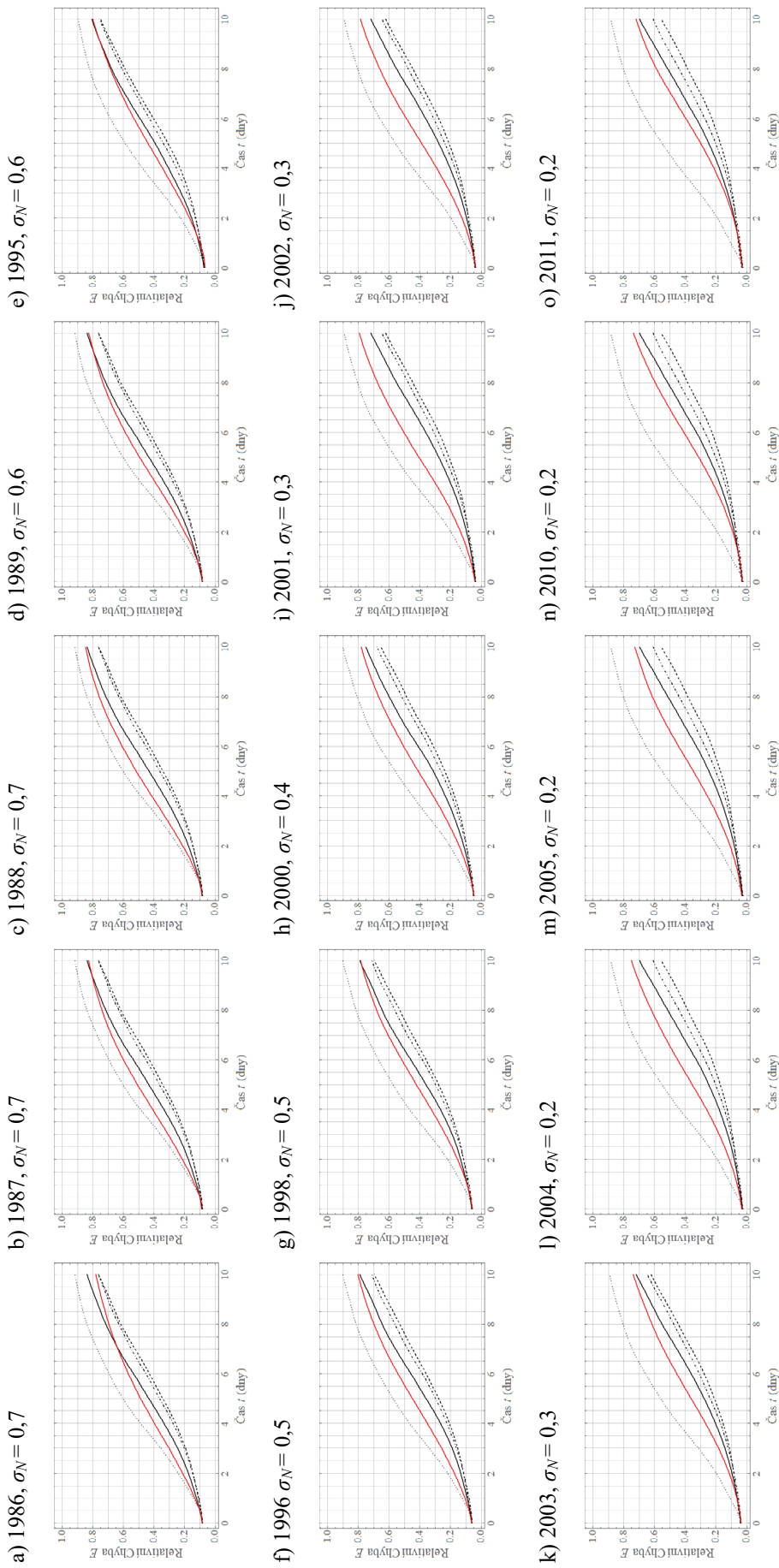
Obrázek 2.2.6: (a) $E^{MEC}(0)$ (roční průměr, aritmetický průměr \approx geometrický průměr, 1986–2011). (b) $E^{L05}(0)$ pro $N = (60; 90; 120; 150)$ (varianta s počáteční/modelovou chybou, aritmetický průměr \approx geometrický průměr), jejichž normované hodnoty $E_{Norm}^{L05}(0)$ jsou rovny normovaným počátečním chybám $E_{Norm}^{MEC}(0)$.



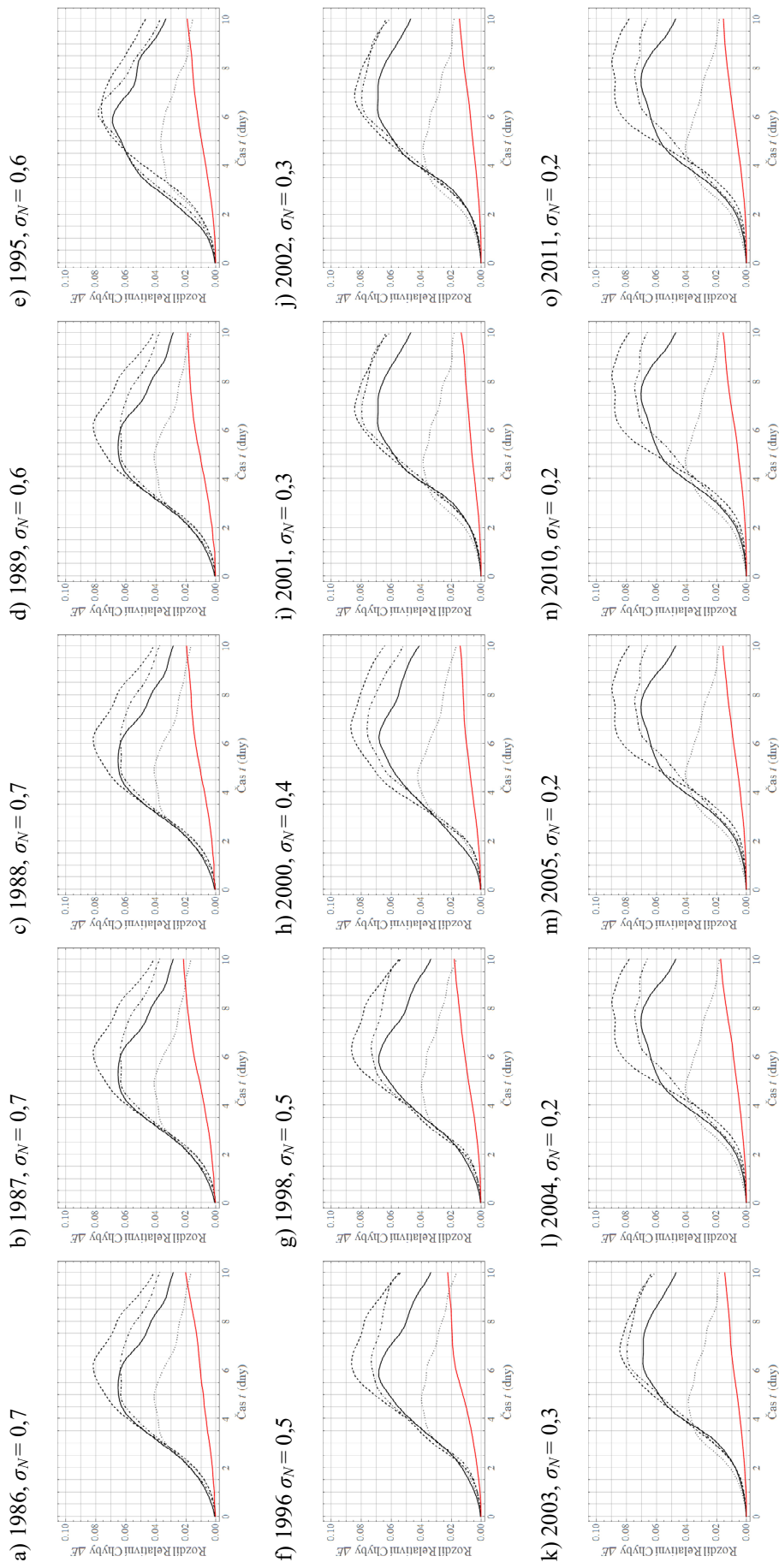
Obrázek 2.2.7: Maximální rozdíl mezi aritmetickým a geometrickým průměrem $Max(E_a - E_g)$ v % z E_∞ . (a) pro všechna použitá N a $E^{L05}(0)$ modelu L05. Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$. (b) pro MEC.



Obrázek 2.2.8: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{a, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl mezi předpovědí a analýzou, roční aritmetický průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční/modelovou chybou, aritmetický průměr, σ_N viz a) - o). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čárkovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$.



Obrázek 2.2.9: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{g, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl mezi předpovědí a analýzou, roční geometrický průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční/modelovou chybou, geometrický průměr, σ_N viz a) - o). Tečkované pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchované pro $N = 120$ a čárkované pro $N = 150$.



Obrázek 2.2.10: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{a, Norm} - E_{g, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl mezi předpovědí a analýzou, roční průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční/modelovou chybou, σ_N viz a) - o). Tečkované pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchované pro $N = 120$ a čárkované pro $N = 150$.

2.2.3 Diskuze

Nejprve jsou diskutovány výsledky porovnání. KP obou modelů mají bližší průběh při aritmetickém průměrování, které je nyní uvažováno.

Pro variantu s počáteční chybou je v období 1989-2011 KP MEC podobná KP L05 s $N = 60; 90; 120; 150$, měly by tedy být řízeny Ljapunovovým exponentem o hodnotě mezi $\lambda_{60} = 0,29$ až $\lambda_{90} = 0,35$. V období 1986-1988, kde podobnost KP obou modelů není, je možné nepodobnost přiřadit nepřesnému popisu atmosférické dynamiky modelem ECMWF.

Pro variantu s počáteční/modelovou chybou je ve všech počítaných letech největší shoda KP MEC s KP L05 s $N = 90$, což odporuje teoretickým očekáváním, že u modelu L05 s daným N je pro každé σ modelová chyba vždy stejná, a že u MEC by modelová chyba měla klesat s tím, jak je model aktuálnější. Představený výsledek by však znamenal, že MEC neprodělal za dvacet šest let žádný vývoj, což je nemožné anebo, že modelová chyba je též funkcí počáteční chyby, popř. jiných faktorů. Podívejme se nejprve, zda KP MEC neroste pomaleji s postupujícími lety než KP modelu L05 s $N = 90$ tj. KP MEC je stále nejpodobnější s KP modelu L05 s $N = 90$, ale bylo by možné zaznamenat trend přiblížení či oddálení obou křivek s postupujícími roky, což by mohlo znamenat pokles modelové chyby. Zmiňované je možné vyčíst z Obrázku 2.2.9. Pro $E^{L05,90}(0) = 0,7$ jsou KP obou modelů nejvzdálenější v roce 1986 a nejpodobnější průběh mají v letech 1990–1992. Pro $E^{L05,90}(0) = 0,6$ jsou KP nejpodobnější v roce 1993, v roce 1994 se KP vzdálí a v roce 1995 se opět přiblíží. Pro $E^{L05,90}(0) = 0,5$ jsou KP v letech 1995–1996 od sebe vzdálenější a v letech 1997–1998 se opět odlišnost KP zmenší. Blízkost tvaru KP setrvá i pro $E^{L05,90}(0) = 0,4$ a rok 2000. Pro $E^{L05,90}(0) = 0,3$ jsou nejméně podobné v roce 2001 a nejvíce podobné v roce 2003. Pro $E^{L05,90}(0) = 0,2$ je podobnost KP nejmenší v letech 2004–2006, poté podobnost osciluje, kdy nejpodobnější jsou KP v letech 2007 a 2010–2011. Z textu je patrné, že obecný trend přibližování nebo oddalování KP obou modelů neexistuje. Je však možné si povšimnout, že KP obou modelů jsou od sebe nejvzdálenější vždy na začátku časového období, které je vymezeno velikostí počáteční chyby a nejbližší jsou KP obou modelů na konci tohoto období. Z toho usuzujeme, že velikost modelové

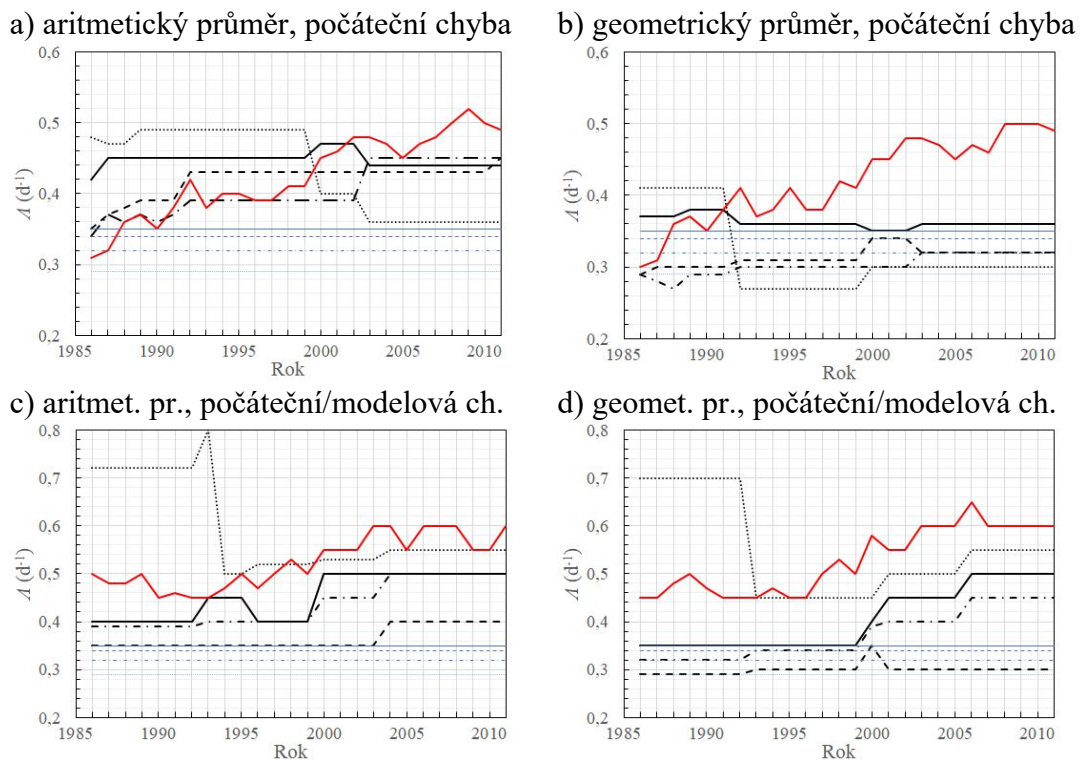
chyby není jen funkcí počtu proměnných N , ale i velikosti počáteční chyby. Detailně bude však výše zmíněné zkoumáno v další kapitole.

Dále je diskutován vliv výpočtu KP aritmetickým a geometrickým průměrem. Tvar KP modelu L05 je volbou typu průměru výrazně ovlivněn. Pro variantu s počáteční chybou a s $N = 90$ je maximální rozdílnost KP 7-10 % z $E_{\infty}^{L05,90}$ v 5-7,5 dni průběhu KP. Pro variantu s počáteční/modelovou chybou a $N = 90$ je maximální rozdílnost KP 6,5-7 % z $E_{\infty}^{L05,90}$ v 5-7,5 dni průběhu KP. Tvar KP MEC je volbou druhu průměru ovlivněn jen minimálně. Pro variantu s počáteční i počáteční/modelovou chybou se jedná o maximální rozdíl KP převážně 1,5-2 % z E_{∞}^{MEC} resp. E_{∞}^{MEC} v desátém dni vývoje KP a počáteční růst (první 4 dny) není ovlivněn vůbec. Z teorie je známo, že aritmetický průměr je roven geometrickému jen v případě, kdy všechna průměrovaná data mají stejnou hodnotu. Čím jsou hodnoty průměrovaných dat různější tím je geometrický průměr menší než aritmetický. Obrázek 2.2.12 ukazuje KP L05 ($N = 90$) a MEC. a) – f) varianta s počáteční chybou, g) – l) varianta s počáteční/modelovou chybou. Tučně jsou vyznačeny aritmetické a geometrické průměry. Tečkovaně jsou vyznačeni jednotliví členi ansámblů (L05: $M = 400$, MEC: $M = 365$), ze kterých jsou průměry vypočteny. Z Obrázku je patrný výraznější rozptyl členů ansámblu u L05 než u MEC, a to jak pro variantu s počáteční, tak pro variantu s počáteční/modelovou chybou a pro všechny zobrazené verze σ_{90} u L05 a z let u MEC. Tento rozdíl rozptylu poté vysvětluje rozdíl aritmetického a geometrického průměru u modelu L05 a podobnost obou průměrů u MEC. Důvodem rozdílnosti rozptylů obou modelů je skutečnost, že každý člen ansámblu u modelu L05 je vypočten z průměru proměnných (u Obrázku 2.2.11 se jedná o $N = 90$) a každý člen ansámblu u MEC je vypočten ze všech bodů sítě severní polokoule (20° - 90° S) tj. řádově 10^3 až 10^5 hodnot. Větší počet průměrovaných hodnot u MEC udrží vypočtené KP v každém dni s podobnějšími průběhy než u modelu L05.

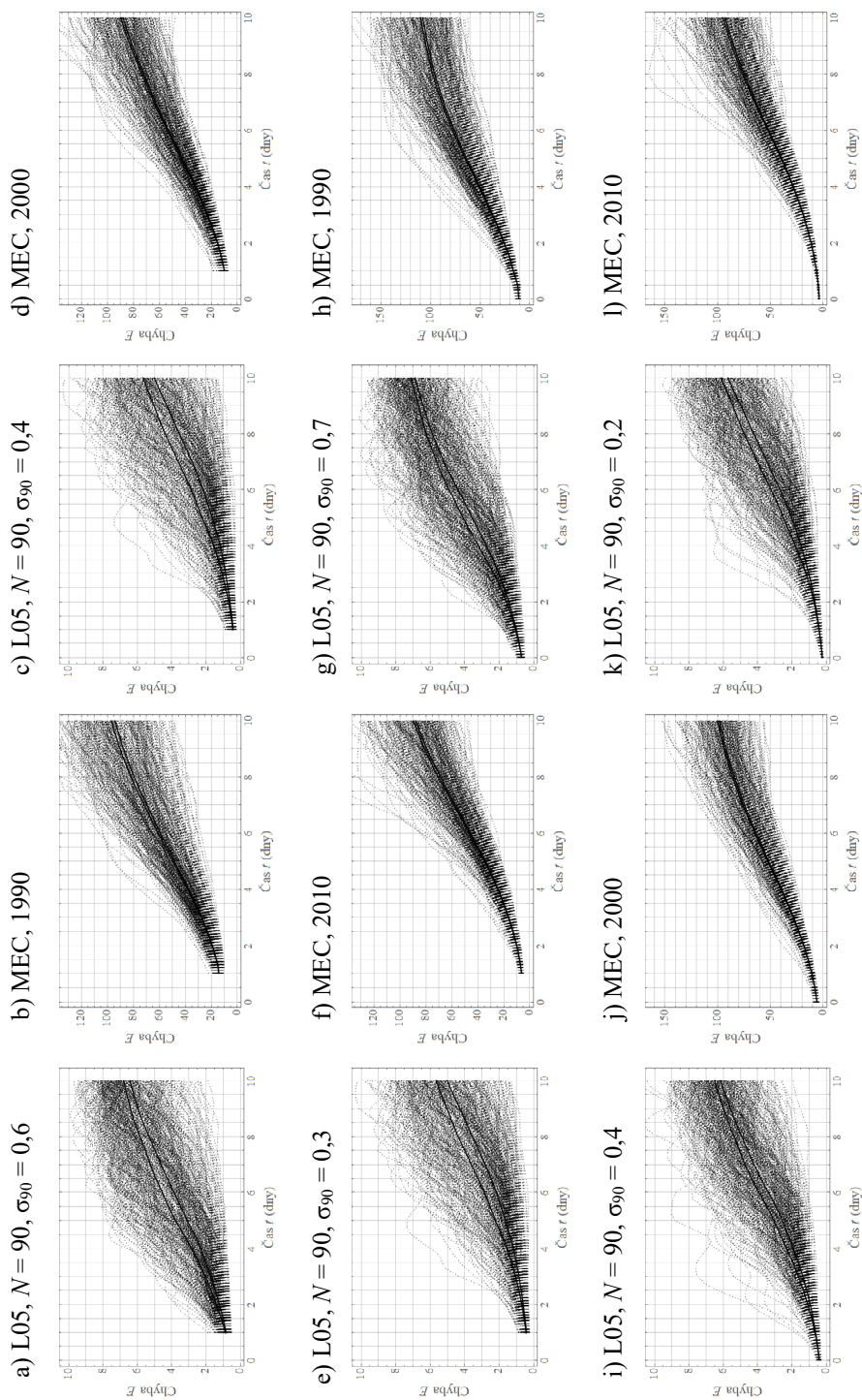
V teorii (kapitola 1.3.2) je popsáno, že KP vypočtená z geometrického průměru by měla lépe zachytit Ljapunovův exponent než KP vypočtená z aritmetického průměru. Vzniká tedy otázka, zda normovaná KP MEC určená z aritmetického průměru je popsána stejnou hodnotou Ljapunova exponentu jako identická normovaná KP modelu L05, která je též určena aritmetickým průměrem, když KP určené z geometrického průměru jsou u obou modelů rozdílné. Nejprve je diskutováno, zda u modelu L05 platí, že KP vypočtená z geometrického průměru zachycuje Ljapunovův exponent lépe než

KP vypočtená z aritmetického průměru. Vhodná metoda porovnání vychází z definice exponenciálního růstu. U KP lze zachytit exponenciální růst mezi dvěma časovými kroky Δt jako $e(i+1) = e(i)e^{\lambda\Delta t}$, kde $e(i)$ označuje hodnotu KP v i -tém časovém kroku. Exponenciální růst e je řízen největším Ljapunovovým exponentem λ . Vyjádříme-li λ mezi dvěma časovými kroky získáme: $\lambda = (1/\Delta t)\ln(e(i+1)/e(i)) =$ = konstanta. Pokud by KP mezi $E_a(i)$ a $E_a(i+1)$ respektive $E_g(i)$ a $E_g(i+1)$ rostla exponenciálně s mírou růstu λ , pak platí $\Lambda_a(i) = (1/\Delta t)\ln(E_a(i+1)/E_a(i)) = \lambda$, resp. $\Lambda_g(i) = (1/\Delta t)\ln(E_g(i+1)/E_g(i)) = \lambda$. Obrázek 2.2.13 ukazuje pro a), c), e), g), i), k) Časový vývoj $\Lambda_a(i)$ (aritmetický průměr) a pro b), d), f), h), j), l) Časový vývoj $\Lambda_g(i)$ (geometrický průměr). a) – f) je verze s počáteční chybou. g) – l) je verze s počáteční/modelovou chybou. Červeně pro MEC. Černě pro L05. Modře pro hodnoty Ljapunova exponentu λ modelu L05. Z obrázků je patrné, že neexistují jasné hodnoty $\Lambda_a(i) \approx \text{konst.}$, $\Lambda_g(i) \approx \text{konst.}$ a jejich odhad je spíše určení globálního nebo lokálního maxima $\Lambda(i)$, kde v některých případech je možno odhadnout i více hodnot pro jednu křivku, a to je platné pro $\Lambda_a(i)$, pro $\Lambda_g(i)$, pro verzi s počáteční chybou i s počáteční/modelovou chybou. Nedá se tedy říct, že geometrický průměr má hladší průběh konstantní části křivky $\Lambda(i)$ a zároveň i verze s počáteční/modelovou chybou ukazuje podobné průběhy $\Lambda_a(i) \approx \text{konst.}$, $\Lambda_g(i) \approx \text{konst.}$, jako verze s počáteční chybou, zde bychom však očekávali navýšení exponenciálního růstu o modelovou chybu. Odhady $\Lambda_a(i) \approx \text{konst.}$, $\Lambda_g(i) \approx \text{konst.}$ společně s Ljapunovovým exponentem λ ukazuje Obrázek 2.2.11, kde a), c) je aritmetický průměr, b), d) geometrický průměr. a), b) je verze s počáteční chybou a c), d) je verze s počáteční/modelovou chybou. Červeně pro MEC. Černě pro L05. Modře pro hodnoty Ljapunova exponentu λ modelu L05. Z Obrázku lze vyčíst, že pro L05 jsou hodnoty $\Lambda_a(i) \approx \text{konst.}$ větší než $\Lambda_g(i) \approx \text{konst.}$ a geometrický průměr je blíže hodnotám λ . Pro MEC je patrná očekávatelná blízkost $\Lambda_a(i) \approx \text{konst.}$ s $\Lambda_g(i) \approx \text{konst.}$ Na základě způsobu odhadu konstantních hodnot nemá smysl detailní porovnání hodnot MEC s L05 jen popíšeme, že pro L05 $N = 90$ a MEC (verze s počáteční chybou) je do roku přibližně 2000 podobnost $\Lambda_g(i) \approx \text{konst.}$ a po roce 2000 je podobnost

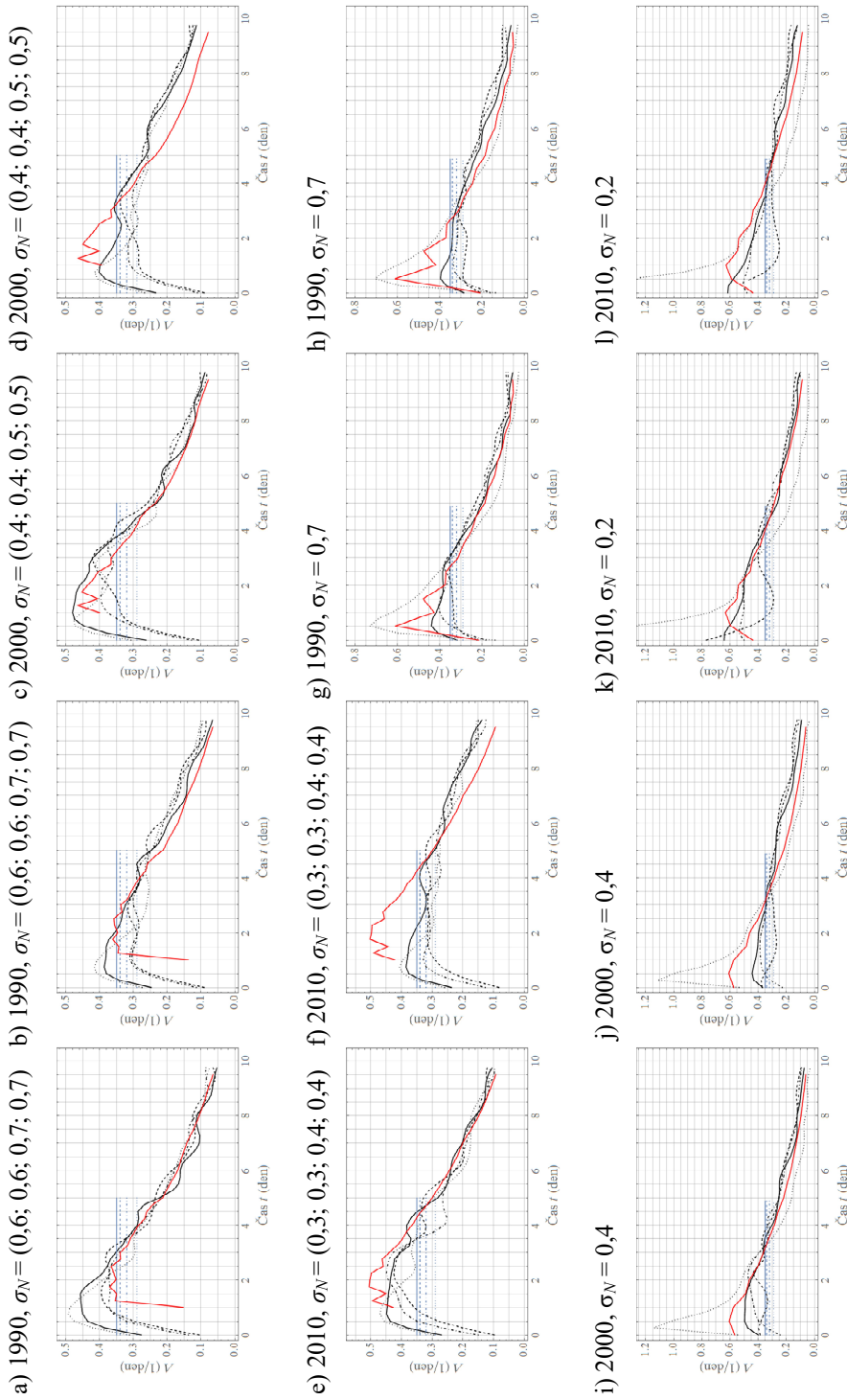
$\Lambda_a(i) \approx \text{konst.}$ (z podobnosti KP obou modelů je platný aritmetický průměr). Pro verzi s počáteční/modelovou chybou platí podobnost $\Lambda_a(i) \approx \text{konst.}$ pro všechny roky (aritmetický průměr je platný i pro podobnosti KP obou modelů). Na základě představeného nelze jednoznačně určit, že KP L05 určená geometrickým průměrem zachycuje přesněji hodnotu Ljapunovova exponentu λ . Hodnoty $\Lambda_g(i) \approx \text{konst}$ jsou sice blíže λ , ale konstantní část je nevýrazná, jedná se spíše o odhad a stejnou konstantní část má i verze s počáteční/modelovou chybou, kde není na základě teorie očekávána. Nelze nyní ani odpovědět, zda normovaná KP MEC určená z aritmetického průměru je popsána stejnou hodnotou Ljapunovova exponentu jako identická normovaná KP modelu L05, která je též určena aritmetickým průměrem, když KP určené z geometrického průměru jsou u obou modelů rozdílné.



Obrázek 2.2.11: Hodnoty λ , $\Lambda_a(i) \approx \text{konst.}$, $\Lambda_g(i) \approx \text{konst.}$ a), c) aritmetický průměr. b), d) geometrický průměr. a), b) verze s počáteční chybou. c), d) verze s počáteční/modelovou chybou. Červeně pro MEC. Černě pro L05. Modře pro hodnoty Ljapunova exponentu λ modelu L05. Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$.



Obrázek 2.2.12: Křivky prediktability L05 ($N = 90$) a MEC, a) – l) varianta s počáteční chybou, g) – l) varianta s počáteční/modelovou chybou. Tučně jsou vyznačeny aritmetické a geometrické průměry. Těčkovaně jsou vyznačeni jednotliví členi ansámblů (L05: $M = 400$, MEC: $M = 365$), ze kterých jsou průměry vypočteny.



Obrázek 2.2.13: a), c), e), g), i), k) Časový vývoj $\Lambda_a(t)$ (aritmetický průměr) více viz text. b), d), f), h), j), l) Časový vývoj $\Lambda_g(t)$ (geometrický průměr) více viz text. a) – f) verze s počáteční chybou. g) – l) verze s počáteční/modelovou chybou. Červeně pro MEC. Černě pro L05. Modře pro hodnoty Ljapunova exponentu λ modelu L05. Tečkované pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchované pro $N = 120$ a čárkované pro $N = 150$.

2.2.4 Závěr

Z porovnání normovaných KP modelu L05 a MEC je zaznamenána shoda křivek prediktability určených z aritmetického průměru.

Pro variantu s počáteční chybou je od roku 1989 do roku 2011 shoda KP s modelem L05 pro $N = (60; 90; 120; 150)$, které mají podobné hodnoty Ljapunovova exponentu a v období 1986 až 1988 je neshoda KP obou modelů určena nepřesným popisem atmosférické dynamiky modelem ECMWF. Nejčastěji jsou podobné normované KP obou modelů u varianty s počtem proměnných $N = 90$ a proto je s počáteční chybou $E^{L05,90}(0) = 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3$ vybrána jako verze s průběhem normované počáteční chyby nejpodobnější s MEC.

Dalším důvodem je skutečnost, že pro variantu s počáteční/modelovou chybou jsou normované KP obou modelů nejpodobnější pro verzi modelu L05 s $N = 90$ ve všech letech ve kterých byl počítán roční aritmetický průměr MEC. Proto je tato verze vybrána jako nejpodobnější, a to s hodnotami počáteční chyby. $E^{L05,90}(0) = 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2$.

Otázkou zůstává, jak se chová modelová chyba, když u modelu L05 s $N = 90$ se pro všechny počáteční chyby očekává konstantní hodnota modelové chyby. Zatímco u MEC se očekává pokles modelové chyby s poklesem počáteční chyby. Vzniká tedy rozpor, který je potřeba vysvětlit. Další nezodpovězenou otázkou je vliv rozdílného průběhu normovaných KP u obou modelů, které jsou určeny geometrickým průměrem, na správnost odhadu počátečního exponenciálního růstu u KP určených aritmetickým průměrem. Teoreticky by měl být počáteční exponenciální růst řízen Ljapunovovým exponentem ($\lambda_{90} = 0,35 \text{ d}^{-1}$). Na otázky budou hledány odpovědi v následující kapitole.

2.3 Odhad Ljapunovova exponentu, modelové a limitní chyby z aproximace křivky prediktability

V této části je cílem nalézt takovou aproximaci KP MEC a modelu L05 s $N=90$ (dále jen L05), která vhodně popisuje KP respektive její diferenci a která co nejpřesněji odhadne hodnotu LE, modelovou chybu a limitní chybu. KP jsou určeny stejně jako v kapitolách 2.1 a 2.2. Hypotézy použité k aproximaci jsou představené v kapitole 1.3 a níže jsou shrnuty:

$$KH_{PP}^D := \frac{dE(t)}{dt} = \alpha E \left(1 - \frac{E}{E_{\text{lim}}} \right), \quad (2.3.1)$$

$$KH_{PM}^D := \frac{dE(t)}{dt} = (\alpha E + \beta) \left(1 - \frac{E}{E_{\text{lim}}} \right), \quad (2.3.2)$$

$$LH := \frac{dE(t)}{dt} = -\alpha E \ln \left(\frac{E}{E_{\text{lim}}} \right), \quad (2.3.3)$$

$$OH := \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\alpha}{p} E \left(1 - \left(\frac{E}{E_{\text{lim}}} \right)^p \right), \quad (2.3.4)$$

$$KH_{PP}^{KP} := E(t) = A \tanh(at + a) + A, \quad (2.3.5)$$

kde parametry z KH_{PP}^D lze určit jako: $\alpha = 2a$, $E_{\text{lim}} = 2A$ a

$$KH_{PM}^{KP} := E(t) = A \tanh(at + b) + B, \quad (2.3.6)$$

kde parametry z KH_{PM}^D lze určit jako: $\alpha = a(A+B)/A$, $\beta = a(A^2 - B^2)/A$ a $E_{\text{lim}} = A+B$. E je průměrná předpovědní chyba, t je čas, α je teoretický Ljapunovův exponent λ , β je parametr modelové chyby, $\lim_{t \rightarrow \infty} E = E_{\text{lim}}$ je limitní hodnota průměrné předpovědní chyby (teoreticky E_{∞}) a p, A, B, a, b jsou parametry.

Kapitola 2.3.1 ukáže výsledky aproximací diferencí KP respektive KP modelu L05, varianta s počáteční chybou, určené aritmetickým a geometrickým průměrem. Jsou vypočteny aproximace (hypotézy) pro variantu KP o délce 1-10 dní, o délce 1-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{\text{lim}} = E_{\infty} = 8,2$ a o plné délce, tj. o počtu dní které

jsou potřeba, aby KP dosáhla $E_{\text{lim}} = 8,2$. Na základě předem známých hodnot λ a E_{∞} je ověřena přesnost α a E_{lim} určených z aproximací. Kapitola 2.3.2 ukáže výsledky aproximací diferencí KP respektive KP MEC, varianta s počáteční chybou, určené aritmetickým a geometrickým průměrem. Jsou určeny nejpřesnější aproximace pro variantu KP o délce 1-10 dní a o délce 1-10 dní s pevně určeným parametrem, $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ metodou představenou v kapitole 1.3.2. Jsou vyčísleny hodnoty parametrů aproximací, které jsou v kapitole 2.3.3 porovnány s hodnotami parametrů aproximací modelu L05 a na základě podobností KP obou modelů určených v kapitole 2.2 a znalosti λ a E_{∞} modelu L05 je hledána taková aproximace (hypotéza), která by nejpřesněji popisovala λ a E_{∞} MEC. Kapitoly 2.3.4, 2.3.5 a 2.3.6 jsou poté pro variantu s počáteční/modelovou chybou a s KP o délce 0-10 dní. Výsledky jsou diskutovány a je hledáno nejvhodnější popsání modelové chyby.

2.3.1 Křivka prediktability modelu L05 pro variantu s počáteční chybou

Pro výpočet E (KP) jsou použity data modelu L05 ($N = 90$, varianta s počáteční chybou (označeno PP), $E^{L05,90}(0) = 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3$. Metoda výpočtu je určena v kapitole 2.1.1 a jsou prezentovány výsledky jak pro aritmetický (označeno PP_a), tak pro geometrický průměr (označeno PP_g). Aproximována je KP a její difference, která je určena body $((E(t + \Delta t) + E(t))/2; (E(t + \Delta t) - E(t))/\Delta t)$, kde t je čas a $\Delta t = 0,25$ d. Zvolená délka je 1-10 dní, 1-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{\text{lim}} = E_{\infty} = 8,2$ (v obrázcích označeno E_{lim}) a plná délka, tj. o počtu dní které jsou potřeba, aby KP dosáhla $E_{\infty} = 8,2$ (v obrázcích *Full*). Aproximace hypotézami (rovnice (2.3.1) - (2.3.6)) jsou určeny nelineárními regresními metodami pomocí programu Wolfram Mathematica (je vždy vybírána nejvhodnější z metody sdružených gradientů, metody gradientů, Levenbergovy-Marquardovy metody, Newtonovy a QuasiNewtonovy metody a metody "Nminimize").

Obrázek 2.3.1 pro aritmetický a Obrázek 2.3.2 pro geometrický průměr ukazuje difference KP modelu L05, varianta s počáteční chybou, s počátečními hodnotami $\sigma_{90} = 0,7 - 0,3$ (černá) ($\sigma_{90} = 0,8$ není zobrazeno) a aproximace KH_{PP}^D

(červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH_{PP}^D s parametry z KH_{PP}^{KP} (modrá) a aproximace KH_{PM}^D s parametry z KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaně). a) - e) PP_a . f) - j) $PP_{a, Elim}$. k) - o) $PP_{a, Full}$. Je z nich patrné, že pro KP určenou geometrickým průměrem vyhovují aproximace ve tvaru symetrické paraboly, která se projevuje maximem uprostřed (KH_{PP}^D , KH_{PP}^{KP} , KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} s nízkou hodnotou modelové chyby β a OH s hodnotou parametru p blízkou k jedné). Pro KP určenou aritmetickým průměrem poté naopak vyhovují nesymetrické aproximace, se stočením maxima vlevo od středu (KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} s vyšší hodnotou modelové chyby β , OH s hodnotou parametru $p < 0,5$ a LH). Pro KP určenou geometrickým průměrem jsou kromě LH všechny aproximace blízké, což neplatí u KP určené aritmetickým průměrem.

Tabulka 2.3.2 zobrazuje hodnoty parametrů aproximací pro počáteční hodnoty označené $E(0)$, pro všechny tři určení délky a obě metody průměru. Jejich průměr (z hodnot parametrů u jednotlivých $E(0)$) a směrodatnou odchylku zobrazuje Tabulka 2.3.1. Pro KP určenou aritmetickým průměrem ($PP_{a, Full}$) je z Obrázku 2.3.1 opticky patrné, že KH_{PP}^D a KH_{PP}^{KP} nezachycují růst difference KP. KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} začínají v bodě určeném β , což neodpovídá počátečnímu vývoji difference KP. Opticky nejbližší se jeví OH popř. LH . Průměrné hodnoty parametru aproximací $\bar{\alpha}_{a, Full}^{L05}$ (Tabulka 2.3.1) jsou kromě LH blízké λ s tím, že se rozchází s λ maximálně o 20% velikosti λ a nejbližší je KH_{PM}^D (Tabulka 2.3.1). Aproximace, kromě LH , zachycují dostatečně E_∞ (Tabulka 2.3.1). Parametr β by měl být pro variantu s počáteční chybou nulový, neboť by měl zachycovat modelovou chybu. Tabulka 2.3.1 však ukazuje, že tento předpoklad není splněn a ukazuje se, že hodnota β je též ovlivněna mírou nesymetrie difference KP.

Pro KP určenou geometrickým průměrem ($PP_{g, Full}$) je z Obrázku 2.3.2 patrné, že kromě LH popisují aproximace difference KP. Opět platí, že KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} začínají v bodě určeném β , což neodpovídá počátečnímu vývoji difference KP, avšak β je výrazně menší ve srovnání s aritmetickým průměrem (Tabulka 2.3.1), což ukazuje na téměř symetrický tvar difference KP. Totéž potvrzují hodnoty

$\bar{p}_{g,full}^{L05} = 0,7 > \bar{p}_{a,full}^{L05} = 0,4$, kde hodnota rovná jedné znamená KH_{PP} (symetrická parabola). Průměrné hodnoty aproximací $\bar{\alpha}_{g,Full}^{L05}$ (Tabulka 2.3.1) jsou kromě LH blízké λ s tím, že KH_{PM}^D , KH_{PM}^{KP} a OH se rozchází s λ maximálně o 10% velikosti λ . Aproximace zachycují dostatečně E_∞ (Tabulka 2.3.1).

Pro variantu KP o délce 1-10 dní určené z aritmetického průměru (PP_a) je z Obrázku 2.3.1 patrné, že všechny hypotézy adekvátně aproximují data. Pro KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} opět platí, že začínají v bodě určeném β , což neodpovídá počátečnímu vývoji difference KP a není to teoreticky odůvodnitelné. Hodnoty β jsou blízké hodnotám z varianty $PP_{a,Full}$ (Tabulka 2.3.1). $\bar{\alpha}_a^{L05}$ pro KH_{PP}^D a KH_{PP}^{KP} výrazně nadhodnocuje hodnotu λ , kde rozdíl od λ je až k 40% velikosti λ (Tabulka 2.3.1). $\bar{\alpha}_a^{L05}$ pro LH naopak hodnotu výrazně podhodnocuje s rozdílem od λ až k 40% velikosti λ (Tabulka 2.3.1). $\bar{\alpha}_a^{L05}$ pro KH_{PM}^D , KH_{PM}^{KP} a OH jsou blízké k λ s tím, že se rozchází s λ maximálně o 20% velikosti λ (Tabulka 2.3.1). Důvod proč se opticky všechny hypotézy jeví jako adekvátní (Tabulka 2.3.1), na rozdíl od varianty $PP_{a,Full}$, je ten, že parametr $E_{lim,a}$ pro KH_{PP}^D a KH_{PP}^{KP} podhodnocuje E_∞ , kde většinou je rozdíl od E_∞ mezi 6 až 12% velikosti E_∞ (Tabulka 2.3.1). Totéž platí i pro LH , s tím rozdílem, že $E_{lim,a}$ hodnotu E_∞ nadhodnocuje. Dobrý odhad E_∞ ukazuje KH_{PM}^D , KH_{PM}^{KP} a OH s tím, že pro OH je průměrná hodnota $\bar{E}_{lim,a}^{L05} = E_\infty$ (Tabulka 2.3.1). Průměrná hodnota $\bar{p}_a^{L05} = 0,3$ ukazuje na nesymetrický průběh křivky hypotézy.

Pro KP určenou geometrickým průměrem (PP_g) ukazuje Obrázek 2.3.2 výraznou nevhodnost LH a pro tuto variantu nemá smysl hodnotit parametry této aproximace. Tvar ostatních aproximací je naopak velmi podobný až identický a všechny na první pohled vhodně aproximují data. Symetrický tvar a podobnost ostatních použitelných hypotéz s KH_{PP}^D a KH_{PP}^{KP} ukazuje skoro nulové hodnoty $\bar{\beta}_g^{L05}$ pro KH_{PM}^D , KH_{PM}^{KP} a \bar{p}_g^{L05} blízké 1 pro OH (Tabulka 2.3.1). $\bar{E}_{lim,g}^{L05}$ jsou pro všechny použitelné hypotézy mezi hodnotami 7,7 a 7,8 s jednotlivými hodnotami, které se rozchází od E_∞ do 9% velikosti E_∞ (Tabulka 2.3.1). $\bar{\alpha}_g^{L05}$ jsou mezi hodnotami 0,39 a 0,41 d⁻¹ s většinou jednotlivých hodnot do 10% velikosti λ od λ .

Pro variantu 1-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{\text{lim}} = E_{\infty} = 8,2$ a KP určenou aritmetickým průměrem ($PP_{a,E_{\text{lim}}}^{L05}$) se z Obrázku 2.3.1 ukazuje nevhodnost KH_{PP}^D a KH_{PP}^{KP} . Pro KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} opět platí, že začínají v bodě určeném β , což neodpovídá počátečnímu vývoji difference KP a není to teoreticky odůvodnitelné. Hodnoty β jsou blízké hodnotám z varianty $PP_{a,Full}$ a PP_a (Tabulka 2.3.1) a $\bar{p}_{a,E_{\text{lim}}}^{L05} = \bar{p}_a^{L05}$ pro OH tj. křivka hypotézy má nesymetrický tvar. Pro KH_{PP}^D , KH_{PP}^{KP} , KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} leží hodnoty $\bar{\alpha}_{a,E_{\text{lim}}}^{L05}$ mezi hodnotami $\bar{\alpha}_{a,Full}^{L05}$ a $\bar{\alpha}_a^{L05}$ s většinou jednotlivých hodnot do 20% velikosti λ od λ (Tabulka 2.3.1). Hodnota $\bar{\alpha}_{a,E_{\text{lim}}}^{L05}$ pro LH je nejbližší ze všech třech variant k λ , ale rozdíl od λ je pořád výrazný (až k 40% velikosti λ). $\bar{\alpha}_{a,E_{\text{lim}}}^{L05}$ pro OH se liší jen o 0,01 od $\bar{\alpha}_{a,Full}^{L05}$ a $\bar{\alpha}_a^{L05}$ (Tabulka 2.3.1) a tato hypotéza ukazuje největší podobnost $\bar{\alpha}^{L05}$ pro všechny tři varianty.

Pro KP určenou geometrickým průměrem ($PP_{g,E_{\text{lim}}}^{L05}$) ukazuje Obrázek 2.3.2 výraznou nevhodnost LH a pro tuto variantu nemá smysl hodnotit parametry této aproximace. $\bar{\beta}_{g,E_{\text{lim}}}^{L05}$ pro KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} má větší nebo stejnou hodnotu jako $\bar{\beta}_{g,Full}^{L05}$ a stejná hodnota platí i pro $\bar{p}_{g,E_{\text{lim}}}^{L05} = \bar{p}_{g,Full}^{L05}$ pro OH a proto platí stejně jako v odstavci pro $PP_{g,Full}^{L05}$ (Tabulka 2.3.1). Průměrné hodnoty aproximací $\bar{\alpha}_{g,E_{\text{lim}}}^{L05}$ (Tabulka 2.3.1) jsou kromě LH blízké λ s tím, že jednotlivé hodnoty aproximací KH_{PP}^D , KH_{PM}^D , KH_{PM}^{KP} a OH se rozcházejí s λ maximálně o 10% velikosti λ a $\bar{\alpha}_{g,E_{\text{lim}}}^{L05}$ je blízké $\bar{\alpha}_{g,Full}^{L05}$.

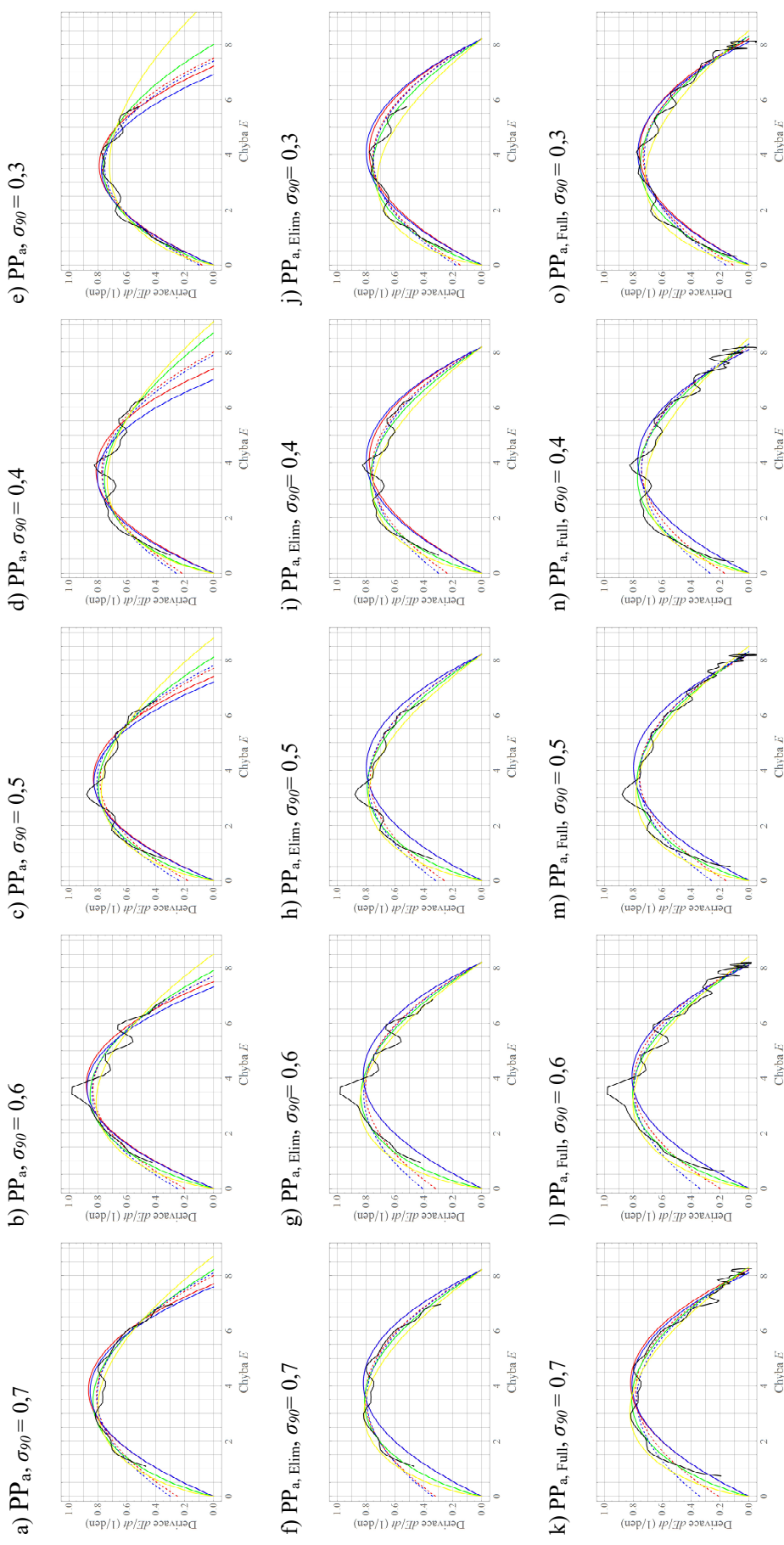
Ve vztahu k počáteční hodnotě $E(0)$ je zaznamenanelný trend jen pro LH a to pokles α s poklesem $E(0)$ a nárůst E_{lim} s poklesem $E(0)$. Toto je platné pro všechny tři varianty a pro KP určenou aritmetickým a geometrickým průměrem (samozřejmě kromě $PP_{E_{\text{lim}}}^{L05}$ pro E_{lim}) Ostatní hypotézy neukazují zaznamenanelné trendy.

<i>prům.</i>	KH_{PP}^D	KH_{PM}^D	KH_{PP}^{KP}	KH_{PM}^{KP}	<i>OH</i>	<i>LH</i>			
<i>odchyl.</i>	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)			
$\bar{\alpha}_a^{L05}$	0,45	0,36	0,46	0,34	0,31	0,24			
$\bar{\alpha}_{a,Full}^{L05}$	0,39	0,33	0,39	0,30	0,31	0,25			
$\bar{\alpha}_{a,E_{lim}}^{L05}$	0,39	0,31	0,40	0,29	0,30	0,26			
$\hat{\alpha}_a^{L05}$	0,01	0,02	0,01	0,03	0,03	0,02			
$\hat{\alpha}_{a,Full}^{L05}$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01			
$\hat{\alpha}_{a,E_{lim}}^{L05}$	0,01	0,01	0,00	0,02	0,01	0,01			
$\bar{\alpha}_g^{L05}$	0,41	0,39	0,41	0,39	0,39	0,19			
$\bar{\alpha}_{g,Full}^{L05}$	0,38	0,36	0,38	0,35	0,35	0,23			
$\bar{\alpha}_{g,E_{lim}}^{L05}$	0,38	0,35	0,38	0,35	0,34	0,19			
$\hat{\alpha}_g^{L05}$	0,01	0,01	0,01	0,02	0,03	0,03			
$\hat{\alpha}_{g,Full}^{L05}$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01			
$\hat{\alpha}_{g,E_{lim}}^{L05}$	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,03			
	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)			
$\bar{E}_{lim,a}^{L05}$	7,5	7,8	7,3	7,8	8,2	8,9			
$\bar{E}_{lim,a,Full}^{L05}$	8,2	8,2	8,1	8,3	8,3	8,4			
$\bar{E}_{lim,a,E_{lim}}^{L05}$	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2			
$\hat{E}_{lim,a}^{L05}$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,4			
$\hat{E}_{lim,a,Full}^{L05}$	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1			
$\hat{E}_{lim,a,E_{lim}}^{L05}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0			
$\bar{E}_{lim,g}^{L05}$	7,7	7,8	7,7	7,8	7,8	11,0			
$\bar{E}_{lim,g,Full}^{L05}$	8,1	8,2	8,2	8,2	8,2	8,1			
$\bar{E}_{lim,g,E_{lim}}^{L05}$	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2			
$\hat{E}_{lim,g}^{L05}$	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	2,1			
$\hat{E}_{lim,g,Full}^{L05}$	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1			
$\hat{E}_{lim,g,E_{lim}}^{L05}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0			
<i>prům</i>	KH_{PPM}^D	KH_{PPM}^{KP}	<i>prům</i>	<i>OH</i>	<i>prům</i>	KH_{PPM}^D	KH_{PPM}^{KP}	<i>prům</i>	<i>OH</i>
<i>odch.</i>	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	<i>odch.</i>	<i>odch.</i>	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	<i>odch.</i>	<i>odch.</i>	
$\bar{\beta}_a^{L05}$	0,21	0,27	\bar{p}_a^{L05}	0,3	$\bar{\beta}_g^{L05}$	0,03	0,04	\bar{p}_g^{L05}	0,9
$\bar{\beta}_{a,Full}^{L05}$	0,18	0,29	$\bar{p}_{a,Full}^{L05}$	0,4	$\bar{\beta}_{g,Full}^{L05}$	0,05	0,10	$\bar{p}_{g,Full}^{L05}$	0,7
$\bar{\beta}_{a,E_{lim}}^{L05}$	0,28	0,35	$\bar{p}_{a,E_{lim}}^{L05}$	0,3	$\bar{\beta}_{g,E_{lim}}^{L05}$	0,09	0,10	$\bar{p}_{g,E_{lim}}^{L05}$	0,7
$\hat{\beta}_a^{L05}$	0,07	0,10	\hat{p}_a^{L05}	0,1	$\hat{\beta}_g^{L05}$	0,02	0,03	\hat{p}_g^{L05}	0,1
$\hat{\beta}_{a,Full}^{L05}$	0,04	0,07	$\hat{p}_{a,Full}^{L05}$	0,0	$\hat{\beta}_{g,Full}^{L05}$	0,02	0,04	$\hat{p}_{g,Full}^{L05}$	0,1
$\hat{\beta}_{a,E_{lim}}^{L05}$	0,07	0,10	$\hat{p}_{a,E_{lim}}^{L05}$	0,1	$\hat{\beta}_{g,E_{lim}}^{L05}$	0,04	0,04	$\hat{p}_{g,E_{lim}}^{L05}$	0,0

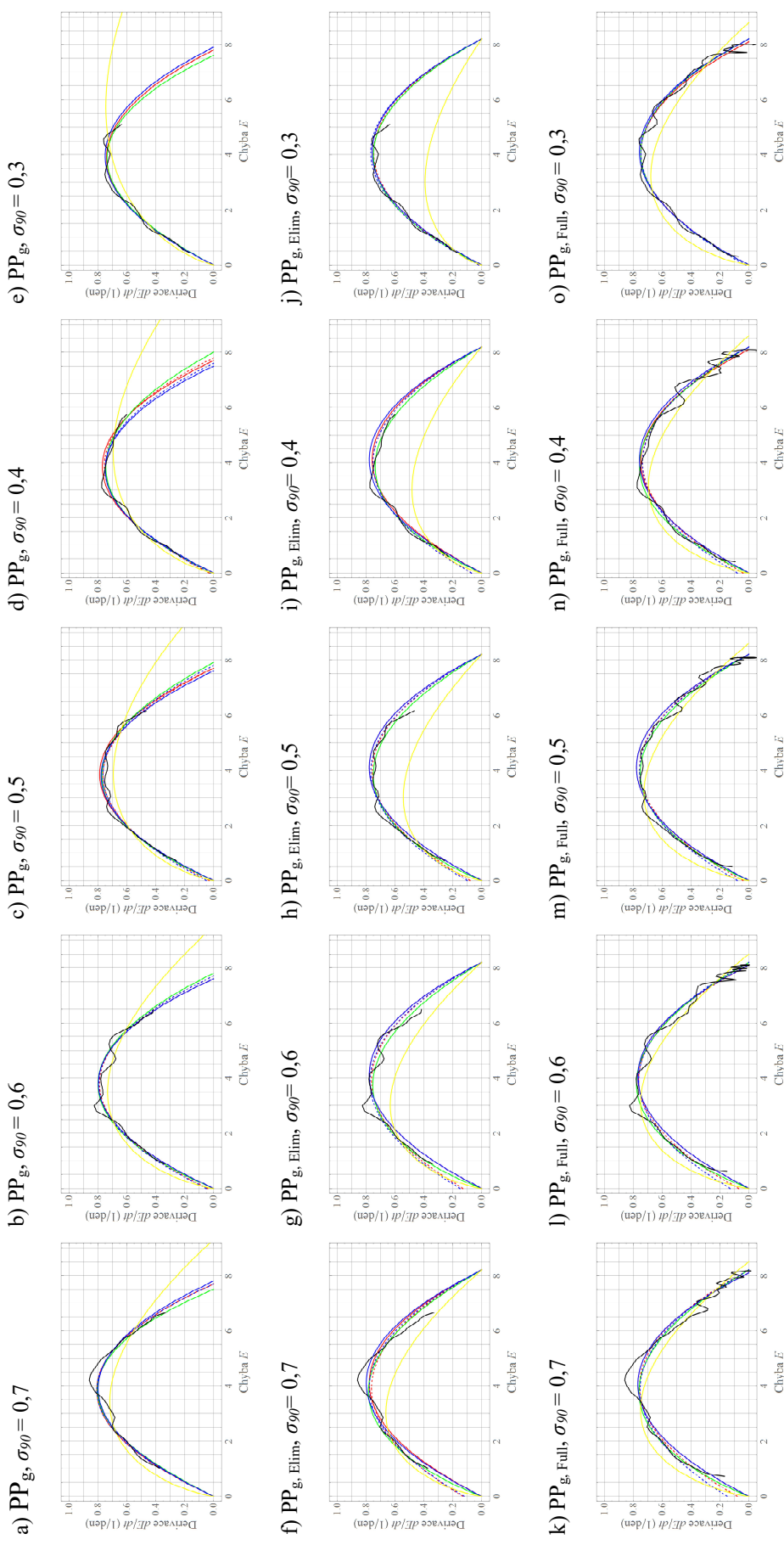
Tabulka 2.3.1: Průměrné hodnoty $\bar{\alpha}$, \bar{E}_{lim} , $\bar{\beta}$, \bar{p} a směrodatná odchylka $\hat{\alpha}$, \hat{E}_{lim} , $\hat{\beta}$, \hat{p} . Data jsou pro všechny počáteční hodnoty (varianta s počáteční chybou (PP), aritmetický (a), geometrický (g) průměr a délka 1-10 dní, s pevně určeným parametrem (E_{lim}) a plná délka (Full).

PP_{PP}^{L05} $E(0)$	KH_{PP}^D		KH_{PM}^D		PP_{PP}^{L05} $E(0)$		OH		KH_{PP}^D		KH_{PM}^D		OH	
	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}
0.8	0.45	7.7	0.33	8.0	0.31	8.2	0.20	8.2	0.41	8.1	0.34	8.2	0.32	8.2
0.7	0.45	7.7	0.34	8.0	0.32	8.2	0.32	8.2	0.40	8.2	0.33	8.2	0.31	8.2
0.6	0.47	7.5	0.38	7.7	0.35	7.9	0.39	7.9	0.40	8.1	0.34	8.2	0.31	8.3
0.5	0.45	7.4	0.36	7.7	0.31	8.2	0.32	8.1	0.39	8.2	0.33	8.2	0.30	8.3
0.4	0.44	7.4	0.33	8.0	0.25	8.7	0.48	8.7	0.38	8.1	0.32	8.2	0.29	8.3
0.3	0.44	7.2	0.39	7.5	0.32	8.0	0.48	8.0	0.37	8.2	0.33	8.2	0.30	8.3
PP_{PP}^{L05} $E(0)$	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}
0.8	0.46	7.5	0.29	8.0	0.27	8.5	0.27	8.5	0.41	8.1	0.29	8.2	0.27	8.3
0.7	0.45	7.6	0.32	8.1	0.25	8.7	0.26	8.4	0.40	8.1	0.29	8.2	0.26	8.4
0.6	0.48	7.3	0.37	7.7	0.26	8.5	0.26	8.5	0.40	8.1	0.30	8.2	0.26	8.4
0.5	0.46	7.2	0.35	7.8	0.24	8.8	0.24	8.8	0.39	8.2	0.30	8.2	0.25	8.5
0.4	0.46	7.0	0.32	7.9	0.22	9.1	0.22	9.1	0.38	8.1	0.29	8.2	0.24	8.5
0.3	0.45	6.9	0.38	7.4	0.20	9.8	0.20	9.8	0.38	8.1	0.31	8.2	0.23	8.5
PP_{PP}^{L05} $E(0)$	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}
0.8	0.41	7.9	0.38	8.0	0.36	8.1	0.36	8.1	0.39	8.1	0.37	8.1	0.36	8.1
0.7	0.42	7.7	0.40	7.7	0.45	7.5	0.45	7.5	0.38	8.1	0.35	8.2	0.33	8.2
0.6	0.42	7.6	0.40	7.7	0.39	8.4	0.39	8.4	0.38	8.1	0.36	8.2	0.34	8.2
0.5	0.41	7.7	0.39	7.7	0.37	8.2	0.37	8.2	0.38	8.2	0.36	8.2	0.34	8.2
0.4	0.40	7.7	0.38	7.8	0.35	8.0	0.35	8.0	0.37	8.1	0.35	8.2	0.34	8.2
0.3	0.38	7.8	0.38	7.8	0.40	7.6	0.40	7.6	0.37	8.1	0.37	8.1	0.36	8.2
PP_{PP}^{L05} $E(0)$	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}
0.8	0.41	7.8	0.37	8.0	0.22	9.3	0.22	9.3	0.39	8.1	0.35	8.1	0.25	8.4
0.7	0.41	7.8	0.42	7.7	0.21	9.3	0.21	9.3	0.38	8.1	0.33	8.2	0.24	8.5
0.6	0.42	7.6	0.40	7.7	0.21	9.5	0.21	9.5	0.38	8.1	0.34	8.2	0.24	8.5
0.5	0.41	7.6	0.38	7.8	0.20	10.5	0.20	10.5	0.38	8.2	0.35	8.2	0.23	8.6
0.4	0.40	7.5	0.39	7.6	0.16	11.8	0.16	11.8	0.37	8.2	0.34	8.2	0.22	8.6
0.3	0.38	7.9	0.37	7.9	0.13	15.6	0.13	15.6	0.37	8.2	0.36	8.2	0.21	8.8

Tabulka 2.3.2: Hodnoty parametrů aproximací (rovnice (2.3.1) - (2.3.6)) diferencí KP respektive KP o délce 1 – 10 dní modelu L05 (vlevo), o plné délce (uprostřed) a s pevně určeným parametrem E_{lim} (vpravo) modelu L05 ($N = 90$, varianta s počáteční chybou PP^{L05}) pro počáteční hodnoty označené $E(0)$. PP_a značí KP určenou aritmetickým průměrem a PP_g značí KP určenou geometrickým průměrem.



Obrázek 2.3.1: Diference KP modelu L05, varianta s počáteční chybou, aritmetickým průměrem ($\text{PP}_{a, \text{Elim}}$), s počátečními hodnotami $\sigma_{90} = 0,7 - 0,3$ (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaná), LH (žlutá), OH (zelená), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH^D_{PP} s parametry z $\text{KH}^{\text{KP}}_{PP}$ (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z $\text{KH}^{\text{KP}}_{PM}$ (modrá, čárkovaná). a) - e) $\text{PP}_{a, \text{Elim}}$. f) - j) $\text{PP}_{a, \text{Elim}}$. k) - o) $\text{PP}_{a, \text{Full}}$.



Obrázek 2.3.2: Differenze KP modelu L05, varianta s počáteční chybou, geometrickým průměrem (PP_g), s počátečními hodnotami $\sigma_{90} = 0,7 - 0,3$ (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaná), LH (žlutá), OH (zelená), KH^D_{PP} s parametry z KH^{KP}_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaná). a) - e) PP_g , f) - j) PP_g , Elim., k) - o) PP_g , Full.

2.3.2 Křivka prediktability modelu ECMWF pro variantu s počáteční chybou

Pro výpočet E (KP) jsou použity data MEC (roční průměr z období 1986-2011, varianta s počáteční chybou). Metoda výpočtu je určena v kapitole 2.1.2 a jsou prezentovány výsledky pro aritmetický průměr (označeno PP_a). Pro geometrický průměr nejsou výsledky prezentovány, protože jsou blízké výsledkům z aritmetického průměru (kapitola 2.2.1). Aproximována je KP a její difference, která je určena body $\left(\frac{(E(t+\Delta t)+E(t))}{2}; \frac{(E(t+\Delta t)-E(t))}{\Delta t}\right)$, kde t je čas a $\Delta t = 0,25$ dne do 5. dne KP a $\Delta t = 0,5$ dne od 5. dne KP. Zvolená délka je 1-10 dní a 1-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{\lim} = E_{\infty}$ (označeno $PP_{E_{\lim}}$, E_{∞} viz Obrázek 2.1.1). Aproximace hypotézami (rovnice (2.3.1) - (2.3.6)) jsou určeny nelineárními regresními metodami za pomoci programu Wolfram Mathematica.

Obrázek 2.3.3 pro délku KP 1-10 dní a Obrázek 2.3.4 pro délku 1-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{\lim} = E_{\infty}$ ukazují difference KP MEC pro vybrané roky (černá) a aproximace KH_{PP}^D (červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH_{PP}^D s parametry z KH_{PP}^{KP} (modrá) a aproximace KH_{PM}^D s parametry z KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaně).

Tabulka 2.3.4 pro délku KP 1-10 dní a Tabulka 2.3.5 pro délku 1-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{\lim} = E_{\infty}$ zobrazují hodnoty parametrů aproximací diferencí KP respektive KP MEC (roční aritmetický průměr 1986 - 2011, varianta s počáteční chybou). Tabulka 2.3.3 poté ukazuje průměry určené z hodnot parametrů z jednotlivých let a jejich směrodatné odchylky.

Pro aproximace KP s délkou 1-10 dní je z Obrázku 2.3.3 patrné, že pro délku bez pevně určeného E_{\lim} je tvar difference KP přibližně do roku 1997 blízký symetrické parabole tj. KH_{PP}^D a KH_{PP}^{KP} opticky vhodně aproximují data. To potvrzuje β_a^{MEC} pro KH_{PM}^D , který je menší než 1 m.d^{-1} a dokonce v nějakých případech menší než 0 m.d^{-1} a to do roku 1996 (Tabulka 2.3.4) a také to potvrzuje parametr p_a^{MEC} u OH , který je větší než 0,6 do roku 1997 (Tabulka 2.3.4). Od roku 1998 respektive 1997 poté hodnoty β_a^{MEC} pro KH_{PM}^D rostou a p_a^{MEC} u OH klesají, tj. maximum těchto aproximací je posunuto více vlevo (nesymetrická parabola), což potvrzuje již menší optická

podobnost KH_{PP}^D a KH_{PP}^{KP} s daty. Maximum aproximací však není posunuto doleva natolik, aby byla vhodná LH . Je zajímavé si povšimnout, že hodnoty $\bar{\beta}_a^{MEC}$ jsou pro KH_{PM}^{KP} skoro dvojnásobné hodnotám $\bar{\beta}_a^{MEC}$ pro KH_{PM}^D a β_a^{MEC} nemají podobný trend jako u KH_{PM}^D .

Pro aproximace s délkou 1-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{lim} = E_\infty$ je z Obrázku 2.3.4 patrná podobnost dat spíše s LH , která má výrazně nesymetrický tvar aproximace. To potvrzuje jednak nevhodnost KH_{PP}^D a KH_{PP}^{KP} a zároveň, ve srovnání s délkou bez pevně určeného E_{lim} , jsou hodnoty $\bar{\beta}_{a,E_{lim}}^{MEC}$ pro KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} kolem trojnásobku $\bar{\beta}_a^{MEC}$ a pro OH platí $\bar{p}_a^{MEC} \approx 3 \cdot \bar{p}_{a,E_{lim}}^{MEC}$ (Tabulka 2.3.3) tj. OH je výrazně blíže LH než je KH_{PP} .

Pro E_{lim} platí, že hodnoty pro délku 1-10 dní jsou nižší u KH_{PP}^D , KH_{PP}^{KP} , KH_{PM}^D , KH_{PM}^{KP} , OH a vyšší u LH , než hodnoty E_{lim} pro délku s pevně určeným parametrem $E_{lim} = E_\infty$. Nejbližší jsou OH a nejdálčenější jsou KH_{PP}^D , KH_{PP}^{KP} a LH (Tabulka 2.3.3). U délky bez pevně určeného parametru E_{lim} je patrné, že v roce 1986 a 1987 jsou hodnoty E_{lim} výrazně nižší. Pro obě délky platí, že přibližně do roku 2000 jsou převážně hodnoty E_{lim} větší než po tomto roku (Tabulky 2.3.4 a 2.3.5).

Pro $\bar{\alpha}^{MEC}$ (Tabulka 2.3.3) platí, že největší rozdíl mezi délkami s pevným a bez pevného E_{lim} je pro KH_{PM} a nejmenší pro LH , přičemž se mezi hypotézami, kromě LH , rozdíly liší v řádu jednotek setin dne⁻¹ a platí, že největší hodnoty mají KH_{PP} , poté KH_{PM} a OH nejmenší je pro LH . Popsané platí pro délku s pevným a bez pevného E_{lim} .

<i>prům.</i>	KH_{PP}^D	KH_{PM}^D	KH_{PP}^{KP}	KH_{PM}^{KP}	<i>OH</i>	<i>LH</i>
<i>odchyl.</i>	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)
$\bar{\alpha}_a^{MEC}$	0,45	0,41	0,46	0,39	0,36	0,21
$\bar{\alpha}_{a,E_{lim}}^{MEC}$	0,37	0,29	0,37	0,27	0,27	0,23
$\hat{\alpha}_a^{MEC}$	0,02	0,03	0,02	0,03	0,04	0,01
$\hat{\alpha}_{a,E_{lim}}^{MEC}$	0,03	0,04	0,03	0,02	0,03	0,01
	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)
$\bar{E}_{lim,a}^{MEC}$	108	110	106	111	115	138
$\bar{E}_{lim,a,E_{lim}}^{MEC}$	129	129	129	129	129	129
$\hat{E}_{lim,a}^{MEC}$	7	6	7	6	7	9
$\hat{E}_{lim,a,E_{lim}}^{MEC}$	5	5	5	5	5	5
		(md ⁻¹)		(md ⁻¹)		
$\bar{\beta}_a^{MEC} / \bar{p}_a^{MEC}$		0,97		1,82	0,6	
$\bar{\beta}_{a,E_{lim}}^{MEC} / \bar{p}_{a,E_{lim}}^{MEC}$		3,35		4,46	0,24	
$\hat{\beta}_a^{MEC} / \hat{p}_a^{MEC}$		0,68		0,59	0,2	
$\hat{\beta}_{a,E_{lim}}^{MEC} / \hat{p}_{a,E_{lim}}^{MEC}$		0,61		0,88	0,1	

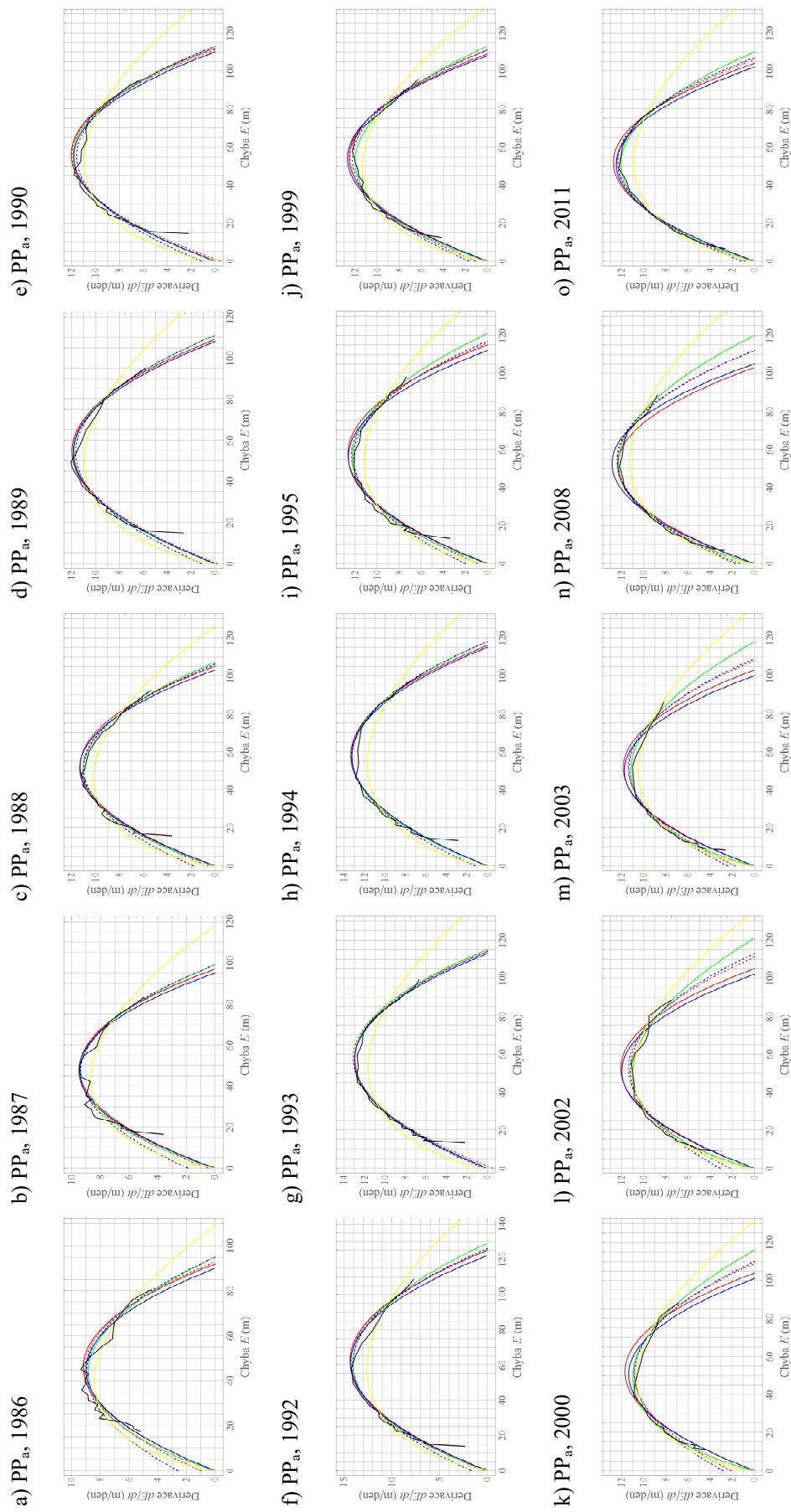
Tabulka 2.3.3: Průměrné hodnoty $\bar{\alpha}$, \bar{E}_{lim} , $\bar{\beta}$, \bar{p} a směrodatné odchylky $\hat{\alpha}$, \hat{E}_{lim} , $\hat{\beta}$, \hat{p} . Data jsou pro roční průměry z let 1986–2011 (varianta s počáteční chybou (PP), aritmetický (a) průměr a délka 1-10 dní a 1-10 dní s pevně určeným parametrem E_{lim}).

PP_a^{MEC}		KH_{PP}^D		KH_{PM}^D		OH		PP_a^{MEC}		KH_{PP}^{KP}		KH_{PM}^{KP}		LH		
rok	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	β (m/d)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	p (-)	E_{lim} (m)	rok	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	β (m/d)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)
1986	0,40	92,00	0,37	0,98	93,00	0,33	0,63	95,00	1986	0,40	90,00	0,32	2,60	95,00	0,21	109,00
1987	0,39	97,00	0,38	0,49	97,00	0,35	0,74	99,00	1987	0,40	95,00	0,34	1,89	99,00	0,20	118,00
1988	0,43	105,00	0,41	0,57	105,00	0,38	0,74	107,00	1988	0,44	103,00	0,38	1,82	106,00	0,22	126,00
1989	0,44	109,00	0,44	-0,22	109,00	0,41	0,88	111,00	1989	0,44	108,00	0,40	1,13	111,00	0,22	135,00
1990	0,43	112,00	0,44	-0,44	111,00	0,41	0,92	113,00	1990	0,43	110,00	0,39	1,14	113,00	0,21	142,00
1991	0,43	114,00	0,41	0,63	115,00	0,36	0,69	118,00	1991	0,44	111,00	0,38	1,90	116,00	0,21	143,00
1992	0,46	125,00	0,45	0,41	125,00	0,40	0,73	129,00	1992	0,47	122,00	0,42	1,70	126,00	0,22	156,00
1993	0,45	115,00	0,47	-0,54	114,00	0,45	0,99	115,00	1993	0,46	113,00	0,45	0,31	114,00	0,22	144,00
1994	0,46	116,00	0,46	0,03	116,00	0,43	0,86	118,00	1994	0,46	115,00	0,43	1,18	118,00	0,22	145,00
1995	0,44	115,00	0,41	0,88	116,00	0,36	0,64	121,00	1995	0,45	112,00	0,38	2,00	117,00	0,21	145,00
1996	0,44	114,00	0,41	0,84	116,00	0,37	0,70	119,00	1996	0,44	113,00	0,39	1,60	117,00	0,21	143,00
1997	0,44	115,00	0,40	1,14	117,00	0,35	0,62	121,00	1997	0,44	113,00	0,38	1,80	117,00	0,21	144,00
1998	0,44	114,00	0,39	1,66	118,00	0,33	0,50	123,00	1998	0,45	112,00	0,35	2,87	120,00	0,22	143,00
1999	0,46	109,00	0,43	1,06	111,00	0,38	0,66	113,00	1999	0,47	108,00	0,41	1,68	111,00	0,23	134,00
2000	0,45	104,00	0,36	2,10	109,00	0,30	0,34	116,00	2000	0,45	101,00	0,34	2,84	110,00	0,22	131,00
2001	0,47	102,00	0,40	1,73	106,00	0,33	0,42	112,00	2001	0,47	99,00	0,38	2,27	106,00	0,22	129,00
2002	0,46	105,00	0,37	2,17	111,00	0,28	0,27	121,00	2002	0,47	102,00	0,34	3,10	113,00	0,22	135,00
2003	0,46	103,00	0,39	1,72	108,00	0,30	0,34	118,00	2003	0,47	100,00	0,37	2,41	109,00	0,21	136,00
2004	0,46	104,00	0,40	1,34	108,00	0,33	0,47	115,00	2004	0,47	102,00	0,39	1,70	108,00	0,21	140,00
2005	0,46	103,00	0,41	1,26	107,00	0,33	0,48	114,00	2005	0,47	101,00	0,39	1,77	107,00	0,21	138,00
2006	0,46	103,00	0,39	1,54	107,00	0,31	0,40	116,00	2006	0,47	100,00	0,38	1,90	107,00	0,21	137,00
2007	0,46	103,00	0,40	1,30	107,00	0,32	0,45	115,00	2007	0,47	100,00	0,39	1,68	107,00	0,20	141,00
2008	0,48	108,00	0,42	1,32	112,00	0,34	0,46	120,00	2008	0,49	105,00	0,41	1,73	112,00	0,21	146,00
2009	0,49	105,00	0,44	1,21	108,00	0,37	0,53	114,00	2009	0,50	103,00	0,43	1,60	108,00	0,22	139,00
2010	0,48	107,00	0,43	1,09	110,00	0,36	0,56	116,00	2010	0,48	105,00	0,42	1,47	111,00	0,21	147,00
2011	0,49	104,00	0,45	0,83	106,00	0,39	0,64	110,00	2011	0,49	102,00	0,44	1,20	107,00	0,21	141,00

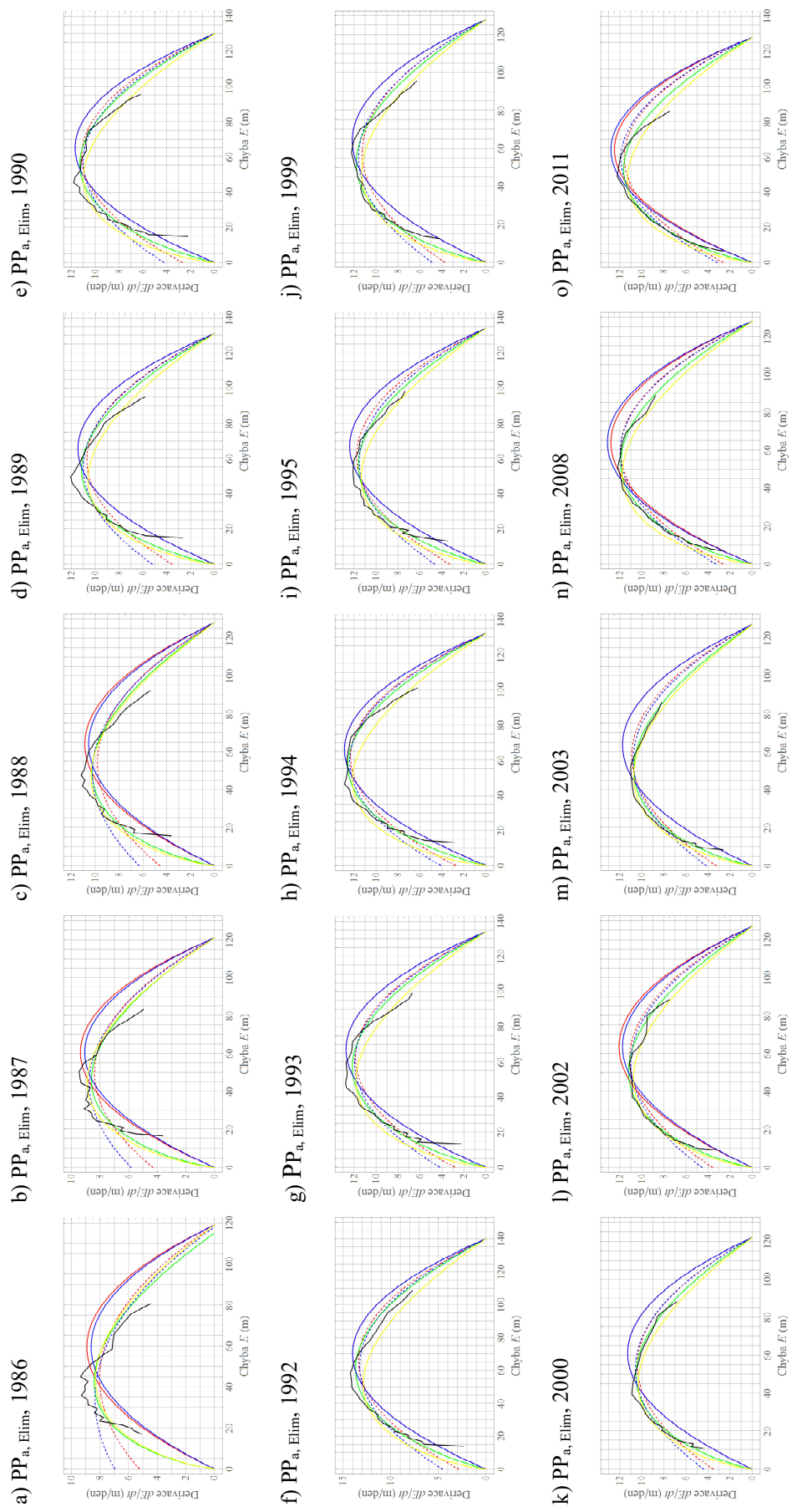
Tabulka 2.3.4: Hodnoty parametrů aproximací diferencí KP respektive KP o délce 1 – 10 dní MEC (roční aritmetický průměr 1986 - 2011, varianta s počáteční chybou PP_a^{MEC}).

PP _{a,E_{lim}} ^{MEC} rok	KH ^D _{PP}		KH ^D _{PM}		OH		PP _{a,E_{lim}} ^{MEC} rok		KH ^{FP}		KH ^{FP} _{PM}		LH			
	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	β (rok)	α (d ⁻¹)	P (-)	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)	rok	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	β (m/d)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)
1986	0,30	119,00	0,17	5,26	0,20	0,01	0,20	119,00	1986	0,29	119,00	0,14	6,98	119,00	0,19	119,00
1987	0,31	121,00	0,20	4,30	0,20	0,07	0,20	121,00	1987	0,30	121,00	0,18	5,83	121,00	0,20	121,00
1988	0,34	128,00	0,23	4,58	0,23	0,11	0,23	128,00	1988	0,33	128,00	0,21	6,32	128,00	0,22	128,00
1989	0,35	131,00	0,27	3,56	0,26	0,25	0,26	131,00	1989	0,35	131,00	0,25	5,22	131,00	0,22	131,00
1990	0,36	130,00	0,30	2,70	0,28	0,38	0,28	130,00	1990	0,36	130,00	0,27	4,24	130,00	0,23	130,00
1991	0,36	133,00	0,29	3,30	0,27	0,30	0,27	133,00	1991	0,36	133,00	0,26	4,87	133,00	0,23	133,00
1992	0,40	140,00	0,34	2,86	0,32	0,42	0,32	140,00	1992	0,40	140,00	0,31	4,56	140,00	0,25	140,00
1993	0,38	134,00	0,31	2,86	0,29	0,36	0,29	134,00	1993	0,38	134,00	0,29	4,22	134,00	0,24	134,00
1994	0,39	132,00	0,33	2,76	0,31	0,41	0,31	132,00	1994	0,39	132,00	0,31	4,12	132,00	0,25	132,00
1995	0,37	134,00	0,30	3,30	0,27	0,30	0,27	134,00	1995	0,37	134,00	0,27	4,66	134,00	0,23	134,00
1996	0,36	135,00	0,28	3,61	0,27	0,27	0,27	135,00	1996	0,36	135,00	0,27	4,73	135,00	0,23	135,00
1997	0,36	136,00	0,28	3,70	0,26	0,25	0,26	136,00	1997	0,36	136,00	0,26	4,86	136,00	0,22	136,00
1998	0,37	133,00	0,29	3,65	0,27	0,26	0,27	133,00	1998	0,37	133,00	0,27	4,75	133,00	0,23	133,00
1999	0,38	128,00	0,29	3,75	0,28	0,24	0,28	128,00	1999	0,38	128,00	0,28	4,92	128,00	0,24	128,00
2000	0,37	122,00	0,28	3,55	0,26	0,22	0,26	122,00	2000	0,37	122,00	0,27	4,40	122,00	0,23	122,00
2001	0,38	123,00	0,29	3,56	0,26	0,18	0,26	123,00	2001	0,38	123,00	0,27	4,40	123,00	0,24	123,00
2002	0,38	127,00	0,29	3,60	0,26	0,17	0,26	127,00	2002	0,37	127,00	0,27	4,55	127,00	0,23	127,00
2003	0,37	127,00	0,29	3,26	0,25	0,18	0,25	127,00	2003	0,37	127,00	0,27	4,17	127,00	0,23	127,00
2004	0,37	128,00	0,30	3,00	0,26	0,23	0,26	128,00	2004	0,38	128,00	0,28	3,69	128,00	0,23	128,00
2005	0,37	128,00	0,29	3,02	0,26	0,21	0,26	128,00	2005	0,37	128,00	0,28	3,73	128,00	0,22	128,00
2006	0,37	126,00	0,29	3,05	0,26	0,22	0,26	126,00	2006	0,38	126,00	0,28	3,71	126,00	0,23	126,00
2007	0,38	124,00	0,31	2,64	0,27	0,28	0,27	124,00	2007	0,39	124,00	0,30	3,20	124,00	0,23	124,00
2008	0,40	128,00	0,33	2,66	0,29	0,30	0,29	128,00	2008	0,41	128,00	0,32	3,31	128,00	0,25	128,00
2009	0,39	130,00	0,31	3,11	0,27	0,21	0,27	130,00	2009	0,40	130,00	0,30	3,81	130,00	0,24	130,00
2010	0,38	135,00	0,31	2,90	0,26	0,22	0,26	135,00	2010	0,39	135,00	0,30	3,44	135,00	0,23	135,00
2011	0,39	128,00	0,32	2,64	0,28	0,27	0,28	128,00	2011	0,40	128,00	0,32	3,18	128,00	0,24	128,00

Tabulka 2.3.5: Hodnoty parametrů aproximací diferencí KP respektive KP o délce 1 – 10 dní s pevně určeným parametrem $E_{lim} = E_{\infty}$ MEC (roční aritmetický průměr 1986 - 2011, varianta s počáteční chybou PP^{MEC}_{a,E_{lim}}).



Obrázek 2.3.3: Diference KP MEC, varianta s počáteční chybou, aritmetický průměr, pro vybrané roky (PP_a) (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaná), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH^D_{PP} s parametry z KH^{KP}_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaná).



Obrázek 2.3.4: Diference KP MEC, varianta s počáteční chybou, aritmetický průměr, aproximace s parametrem $E_{lim} = E_{\infty}$, pro vybrané roky (PP_{a, Elim}) (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaná), LH (žlutá), OH (zelená), KH^D_{PP} s parametry z KH^KP_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^KP_{PM} (modrá, čárkovaná).

2.3.3 Porovnání aproximací křivek prediktability modelů pro variantu s počáteční chybou

Následuje porovnání parametrů modelů ECMWF a L05. Na základě znalosti teoreticky určených hodnot $\lambda^{L05} = 0,35 \text{ d}^{-1}$ a $E_{\infty}^{L05} = 8,2$ modelu L05 a výsledků porovnání jsou odhadnuty λ^{MEC} a $E_{\infty H}^{MEC}$. Rozdíl parametru hypotéz α mezi L05 a MEC, rozdíl parametru p (OH) mezi L05 a MEC a odhad Ljapunovova exponentu MEC λ^{MEC} na základě parametru α^{MEC} hypotéz MEC, Ljapunovova exponentu λ^{L05} a parametru α^{L05} hypotéz modelu L05 vztahem: $\lambda^{MEC} = \alpha^{MEC} + (\lambda^{L05} - \alpha^{L05}) \text{ den}^{-1}$ ukazuje Obrázek 2.3.6. Levý sloupec je pro verzi o délce KP 1-10 dní. Pravý sloupec je pro verzi o délce KP 1-10 dní s pevným $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$. Hodnoty $E(0)$ modelu L05 ($N = 90$) přiřazené k jednotlivým rokům MEC a způsob průměru pro L05 ($N = 90$) se po prvním náhledu ukázal rozdílný pro verze s a bez pevného $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$. Nové hodnoty $E(0)$ pro verzi bez pevného $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ ukazuje třetí sloupec Tabulky 2.3.6 a způsob průměru k určení KP modelu L05 ($N = 90$), která je nejbližší KP MEC v daných letech zobrazuje první sloupec Tabulka 2.3.6. Důvodem je skutečnost, že pro tuto verzi jsou hodnoty E_{∞} (Obrázek 2.3.5) nižší než teoretické E_{∞} (Obrázek 2.1.1) a při porovnání modelu MEC a L05 tato rozdílnost vede k jiným hodnotám. Více viz kapitola 2.3.7. Hodnoty pro verzi s pevným $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ zůstávají stejné, jak je představeno.

Pro rozdíl $\alpha^{L05} - \alpha^{MEC}$ je pro verzi bez pevného $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ z Obrázku 2.3.6 (a) patrné, že většina hodnot leží v intervalu $\langle -0,04; 0,02 \rangle \text{ d}^{-1}$, kde pro porovnání, směrodatná odchylka průměrné hodnoty $\bar{\alpha}^{MEC}$ pro KH_{PP}^D je $0,02 \text{ d}^{-1}$ a pro OH je $0,04 \text{ d}^{-1}$ (Tabulka 2.3.3) tj. rozdíl $\alpha^{L05} - \alpha^{MEC}$ je pro většinu hodnot v rámci směrodatné odchylky v rámci stejného systému (MEC). Větší než v intervalu udávané hodnoty nastanou kolem let 1985, 1997 a menší kolem let 1993, 2010. Pro rozdíl $\alpha^{L05} - \alpha^{MEC}$ je pro verzi s pevným $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ z Obrázku 2.3.6 (b) patrné, že většina hodnot leží také v intervalu $\langle -0,02; 0,04 \rangle \text{ d}^{-1}$, přičemž do roku 1991 je hodnota rozdílu větší než v udávaném intervalu.

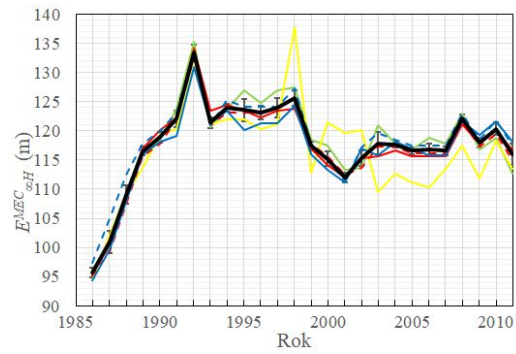
Pro rozdíl parametru OH $p^{L05} - p^{MEC}$ je pro verzi bez pevného $E_{lim} = E_{\infty}$ z Obrázku 2.3.6 (c) patrné, že většina hodnot leží v intervalu $\langle -0,15; 0,15 \rangle$, kde pro porovnání, směrodatná odchylka průměrné hodnoty \bar{p}_a^{MEC} je 0,2 (Tabulka 2.3.3) tj. rozdíl $p^{L05} - p^{MEC}$ je pro většinu hodnot v rámci směrodatné odchylky v rámci stejného systému (MEC). Mimo uvedený interval leží hodnoty v letech 1995, 1997, 2000, 2011. Pro rozdíl $p^{L05} - p^{MEC}$ je pro verzi s pevným $E_{lim} = E_{\infty}$ z Obrázku 2.3.6 (d) patrné, že většina hodnot leží také v intervalu $\langle -0,15; 0,15 \rangle$, přičemž kolem roků 1987, 2005 a 2010 jsou hodnoty rozdílu větší než v udávaném intervalu.

Odhad průměrné hodnoty Ljapunovova exponentu MEC $\lambda^{MEC} = \alpha^{MEC} + (\lambda^{L05} - \alpha^{L05})$ pro verzi bez pevného $E_{lim} = E_{\infty}$ leží v intervalu $\langle 0,33; 0,41 \rangle$ d^{-1} (Obrázek 2.3.6 (e)), přičemž hodnota je s roky rostoucí. Do průměru není použita LH , protože se průběh výrazně odlišuje od průběhu ostatních hypotéz a zároveň LH není vhodná pro popis KP (kapitoly 2.3.1 a 2.3.2). Směrodatná odchylka průměru má převážně hodnotu 0,01 d^{-1} (hodnoty λ^{MEC} jsou pro hypotézy blízké). Větší směrodatná odchylka (0,02 d^{-1}) nastává pouze v letech 1991, 1995, 1997 a 1999. Pro verzi s pevným $E_{lim} = E_{\infty}$ leží $\bar{\lambda}^{MEC}$ v intervalu $\langle 0,24; 0,37 \rangle$ d^{-1} (Obrázek 2.3.6 (f)). Hodnoty do roku 1992 rychle rostou právě z hodnoty 0,24 d^{-1} do hodnoty 0,37 d^{-1} a poté se drží v intervalu $\langle 0,32; 0,36 \rangle$ d^{-1} . Do průměru není opět použita LH a směrodatná odchylka průměru má také převážně hodnotu 0,01 d^{-1} . Větší směrodatná odchylka (0,02 d^{-1}) nastává pouze v roce 2009. Je zde rozdíl v odhadu λ^{MEC} mezi verzemi s a bez pevně určeného parametru $E_{lim} = E_{\infty}$, který je zapříčiněn rozdílem mezi E_{lim}^{MEC} určeným z hypotéz a E_{∞}^{MEC} určeným teoreticky. Tabulka 2.3.6 zobrazuje rozdíl E_{lim} mezi hypotézami a OH a mezi OH a E_{∞} pro KP MEC vypočtenou aritmetickým průměrem z dat roku označeného v druhém sloupci a pro KP L05 vypočtenou průměrem označeným v prvním sloupci s počáteční hodnotou $E(0)$ označenou ve třetím sloupci. Čtvrtý až osmý sloupec ukazují procentuální absolutní hodnotu rozdílu normovaných vzdáleností mezi MEC a L05 a mezi E_{lim} OH a hypotéz:

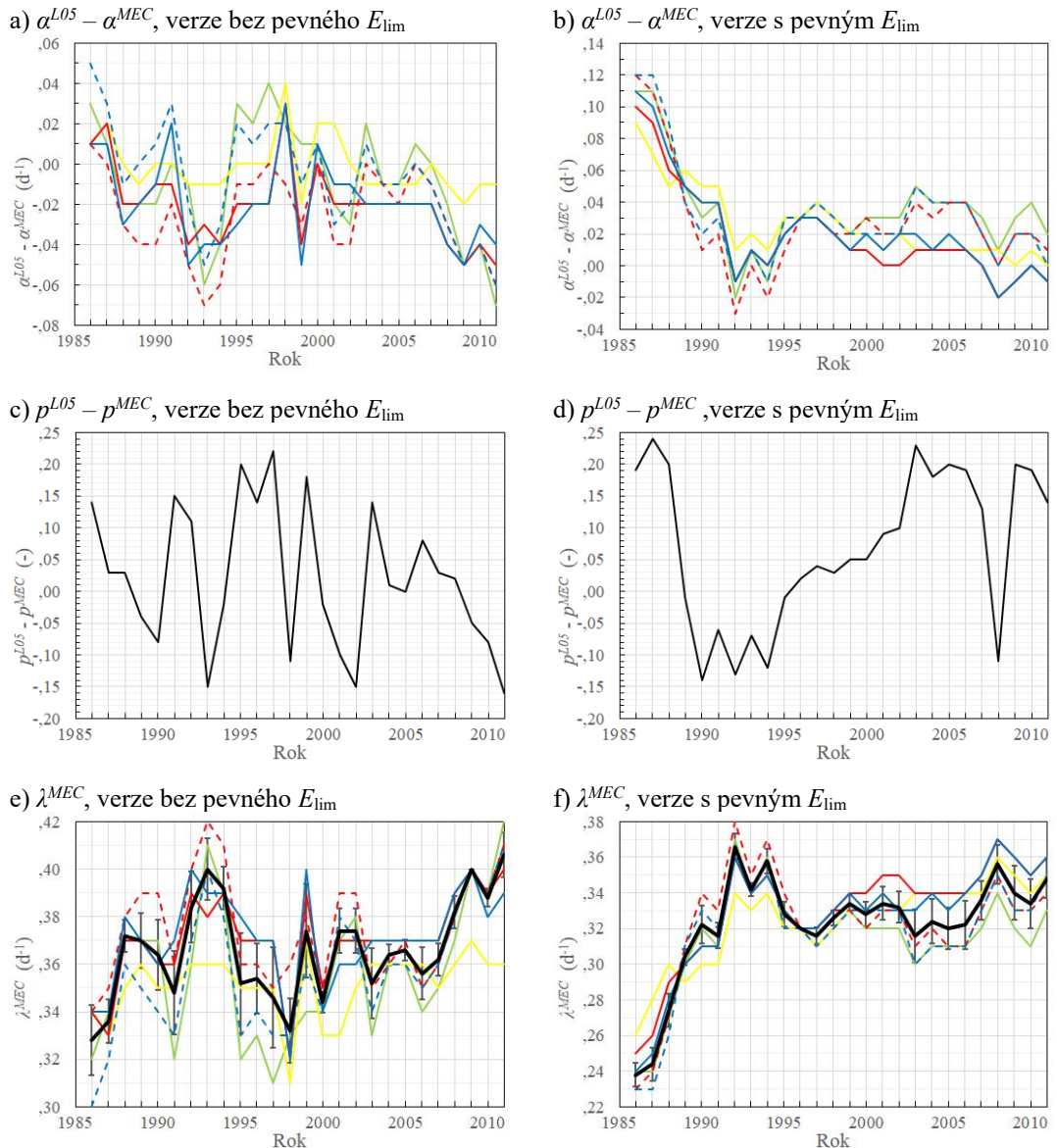
$$\left| \left(\left(E_{lim,OH}^{L05} - E_{lim,hypotéza}^{L05} \right) / E_{lim,OH}^{L05} \right) - \left(\left(E_{lim,OH}^{MEC} - E_{lim,hypotéza}^{MEC} \right) / E_{lim,OH}^{MEC} \right) \right| \cdot 100\% . \quad OH \quad \text{bylo}$$

vybráno jako referenční hodnota, protože je pro oba modely nejbližší E_∞ . Poslední sloupec ukazuje procentuální normovanou vzdálenost mezi E_∞ a E_{lim}^{OH} modelu L05: $\left(\left(E_\infty^{L05} - E_{\text{lim},OH}^{L05}\right)/E_\infty^{L05}\right) \cdot 100\%$. Předposlední sloupec ukazuje to stejné jako poslední sloupec, ale pro MEC a devátý sloupec ukazuje rozdíl mezi MEC a L05. Verze o délce KP 1-10 dní. Z tabulky vyplývá, že nejlépe udržují podobnou vzdálenost od OH mezi modely aproximace KH_{PP}^D a KH_{PM}^D s hodnotami do 3 % (kromě KH_{PP}^D v roce 2011). Do 3 % znamená, že při teoretickém $E_{\text{lim}}^{MEC} = E_{\text{lim}}^{L05} = 100$ m by rozdíl hypotéz od OH mezi modely činil maximálně 3 m, což je hodnota zanedbatelná. Nejhůře vzdálenost udržuje LH , kde rozdíl dosahuje až 9 % (1998). Malou podobnost ukazuje procentuální normovaná vzdálenost mezi E_∞ a E_{lim}^{OH} rozdíl mezi MEC a L05: $\left|\left(\left(E_\infty^{MEC} - E_{\text{lim},OH}^{MEC}\right)/E_\infty^{MEC}\right) - \left(\left(E_\infty^{L05} - E_{\text{lim},OH}^{L05}\right)/E_\infty^{L05}\right)\right| \cdot 100\%$. (devátý sloupec Tabulky 2.3.6 Tabulka 2.3.6), kde vzdálenost E_{lim}^{OH} je u MEC průměrně o 10 % větší než u modelu L05. Maximální rozdíl je 22 % v roce 1986 a minimální je 5 % v letech 2003, 2006 a 2007.

Obrázek 2.3.5 zobrazuje odhad limitní hodnoty KP MEC $E_{\infty H}^{MEC}$ na základě parametru E_{lim}^{MEC} hypotéz MEC, normovaného rozdílu teoretické limitní hodnoty E_∞^{L05} a odhadu parametru E_{lim}^{L05} hypotéz modelu L05: $E_{\infty H}^{MEC} = E_{\text{lim}}^{MEC} + \left(E_{\text{lim}}^{MEC} \cdot \left(E_\infty^{L05} - E_{\text{lim}}^{L05}\right)\right)/E_\infty^{L05}$ m. Z obrázku je patrná podobnost výsledných hodnot mezi hypotézami kromě LH . Směrodatná odchylka průměrné hodnoty mezi hypotézami (kromě LH) je v letech 1987, 1988, 1995, 1997, 2003 a 2011 2 m v ostatních letech je 1 m. Hodnoty průměrné hodnoty $\bar{E}_{\infty H}^{MEC}$ rostou v letech 1985 až 1992 z hodnoty 96 m na hodnotu 133 m. Poté klesnou a do roku 1998 jsou přibližně 125 m. Nastává pokles s lokálním minimem o hodnotě 112 m v roce 2001. Do roku 2011 se hodnoty drží mezi 115 m a 122 m. Parametr β není porovnáván z důvodu jeho porovnání a diskutování v kapitole 2.3.7.



Obrázek 2.3.5: Odhad limitní hodnoty KP MEC $E_{\infty H}^{MEC}$ na základě parametru E_{\lim}^{MEC} hypotéz MEC, normovaného rozdílu teoretické limitní hodnoty E_{∞}^{L05} a odhadu parametru E_{\lim}^{L05} hypotéz modelu L05: $E_{\infty H}^{MEC} = E_{\lim}^{MEC} + \left(E_{\lim}^{MEC} \cdot (E_{\infty}^{L05} - E_{\lim}^{L05}) \right) / E_{\infty}^{L05}$ m. Označeny jsou: KH_{PP}^D (červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), KH_{PP}^{KP} (modrá), KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaně) a průměr přes hypotézy bez LH (černá). Chybové úsečky ukazují směrodatnou odchylku.



Obrázek 2.3.6: a), b) rozdíl parametru hypotéz α mezi L05 a MEC. Označeny jsou: KH_{PP}^D (červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), KH_{PP}^{KP} (modrá) a KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaně). c), d) rozdíl parametru OH p mezi L05 a MEC. e), f) odhad Ljapunovova exponentu MEC λ^{MEC} na základě parametru α^{MEC} hypotéz MEC, Ljapunovova exponentu λ^{L05} a parametru α^{L05} hypotéz modelu L05 vztahem: $\lambda^{MEC} = \alpha^{MEC} + (\lambda^{L05} - \alpha^{L05}) \text{ den}^{-1}$. Označeny jsou: KH_{PP}^D (červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), KH_{PP}^{KP} (modrá), KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaně) a průměr přes hypotézy bez LH (černá). Chybové úsečky ukazují směrodatnou odchylku. Verze o délce KP 1-10 dní. Levý sloupec verze bez pevného E_{lim} . Právý sloupec s pevným E_{lim} .

Prům. <i>PP</i>	Rok MEC	$E(0)$ L05	KH_{PP}^D $\ E_{\lim;OH}^{L05} - E_{\lim}^{L05}\ $ (%)	KH_{PM}^D $\ E_{\lim;OH}^{L05} - E_{\lim}^{L05}\ $ (%)	KH_{PP}^{KP} $\ E_{\lim;OH}^{MEC} - E_{\lim}^{MEC}\ $ (%)	KH_{PM}^{KP} $\ E_{\lim;OH}^{MEC} - E_{\lim}^{MEC}\ $ (%)	LH (%)	OH (%)	OH $\ E_{\infty} - E_{\lim;OH}\ $ (%)	OH (%)
geo	1986	0,8	1	1	2	1	0	22	23	1
geo	1987	0,8	0	1	0	5	4	19	20	1
geo	1988	0,8	1	1	0	4	3	18	19	1
geo	1989	0,7	1	1	0	1	0	12	17	5
geo	1990	0,7	2	0	0	1	4	11	16	5
geo	1991	0,6	1	1	3	0	1	11	16	5
geo	1992	0,6	1	2	3	1	1	6	11	5
geo	1993	0,6	3	0	1	0	3	13	18	5
geo	1994	0,6	1	0	0	1	1	9	14	5
geo	1995	0,6	2	3	5	2	2	9	13	5
geo	1996	0,6	2	1	2	0	2	9	14	5
geo	1997	0,6	2	2	4	2	3	8	13	5
geo	1998	0,6	2	2	1	0	9	4	8	4
geo	1999	0,6	1	0	2	0	3	8	13	5
ari	2000	0,5	2	1	2	1	4	4	5	1
ari	2001	0,5	0	0	0	2	7	8	9	1
ari	2002	0,4	2	0	4	3	7	11	5	6
ari	2003	0,3	3	2	2	0	7	5	7	2
ari	2004	0,3	0	0	2	1	1	8	10	2
ari	2005	0,3	0	0	2	1	1	8	10	2
ari	2006	0,3	1	2	0	0	4	5	7	2
ari	2007	0,3	0	1	1	1	0	5	7	2
ari	2008	0,3	0	0	1	1	1	4	6	2
ari	2009	0,3	2	1	4	2	1	10	12	2
ari	2010	0,3	2	1	4	3	4	12	14	2
ari	2011	0,3	5	3	6	5	6	12	14	2

Tabulka 2.3.6: Rozdíl E_{\lim} mezi hypotézami a OH a mezi OH a E_{∞} pro KP MEC vypočtenou aritmetickým průměrem z dat roku označeného v druhém sloupci a pro KP L05 vypočtenou průměrem označeným v prvním sloupci s počáteční hodnotou $E(0)$ označenou ve třetím sloupci. Čtvrtý až osmý sloupec ukazují procentuální absolutní hodnotu rozdílu normovaných vzdáleností mezi MEC a L05 a mezi E_{\lim} OH a hypotéz: $\left| \left(\frac{E_{\lim,OH}^{L05} - E_{\lim,hypotéza}^{L05}}{E_{\lim,OH}^{L05}} \right) - \left(\frac{E_{\lim,OH}^{MEC} - E_{\lim,hypotéza}^{MEC}}{E_{\lim,OH}^{MEC}} \right) \right| \cdot 100\%$. Poslední sloupec ukazuje procentuální normovanou vzdálenost mezi E_{∞} a E_{\lim} OH modelu L05: $\left(\frac{E_{\infty}^{L05} - E_{\lim,OH}^{L05}}{E_{\infty}^{L05}} \right) \cdot 100\%$. Předposlední sloupec ukazuje to stejné jako poslední sloupec, ale pro MEC a devátý sloupec ukazuje rozdíl mezi MEC a L05. Verze o délce KP 1-10 dní.

2.3.4 Křivka prediktability modelu L05 pro variantu s počáteční/modelovou chybou

Pro výpočet E (KP) jsou použity data modelu L05 ($N = 90$, varianta s počáteční/modelovou chybou (označeno PM), $E^{L05,90}(0) = 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2$). Metoda výpočtu je určena v kapitole 2.1.1 a jsou prezentovány výsledky jak pro aritmetický (označeno PM_a), tak pro geometrický průměr (označeno PM_g). Aproximována je KP a její diference, která je určena body $\left(\frac{(E(t+\Delta t)+E(t))}{2}; \frac{(E(t+\Delta t)-E(t))}{\Delta t}\right)$, kde t je čas a $\Delta t = 0,25$ dne. Zvolená délka je 0-10 dní, 0-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{lim} = E_{\infty} = 8,2$ (v tabulkách označeno E_{lim}) a plná délka, tj. o počtu dní které jsou potřeba, aby KP dosáhla $E_{lim} = 8,2$ (v tabulkách $Full$). Aproximace hypotézami (rovnice (2.3.1)- (2.3.6)) jsou určeny nelineárními regresními metodami za pomoci programu Wolfram Mathematica.

Obrázek 2.3.7 pro aritmetický a Obrázek 2.3.8 pro geometrický průměr ukazuje diference KP modelu L05, varianta s počáteční/modelovou chybou, s počátečními hodnotami $\sigma_{90} = \{0,7; 0,6; 0,5; 0,3; 0,5\}$ (černá) ($\sigma_{90} = 0,4$ není zobrazeno) a aproximace KH_{PP}^D (červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH_{PP}^D s parametry z KH_{PP}^{KP} (modrá) a aproximace KH_{PM}^D s parametry z KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaně). a) - e) PM_a . f) - j) $PM_a, Elim$. k) - o) $PM_a, Full$. Je z nich patrné, že pro KP určenou geometrickým průměrem (všechny verze délky) vyhovují aproximace ve tvaru symetrické paraboly (KH_{PP}^D , KH_{PP}^{KP} , KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} s nízkou hodnotou modelové chyby β a OH s hodnotou parametru většinou $p > 0,5$). Pro KP určenou aritmetickým průměrem vyhovují, jak hypotézy ve tvaru symetrické paraboly (KH_{PP}^D , KH_{PP}^{KP}), tak nesymetrické aproximace (KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} s vyšší hodnotou modelové chyby β , OH s hodnotou parametru většinou $p < 0,5$ a LH). Pro KP určenou geometrickým průměrem jsou kromě LH průběhy všech aproximací sobě bližší než u KP určené aritmetickým průměrem.

Tabulka 2.3.8 zobrazuje hodnoty parametrů aproximací pro počáteční hodnoty označené $E(0)$, pro všechny tři určení délky a obě metody průměru. Jejich průměr (z hodnot parametrů u jednotlivých $E(0)$) a směrodatnou odchylku zobrazuje Tabulka 2.3.7.

Nejprve okomentujme variantu s plnou délkou KP, kde není nepřesnost určená nedostatkem dat. Pro KP určenou aritmetickým průměrem ($PM_{a,Full}$) je z Obrázku 2.3.7 opticky patrné, že všechny hypotézy teoreticky zachycují průběh difference KP. KH_{pp}^D a KH_{pp}^{KP} a LH se však od dat vzdalují nejvíce. Průměrné hodnoty parametru aproximací $\bar{\alpha}_{a,Full}^{L05}$ (Tabulka 2.3.7) jsou pro KH_{PM}^D , KH_{PM}^{KP} a OH blízké λ s tím, že se rozcházejí s λ maximálně o 10 % velikosti λ . KH_{pp}^D a KH_{pp}^{KP} hodnotu λ nadhodnocují o 10 až 20 % a LH λ podhodnocuje až o 30 %. Aproximace, kromě LH , zachycují dostatečně E_∞ (Tabulka 2.3.8). Zatímco parametr β leží v intervalu $\langle 0,1;0,2 \rangle d^{-1}$ pro KH_{PM}^D , tak pro KH_{PM}^{KP} je hodnota v intervalu $\langle 0,2;0,3 \rangle d^{-1}$ (Tabulka 2.3.8). Průměrná hodnota $\bar{p}_{a,Full}^{L05} = 0,4$ (Tabulka 2.3.7), což naznačuje nesymetrický tvar OH . Podle Tabulky 2.3.8 p s poklesem $E(0)$ klesá.

Pro KP určenou geometrickým průměrem ($PM_{g,Full}$) je z Obrázku 2.3.8 patrné, že kromě LH popisují aproximace difference KP. Pro KH_{PM}^D leží β v intervalu $\langle 0,0;0,1 \rangle d^{-1}$ a pro KH_{PM}^{KP} do $0,2 d^{-1}$, což jsou hodnoty menší ve srovnání s aritmetickým průměrem (Tabulka 2.3.8) a ukazují na téměř symetrický tvar difference KP. Totéž potvrzují hodnoty $\bar{p}_{g,Full}^{L05} = 0,7 > \bar{p}_{a,Full}^{L05} = 0,4$. Průměrné hodnoty aproximací $\bar{\alpha}_{g,Full}^{L05}$ (Tabulka 2.3.7) jsou pro KH_{PM}^D , KH_{PM}^{KP} a OH blízké λ s tím, že se rozcházejí s λ převážně o 10 % velikosti λ . KH_{pp}^D a KH_{pp}^{KP} hodnotu λ nadhodnocují o 10 až 20 % a LH λ podhodnocuje až o 40 %. Aproximace, až na LH , zachycují dostatečně E_∞ (Tabulka 2.3.7).

Pro variantu KP o délce 1-10 dní určené z aritmetického průměru (PM_a) je z Obrázku 2.3.5 patrné, že všechny hypotézy adekvátně aproximují data. KH_{pp}^D , KH_{pp}^{KP} a LH se od dat vzdalují nejvíce. Podobnost tvaru křivek aproximací se s klesajícím $E(0)$ vzdalují. Hodnoty β jsou nižší než hodnoty z varianty $PM_{a,Full} \cdot \bar{p}_a^{L05}$ a $\bar{p}_{a,Full}^{L05}$

jsou však totožné (Tabulka 2.3.7), což značí, že $\bar{\alpha}_a^{L05}$ pro KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} je vyšší než $\bar{\alpha}_{a,Full}^{L05}$ a $\bar{\alpha}_a^{L05} = \bar{\alpha}_{a,Full}^{L05}$ pro OH . Konkrétně platí, že pro KH_{PP}^{KP} a KH_{PM}^{KP} jsou hodnoty $\bar{\alpha}_a^{L05}$ o 0,07 d⁻¹ větší než u $\bar{\alpha}_{a,Full}^{L05}$. Pro KH_{PP}^D respektive KH_{PM}^D o 0,05 d⁻¹ respektive 0,04 d⁻¹ větší než $\bar{\alpha}_{a,Full}^{L05}$. LH poté udává o 0,04 d⁻¹ nižší než $\bar{\alpha}_{a,Full}^{L05}$. Důvod, proč se i přes rozdílné hodnoty $\bar{\alpha}_a^{L05}$, opticky všechny hypotézy jeví jako adekvátní (Obrázek 2.3.7), je ten, že parametr $E_{lim,a}$ pro KH_{PP}^{KP} , KH_{PM}^D , KH_{PP}^{KP} a KH_{PM}^{KP} podhodnocuje E_∞ (Tabulka 2.3.7). Totéž platí i pro LH , s tím rozdílem, že $E_{lim,a}$ hodnotu E_∞ nadhodnocuje. Dobrý odhad E_∞ ukazuje OH .

Pro KP určenou geometrickým průměrem (PM_g) ukazuje Obrázek 2.3.8 výraznou nevhodnost LH a pro tuto variantu nemá smysl hodnotit parametry této aproximace. Tvar ostatních aproximací je pro větší $E(0)$ podobný. S poklesem $E(0)$ se podobnost snižuje, jak ukazuje nárůst parametru β_g^{L05} , který s poklesem $E(0)$ pro KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} , roste od nulové hodnoty po hodnoty blízké 1 d⁻¹. Totéž potvrzuje i parametr p u OH , který klesá z hodnoty blízké 1 k hodnotě 0,4 (Tabulka 2.3.8). Průměrné hodnoty $\bar{\alpha}_g^{L05}$ pro KH_{PP}^D , KH_{PM}^D , KH_{PP}^{KP} a KH_{PM}^{KP} jsou od λ nadhodnoceny o 0,05 až 0,07 d⁻¹ a OH udává hodnotu shodnou s λ (Tabulka 2.3.7). $\bar{E}_{lim,g}^{L05}$ jsou pro KH_{PP}^D , KH_{PM}^D , KH_{PP}^{KP} a KH_{PM}^{KP} mezi hodnotami 7,6 a 8, tedy udávají bližší hodnoty k E_∞ než $\bar{E}_{lim,a}^{L05}$ (Tabulka 2.3.7). $\bar{E}_{lim,g}^{L05}$ OH udává stejnou hodnotu jako $\bar{E}_{lim,a}^{L05}$, které jsou blízké E_∞ (Tabulka 2.3.7).

Pro variantu 1-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{lim} = E_\infty = 8,2$ a KP určenou aritmetickým průměrem ($PM_{a,E_{lim}}^{L05}$) se z Obrázku 2.3.7 ukazuje teoretická vhodnost všech hypotéz. Hodnoty β jsou blízké hodnotám z varianty $PM_{a,Full}^{L05}$ (Tabulka 2.3.8) a $\bar{p}_{a,E_{lim}}^{L05} = \bar{p}_a^{L05} = \bar{p}_{a,Full}^{L05}$, ale je zde, oproti ostatním variantám délek, patrný nejmenší pokles s poklesem $E(0)$ (Tabulka 2.3.8). $\bar{\alpha}_{a,E_{lim}}^{L05}$ hypotéz se liší maximálně o 0,01 d⁻¹ od $\bar{\alpha}_{a,Full}^{L05}$ (Tabulka 2.3.7). Hodnoty $\bar{\alpha}_{a,E_{lim}}^{L05}$ pro KH_{PM}^D , KH_{PM}^{KP} a LH jsou nejbližší k λ s rozdílem od λ do 10% velikosti.

Pro KP určenou geometrickým průměrem ($PM_{g,E_{im}}^{L05}$) ukazuje Obrázek 2.3.8 nevhodnost LH . $\bar{\beta}_{g,E_{im}}^{L05}$ pro KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} má stejnou hodnotu jako $\bar{\beta}_{g,Full}^{L05}$ a stejná hodnota platí i pro $\bar{p}_{g,E_{im}}^{L05} = \bar{p}_g^{L05} = \bar{p}_{g,Full}^{L05}$ u OH (Tabulka 2.3.7), ale není zde, na rozdíl od ostatních verzí délek, patrný pokles hodnot parametru s poklesem $E(0)$ (Tabulka 2.3.8). $\bar{\alpha}_{g,E_{im}}^{L05}$ hypotéz se liší maximálně o 0,01 d^{-1} od $\bar{\alpha}_{g,Full}^{L05}$ a to kromě LH , kde $\bar{\alpha}_{g,E_{im}}^{L05} = \bar{\alpha}_g^{L05}$ (Tabulka 2.3.7). Hodnoty $\bar{\alpha}_{g,E_{im}}^{L05}$ pro KH_{PM}^D , KH_{PM}^{KP} a OH jsou nejbližší k λ s rozdílem od λ do 10% velikosti.

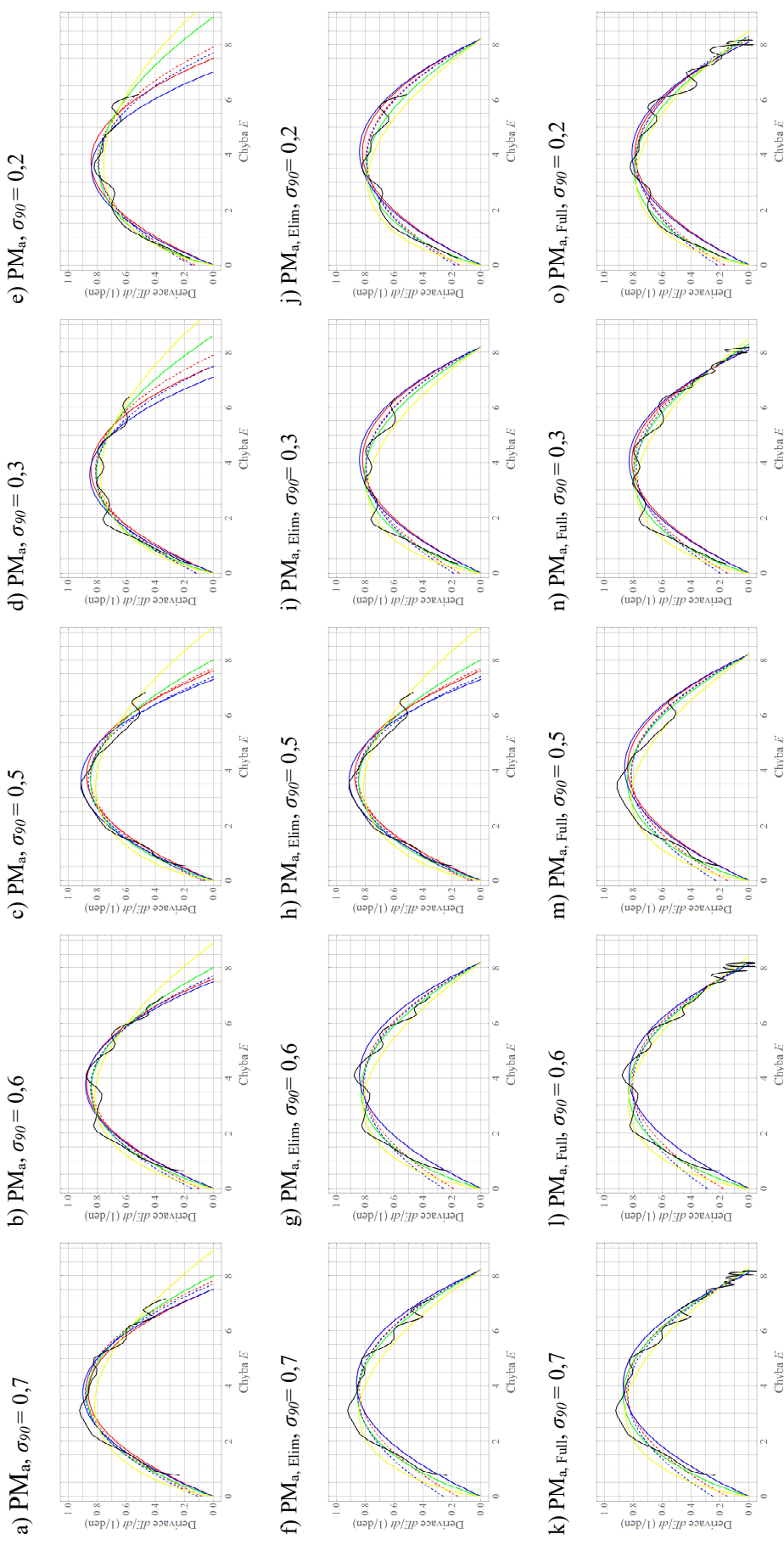
Je zajímavé si povšimnout, že tam, kde s klesajícím $E(0)$, roste β nebo klesá p , tak klesá α .

<i>prům.</i>	KH_{PP}^D	KH_{PM}^D	KH_{PP}^{KP}	KH_{PM}^{KP}	<i>OH</i>	<i>LH</i>			
<i>odchyl.</i>	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)			
$\bar{\alpha}_a^{L05}$	0,46	0,40	0,48	0,41	0,33	0,23			
$\bar{\alpha}_{a,Full}^{L05}$	0,41	0,36	0,41	0,33	0,33	0,26			
$\bar{\alpha}_{a,E_{lim}}^{L05}$	0,41	0,36	0,41	0,34	0,33	0,27			
$\hat{\alpha}_a^{L05}$	0,00	0,02	0,01	0,02	0,04	0,01			
$\hat{\alpha}_{a,Full}^{L05}$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01			
$\hat{\alpha}_{a,E_{lim}}^{L05}$	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01			
$\bar{\alpha}_g^{L05}$	0,42	0,40	0,43	0,41	0,35	0,19			
$\bar{\alpha}_{g,Full}^{L05}$	0,40	0,37	0,40	0,37	0,36	0,24			
$\bar{\alpha}_{g,E_{lim}}^{L05}$	0,40	0,37	0,40	0,37	0,35	0,19			
$\hat{\alpha}_g^{L05}$	0,01	0,02	0,00	0,03	0,05	0,02			
$\hat{\alpha}_{g,Full}^{L05}$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01			
$\hat{\alpha}_{g,E_{lim}}^{L05}$	0,00	0,01	0,00	0,01	0,01	0,02			
	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)			
$\bar{E}_{lim,a}^{L05}$	7,5	7,8	7,3	7,6	8,3	9,3			
$\bar{E}_{lim,a,Full}^{L05}$	8,1	8,2	8,1	8,2	8,2	8,4			
$\bar{E}_{lim,a,E_{lim}}^{L05}$	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2			
$\hat{E}_{lim,a}^{L05}$	0,1	0,1	0,2	0,1	0,4	0,3			
$\hat{E}_{lim,a,Full}^{L05}$	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,1			
$\hat{E}_{lim,a,E_{lim}}^{L05}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0			
$\bar{E}_{lim,g}^{L05}$	7,8	8,0	7,6	7,8	8,3	10,6			
$\bar{E}_{lim,g,Full}^{L05}$	8,1	8,1	8,1	8,1	8,2	8,4			
$\bar{E}_{lim,g,E_{lim}}^{L05}$	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2			
$\hat{E}_{lim,g}^{L05}$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,5	0,9			
$\hat{E}_{lim,g,Full}^{L05}$	0,0	0,0	0,1	0,0	0,1	0,1			
$\hat{E}_{lim,g,E_{lim}}^{L05}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0			
<i>prům.</i>	KH_{PM}^D	KH_{PM}^{KP}	<i>prům.</i>	<i>OH</i>	<i>prům.</i>	KH_{PM}^D	KH_{PM}^{KP}	<i>prům.</i>	<i>OH</i>
<i>odch.</i>	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	<i>odch.</i>		<i>odch.</i>	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	<i>odch.</i>	
$\bar{\beta}_a^{L05}$	0,10	0,12	\bar{p}_a^{L05}	0,4	$\bar{\beta}_g^{L05}$	0,04	0,03	\bar{p}_g^{L05}	0,7
$\bar{\beta}_{a,Full}^{L05}$	0,16	0,24	$\bar{p}_{a,Full}^{L05}$	0,4	$\bar{\beta}_{g,Full}^{L05}$	0,07	0,10	$\bar{p}_{g,Full}^{L05}$	0,7
$\bar{\beta}_{a,E_{lim}}^{L05}$	0,16	0,22	$\bar{p}_{a,E_{lim}}^{L05}$	0,4	$\bar{\beta}_{g,E_{lim}}^{L05}$	0,07	0,10	$\bar{p}_{g,E_{lim}}^{L05}$	0,7
$\hat{\beta}_a^{L05}$	0,02	0,03	\hat{p}_a^{L05}	0,1	$\hat{\beta}_g^{L05}$	0,03	0,03	\hat{p}_g^{L05}	0,2
$\hat{\beta}_{a,Full}^{L05}$	0,01	0,03	$\hat{p}_{a,Full}^{L05}$	0,0	$\hat{\beta}_{g,Full}^{L05}$	0,02	0,03	$\hat{p}_{g,Full}^{L05}$	0,1
$\hat{\beta}_{a,E_{lim}}^{L05}$	0,01	0,03	$\hat{p}_{a,E_{lim}}^{L05}$	0,0	$\hat{\beta}_{g,E_{lim}}^{L05}$	0,01	0,01	$\hat{p}_{g,E_{lim}}^{L05}$	0,0

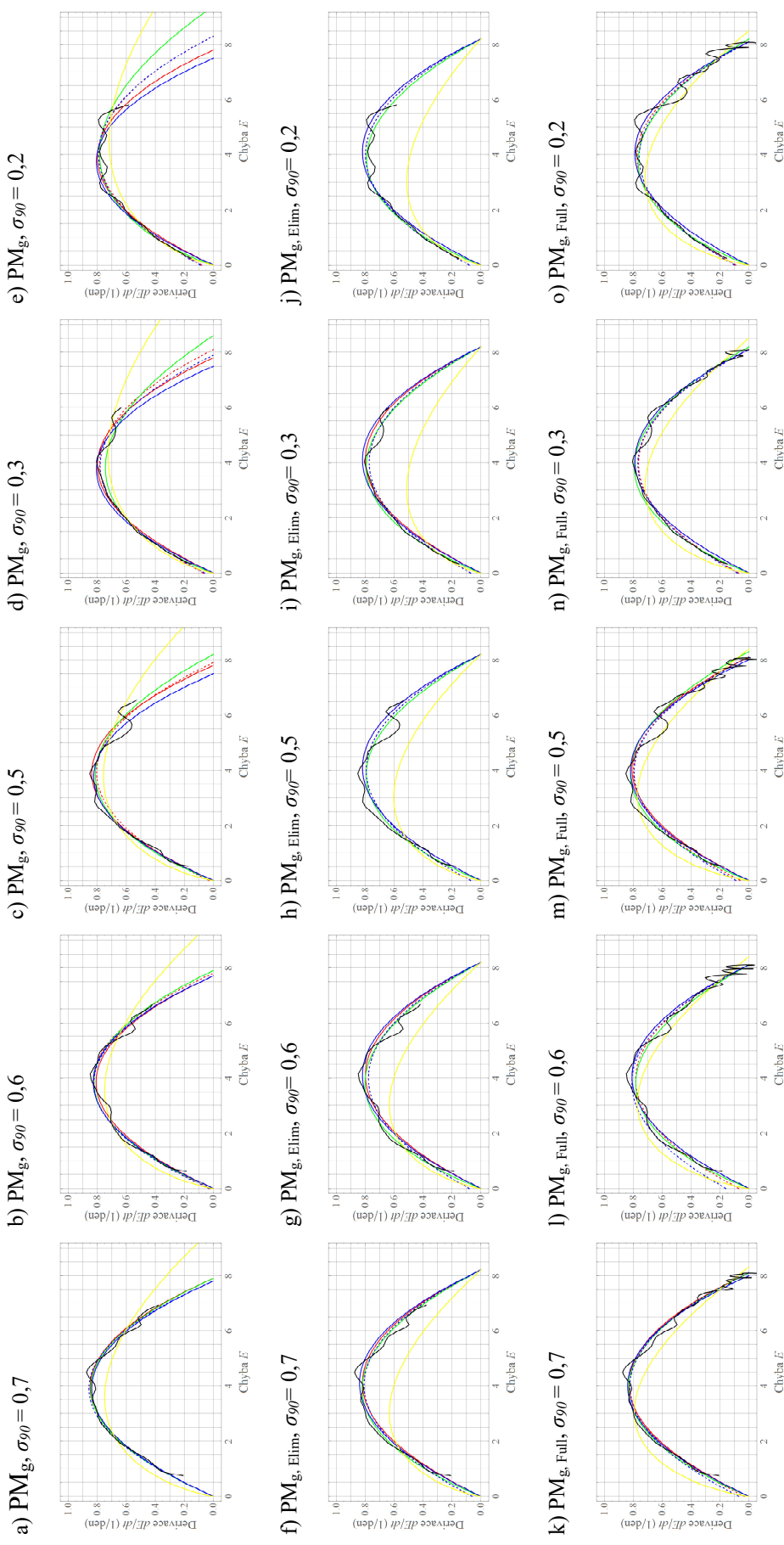
Tabulka 2.3.7: Průměrné hodnoty $\bar{\alpha}$, \bar{E}_{lim} , $\bar{\beta}$, \bar{p} a směrodatná odchylka $\hat{\alpha}$, \hat{E}_{lim} , $\hat{\beta}$, \hat{p} . Data jsou pro všechny počáteční hodnoty (varianta s počáteční/modelovou chybou (PM), aritmetický (a), geometrický (g) průměr a délka 1-10 dní, s pevně určeným parametrem (E_{lim}) a plná délka (Full).

$PM_{a,PM}^{LOS}$		KH_{PM}^D		OH		$PM_{a,PM}^{LOS}$		KH_{PM}^D		OH		$PM_{a,PM}^{LOS}$		KH_{PM}^D		OH								
$E(0)$	α	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	p	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	p	E_{lim}	α	β	p							
(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)							
0.70	0.46	7.5	0.43	0.08	7.8	0.38	0.59	8.0	0.7	0.43	8.1	0.38	0.15	8.1	0.36	0.51	8.2	0.7	0.42	0.37	0.16	0.35	0.49	
0.60	0.46	7.6	0.41	0.10	7.7	0.36	0.53	8.0	0.6	0.41	8.1	0.35	0.18	8.2	0.33	0.40	8.2	0.6	0.41	0.35	0.19	0.33	0.41	
0.50	0.46	7.6	0.42	0.08	7.7	0.36	0.52	8.0	0.5	0.42	8.1	0.37	0.15	8.2	0.34	0.45	8.2	0.5	0.40	0.36	0.16	0.34	0.45	
0.40	0.46	7.5	0.40	0.10	7.7	0.34	0.48	8.0	0.4	0.41	8.1	0.35	0.16	8.1	0.33	0.43	8.2	0.4	0.41	0.36	0.16	0.32	0.41	
0.30	0.45	7.5	0.38	0.12	7.9	0.29	0.28	8.6	0.3	0.40	8.1	0.35	0.15	8.2	0.31	0.38	8.3	0.3	0.40	0.35	0.15	0.32	0.41	
0.20	0.45	7.5	0.37	0.13	7.9	0.26	0.18	9.0	0.2	0.39	8.1	0.34	0.14	8.2	0.30	0.31	8.3	0.2	0.40	0.35	0.15	0.31	0.38	
$PM_{a,PM}^{LOS}$																								
$E(0)$	α	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	
(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	
0.70	0.48	7.5	0.43	0.11	7.7	0.25	8.9	0.7	0.43	8.1	0.35	0.25	8.1	0.32	0.29	8.2	0.28	8.3	0.7	0.42	0.35	0.26	0.28	0.28
0.60	0.47	7.5	0.40	0.15	7.7	0.25	8.9	0.6	0.41	8.1	0.32	0.29	8.2	0.27	8.4	0.27	8.4	0.6	0.41	0.33	0.26	0.27	0.27	
0.50	0.50	7.3	0.45	0.06	7.4	0.24	9.2	0.5	0.42	8.1	0.34	0.23	8.2	0.42	8.1	0.42	8.1	0.5	0.42	0.27	8.4	0.34	0.23	
0.40	0.47	7.3	0.41	0.11	7.6	0.23	9.2	0.4	0.41	8.1	0.33	0.22	8.2	0.26	8.4	0.26	8.4	0.4	0.41	0.34	0.21	0.26	0.26	
0.30	0.48	7.1	0.40	0.12	7.5	0.22	9.6	0.3	0.41	8.1	0.33	0.20	8.2	0.25	8.5	0.25	8.5	0.3	0.41	0.34	0.19	0.26	0.26	
0.20	0.48	7.0	0.37	0.15	7.7	0.21	9.8	0.2	0.40	8.1	0.32	0.22	8.3	0.25	8.5	0.25	8.5	0.2	0.41	0.34	0.18	0.26	0.26	
$PM_{a,PM}^{LOS}$																								
$E(0)$	α	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	
(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	
0.7	0.43	7.9	0.43	0.00	7.9	0.42	0.94	7.9	0.70	0.41	8.1	0.40	0.03	8.1	0.39	0.83	8.1	0.7	0.40	0.38	0.06	0.37	0.75	
0.6	0.42	7.7	0.42	0.02	7.8	0.40	0.87	7.9	0.60	0.40	8.1	0.37	0.07	8.1	0.35	0.69	8.1	0.6	0.39	0.36	0.08	0.35	0.66	
0.5	0.43	7.8	0.40	0.03	7.9	0.36	0.70	8.2	0.50	0.40	8.1	0.38	0.06	8.1	0.36	0.71	8.3	0.5	0.40	0.37	0.07	0.35	0.69	
0.4	0.41	7.6	0.41	0.03	7.7	0.38	0.78	7.9	0.40	0.40	8.0	0.37	0.07	8.1	0.35	0.69	8.1	0.4	0.39	0.36	0.08	0.34	0.63	
0.3	0.41	7.8	0.37	0.07	8.1	0.29	0.48	8.6	0.30	0.39	8.1	0.36	0.07	8.1	0.35	0.69	8.2	0.3	0.39	0.36	0.07	0.35	0.69	
0.2	0.41	7.8	0.36	0.08	8.3	0.27	0.39	9.4	0.20	0.39	8.1	0.36	0.09	8.1	0.33	0.62	8.2	0.2	0.40	0.37	0.08	0.35	0.70	
$PM_{a,PM}^{LOS}$																								
$E(0)$	α	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	E_{lim}	α	β	E_{lim}	α	
(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	
0.7	0.43	7.8	0.44	0.00	7.8	0.21	9.7	0.7	0.42	8.0	0.39	0.07	8.1	0.26	8.3	0.26	8.3	0.7	0.41	0.38	0.09	0.21	0.21	
0.6	0.43	7.7	0.42	0.03	7.7	0.21	9.7	0.6	0.40	8.1	0.36	0.16	8.1	0.25	8.4	0.25	8.4	0.6	0.40	0.36	0.11	0.21	0.21	
0.5	0.44	7.5	0.44	0.00	7.5	0.20	10.3	0.5	0.41	8.0	0.37	0.09	8.1	0.25	8.4	0.25	8.4	0.5	0.40	0.37	0.10	0.20	0.20	
0.4	0.44	7.4	0.43	0.02	7.5	0.19	10.3	0.4	0.40	8.0	0.36	0.10	8.1	0.24	8.4	0.24	8.4	0.4	0.40	0.36	0.10	0.19	0.19	
0.3	0.43	7.5	0.38	0.06	7.9	0.17	11.6	0.3	0.39	8.1	0.36	0.08	8.1	0.23	8.5	0.23	8.5	0.3	0.40	0.36	0.09	0.17	0.17	
0.2	0.43	7.5	0.36	0.09	8.3	0.16	12.2	0.2	0.39	8.1	0.35	0.10	8.1	0.23	8.5	0.23	8.5	0.2	0.40	0.36	0.08	0.17	0.17	

Tabulka 2.3.8: Hodnoty parametrů aproximací (rovnice (2.3.1) - (2.3.6)) diferencí KP respektive KP o délce 1 – 10 dní modelu L05 (vlevo), o plné délce (uprostřed) a s pevně určeným parametrem E_{lim} (vpravo) modelu L05 ($N = 90$, varianta s počáteční/modelovou chybou PM^{L05}) pro počáteční hodnoty označené $E(0)$. PM_a značí KP určenou aritmetickým průměrem a PM_g značí KP určenou geometrickým průměrem.



Obrázek 2.3.7: Differenze KP modelu L05, varianta s počáteční/modelovou chybou, aritmetickým průměrem (PM_a), s počátečními hodnotami $\sigma_{90} = \{0,7; 0,6; 0,5; 0,3; 0,2\}$ (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaná), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH^D_{PP} s parametry z KH^{KP}_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaná). a) - e) $PM_a, \text{Elim.}$ k) - o) $PM_a, \text{Full.}$



Obrázek 2.3.8: Differenze KP modelu L05, varianta s počáteční/modelovou chybou, geometrickým průměrem (PM_g), s počátečními hodnotami $\sigma_{90} = \{0,7; 0,6; 0,5; 0,3; 0,2\}$ (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaná), LH (žlutá), OH (zelená), OH (zelená), aproximace KH^D_{PP} s parametry z KH^{KP}_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaná). a) - e) PM_g . f) - j) $PM_{g, Elim}$. k) - o) $PM_{g, Full}$.

2.3.5 Křivka prediktability modelu ECMWF pro variantu s počáteční/modelovou chybou

Pro výpočet E (KP) jsou použity data MEC (roční průměr z období 1986-2011, varianta s počáteční/modelovou chybou). Metoda výpočtu je určena v kapitole 2.1.2 a jsou prezentovány výsledky pro aritmetický průměr (označeno PM_a). Pro geometrický průměr nejsou výsledky prezentovány, protože jsou blízké výsledkům z aritmetického průměru (kapitola 2.2.2). Aproximována je KP a její diference, která je určena body $\left(\frac{E(t+\Delta t)+E(t)}{2}; \frac{E(t+\Delta t)-E(t)}{\Delta t}\right)$, kde t je čas $\Delta t = 0,5$ dne. Zvolená délka je 0-10 dní a 0-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ (označeno $PM_{E_{\text{lim}}}$, E_{∞} viz Tabulka 2.1.2). Aproximace hypotézami (rovnice (2.3.1) - (2.3.6)) jsou určeny nelineárními regresními metodami za pomoci programu Wolfram Mathematica.

Obrázek 2.3.9 pro délku KP 0-10 dní a Obrázek 2.3.10 pro délku 0-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ ukazují diference KP MEC pro vybrané roky (černá) a aproximace KH_{PP}^D (červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH_{PP}^D s parametry z KH_{PP}^{KP} (modrá) a aproximace KH_{PM}^D s parametry z KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaně).

Tabulka 2.3.10 pro délku KP 0-10 dní a Tabulka 2.3.11 pro délku 0-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ zobrazují hodnoty parametrů aproximací diferencí KP respektive KP MEC (roční aritmetický průměr 1986 - 2011, varianta s počáteční/modelovou chybou). Tabulka 2.3.9 poté ukazuje průměry určeny z hodnot parametrů z jednotlivých let a jejich směrodatné odchylky.

Pro aproximace KP s délkou 0-10 dní je z Obrázku 2.3.9 patrné, že pro délku bez pevně určeného E_{lim} je tvar difference KP blízký symetrické parabole tj. KH_{PP}^D a KH_{PP}^{KP} by měli vhodně aproximovat data. To však nepotvrzují β_a^{MEC} pro KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} , kde průměr $\bar{\beta}_a^{MEC}$ je $2,14 \text{ m.d}^{-1}$ a $\bar{p}_a^{MEC} = 0,4$ u OH (Tabulka 2.3.9). Maximum aproximací však není posunuto doleva natolik, aby byla vhodná LH . Je zajímavé si povšimnout, že hodnoty $\bar{\beta}_a^{MEC}$ jsou pro KH_{PM}^{KP} přibližně o $0,7 \text{ m.d}^{-1}$ větší

než $\bar{\beta}_a^{MEC}$ pro KH_{PM}^D (Tabulka 2.3.9). Pro E_{lim} platí, že hodnoty jsou nižší pro KH_{PP}^D , KH_{PP}^{KP} , KH_{PM}^D , KH_{PM}^{KP} , OH a vyšší pro LH , než hodnoty E_{lim} pro délku s pevně určeným parametrem $E_{lim} = E_\infty$. Nejblíže je OH a nejdál jsou KH_{PP}^D , KH_{PP}^{KP} a LH (Tabulka 2.3.9).

Pro aproximace s délkou 0-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{lim} = E_\infty$ je patrná podobnost dat spíše s LH a je tedy patrná výrazná nesymetrie aproximace. To potvrzuje jednak nevhodnost KH_{PP}^D a KH_{PP}^{KP} (Obrázek 2.3.10) a zároveň, ve srovnání s délkou bez pevně určeného E_{lim} , jsou hodnoty $\bar{\beta}_{a,E_{lim}}^{MEC}$ pro KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} blízké dvojnásobku $\bar{\beta}_a^{MEC}$ a totéž platí pro OH (Tabulka 2.3.9) tj. OH je pro délku 0-10 dní s pevně určeným parametrem $E_{lim} = E_\infty$ blíže LH .

Pro $\bar{\alpha}^{MEC}$ (Tabulka 2.3.9) platí, že rozdíl mezi délkami s pevným a bez pevného E_{lim} je kromě OH a LH přibližně $0,1 d^{-1}$. Pro OH je rozdíl $0,5 d^{-1}$. Nejmenší rozdíl je pro LH s rozdílem $0,4 d^{-1}$. Při porovnání $\bar{\alpha}^{MEC}$ mezi hypotézami (Tabulka 2.3.9) platí, že největší hodnoty mají KH_{PP} , poté KH_{PM} a OH nejmenší je pro LH . Popsané platí pro délku s pevným a bez pevného E_{lim} .

Při pohledu na trendy parametrů v průběhu let (Tabulka 2.3.10 a Tabulka 2.3.11) pozorujeme stejné vývoje pro obě verze délky. Pro KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} α s nárůstem let roste a β klesá. Pro KH_{PP}^{KP} α s nárůstem let roste a pro OH p roste.

<i>prům.</i>	KH_{PP}^D	KH_{PM}^D	KH_{PP}^{KP}	KH_{PM}^{KP}	<i>OH</i>	<i>LH</i>
<i>odchyl.</i>	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)	(d ⁻¹)
$\bar{\alpha}_a^{MEC}$	0,48	0,42	0,50	0,40	0,35	0,27
$\bar{\alpha}_{a,E_{lim}}^{MEC}$	0,40	0,33	0,41	0,31	0,30	0,23
$\hat{\alpha}_a^{MEC}$	0,01	0,02	0,01	0,02	0,03	0,01
$\hat{\alpha}_{a,E_{lim}}^{MEC}$	0,02	0,03	0,01	0,03	0,03	0,01
	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)
$\bar{E}_{lim,a}^{MEC}$	114	117	112	117	123	134
$\bar{E}_{lim,a,E_{lim}}^{MEC}$	129	129	129	129	129	129
$\hat{E}_{lim,a}^{MEC}$	5	5	6	5	4	5
$\hat{E}_{lim,a,E_{lim}}^{MEC}$	3	3	3	3	3	3
		(md ⁻¹)		(md ⁻¹)	(-)	
$\bar{\beta}_a^{MEC} / \bar{p}_a^{MEC}$		2,14		2,83	0,40	
$\bar{\beta}_{a,E_{lim}}^{MEC} / \bar{p}_{a,E_{lim}}^{MEC}$		3,75		4,89	0,24	
$\hat{\beta}_a^{MEC} / \hat{p}_a^{MEC}$		0,64		0,79	0,10	
$\hat{\beta}_{a,E_{lim}}^{MEC} / \hat{p}_{a,E_{lim}}^{MEC}$		0,85		1,16	0,10	

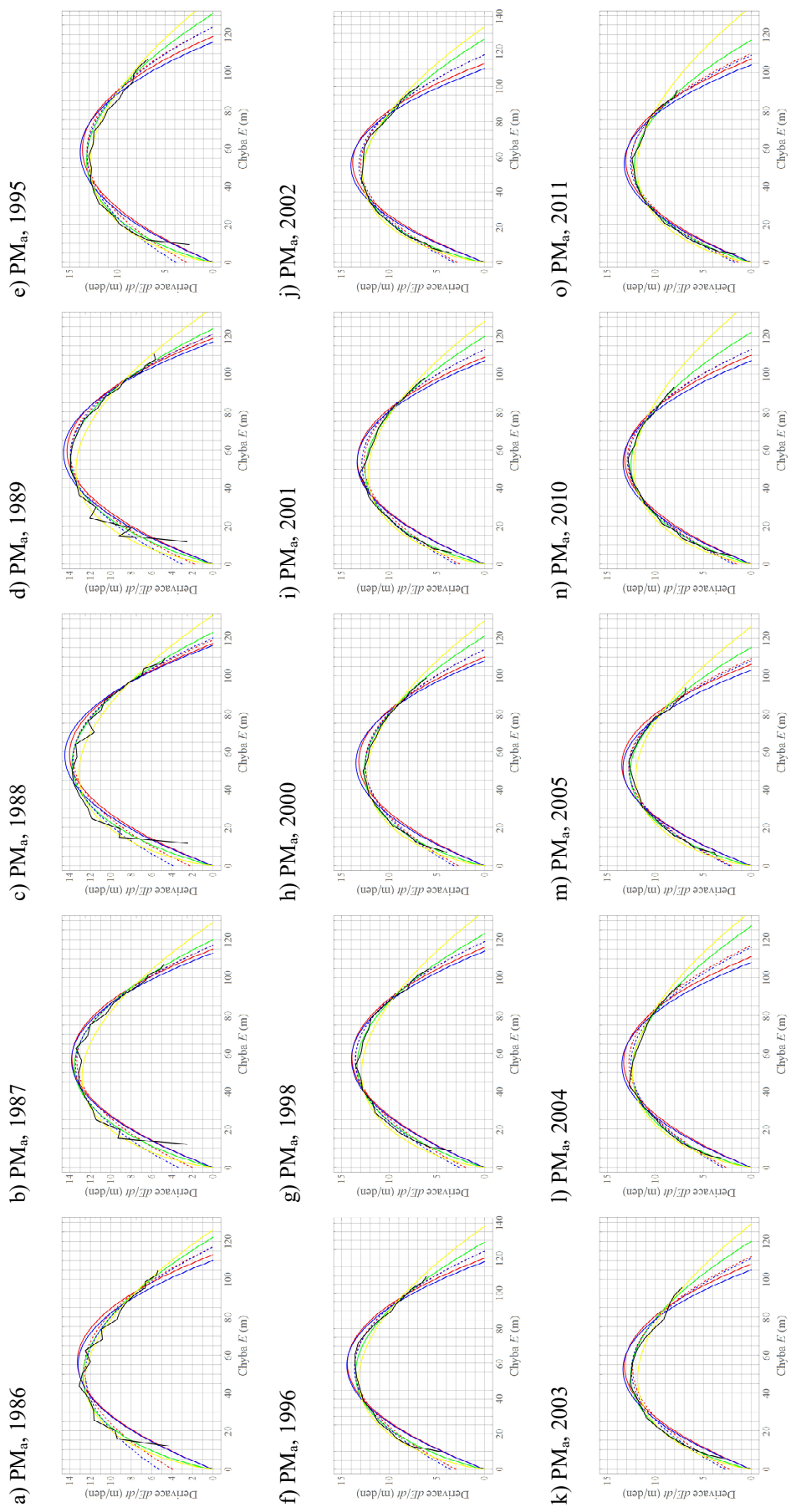
Tabulka 2.3.9: Průměrné hodnoty $\bar{\alpha}$, \bar{E}_{lim} , $\bar{\beta}$, \bar{p} a směrodatné odchylky $\hat{\alpha}$, \hat{E}_{lim} , $\hat{\beta}$, \hat{p} . Data jsou pro roční průměry z let 1986–2011 (varianta s počáteční/modelovou chybou (PM), aritmetický (a) průměr a délka 0-10 dní a 0-10 dní s pevně určeným parametrem E_{lim}).

PM_a^{MEC}		KHP_{PP}		KH_{PM}^D		OH		PM_a^{MEC}		KHP_{PP}		KH_{PM}^{CP}		LH	
rok	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	β (rok)	E_{lim} (d ⁻¹)	P (-)	E_{lim} (m)	rok	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	β (m/d)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)
1986	0,47	113,00	0,36	3,95	117,00	0,31	122,00	1986	0,48	110,00	0,33	5,30	117,00	0,27	126,00
1987	0,48	115,00	0,42	2,03	117,00	0,38	120,00	1987	0,49	113,00	0,40	3,40	117,00	0,27	129,00
1988	0,48	117,00	0,42	2,27	119,00	0,37	123,00	1988	0,50	116,00	0,39	3,91	120,00	0,27	132,00
1989	0,48	119,00	0,43	1,83	121,00	0,38	124,00	1989	0,50	117,00	0,41	3,02	121,00	0,27	135,00
1990	0,48	118,00	0,44	1,54	120,00	0,39	123,00	1990	0,49	116,00	0,42	2,56	120,00	0,26	134,00
1991	0,47	120,00	0,42	1,87	122,00	0,37	126,00	1991	0,49	118,00	0,40	3,24	122,00	0,26	137,00
1992	0,47	126,00	0,45	0,93	127,00	0,40	130,00	1992	0,49	124,00	0,44	1,76	126,00	0,25	147,00
1993	0,48	120,00	0,44	1,25	121,00	0,40	123,00	1993	0,48	118,00	0,42	2,13	122,00	0,25	139,00
1994	0,48	121,00	0,43	1,79	123,00	0,39	126,00	1994	0,49	119,00	0,42	2,60	123,00	0,26	139,00
1995	0,46	119,00	0,38	2,80	124,00	0,31	131,00	1995	0,48	116,00	0,36	3,91	124,00	0,25	140,00
1996	0,48	120,00	0,39	3,02	124,00	0,33	129,00	1996	0,49	118,00	0,38	3,60	124,00	0,26	138,00
1997	0,48	118,00	0,40	2,67	121,00	0,34	126,00	1997	0,49	116,00	0,38	3,40	122,00	0,26	136,00
1998	0,48	116,00	0,42	2,02	119,00	0,36	123,00	1998	0,49	114,00	0,41	2,68	119,00	0,26	135,00
1999	0,49	114,00	0,44	1,59	116,00	0,39	119,00	1999	0,50	113,00	0,43	2,01	116,00	0,26	133,00
2000	0,48	110,00	0,39	2,78	114,00	0,32	121,00	2000	0,50	108,00	0,38	3,24	114,00	0,26	129,00
2001	0,49	109,00	0,40	2,64	113,00	0,32	120,00	2001	0,51	107,00	0,40	3,06	113,00	0,26	128,00
2002	0,49	113,00	0,39	2,90	118,00	0,30	127,00	2002	0,51	110,00	0,39	3,24	118,00	0,26	134,00
2003	0,49	108,00	0,40	2,30	112,00	0,32	120,00	2003	0,51	105,00	0,40	2,74	111,00	0,25	129,00
2004	0,48	111,00	0,39	2,65	117,00	0,29	127,00	2004	0,50	108,00	0,38	3,00	116,00	0,25	135,00
2005	0,51	106,00	0,43	2,10	109,00	0,35	115,00	2005	0,52	103,00	0,43	2,27	108,00	0,26	126,00
2006	0,48	110,00	0,40	2,30	115,00	0,31	124,00	2006	0,50	108,00	0,39	2,61	115,00	0,24	135,00
2007	0,49	106,00	0,42	1,95	109,00	0,33	117,00	2007	0,51	103,00	0,41	2,28	110,00	0,25	129,00
2008	0,50	108,00	0,44	1,63	111,00	0,36	118,00	2008	0,52	105,00	0,44	1,88	110,00	0,25	133,00
2009	0,49	111,00	0,43	1,78	114,00	0,33	123,00	2009	0,51	108,00	0,42	2,21	114,00	0,24	137,00
2010	0,48	110,00	0,43	1,56	113,00	0,33	122,00	2010	0,50	107,00	0,42	1,89	113,00	0,24	139,00
2011	0,49	107,00	0,43	1,37	110,00	0,34	117,00	2011	0,51	104,00	0,43	1,74	109,00	0,24	135,00

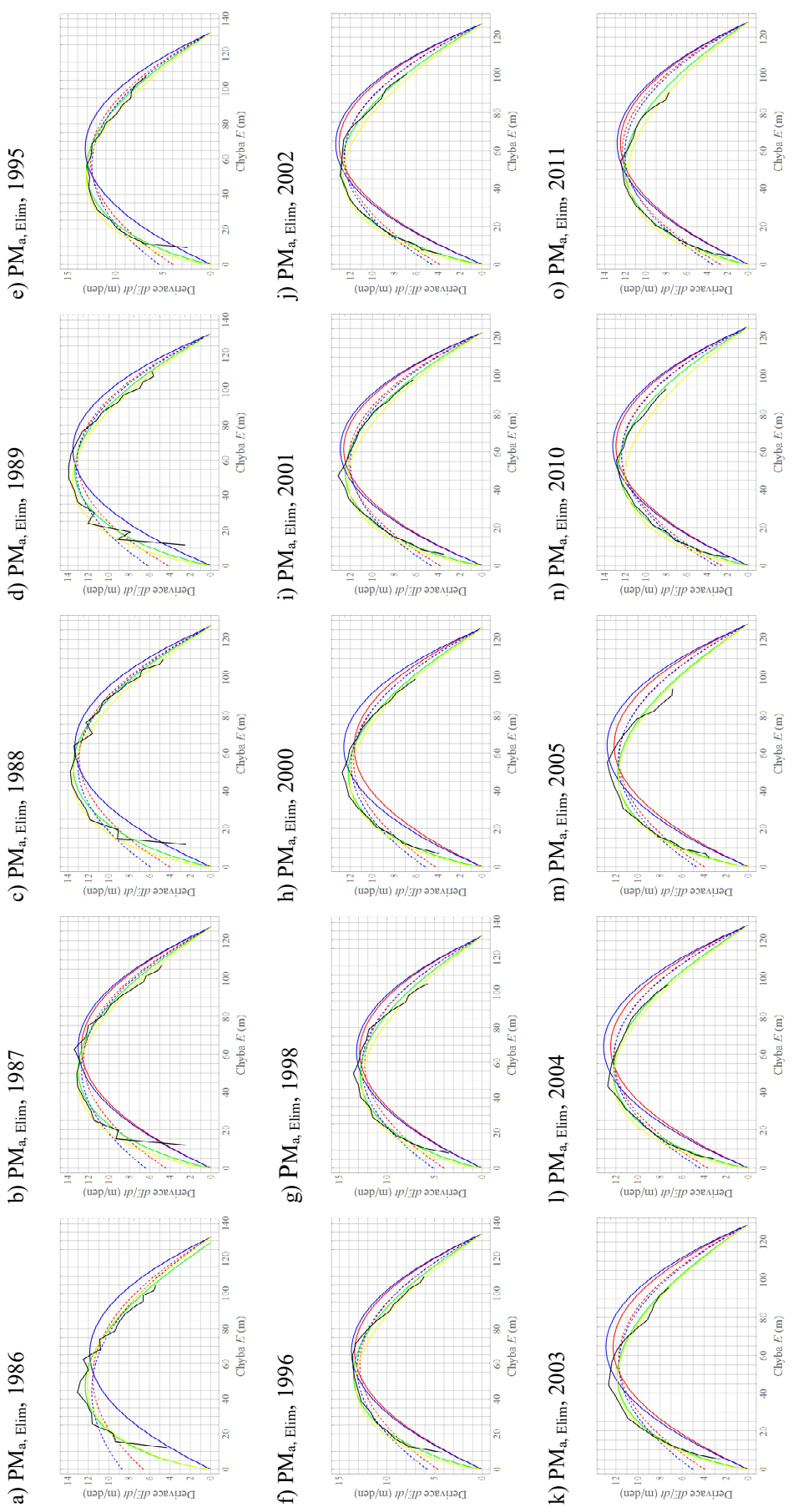
Tabulka 2.3.10: Hodnoty parametrů aproximací diferencí KP respektive KP o délce 0 – 10 dní MEC (roční aritmetický průměr 1986 - 2011, varianta s počáteční/modelovou chybou PM^{MEC}_a).

$PM_{a,E_{lim}}^{MEC}$ rok (rok)	KH_{PP}^{KP}		KH_{PM}^{KP}		LH		$PM_{a,E_{lim}}^{MEC}$ rok (rok)		KH_{PP}^{KP}		KH_{PM}^{KP}		OH		
	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	β (m/d)	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	E_{lim} (m)	α (d ⁻¹)	β (rok)	E_{lim} (d ⁻¹)	α (d ⁻¹)	P (-)
1986	0,36	132,00	0,20	8,72	0,25	132,00	1986	0,36	132,00	0,24	6,63	132,00	0,26	0,00	132,00
1987	0,41	127,00	0,29	6,41	0,28	127,00	1987	0,40	127,00	0,32	4,42	127,00	0,31	0,23	127,00
1988	0,42	127,00	0,31	5,96	0,29	127,00	1988	0,42	127,00	0,34	4,04	127,00	0,33	0,29	127,00
1989	0,41	132,00	0,30	6,19	0,28	132,00	1989	0,41	132,00	0,33	4,20	132,00	0,31	0,26	132,00
1990	0,41	130,00	0,31	5,56	0,28	130,00	1990	0,41	130,00	0,33	3,78	130,00	0,32	0,30	130,00
1991	0,42	129,00	0,32	5,15	0,28	129,00	1991	0,42	129,00	0,35	3,37	129,00	0,34	0,37	129,00
1992	0,45	130,00	0,39	2,92	0,30	130,00	1992	0,45	130,00	0,42	1,61	130,00	0,40	0,64	130,00
1993	0,41	133,00	0,31	4,72	0,27	133,00	1993	0,40	133,00	0,33	3,52	133,00	0,31	0,31	133,00
1994	0,43	130,00	0,34	4,48	0,29	130,00	1994	0,43	130,00	0,36	3,28	130,00	0,34	0,39	130,00
1995	0,40	132,00	0,29	5,47	0,27	132,00	1995	0,40	132,00	0,32	4,00	132,00	0,30	0,23	132,00
1996	0,41	134,00	0,30	5,77	0,27	134,00	1996	0,40	134,00	0,31	4,66	134,00	0,30	0,19	134,00
1997	0,41	131,00	0,30	5,32	0,27	131,00	1997	0,40	131,00	0,32	4,25	131,00	0,30	0,22	131,00
1998	0,40	132,00	0,30	5,15	0,26	132,00	1998	0,39	132,00	0,31	4,02	132,00	0,29	0,20	132,00
1999	0,41	130,00	0,31	5,00	0,27	130,00	1999	0,40	130,00	0,32	3,89	130,00	0,30	0,23	130,00
2000	0,40	126,00	0,29	5,21	0,26	126,00	2000	0,37	126,00	0,30	4,28	126,00	0,28	0,13	126,00
2001	0,42	123,00	0,31	4,66	0,27	123,00	2001	0,41	123,00	0,33	3,83	123,00	0,30	0,18	123,00
2002	0,42	127,00	0,32	4,58	0,27	127,00	2002	0,41	127,00	0,33	3,88	127,00	0,30	0,18	127,00
2003	0,40	129,00	0,28	5,03	0,25	129,00	2003	0,38	129,00	0,30	3,95	129,00	0,26	0,08	129,00
2004	0,41	128,00	0,31	4,38	0,26	128,00	2004	0,39	128,00	0,32	3,69	128,00	0,28	0,16	128,00
2005	0,40	128,00	0,29	4,73	0,25	128,00	2005	0,38	128,00	0,30	3,99	128,00	0,26	0,07	128,00
2006	0,41	128,00	0,31	4,03	0,26	128,00	2006	0,39	128,00	0,32	3,49	128,00	0,29	0,18	128,00
2007	0,40	127,00	0,30	4,00	0,25	127,00	2007	0,38	127,00	0,31	3,44	127,00	0,27	0,12	127,00
2008	0,42	124,00	0,35	3,47	0,27	124,00	2008	0,41	124,00	0,35	2,86	124,00	0,31	0,25	124,00
2009	0,42	128,00	0,33	3,61	0,27	128,00	2009	0,41	128,00	0,34	2,96	128,00	0,30	0,22	128,00
2010	0,42	126,00	0,34	3,20	0,26	126,00	2010	0,41	126,00	0,35	2,61	126,00	0,31	0,28	126,00
2011	0,40	128,00	0,32	3,48	0,25	128,00	2011	0,39	128,00	0,34	2,74	128,00	0,28	0,19	128,00

Tabulka 2.3.11: Hodnoty parametrů aproximací diferencí KP respektive KP o délce 0 – 10 dní s pevně určeným parametrem $E_{lim} = E_{\infty} MEC$ (roční aritmetický průměr 1986 - 2011, varianta s počáteční/modelovou chybou $PM_{a,E_{lim}}^{MEC}$).



Obrázek 2.3.9: Diference KP MEC, varianta s počáteční/modelovou chybou, aritmetický průměr, pro vybrané roky (PM_a) (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaná), LH (žlutá), OH (zelená), OH (zelená), KH^D_{PP} s parametry z KH^D_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^D_{PM} (modrá, čárkovaná).



Obrázek 2.3.10: Diference KP MEC, varianta s počáteční/modelovou chybou, aritmetický průměr, aproximace s parametrem $E_{lim} = E_{\infty}$, pro vybrané roky ($PM_{a, Elim}$) (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaná), LH (žlutá), OH (zelená), OH (zelená), aproximace KH^D_{PP} s parametry z KH^{KP}_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaná).

2.3.6 Porovnání aproximací křivek prediktability modelů pro variantu s počáteční/modelovou chybou

Následuje porovnání parametrů modelů ECMWF a L05. Na základě znalosti teoreticky určených hodnot $\lambda^{L05} = 0,35 \text{ d}^{-1}$ a $E_{\infty}^{L05} = 8,2$ modelu L05 a výsledků porovnání jsou odhadnuty λ^{MEC} a $E_{\infty H}^{MEC}$. Rozdíl parametru hypotéz α mezi L05 a MEC, rozdíl parametru p (OH) mezi L05 a MEC a Odhad Ljapunovova exponentu MEC λ^{MEC} na základě parametru α^{MEC} hypotéz MEC, Ljapunovova exponentu λ^{L05} a parametru α^{L05} hypotéz modelu L05 vztahem: $\lambda^{MEC} = \alpha^{MEC} + (\lambda^{L05} - \alpha^{L05}) \text{ den}^{-1}$ ukazuje Obrázek 2.3.12. Levý sloupec je pro verzi o délce KP 0-10 dní. Pravý sloupec je pro verzi o délce KP 0-10 dní s pevným $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$. Hodnoty $E(0)$ modelu L05 ($N = 90$) přiřazené k jednotlivým rokům MEC a způsob průměru pro L05 ukazuje pro obě verze Obrázek 2.3.12. Hodnoty a způsob jsou totožné, protože E_{∞} (Obrázek 2.1.1) a $E_{\infty H}$ (Obrázek 2.3.11) jsou blízké natolik, že to zmiňované neovlivní.

Pro rozdíl $\alpha^{L05} - \alpha^{MEC}$ je pro verzi bez pevného $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ z Obrázku 2.3.12 (a) patrné, že většina hodnot leží v intervalu $\langle -0,06; 0,04 \rangle \text{ d}^{-1}$, kde pro porovnání, směrodatná odchylka průměrné hodnoty $\bar{\alpha}^{MEC}$ pro KH_{PP}^D je $0,02 \text{ d}^{-1}$ a pro OH je $0,03 \text{ d}^{-1}$ (Tabulka 2.3.9) tj. rozdíl $\alpha^{L05} - \alpha^{MEC}$ je pro většinu hodnot v rámci dvojnásobku směrodatné odchylky v rámci stejného systému (MEC). Větší, než v intervalu udávané hodnoty nastanou kolem let 1986, 1996, 1997 a menší kolem let 2005–2010. Pro rozdíl $\alpha^{L05} - \alpha^{MEC}$ je pro verzi s pevným $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ z Obrázku 2.3.12 (b) patrné, že většina hodnot leží také v intervalu $\langle -0,01; 0,06 \rangle \text{ d}^{-1}$. Větší než v intervalu udávané hodnoty nastanou v roce 1986 a menší v roce 1992.

Pro rozdíl parametru OH $p^{L05} - p^{MEC}$ je pro verzi bez pevného $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ z Obrázku 2.3.12 (c) patrné, že většina hodnot leží v intervalu $\langle -0,2; 0,2 \rangle$, kde pro porovnání, směrodatná odchylka průměrné hodnoty \bar{p}_a^{MEC} je $0,1$ (Tabulka 2.3.9) tj. rozdíl $p^{L05} - p^{MEC}$ je pro většinu hodnot v rámci dvojnásobku směrodatné odchylky v rámci stejného systému (MEC). Mimo uvedený interval leží hodnoty v letech 1986,

1995, 2000, 2009, 2011. Pro rozdíl $p^{L05} - p^{MEC}$ je pro verzi s pevným $E_{lim} = E_{\infty}$ z Obrázku 2.3.12 (d) patrné, že většina hodnot leží v intervalu $\langle 0,1; 0,3 \rangle$, přičemž kolem let 1986, 2003 a 2005 jsou hodnoty rozdílu větší než v udávaném intervalu a v letech 1992 a 1994 jsou menší.

Odhad průměrné hodnoty Ljapunovova exponentu MEC $\lambda^{MEC} = \alpha^{MEC} + (\lambda^{L05} - \alpha^{L05})$ pro verzi bez pevného $E_{lim} = E_{\infty}$ leží v intervalu $\langle 0,32; 0,41 \rangle d^{-1}$ (Obrázek 2.3.12 (e)), přičemž hodnota je s roky rostoucí. Směrodatná odchylka průměru má převážně hodnotu $0,01 d^{-1}$ a $0,02 d^{-1}$ (hodnoty λ^{MEC} jsou pro hypotézy odlišnější než u varianty s počáteční chybou). Větší směrodatná odchylka ($0,03 d^{-1}$) nastává v letech 1965, 1997 a 1986 ($0,04 d^{-1}$). Pro verzi s pevným $E_{lim} = E_{\infty}$ leží $\bar{\lambda}^{MEC}$ v intervalu $\langle 0,20; 0,37 \rangle d^{-1}$ (Obrázek 2.3.12 (f)). Hodnoty do roku 1992 rychle rostou právě z hodnoty $0,20 d^{-1}$ do hodnoty $0,37 d^{-1}$ a poté se drží v intervalu $\langle 0,32; 0,36 \rangle d^{-1}$. Směrodatná odchylka průměru má také převážně hodnotu $0,01 d^{-1}$ a $0,02 d^{-1}$. Větší směrodatná odchylka ($0,04 d^{-1}$) nastává pouze v roce 1986. Je zde rozdíl v odhadu λ^{MEC} mezi verzemi s a bez pevně určeného parametru $E_{lim} = E_{\infty}$ který je zapříčiněn rozdílem mezi E_{lim}^{MEC} určeným z hypotéz a E_{∞}^{MEC} určeným teoreticky.

Tabulka 2.3.12 zobrazuje rozdíl E_{lim} mezi hypotézami a OH a mezi OH a E_{∞} pro KP MEC vypočtenou aritmetickým průměrem z dat roku označeného v druhém sloupci a pro KP L05 vypočtenou průměrem označeným v prvním sloupci s počáteční hodnotou $E(0)$ označenou ve třetím sloupci. Čtvrtý až osmý sloupec ukazují procentuální absolutní hodnotu rozdílu normovaných vzdáleností mezi MEC a L05 a mezi E_{lim} OH a hypotéz:

$$\left| \left(\frac{E_{lim,OH}^{L05} - E_{lim,hypotéza}^{L05}}{E_{lim,OH}^{L05}} \right) - \left(\frac{E_{lim,OH}^{MEC} - E_{lim,hypotéza}^{MEC}}{E_{lim,OH}^{MEC}} \right) \right| \cdot 100\%.$$

OH bylo vybráno jako referenční hodnota, protože je pro oba modely nejbližší E_{∞} . Poslední sloupec ukazuje procentuální normovanou vzdálenost mezi E_{∞} a E_{lim} OH modelu L05: $\left(\frac{E_{\infty}^{L05} - E_{lim,OH}^{L05}}{E_{\infty}^{L05}} \right) \cdot 100\%$. Předposlední sloupec ukazuje to stejné jako poslední sloupec, ale pro MEC a devátý sloupec ukazuje rozdíl mezi MEC a L05. Verze o délce KP 0-10 dní. Z tabulky vyplývá, že nejlépe udržuje podobnou

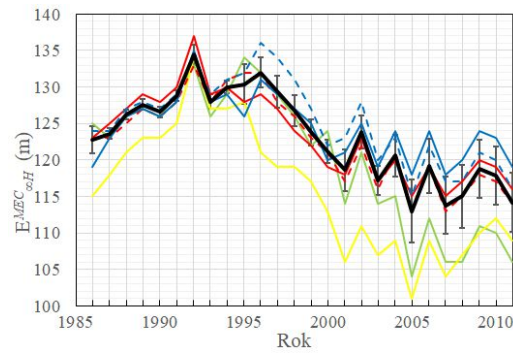
vzdálenost od OH mezi modely aproximace KH_{PM}^D s hodnotami do 2 % do roku 2003, poté leží mezi 4 % až 9 %. Největší vzdálenost udržuje LH . Malou podobnost ukazuje procentuální normovaná vzdálenost mezi E_∞ a E_{lim} OH rozdíl mezi MEC a L05:

$$\left| \left(\frac{E_\infty^{MEC} - E_{lim,OH}^{MEC}}{E_\infty^{MEC}} \right) - \left(\frac{E_\infty^{L05} - E_{lim,OH}^{L05}}{E_\infty^{L05}} \right) \right| \cdot 100\% . \quad (\text{devátý sloupec Tabulky}$$

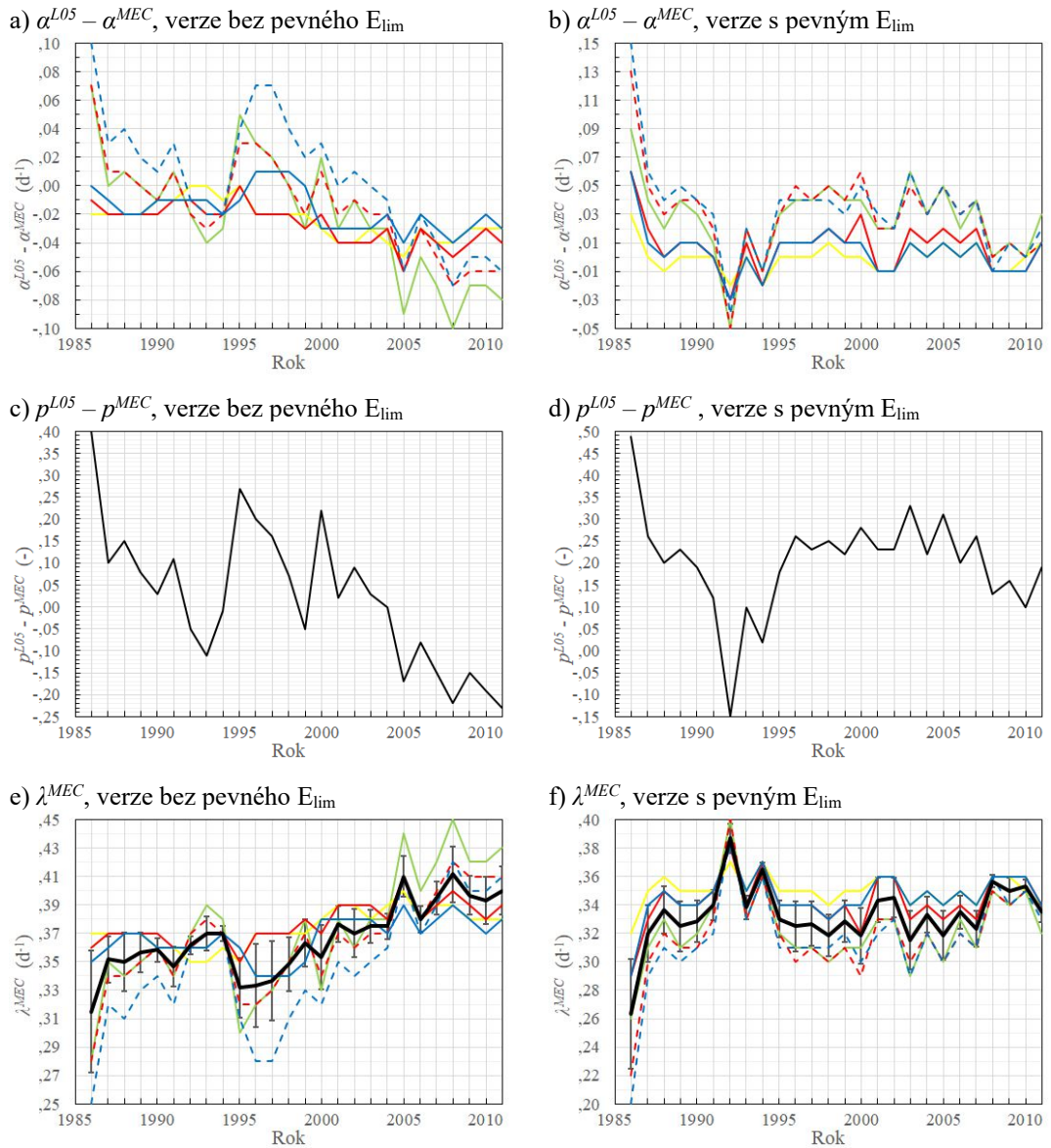
2.3.122.3.6), kde vzdálenost E_{lim} OH je u MEC do 7 % větší než u modelu L05 do roku 2002 a poté od roku 2003 leží mezi 11 % až 20 %. Důvodem rozdílu mezi obdobími do a po roce 2002 je, že pro L05 je vzdálenost mezi E_∞ a E_{lim} pro OH záporná (poslední sloupec). Záporná hodnota znamená, že E_{lim} OH je větší než E_∞ .

Obrázek 2.3.11 zobrazuje odhad limitní hodnoty KP MEC $E_{\infty H}^{MEC}$ na základě parametru E_{lim}^{MEC} hypotéz MEC, normovaného rozdílu teoretické limitní hodnoty E_∞^{L05} a odhadu parametru E_{lim}^{L05} hypotéz modelu L05: $E_{\infty H}^{MEC} = E_{lim}^{MEC} + \left(E_{lim}^{MEC} \cdot \left(E_\infty^{L05} - E_{lim}^{L05} \right) \right) / E_\infty^{L05}$ m.

Z obrázku je patrná podobnost výsledných hodnot mezi hypotézami kromě LH . OH se také rozchází s ostatními po roce 2004. Směrodatná odchylka průměrné hodnoty mezi hypotézami (kromě LH) je do roku 2004 do 3 m. Poté z důvodu odchylnosti OH naroste směrodatná odchylka na 4 m. Hodnoty průměrné hodnoty $\bar{E}_{\infty H}^{MEC}$ rostou v letech 1985 až 1992 z hodnoty 123 m na hodnotu 134 m. Poté po poklesu na 128 m v roce 1993 hodnoty rostou na 132 m v roce 1996. Nastává pokles na 119 m v roce 2001 a oscilace hodnot s klesajícím trendem mezi 124 m a 114 m do roku 2011. Parametr β není porovnáván z důvodu jeho porovnání a diskutování v kapitole 2.3.7.



Obrázek 2.3.11: Odhad limitní hodnoty KP MEC $E_{\infty H}^{MEC}$ na základě parametru E_{\lim}^{MEC} hypotéz MEC, normovaného rozdílu teoretické limitní hodnoty E_{∞}^{L05} a odhadu parametru E_{\lim}^{L05} hypotéz modelu L05: $E_{\infty H}^{MEC} = E_{\lim}^{MEC} + \left(E_{\lim}^{MEC} \cdot (E_{\infty}^{L05} - E_{\lim}^{L05}) \right) / E_{\infty}^{L05}$ m. Označeny jsou: KH_{PP}^D (červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), KH_{PP}^{KP} (modrá), KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaně) a průměr přes hypotézy bez LH (černá). Chybové úsečky ukazují směrodatnou odchylku.



Obrázek 2.3.12: a), b) rozdíl parametru hypotéz α mezi L05 a MEC. Označeny jsou: KH_{PP}^D (červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaná), LH (žlutá), OH (zelená), KH_{PP}^{KP} (modrá) a KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaná). c), d) rozdíl parametru OH p mezi L05 a MEC. e), f) Odhad Ljapunovova exponentu MEC λ^{MEC} na základě parametru α^{MEC} hypotéz MEC, Ljapunovova exponentu λ^{L05} a parametru α^{L05} hypotéz modelu L05 vztahem: $\lambda^{MEC} = \alpha^{MEC} + (\lambda^{L05} - \alpha^{L05}) \text{ den}^{-1}$. Označeny jsou: KH_{PP}^D (červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaná), LH (žlutá), OH (zelená), KH_{PP}^{KP} (modrá), KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaná) a průměr přes hypotézy bez LH (černá). Chybové úsečky ukazují směrodatnou odchylku. Verze o délce KP 0-10 dní. Levý sloupec verze bez pevného E_{lim} . Pravý sloupec s pevným E_{lim} .

Prům. <i>PM</i>	Rok MEC	$E(0)$ L05	KH_{PP}^D $\left\ E_{\lim;OH}^{L05} - E_{\lim}^{L05} \right\ $ (%)	KH_{PM}^D $\left\ E_{\lim;OH}^{L05} - E_{\lim}^{L05} \right\ $ (%)	KH_{PP}^{KP} $\left\ E_{\lim;OH}^{MEC} - E_{\lim}^{MEC} \right\ $ (%)	KH_{PM}^{KP} $\left\ E_{\lim;OH}^{MEC} - E_{\lim}^{MEC} \right\ $ (%)	LH (%)	OH (%)	OH $\left\ E_{\infty} - E_{\lim;OH} \right\ $ (%)	OH (%)
ari	1986	0,7	1	2	4	0	8	6	8	2
ari	1987	0,7	2	0	0	1	4	4	6	2
ari	1988	0,7	1	1	1	1	4	1	3	2
ari	1989	0,7	2	0	1	1	2	4	6	2
ari	1990	0,7	2	0	1	1	2	3	5	2
ari	1991	0,7	1	1	0	1	3	0	2	2
ari	1992	0,7	3	0	2	1	2	2	0	2
ari	1993	0,6	3	2	2	3	2	5	8	2
ari	1994	0,6	1	1	1	1	1	1	3	2
ari	1995	0,6	4	2	5	2	4	2	1	2
ari	1996	0,5	2	0	0	4	8	1	4	2
ari	1997	0,5	1	0	1	4	7	1	4	2
ari	1998	0,5	1	0	1	4	5	4	7	2
ari	1999	0,5	1	1	4	5	3	6	8	2
ari	2000	0,4	1	1	4	5	3	6	8	2
ari	2001	0,3	4	2	7	7	5	7	2	-5
ari	2002	0,3	2	1	4	6	6	5	0	-5
ari	2003	0,3	3	1	5	5	4	12	7	-5
ari	2004	0,2	4	4	7	6	3	11	1	-10
ari	2005	0,2	9	7	12	8	1	20	10	-10
ari	2006	0,2	5	5	9	7	0	13	3	-10
ari	2007	0,2	7	5	10	8	1	18	8	-10
ari	2008	0,2	8	6	11	8	4	15	5	-10
ari	2009	0,2	7	5	10	7	2	14	4	-10
ari	2010	0,2	7	5	10	7	5	13	3	-10
ari	2011	0,2	8	6	11	8	6	18	9	-10

Tabulka 2.3.12: Rozdíl E_{\lim} mezi hypotézami a OH a mezi OH a E_{∞} pro KP MEC vypočtenou aritmetickým průměrem z dat roku označeného v druhém sloupci a pro KP L05 vypočtenou průměrem označeným v prvním sloupci s počáteční hodnotou $E(0)$ označenou ve třetím sloupci. Čtvrtý až osmý sloupec ukazují procentuální absolutní hodnotu rozdílu normovaných vzdáleností mezi MEC a L05 a mezi E_{\lim} OH a hypotéz: $\left| \left(\frac{E_{\lim,OH}^{L05} - E_{\lim,hypotéza}^{L05}}{E_{\lim,OH}^{L05}} \right) - \left(\frac{E_{\lim,OH}^{MEC} - E_{\lim,hypotéza}^{MEC}}{E_{\lim,OH}^{MEC}} \right) \right| \cdot 100\%$. Poslední sloupec ukazuje procentuální normovanou vzdálenost mezi E_{∞} a E_{\lim} OH modelu L05: $\left(\frac{E_{\infty}^{L05} - E_{\lim,OH}^{L05}}{E_{\infty}^{L05}} \right) \cdot 100\%$. Předposlední sloupec ukazuje to stejné jako poslední sloupec, ale pro MEC a devátý sloupec ukazuje rozdíl mezi MEC a L05. Verze o délce KP 0-10 dní.

2.3.7 Modelová chyba a diskuze

V kapitole 2.3.3 jsou na základě porovnání MEC a L05 odhadnuty Ljapunovovy exponenty MEC λ_{PP}^{MEC} pro variantu s počáteční chybou a verze o délce KP 1-10 dní s (Obrázek 2.3.6 (f)) a bez (Obrázek 2.3.6 (e)) pevně určených parametrů $E_{lim} = E_{\infty}$. V kapitole 2.3.6 jsou odhadnuty Ljapunovovy exponenty λ_{PM}^{MEC} na základě porovnání pro variantu s počáteční/modelovou chybou a verzi o délce KP 0-10 dní s (Obrázek 2.3.12 (f)) a bez (Obrázek 2.3.12 (e)) pevně určených parametrů $E_{lim} = E_{\infty}$. Obrázek 2.3.14 (a), (b) vyčísluje výsledný odhad λ^{MEC} (černá) jako průměr λ_{PP}^{MEC} (červená) a λ_{PM}^{MEC} (modrá), a) je pro verzi bez pevného parametru $E_{lim} = E_{\infty}$ respektive $E_{lim} = E_{\infty}$, b) je pro verzi s pevným parametrem $E_{lim} = E_{\infty}$, respektive $E_{lim} = E_{\infty}$. λ_{PP}^{MEC} a λ_{PM}^{MEC} ukazují dobrou shodu. Směrodatné odchylky jsou průměrů λ^{MEC} pro obě verze do $0,01 \text{ d}^{-1}$ (kromě roku 2005 pro verzi bez pevného a kromě let 1986 a 1987 pro verzi s pevným parametrem, kde je směrodatná odchylka větší). Nízká směrodatná odchylka je brána jako potvrzení platnosti λ^{MEC} , protože dva nezávislé výpočty (λ_{PP}^{MEC} , λ_{PM}^{MEC}) vedou k blízkým hodnotám, a to pro obě verze. Obrázek 2.3.14 (c), (d) porovnává λ^{MEC} a λ_{PP}^{MEC} s parametry α_{PP}^{MEC} hypotéz (varianta s počáteční chybou) a (e), (f) porovnává λ^{MEC} a λ_{PM}^{MEC} s parametry α_{PM}^{MEC} hypotéz (varianta s počáteční/modelovou chybou). Z porovnání plyne, že nevhodné hypotézy k určení λ^{MEC} jsou KH_{PP}^D , KH_{PP}^{KP} a LH . Vhodnější jsou KH_{PM}^D , KH_{PM}^{KP} a OH . Pro variantu s počáteční chybou a verzi bez pevného parametru $E_{lim} = E_{\infty}$ respektive $E_{lim} = E_{\infty}$ (Obrázek 2.3.14 (c)) jsou nejbližší λ^{MEC} parametry α_{PP}^{MEC} z KH_{PM}^{KP} , kde se odchylka pohybuje přibližně do 10 % λ^{MEC} (kromě období kolem roku 1993). Pro variantu s počáteční/modelovou chybou a verzi bez pevného parametru $E_{lim} = E_{\infty}$ respektive $E_{lim} = E_{\infty}$ (Obrázek 2.3.14 (e)) jsou nejbližší λ^{MEC} parametry α_{PM}^{MEC} z OH do roku 2000 (odchylka do 10 % λ^{MEC}) a od roku 2000 jsou nejbližší α_{PM}^{MEC} z KH_{PM}^{KP} a KH_{PM}^D (odchylka do 10 % λ^{MEC}). Pro variantu s počáteční chybou a verzi s pevným parametrem $E_{lim} = E_{\infty}$ respektive $E_{lim} = E_{\infty}$ (Obrázek 2.3.14 (d)) jsou nejbližší λ^{MEC} parametry α_{PP}^{MEC} z KH_{PM}^D , kde je ale patrná výraznější odchylka, a to místy více než

10 % λ^{MEC} . Pro variantu s počáteční/modelovou chybou a verzi s pevným parametrem $E_{lim} = E_{\infty}$ respektive $E_{lim} = E_{\infty}$ (Obrázek 2.3.14 (f)) jsou nejbližše λ^{MEC} parametry α_{PP}^{MEC} z KH_{PM}^D , kde je patrná blízkost s λ^{MEC} a to do 5 % λ^{MEC} (kromě období kolem roku 1988, kde je odchylka větší).

Nyní je diskutováno, zda platné λ^{MEC} je pro verzi bez anebo s pevným parametrem $E_{lim} = E_{\infty}$ respektive $E_{lim} = E_{\infty}$. Pro argumentaci je použit odhad Ljapunovova exponentu z $\Lambda_a(i) \approx \text{konst.}$, $\Lambda_g(i) \approx \text{konst.}$ (varianta s počáteční chybou), které byly přestaveny v kapitole 2.2.3. Obrázek 2.3.15 (c) porovnává Ljapunovův exponent λ^{MEC} určený z porovnání hypotéz (Obrázek 2.3.14) s odhadem Ljapunovova exponentu na základě odhadu exponenciálního růstu: $\lambda_{\Lambda}^{MEC} = \Lambda_a^{MEC} - (\Lambda^{L05,90} - \lambda^{L05,90})$, kde Λ_a^{MEC} je odhad $\Lambda_a^{MEC}(i) \approx \text{konst.}$ pro KP MEC určeného z aritmetického průměru (Obrázek 2.2.11 (a), b)), $\Lambda^{L05,90}(i)$ je odhad $\Lambda^{L05,90}(i) \approx \text{konst.}$ pro KP modelu L05, ($N = 90$) určeného z aritmetického průměru pro verzi s pevným parametrem $E_{lim} = E_{\infty}$ a pro určený geometrický průměr do roku 1999 a aritmetický průměr od roku 2000 pro verzi bez pevného parametru $E_{lim} = E_{\infty}$ a $\lambda^{L05,90} = 0,35 \text{ d}^{-1}$ je Ljapunovův exponent L05 ($N = 90$). Výsledná hodnota λ_{Λ}^{MEC} je tedy určena z úpravy hodnoty $\Lambda_a^{MEC}(i) \approx \text{konst.}$ o rozdílu mezi $\Lambda^{L05,90}(i)$ a $\lambda^{L05,90}$. Z Obrázku 2.3.15 (c) je patrná shoda λ^{MEC} a λ_{Λ}^{MEC} pro verzi bez pevného parametru $E_{lim} = E_{\infty}$ (červené křivky). Na základě metody určující λ_{Λ}^{MEC} , která není závislá na velikosti E_{lim} jsou určeny odhady Ljapunovových exponentů λ^{MEC} pro verzi bez pevného parametru $E_{lim} = E_{\infty}$ jako hodnoty, které popisují chování MEC.

Pro verzi bez pevného parametru $E_{lim} = E_{\infty}$, respektive parametru $E_{lim} = E_{\infty}$ zobrazuje limitní hodnoty KP MEC Obrázek 2.3.13. Obrázek obsahuje jak hodnoty pro variantu s počáteční/modelovou $E_{\infty H}^{MEC}$ představené v Obrázku 2.3.11, tak pro variantu s počáteční chybou $E_{\infty H}^{MEC}$ (Obrázek 2.3.5). Pro porovnání jsou zobrazeny limitní hodnoty E_{∞}^{MEC} a E_{∞}^{MEC} (Obrázek 2.1.1). Z porovnání vyplývá, že pro variantu s počáteční/modelovou chybou jsou hodnoty $E_{\infty H}^{MEC}$ a E_{∞}^{MEC} podobné do roku 2000. Po roce 2000 jsou $E_{\infty H}^{MEC}$ nižší než E_{∞}^{MEC} a to v průměru o 10 m. Pro variantu s počáteční

chybou je $E_{\infty H}^{MEC}$ nižší než E_{∞}^{MEC} pro všechny roky. V roce 1985 je rozdíl největší (25 m) a poté rozdíl klesá do roku 1992 (3 m). Následně je průměrný rozdíl 10 m. Zatímco výraznější rozdíl pro E_{∞}^{MEC} a $E_{\infty H}^{MEC}$ nastává jen v letech 1985, 1986 a 1993, tak $E_{\infty H}^{MEC}$ a E_{∞}^{MEC} jsou blízké až po roce 2003. Největší rozdíl nastává v roce 1986 a poté se zmenšuje. Jak již bylo zmíněno, rozdíl v $E_{\infty H}^{MEC}$ a E_{∞}^{MEC} znamená nepřesný popis variability atmosféry MEC, a proto zmenšující se rozdíl a podobnost po roce 2003 je teoreticky opodstatněný tím, že s vývojem MEC se popis atmosféry modelem vylepšuje a je opodstatněnější než skoro neměnný rozdíl E_{∞}^{MEC} a $E_{\infty H}^{MEC}$, který by znamenal dokonalý popis již od roku 1988.

Nižší hodnoty $E_{\infty H}^{MEC}$ a E_{∞}^{MEC} (v porovnání s hodnotami E_{∞}^{MEC} a $E_{\infty H}^{MEC}$) znamenají nutnost znovu porovnat KP MEC a L05, protože ty jsou porovnány po normování limitními hodnotami. Pro variantu s počáteční chybou ukazuje výsledky porovnání Obrázek 2.3.16. KP MEC (červené křivky) jsou určeny stejně jako v Obrázcích 2.2.3 a 2.2.4 aritmetickým průměrem. KP L05, které jsou nejpodobnější KP MEC jsou, na rozdíl od verze s E_{∞}^{MEC} (Obrázky 2.2.3 a 2.2.4), vypočteny pro porovnávané období 1986–1999 z geometrického průměru. V období 2000–2011 zůstává výpočet stejný jako v Obrázcích 2.2.3 a 2.2.4 tj. aritmetickým průměrem. Z Obrázku 2.3.16 je patrná dobrá shoda KP MEC s KP L05, $N = 90$. Po roce 2000 má KP MEC rychlejší růst než KP L05, což potvrzuje i vyšší hodnota λ^{MEC} než λ^{L05} (Obrázek 2.3.14 (a)). Nižší hodnoty $E_{\infty H}^{MEC}$ také znamenají jiné, pro porovnání vhodné, počáteční hodnoty $E(0)$ modelu L05. Nové hodnoty ukazuje Tabulka 2.3.12 (třetí sloupec). Pro variantu s počáteční/modelovou chybou není rozdíl $E_{\infty H}^{MEC}$ a E_{∞}^{MEC} , tak výrazný jako pro variantu s počáteční chybou. Díky tomu se ani způsob průměrování a ani hodnota $E(0)$ KP L05 nemění. Nové porovnání pro variantu s počáteční/modelovou chybou ukazuje Obrázek 2.3.17. Je z něj patrná dobrá shoda KP MEC s KP L05 ($N = 90$) do roku 1999. Poté se hodnoty rozcházejí, ale stále je nejbližší KP MEC a KP L05 ($N = 90$).

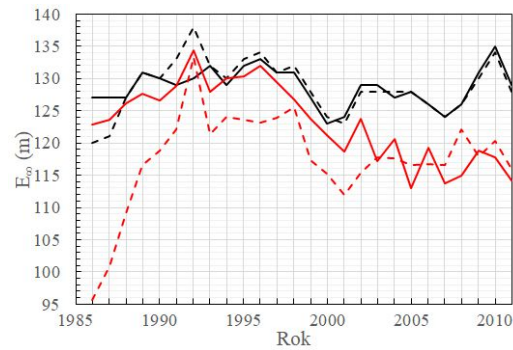
V kapitole 2.2 vznikla otázka, jak se chová modelová chyba, když z porovnání KP vyšla podobnost MEC s L05 ($N = 90$) tj. pro L05 je modelová chyba konstantní a pro MEC by měla klesat, což potvrzuje Obrázek 2.3.15 (a), který ukazuje parametr hypotéz β^{PM} (popisuje modelovou chybu) pro KH_{PM}^{KP} , KH_{PM}^D z varianty

s počáteční/modelovou chybou a verze bez α s pevným parametrem $E_{\lim} = E_{\infty}$. Průběhy poklesu β^{PM} jsou podobné pro obě hypotézy i verze. Jen jsou posunuté, což znamená že KH_{PM}^{KP} a KH_{PM}^D udávají různé hodnoty β^{PM} se stejným průběhem. To je akceptovatelné pro různé verze, ale ne pro KH_{PM}^{KP} a KH_{PM}^D (způsob aproximace by neměl ovlivnit chybu modelu). Zároveň parametr β^{PP} z KH_{PM}^{KP} a KH_{PM}^D pro variantu s počáteční chybou je nenulový (Tabulky 2.3.1 a 2.3.5), i když pro variantu s počáteční chybou není ze způsobu výpočtu modelová chyba možná. Parametr α z KH_{PM}^{KP} a KH_{PM}^D je i pro variantu s počáteční chybou blíže λ^{MEC} než α z KH_{PP}^{KP} a KH_{PP}^D (Obrázek 2.3.14 (b,d)) a proto jsou pro odhad λ^{MEC} KH_{PM}^{KP} a KH_{PM}^D platnější. Na základě představeného jsou pro KP MEC platné hypotézy (α odhaduje λ^{MEC} lépe), které mají nenulový parametr β jak pro variantu s počáteční, tak s počáteční/modelovou chybou. Zároveň je platná i OH (α odhaduje λ^{MEC} lépe než KH_{PP}^{KP} a KH_{PP}^D), která je popsána také parametrem p , který ukazuje míru stočení maxima difference KP od symetrické paraboly ($p=1$, více viz kapitola 1.3.1). Při pohledu na tvar aproximací KH_{PM}^{KP} a KH_{PM}^D v Obrázcích 2.3.1 - 2.3.4 a Obrázcích 2.3.7 - 2.3.10 je patrné, že i tyto aproximace stáčí maxima diferencí KP od symetrické paraboly a to tím, že parametr β posouvá počátek do nenulové hodnoty. Nabízí se tedy definovat modelovou chybu jako rozdíl parametrů β nebo p variant s počáteční a s počáteční/modelovou chybou. Definujeme tím nově modelovou chybu jako rozdíl ve stočení maxima difference KP od symetrické paraboly pro variantu s počáteční a s počáteční/modelovou chybou. Obrázek 2.3.15 (b), ukazuje absolutní hodnotu rozdílu parametrů $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ variant s počáteční/modelovou a modelovou chybou a je z něj patrné, že pro KH_{PM}^{KP} (plná křivka) a KH_{PM}^D (čárkovaná křivka) je modelová chyba $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ stejná (pro obě verze), což odpovídá teoretickým očekáváním. Zároveň pro verzi s pevným parametrem $E_{\lim} = E_{\infty}$ respektive $E_{\lim} = E_{\infty}$ (černé křivky) je průběh $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ oproti verzi bez pevného parametru mírně klesající (až konstantní) a s nižší průměrnou hodnotou. Podobný průběh ukazuje Obrázek 2.3.15 (d), který ukazuje absolutní hodnotu rozdílu parametrů OH $|p^{PM} - p^{PP}|$ variant s počáteční/modelovou a

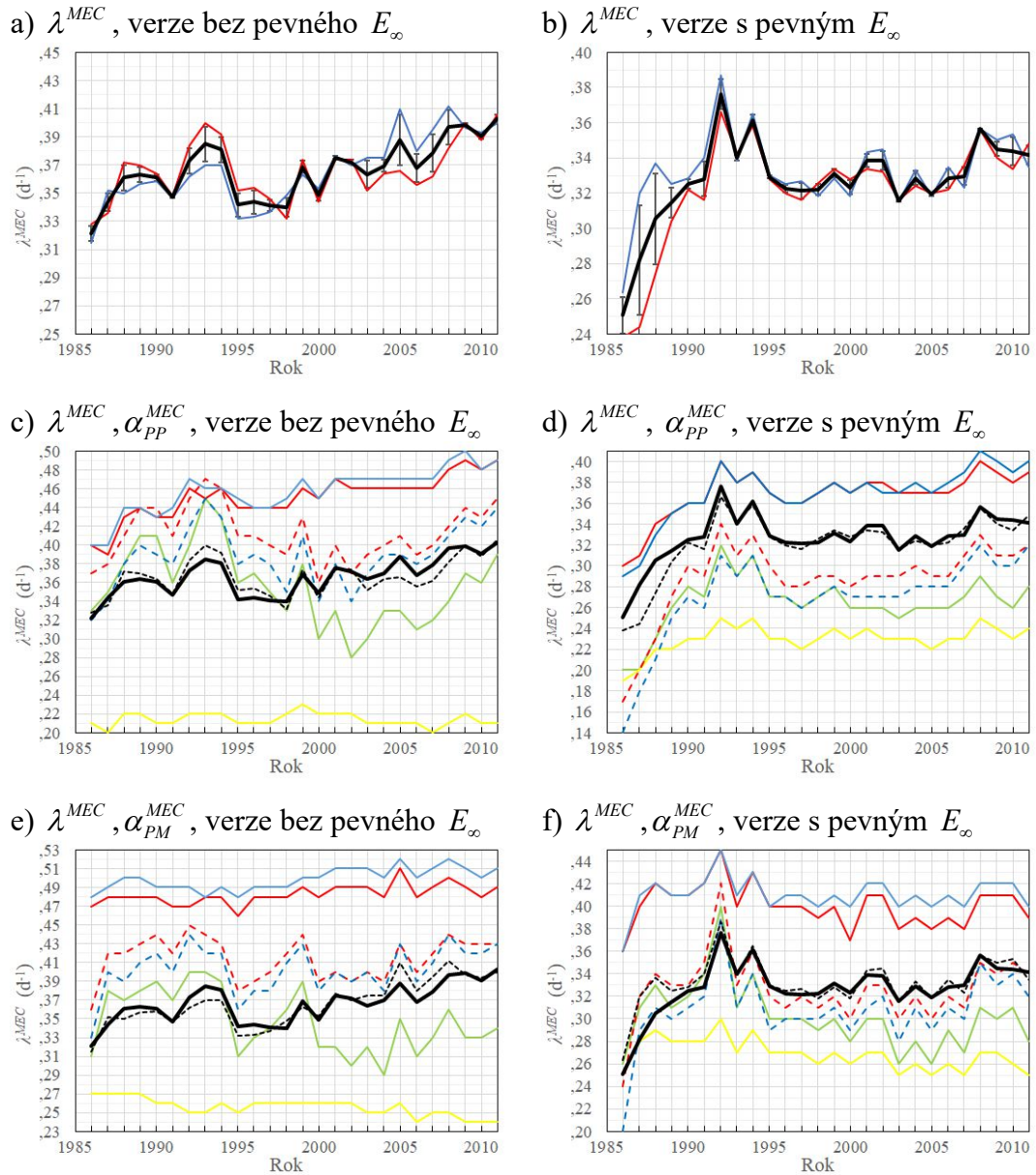
modelovou chybou, kde pro verzi s pevným parametrem $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ respektive $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ (černé křivky) je průběh $|p^{PM} - p^{PP}|$ oproti verzi bez pevného parametru taktéž mírně klesající (až konstantní) a taktéž s nižší průměrnou hodnotou. Nově definovaná modelová chyba $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ by taktéž vysvětlovala modelovou chybu modelu L05 ($N = 90$). Pro verzi, která je porovnávána s MEC s pevným parametrem $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ respektive $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ jsou KP variant s počáteční a s počáteční/modelovou chybou vypočtené z aritmetických průměrů tj. $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ respektive $|p^{PM} - p^{PP}|$ L05 i MEC jsou blízké konstantní hodnotě, tj. neměnné modelové chybě. Pro verzi L05 ($N = 90$), která je porovnávána s MEC bez pevného parametru $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ respektive $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ jsou KP varianty s počáteční chybou vypočtené do roku 1999 z geometrického průměru a od roku 2000 z aritmetického průměru a varianta s počáteční/modelovou chybou je vypočtena z aritmetického průměru. Z důvodů rozdílnosti β^{PP} a p^{PP} L05 pro průměrování aritmetickým a geometrickým průměrem (Tabulka 2.3.2) je $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ a $|p^{PM} - p^{PP}|$ do roku 2000 větší než po tomto roce, což vytváří podobný průběh jako $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ a $|p^{PM} - p^{PP}|$ MEC (Obrázek 2.3.15 (b), (d)). Tím je vysvětlena modelová chyba jak pro L05, tak pro MEC.

Zbývá diskutovat, proč E_{∞}^{MEC} , respektive E_{∞}^{MEC} udává obecně vyšší hodnoty než $E_{\infty H}^{MEC}$ a $E_{\infty H}^{MEC}$ a proč E_{∞}^{MEC} a E_{∞}^{MEC} vedou ke skoro konstantní hodnotě modelové chyby $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ nebo $|p^{PM} - p^{PP}|$. Připomeňme definici: $E_{\infty} = \sqrt{(\overline{f-c})^2 + (\overline{a-c})^2}$ a $E_{\infty} = \sqrt{2(\overline{f-c})^2}$, kde $\overline{f-c}$ je časově zprůměrovaný rozdíl mezi předpovědí a klimatickou hodnotou $\overline{a-c}$ je časově zprůměrovaný rozdíl mezi analýzou a předpovědí. Klimatická hodnota je vypočtena z denních klimatologií z ERA-Interim tj. z MEC z roku 2006, což může nadhodnocovat E_{∞}^{MEC} (pro variantu s počáteční chybou více), protože klimatická hodnota vypočtena z aktuálního MEC v daném roce, by analýza měla jinou hodnotu z důvodu zatížení jinou chybou a na rozdíl od varianty s počáteční/modelovou chybou, kde v rozdílu taktéž vystupuje analyzovaná hodnota určená z ERA-Interim $\overline{a-c}$ je pro variantu s počáteční chybou pro výpočet použita

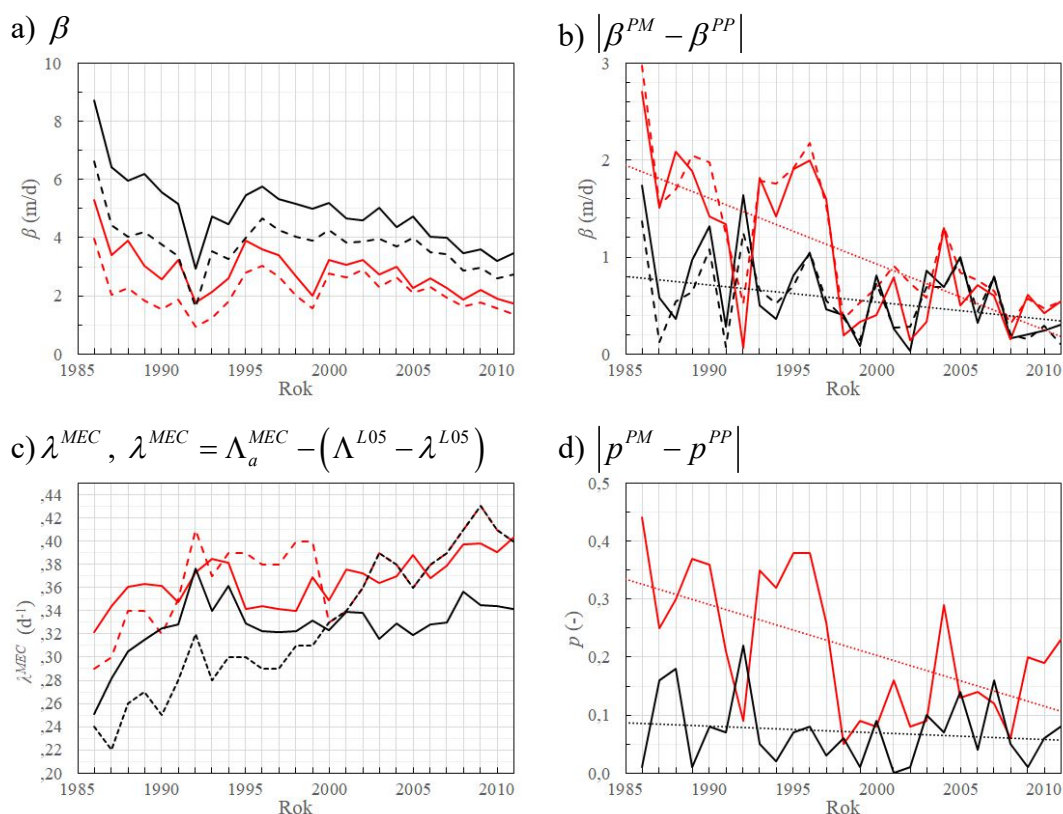
pouze předpověď z MEC v aktuálním roce $\overline{(f-c)}$. Další možná vysvětlení byla již diskutována v kapitole 1.3.2.



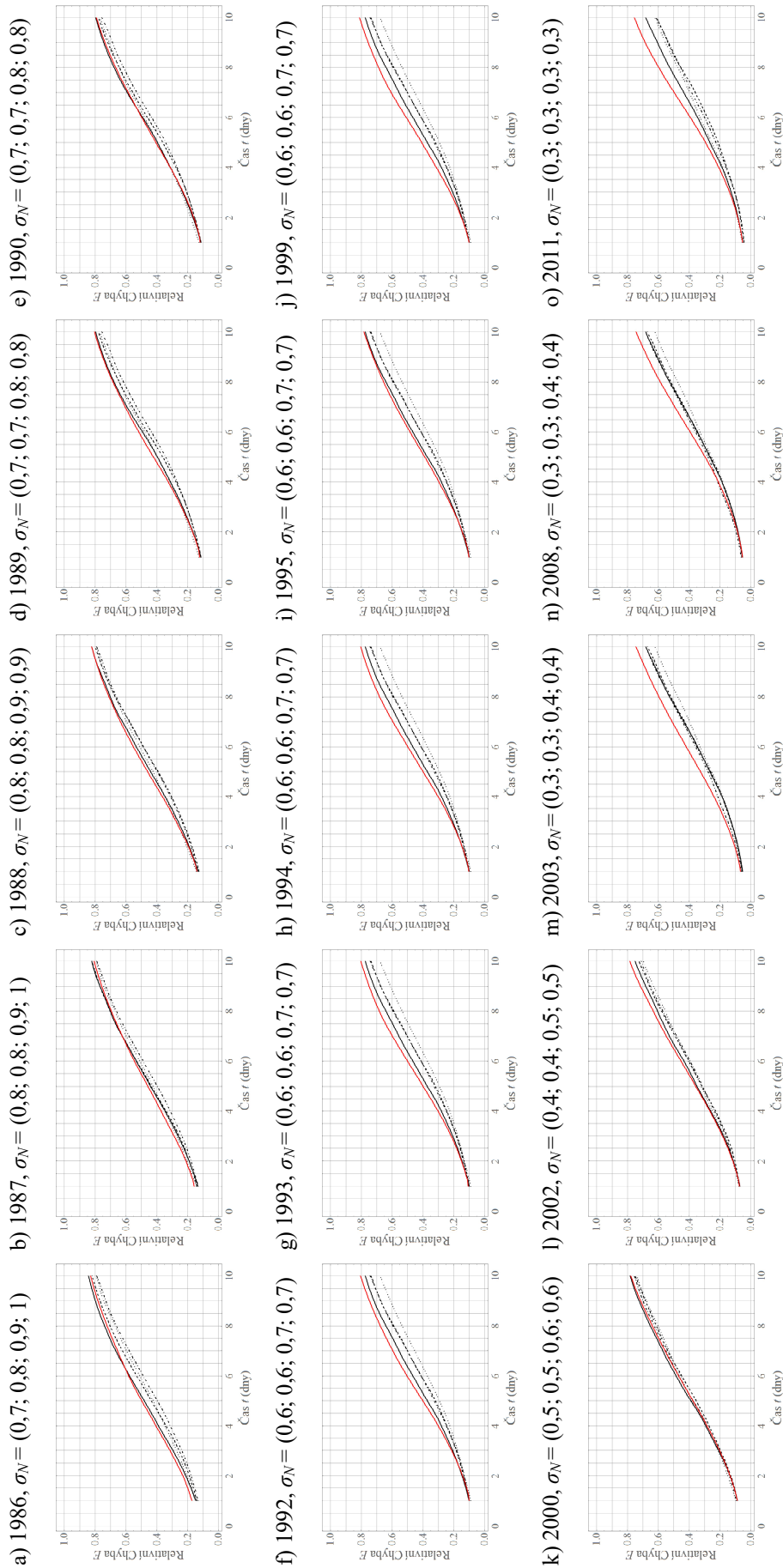
Obrázek 2.3.13: Limitní hodnoty KP MEC $E_{\infty H}^{MEC}$ (červeně, plná čára) pro variantu s počáteční/modelovou chybou (Obrázek 2.3.11), $E_{\infty H}^{MEC}$ (červeně, čárkovaně) pro variantu s počáteční chybou (Obrázek 2.3.5) a teoretické Limitní hodnoty E_{∞}^{MEC} (černá, čárkovaně) a E_{∞}^{MEC} (černá, plně) (Obrázek 2.1.1).



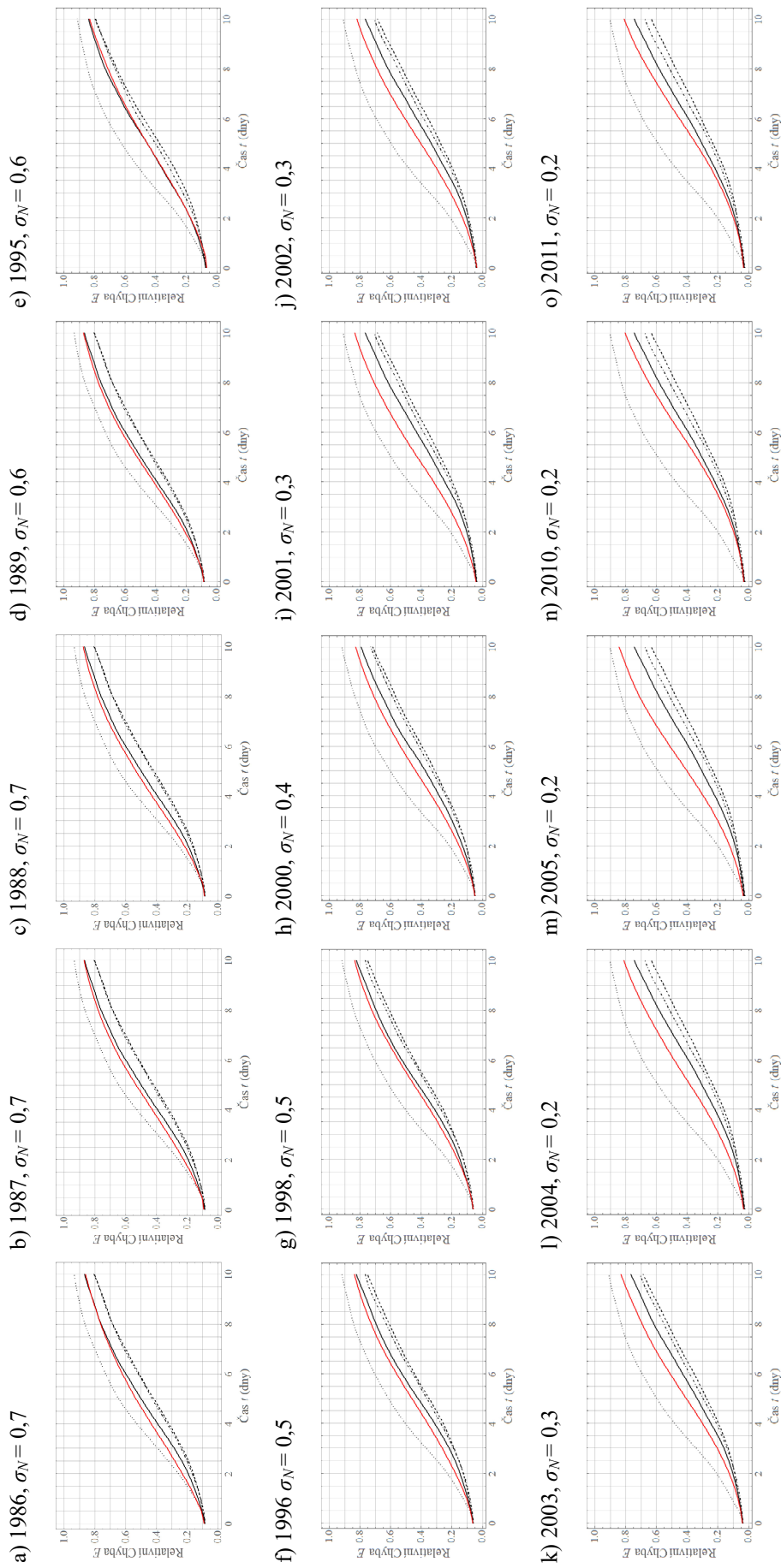
Obrázek 2.3.14: a), b) Odhad Ljapunovova exponentu λ^{MEC} (černá) jako průměr λ_{PP}^{MEC} (červená) a λ_{PM}^{MEC} (modrá). c), d) Porovnání λ^{MEC} (černá), λ_{PP}^{MEC} (černá, čárkovaně) s parametry α_{PP}^{MEC} hypotéz (varianta s počáteční chybou), KH_{PP}^D (červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), KH_{PP}^{KP} (modrá) a KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaně). e), f) Porovnání λ^{MEC} (černá), λ_{PM}^{MEC} (černá, čárkovaně) s parametry α_{PM}^{MEC} hypotéz (varianta s počáteční/modelovou chybou, barevné označení jako v c), d)). Levý sloupec pro verzi bez pevného parametru $E_{lim} = E_\infty$, respektive $E_{lim} = E_\infty$. Pravý sloupec pro verzi s pevným parametrem $E_{lim} = E_\infty$ respektive $E_{lim} = E_\infty$.



Obrázek 2.3.15: a) Parametr hypotéz β^{PM} pro variantu s počáteční/modelovou chybou. Verze s pevným parametrem $E_{lim} = E_{\infty}$ (černě). Verze bez pevného parametru $E_{lim} = E_{\infty}$ (červeně). KH_{PM}^{KP} (plná křivka), KH_{PM}^D (čárkovaná křivka). b) Absolutní hodnota rozdílu parametrů $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ variant s počáteční/modelovou a modelovou chybou (označení viz (a)). Tečkovně proložení lineární regresí. c) Odhad Ljapunovova exponentu λ^{MEC} určeného z porovnání hypotéz (Obrázek 2.3.14), plná křivka, barevné označení pro verzi s pevným a bez pevného parametru viz (a) a odhad Ljapunovova exponentu na základě odhadu exponenciálního růstu $\lambda^{MEC} = \Lambda_a^{MEC} - (\Lambda^{L05,90} - \lambda^{L05,90})$ (Obrázek 2.2.11, čárkovaně, , plná křivka, barevné označení pro verzi s pevným a bez pevného parametru viz (a), Λ_a^{MEC} je pro MEC (aritmetický průměr), $\Lambda^{L05,90}$ je pro L05, ($N = 90$) pro černou křivku aritmetický průměr, pro červenou křivku geometrický průměr do roku 1999 a aritmetický průměr od roku 2000). d) Absolutní hodnota rozdílu parametrů OH $|p^{PM} - p^{PP}|$ variant s počáteční/modelovou a modelovou chybou (barevné označení viz (a)) Tečkovně proložení lineární regresí.



Obrázek 2.3.16: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{i, Norm}$, verze bez pevného $E_{lim} = E_{\infty}$. Červeně pro MEC (roční aritmetický průměr). Černě pro L05 (varianta s počáteční chybou, geometrický průměr v období 1986–1999, aritmetický průměr v období 2000–2011, σ_N viz a) - o). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$.



Obrázek 2.3.17: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{a, Norm}$, verze bez pevného $E_{lim} = E_\infty$. Červeně pro MEC (rozdíl mezi předpovědí a analýzou, roční aritmetický průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční/modelovou chybou, aritmetický průměr, σ_N viz a) - o). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čárkovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$.

2.3.8 Závěr

Z porovnání parametrů α z hypotéz obou modelů (L05 a MEC) a ze znalosti Ljapunovova exponentu $\lambda^{L05} = 0,35 \text{ d}^{-1}$ jsou určeny Ljapunovovy exponenty MEC s průměrnou hodnotou přes období 1986–2011 $\lambda^{MEC} = 0,37 \text{ d}^{-1}$ a s růstem od $\lambda^{MEC} = 0,32 \text{ d}^{-1}$ v roce 1986 do $\lambda^{MEC} = 0,40 \text{ d}^{-1}$ v roce 2011 (Tabulka 2.3.13).

Na základě porovnání E_{lim} a E_{lim} z hypotéz obou modelů byla vyvrácena platnost teoreticky určených hodnot E_{∞}^{MEC} , E_{∞}^{MEC} a byly určeny nové hodnoty $E_{\infty H}^{MEC}$, $E_{\infty H}^{MEC}$ (Tabulka 2.3.13). $E_{\infty H}^{MEC}$ roste z hodnoty 96 m v roce 1986 do hodnoty 133 m v roce 1992. Poté hodnota klesne a v období 1993–1998 se drží mezi 121 m a 126. Další pokles posune hodnotu na 112 m až 118 m v letech 1999–2011 s nárůsty v letech 2008 a 2010. $E_{\infty H}^{MEC}$ roste z hodnoty 123 m v roce 1986 do hodnoty 134 v roce 1992. Po poklesu na hodnotu 128 m v roce 1993 nastává opět růst na 132 m v roce 1996. Následuje pokles s oscilujícími hodnotami na 114 m v roce 2011. Nové hodnoty $E_{\infty H}^{MEC}$, $E_{\infty H}^{MEC}$ vedly k nutnosti nového porovnání KP MEC a L05 (Obrázek 2.3.16 a 2.3.17). Zůstává největší shoda KP obou modelů pro L05 s $N = 90$. Pro variantu s počáteční chybou je však v období porovnání 1986–1999 podobnost pro KP L05 určenou z geometrického průměru. V období po roce 1999 a pro variantu s počáteční/modelovou chybou zůstává podobnost pro KP L05 určenou z aritmetického průměru.

Na základě této skutečnosti (Podobnost MEC a L05, $N = 90$ v celém období porovnání by znamenalo konstantní modelovou chybu) a faktu, že nejbližší λ^{MEC} jsou parametry α z KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} pro variantu s počáteční i s počáteční/modelovou chybou, tj. faktu, že při popisu KP jsou i pro variantu s počáteční chybou vhodnější hypotézy s modelovou chybou (parametr β), je navrhována nová metoda určení modelové chyby jako vzdálenost mezi parametry β variant s počáteční a s počáteční/modelovou chybou $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ s hodnotami pro MEC (Tabulka 2.3.13), průměr z KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP}) s klesajícím trendem v období 1986–2011 z hodnoty 2,8 m/d v roce 1986 na 0,2 m/d v roce 2008 (0,5 m/d v roce 2011).

rok	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
λ^{MEC} (d ⁻¹)	0,32	0,34	0,36	0,36	0,36	0,35	0,37	0,39	0,38	0,34
$E_{\infty H}^{MEC}$ (m)	96	101	109	117	119	122	133	121	124	124
$E_{\infty H}^{MEC}$ (m)	123	124	126	128	127	129	134	128	130	130
$ \Delta\beta $ (m/d)	2,8	1,5	1,9	2,0	1,7	1,3	0,3	1,8	1,6	1,9
rok	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
λ^{MEC} (d ⁻¹)	0,34	0,34	0,34	0,37	0,35	0,38	0,37	0,36	0,37	0,39
$E_{\infty H}^{MEC}$ (m)	123	124	126	117	115	112	115	118	118	117
$E_{\infty H}^{MEC}$ (m)	132	129	127	124	121	119	124	117	121	113
$ \Delta\beta $ (m/d)	2,1	1,6	0,3	0,4	0,5	0,9	0,4	0,5	1,3	0,7
rok	2006	2007	2008	2009	2010	2011				
λ^{MEC} (d ⁻¹)	0,37	0,38	0,40	0,40	0,39	0,40				
$E_{\infty H}^{MEC}$ (m)	117	117	122	118	120	116				
$E_{\infty H}^{MEC}$ (m)	119	114	115	119	118	114				
$ \Delta\beta $ (m/d)	0,7	0,6	0,2	0,6	0,4	0,5				

Tabulka 2.3.13: Ljapunovův exponent λ^{MEC} . Limitní hodnota chyby předpovědi pro variantu s počáteční chybou $E_{\infty H}^{MEC}$, pro variantu s počáteční/modelovou chybou $E_{\infty H}^{MEC}$ a modelová chyba $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ modelu MEC v období 1986-2011.

Závěr

Prvním z cílů práce bylo nalézt počet proměnných, počáteční hodnoty a způsob výpočtu KP L05, které by co nejlépe popisovali KP MEC vypočtenou jako roční průměry z období 1986-2011. Porovnání ukázala (Obrázek 2.2.3, 2.2.4, 2.2.8, 2.2.9, 2.3.16 a 2.3.17), že pro všechny varianty a verze je největší podobnost KP obou modelů pro $N = 90$. Pro variantu s počáteční chybou jsou z podobnosti normovaných KP v prvním dni (rozdíl mezi analýzou a jednodenní předpovědí u MEC) určeny následující počáteční hodnoty KP L05: $E^{L05,90}(0) = 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3$. Konkrétní přiřazení k počátečním hodnotám KP MEC ukazuje Obrázek 2.2.1. Pro variantu s počáteční/modelovou chybou jsou z porovnání normovaných počátečních hodnot KP MEC (rozdíl mezi analyzovanou hodnotou z ERA-Interim a z MEC platném v daném roce) určeny následující počáteční hodnoty KP L05: $E^{L05,90}(0) = 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2$. Konkrétní přiřazení k počátečním hodnotám KP MEC ukazuje Obrázek 2.2.6. Normováno je limitní hodnotou KP. Pro L05 je $E_{\infty}^{L05} = E_{\infty}^{L05} = 8,2$. Pro MEC ukazuje teoreticky určené hodnoty Obrázek 2.1.1. Porovnání takto normovaných KP ukazuje podobnost při výpočtu aritmetickým průměrem jak pro variantu s počáteční, tak s počáteční/modelovou chybou. Způsob průměrování významně neovlivní tvar KP MEC, ale ovlivní tvar KP L05 (Obrázek 2.2.5 a 2.2.10). Platnost teoreticky určených limitních hodnot KP MEC E_{∞}^{MEC} a E_{∞}^{MEC} práce vyvrátila. Nové hodnoty $E_{\infty H}^{MEC}$ a $E_{\infty H}^{MEC}$ ukazuje Obrázek 2.3.13. Porovnání normovaných KP obou modelů na základě nově určených limitních hodnot KP MEC ukazuje podobnost pro stejný počet proměnných a stejné počáteční hodnoty jako při porovnávání s normováním teoretickou limitní hodnotou KP MEC. Jiné je přiřazení počátečních hodnot KP L05 k počátečním hodnotám KP MEC pro variantu s počáteční chybou (Tabulka 2.3.6 (třetí sloupec)) a způsob průměrování pro tuto variantu. Do roku 1999 je s KP MEC podobná KP L05 určená geometrickým průměrem a od roku 2000 jsou KP podobné pro KP L05 určenou aritmetickým průměrem (Obrázek 2.3.16). Pro variantu s počáteční/modelovou chybou platí stejné jako při normováním teoreticky určenou limitní hodnotou (Obrázek 2.3.17).

Dalším cílem práce je korigovat parametry určené z hypotéz (KH , LH , OH) aproximujících KP MEC a tím odhadnout největší Ljapunovův exponent, modelovou

chybu a limitní hodnotu KP MEC a nalézt hypotézy, které korigované parametry nejlépe popisují. Korekce je provedena na základě porovnání parametrů hypotéz aproximující KP MEC s parametry hypotéz aproximujících KP L05 a na základě znalosti největšího Ljapunovova exponentu L05 ($\lambda^{L05} = 0,35 \text{ d}^{-1}$) a limitní hodnoty KP L05.

Nové hodnoty $E_{\infty H}^{MEC}$, $E_{\infty H}^{MEC}$ (Tabulka 2.3.13, Obrázek 2.3.13), které nahradily teoreticky určené hodnoty E_{∞}^{MEC} , E_{∞}^{MEC} byly určeny na základě porovnání E_{lim} a E_{lim} z hypotéz obou modelů a znalosti E_{∞}^{L05} , E_{∞}^{L05} . $E_{\infty H}^{MEC}$ roste z hodnoty 96 m v roce 1986 do hodnoty 133 m v roce 1992. Poté hodnota klesne a v období 1993-1998 se drží mezi 121 m a 126. Další pokles posune hodnotu na 112 m až 118 m v letech 1999-2011 s nárůsty v letech 2008 a 2010. $E_{\infty H}^{MEC}$ roste z hodnoty 123 m v roce 1986 do hodnoty 134 m v roce 1992. Po poklesu na hodnotu 128 m v roce 1993 nastává opět růst na 132 m v roce 1996. Následuje pokles s oscilujícími hodnotami na 114 m v roce 2011. Průměrná směrodatná odchylka $E_{\infty H}^{MEC}$ je 1 m a $E_{\infty H}^{MEC}$ je 2 m tj. 5 hypotéz udalo blízké hodnoty což potvrzuje platnost metody.

Důvod, proč byla zamítnuta verze s teoreticky určenými hodnoty E_{∞}^{MEC} , E_{∞}^{MEC} vzešel z odhadu Ljapunovových exponentů MEC, který byly určeny z porovnání parametrů α z hypotéz obou modelů (L05 a MEC) a ze znalosti Ljapunovova exponentu L05 ($\lambda^{L05} = 0,35 \text{ d}^{-1}$). Takto určené Ljapunovovy exponenty pro verze s a bez pevně určených parametrů $E_{\text{lim}} = E_{\infty}^{MEC}$ a $E_{\text{lim}} = E_{\infty}^{MEC}$ byly porovnány s metodou odhadu Ljapunovova exponentu nezávislou na velikosti E_{lim} a E_{lim} (Obrázek 2.3.15 (c)). Porovnání vedlo k zamítnutí verze s teoreticky určenými hodnoty E_{∞}^{MEC} , E_{∞}^{MEC} . Platné jsou odhady Ljapunovova exponentu MEC pro verzi bez pevně určených parametrů $E_{\text{lim}} = E_{\infty}^{MEC}$ a $E_{\text{lim}} = E_{\infty}^{MEC}$ s průměrnou hodnotou přes období 1986–2011 $\lambda^{MEC} = 0,37 \text{ d}^{-1}$ a s růstem od $\lambda^{MEC} = 0,32 \text{ d}^{-1}$ v roce 1986 do $\lambda^{MEC} = 0,40 \text{ d}^{-1}$ v roce 2011. Lokální maximum nastává v roce 1993 a lokální minimum v letech 1995-1998

(Tabulka 2.3.13, Obrázek 2.3.14 (a)). Průměrná směrodatná odchylka λ^{MEC} je $0,01 \text{ d}^{-1}$ tj. průměr určený z odhadů hypotéz pro variantu s počáteční a počáteční/modelovou chybu udává blízké hodnoty, což potvrzuje platnost metody. Na základě znalosti λ^{MEC} jsou určeny jako nevhodné hypotézy: KH_{PP}^D , KH_{PP}^{KP} a LH .

Vhodnější hypotézy jsou: KH_{PM}^D , KH_{PM}^{KP} a OH , je však potřeba počítat s průměrnou odchylkou od λ^{MEC} o velikosti $0,04 \text{ d}^{-1}$ a to pro variantu s počáteční i s počáteční/modelovou chybou.

Skutečnost, že při popisu KP jsou i pro variantu s počáteční chybou vhodnější hypotézy s modelovou chybou (parametr β) vede k návrhu nové metody určení modelové chyby, a to jako vzdálenosti mezi parametry β variant s počáteční a s počáteční/modelovou chybou $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$. Hodnoty pro MEC (Tabulka 2.3.13), průměr z KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} , Obrázek 2.3.15 (b)) mají očekávaný klesající trend v období 1986-2011 z hodnoty $2,8 \text{ m/d}$ v roce 1986 na $0,2 \text{ m/d}$ v roce 2008 ($0,5 \text{ m/d}$ v roce 2011). Lokální minima nastávají v letech 1992, 1998 a lokální maximum v roce 1996. Platnost nově určené metody potvrzuje i klesající trend v období 1986-2011 pro $|p^{PM} - p^{PP}|$, kde p je parametr OH (Obrázek 2.3.15 (d)) a podobnost $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ určené z KH_{PM}^D a KH_{PM}^{KP} (Obrázek 2.3.15 (b)).

Z průběhů parametrů λ^{MEC} , $E_{\infty H}^{MEC}$, $E_{\infty H}^{MEC}$ a $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ je patné období kolem roku 1992, které jak uvádí Magnusson (2013), je spojené s problémy při zavádění semi-Lagrangianské verze předpovědního systému. Dále je výrazné období kolem roku 1996, kdy je postupně zaváděno 3D-var a 4D-var (Magnusson, 2013).

Může být uzavřeno, že podle našeho názoru práce vytýčené cíle splnila.

Seznam použité literatury

Alligood, K. T., Sauer, T. D. a Yorke, J. A. 1996. *Chaos an Introduction to Dynamical System*. New York : Springer, 1996. ISBN 0-387-94677-2.

Almeida, J. 2012. Controlled Quantum Dynamic Group. *Controlled Quantum Dynamic Group*. [Online] Controlled Quantum Dynamic Group, 2012. [Citace: 2. 03 2018.] qubit-ulm.com/wp-content/uploads/2012/.../Lanczos_Algebra.pdf.

Arakawa, A. a Suarez, M. 1983. Vertical Differencing of Primitive Equations in Sigma Coordinates. *Mon. Wea. Rev.* . 1983, 111, stránky 34-45 .

Baťka, M. 2015. Předpověď vývoje atmosféry objektivními metodami. *Numerické metody - kniha*. [Online] 13. 03 2015. [Citace: 10. 08 2018.] <http://kfa.mff.cuni.cz/wp-content/uploads/2015/03/kniha.pdf>.

Bealjaars, A. 2014. Sub-grid parametrization in the ECMWF mode. *The World Weather Open Science Conference*. [Online] World Meteorological Organization, 16. 8 2014. [Citace: 14. 03 2017.] https://www.wmo.int/pages/prog/arep/wwrp/new/wwosc/documents/WWOSC_param_develop2.pdf.

Bednář, H. a Raidl, A. 2011. Growth of Error in Weather Prediction with Use of Low-dimensional Atmospheric Model. *WDS*. 2011, Sv. III, stránky 66-71.

— **2012.** Late Stages of Initial Errors Growth in Weather Prediction with Use of Low-dimensional Atmospheric Model. *WDS*. 2012, Sv. III, ISBN 978-80-7378-226-9, stránky 82-87.

— **2018.** Validace Lorenzova 05 Nizko-dimenzionálního Chaotického Modelu pro Simulace Prediktability Počasí. *Meteorologické Zprávy*. 2018, Sv. 71, 5.

Bednář, H. 2010. Ensemblové experimenty s málo-dimenzionálními atmosférickými modely. *Diplomová práce*. Praha : Karlova univerzita. Matematicko-Fyzikální fakulta. Katedra meteorologie a ochrany prostředí, 2010.

Bednář, H., Raidl, A. a Mikšovský, J. 2014b. Estimations of Initial Errors Growth in Weather Prediction by Low-dimensional Atmospheric Model. *In Proceedings of Nostradamus International Conference on Prediction, Modeling and Analysis of Complex Systems*. Nostradamus, 2014b, 289.

— **2014a.** Initial Error Growth and Predictability of Chaotic Low-dimensional Atmospheric Model. *International Journal of Automation and Computing*. 2014a, Sv. 3, 11, stránky 256-264.

— **2013.** Initial Errors Growth in Chaotic Low-dimensional Weather Prediction Model. *In Proceedings of Nostradamus International Conference on Prediction, Modeling and Analysis of Complex Systems*. 2013, Sv. 210, stránky 333-342.

— **2015.** Time Evolution of Initial Errors in Lorenz's 05 Chaotic Model. *The Scientific World Journal*. 2015, stránky 1-9.

Bengtsson, L. a Hodges, K. I. 2006. A Note on Atmospheric Predictability. *Tellus*. 2006, 58A, stránky 154-157.

Bengtsson, L. K., Magnusson, L. a Kallen, E. 2008. Independent Estimations of the Asymptotic Variability in an Ensemble Forecast System. *American Meteorology Society*. 2008, 136, stránky 4105-4112.

Brdička, M., Samek, L. a Bruno, S. 2011. *Mechanika kontinua*. Praha : Academia, 2011. ISBN 987-80-200-2039-0.

Buizza, R. 2010. Horizontal Resolution Impact on Short- and Long-range Forecast Error. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 2010, Sv. B, 136, stránky 1020-1035.

Cooper, S. a Cain, D. 2015. Long and Short Waves. *National Weather Service*. [Online] National Oceanic and Atmospheric Administration, 2015. [Citace: 15. 02 2017.] <http://www.srh.noaa.gov/jetstream/constant/longshort.html>.

Dalcher, A. a Kalney, E. 1987. Error growth and predictability in operational ECMWF analyses. *Tellus*. 1987, Sv. 39A, 5, stránky 474–491.

Dando, P. 2016. Gaussian grids. *ECMWF*. [Online] ECMWF, 04. 03 2016. [Citace: 28. 02 2017.] <https://software.ecmwf.int/wiki/display/FCST/Gaussian+grids>.

Devaney, R. 1989. *An Introduction to Chaotic Dynamical System*. New York : Addison-Wesley, 1989.

ECMWF. 2009. Data assimilation: Observations. *ECMWF Research*. [Online] ECMWF, 2009. [Citace: 22. 03 2017.] <http://www.ecmwf.int/en/research/data-assimilation/observations>.

—. **2016.** Changes in ECMWF model. *ECMWF*. [Online] ECMWF, 22. Listopad 2016. [Citace: 16. Květen 2017.] <http://www.ecmwf.int/en/forecasts/documentation-and-support/changes-ecmwf-model>.

—. **2012.** The ECMWF Ensemble Prediction System. *ECMWF*. [Online] ECMWF, 2012. [Citace: 16. Květen 2017.] <http://www.ecmwf.int/sites/default/files/elibrary/2012/14557-ecmwf-ensemble-prediction-system.pdf>.

Emanuel, K. 2011. *Edward Northon Lorenz*. Washington : National Academy of Science, 2011.

Froude, L. S., Bengtsson, L. a Hodges, K. I. 2013. Atmospheric Predictability Revised. *Tellus*. 2013, Sv. A, 63.

Holton, J. R. 2004. *An Introduction to Dynamic Meteorology*. New York : Elsevier, 2004. ISBN-13: 978-0123848666.

Janoušek, M. 2011. ECMWF. *ECMWF*. [Online] ECMWF, Leden 2011. [Citace: 06. Prosinec 2018.] https://confluence.ecmwf.int/daily_climatology_description.pdf.

— **2007.** Numerické Předpovědní Modely. *portal.chmi.cz*. [Online] ČHMU, 10 2007. [Citace: 01. 03 2017.] <http://portal.chmi.cz/files/portal/docs/meteo/ov/skolnwp/>.

Kalnay, E. 2002. *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*. Edinburgh : Cambridge University Press, 2002. ISBN: 9780521796293.

Lang. 2013. wiki. *software.ecmwf.int*. [Online] ECMWF, 2013. [Citace: 14. Květen 2018.] https://software.ecmwf.int/wiki/.../Lang_Singular-vectors.pdf?api....

Leith, C. E. 1978. Objective Methods for Weather Prediction. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1978, 10, stránky 107-128.

Lorenz, E. N. a Emanuel, K. A. 1998. Optimal Site for Supplementary Weather Observations: Simulation with a Small Model. *Journal of the Atmospheric sciences.* 1998, Sv. 55, stránky 399-414.

Lorenz, E. N. 1969. Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogs. *Journal of the Atmospheric Sciences.* 1969, Sv. 26, 4, stránky 636–646.

— **1982.** Atmospheric predictability experiments with a large numerical model. *Tellus.* 1982, Sv. 34, 6, stránky 505–513.

— **2005.** Designing chaotic models. *Journal of the atmospheric science.* 2005, Sv. 62, stránky 1574 - 1587.

— **1963.** Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences.* 1963, Sv. 20, 2, stránky 130–141.

— **1996.** Predictability: a problem partly solved. [autor knihy] Tim Palmer a Renate Hagedorn. *Predictability of Weather and Climate*. Cambridge : Cambridge University Press, 1996, stránky 1–18.

—. 1995. *The Essence of Chaos*. Washington : The University of Washington Press, 1995. ISBN 0-295-97514-8.

—. 1963. The predictability of hydrodynamic flow. *Transactions of the New York Academy of Sciences*. 1963, Sv. 25, 4, stránky 409-432.

Magnusson, L. a Kallen, E. 2013. Factors Influencing Skill Improvements in the ECMWF Forecasting System. *Monthly Weather Review*. 2013, 141, stránky 3142 - 3153.

Magnusson, L. 2018. *Osobní sdělení*. 2018.

Mesinger, F. a Arakawa, A. 1976. Numerical Methods Used in Atmospheric Model. *GARP publications series*. 1976, Sv. 17, 1.

Mládek, R. 2007. Ansámblové metody - CHMI. *CHMI.cz*. [Online] CHMI, 22. Říjen 2007. [Citace: 05. Únor 2018.] portal.chmi.cz/files/portal/docs/meteo/ov/skolnwp/L11_eps.pdf.

Office, Press. 2016. News. *Media Centre*. [Online] ECMWF, 10. Březen 2016. [Citace: 16. Květen 2018.] <https://www.ecmwf.int/en/about/media-centre/news/2016/new-forecast-model-cycle-brings-highest-ever-resolution>.

Pokorný, P. 2008. Deterministický chaos - plod počítačové fyziky. *Čs. čas. fyz.* 2008, Sv. 58, 6, stránky 328-338.

Royer, J. F. a Stroe, R. 1994. An Improved Formula to Describe Error Growth in Meteorological Models. *Predictability and Nonlinear Modelling in Natural Sciences and Economics*. WAGENINGEN : Kluwer Academic Publishers, 1994, stránky 45 – 56.

Ruiqiang, D. a Jianping, L. 2011. Comparisons of Two Ensemble Mean Methods in Measuring the Average Error Growth and the Predictability. *Acta Meteor. Sinica*. 2011, Sv. 25, 4, stránky 395-404.

Ryan, T. 2012. Atmospheric Predictability. *Department of Atmospheric and Environmental Science*. [Online] University At Albany, 2012. [Citace: 15. Květen 2017.] <http://www.atmos.albany.edu/facstaff/torn/atm652/>.

Saltzman, B. 1962. Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem. *Journal of the Atmospheric Science*. 1962, Sv. I, 19, stránky 329-341.

Savijarvi, H. 1995. Error Growth in a Large Numerical Forecast System. *Monthly Weather Review*. 1995, 123, stránky 212 - 221.

Simmons, A. J, Mureau, R a Petroligis, T. 1995. Error growth and estimates of predictability from the ECMWF forecasting system. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. 1995, Sv. 121, 527, stránky 1739–1771.

Sokol, Z. 2008. Objektivní analýza meteorologických pol. (*přednáška*). Praha; MFF, 2008.

Sprott, J. C. 2006. *Chaos and Time-series Analysis*. New York, NY, USA : Oxford university press, 2006.

Stroe, R. a Royer, J. F. 1993. Comparison of Different Error Growth Formulas and Predictability Estimation in Numerical Extended-range Forecasts. *Ann. Geophysicae*. 11, 1993, stránky 296-316.

Trevisan, A. 1993. Impact of Transient Error Growth on Global Average Predictability Measure. *Journal of the Atmospheric Science*. 1993, Sv. 50, 7, stránky 1016-1028.

Trevisan, A., Malguzzi, P. a Fantini, M. 1992. On Lorenz's law for the growth of large and small errors in the atmosphere. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1992, Sv. 49, 8, stránky 713–719.

Uruba, V. 2005. Náhoda v exaktní vědě. *Essentia - časopis o cestě za poznáním*. [Online] Essentia, 14. Březen 2005. [Citace: 20. Červenec 2017.] <http://web.archive.org/web/20081222071335/http://www.essentia.cz:80/index.php?obsah=6&id=81>. ISSN 1214-3464.

Žagar, N., a další. 2017. Scale-dependent Estimates of the Growth of Forecast Uncertainties in Global Prediction System. *Tellus*. 2017, Sv. A, 69, stránky 1-14.

Žagar, N., Buizza, R. a Tribbia, J. 2015. A Three-Dimensional Multivariate Modal Analysis of Atmospheric Predictability with Application to the ECMWF Ensemble. *American Meteorological Society*. 2015, 72, stránky 4423-4444.

Seznam obrázků

Obrázek 1.3.1: Pozorované hodnoty (plné tečky) vyjádřené jako $Y = X(m+1)$ k $X(m)$ pro m od 1 do 8 dnů (8 kroků po dnech) a $X(m) \leq 0,95$, které jsou aproximovány rovnicí (1.3.2) metodou nejmenších čtverců s výslednou hodnotou $\alpha = 0,29 \text{ den}^{-1}$. Příмка $Y = X$ je vložena pro referenci.	19
Obrázek 1.3.2: Kvadratický průměr (100-denní perioda x 11 předpovědí (0, ..., 10-denní) x 1722 bodů sítě) rozdílů E výšek hladiny 500 hPa mezi j -denní a k -denní předpovědí vytvořenou modelem ECMWF.	20
Obrázek 1.3.3: Hodnoty diferencí předpovědí $\left[\frac{(E_{j+1,k+1} + E_{j,k})}{2}, E_{j+1,k+1} - E_{j,k} \right]$ (tečka), kde $j = 1, \dots, 9$ a $k = 1, \dots, 10$ označují délky předpovědí a hodnoty diferencí analýzy a předpovědí $\left[\frac{(E_{0,k+1} + E_{0,k})}{2}, E_{0,k+1} - E_{0,k} \right]$ (křížek), kde 0 označuje analýzu a $k = 1, \dots, 10$ označuje délku předpovědi. Diference předpovědí (tečky) jsou proložené KH (rovnice (1.3.3)).	21
Obrázek 1.3.4: Růst variance V . Body jsou pozorované hodnoty. Křivka je proložení řešením rovnice (1.3.4).	22
Obrázek 1.3.5: a) Diference $\left[\frac{(E_j(m+1) + E_j(m))}{2}, E_j(m+1) - E_j(m) \right]$ pro $j = 2, \dots, 7$ a $m = 1, \dots, 5$ s proložením $KH_{PP}^D \dot{E} = \alpha(1 - e^E)$ (tučná křivka) a tečnou $\dot{E} = \alpha E$ v $E = 0$ (tečkovaná přímka). b) Diference $\left[\frac{(X_j(m+1) + X_j(m))}{2}, X_j(m+1) - X_j(m) \right]$ pro $j = 2, \dots, 7$ a $m = 1, \dots, 5$ s proložením KH_{PP}^D (tučná křivka) a LH (tečkovaná křivka).	23
Obrázek 1.3.6: Diference $\left[\frac{(E_j(m+1) + E_j(m))}{2}, E_j(m+1) - E_j(m) \right]$ z rozdílů vývoje „reality“ a „modelu“ pro počáteční chyby zvolené jako 5 % a 2 % limitní hodnoty (tenké plné křivky) a proložení výsledných dat KH_{PP}^D (tučná křivka) a LH (tečkovaná přímka).	24
Obrázek 1.3.7: Růst počáteční chyby CNRM modelu, 44-denní předpověď přes 8 zimních období 1983 - 1991 (rozdíl výšek hladin 500 hPa pro dvě předpovědi posunutě	

1 den od sebe). (A) je růst kvadratického průměru R s časem. (B) ukazuje diferenci $\left[\frac{y(m+1)+y(m)}{2}, y(m+1)-y(m)\right]$, kde $m = 1, \dots, 44$ a $y = \ln(R)$	25
Obrázek 1.3.8: Porovnání KH_{PP}^D (tučná pro poč. chybu 12%, čárkovaná pro poč. chybu 7%) a OH (čerchovaná pro poč. chybu 12%, tenká pro poč. chybu 7%) pro všechny čtyři roční období v letech 93/94 (viz popisky v grafech) extrapolované na 20 dní. Aproximace a extrapolace vychází z MEC, severní polokoule, 500 hPa po 12 hodinách, jednodenní rozdíl mezi 10 denní předpovědí.	26
Obrázek 1.3.9: Hodnoty diferencí předpovědí s 1-denním rozdílem $\left[\frac{(E_{k,k+1} + E_{k+1,k+2})}{2}, E_{k,k+1} - E_{k+1,k+2}\right]$ (hvězdička), kde $k = 1, \dots, 8$ označuje délky předpovědí. Hodnoty diferencí analýzy a předpovědí $\left[\frac{(E_{0,k+1} + E_{0,k})}{2}, E_{0,k+1} - E_{0,k}\right]$. (křížek), kde 0 označuje analýzu a $k = 1, \dots, 9$ označuje délku předpovědi. (5) prokládané křížky je KH_{PM}^D s počáteční/modelovou chybou (rovnice (1.3.11)). (5) prokládané hvězdičkami je KH_{PP}^D s počáteční chybou (rovnice (1.3.3), nenormováno). (4) je LH , rovnice (1.3.5). (3) je KH_{PM}^D s počáteční/modelovou chybou, přepočítaná variance do kvadratického průměru (rovnice (1.3.4)).	27
Obrázek 1.3.10: Vývoj parametrů KH_{PM}^D (rovnice (1.3.11)) pro období 1981-2012, severní polokoule. Modrou jsou označeny hodnoty z NPM, zelenou hodnoty z ERA-Interim. V (c) jsou tečkovaně vyznačeny hodnoty E_{∞} určeny nezávislou metodou (viz text). (d) Červeně plně je vyznačena míra růstu chyby mezi 24 h. a 12 h. předpovědí $(E_{0,24} - E_{0,12})/12$, modře je vyznačen příspěvek od modelové chyby (param. β), zeleně je příspěvek od počáteční chyby $(\alpha(E_{0,12} + E_{0,24})/2)$, červeně tence je vyznačen součet příspěvků od počáteční/modelové chyby.	29
Obrázek 1.3.11: Jako Obrázek 1.3.10, ale jižní. polok.	30
Obrázek 1.3.12: Vývoj parametrů KH_{PM}^D (rovnice (1.3.11)) v období 1986–2012 pro severní polokouli určených ze dvou předpovědí s 24 h. rozdílem. V (c) je též šedě vyznačen teoretický odhad E_{∞} (viz text).	31
Obrázek 1.3.13: Hodnoty diferencí analýzy a předpovědí (výšky hladin 500 hPa) $\left[\frac{(E_{0,k+1} + E_{0,k})}{2}, \frac{(E_{0,k+1} - E_{0,k})}{12}\right]$ (křížek), kde 0 označuje analýzu a $k = 1, \dots, 19$	

označuje délku předpovědi (předpověď na 10 dní po 12 hodinách) a proložení KH_{PM}^D (paraboly) pro severní (a) a jižní polokouli (b). Modře jsou data z roku 1990, červeně z roku 2000 a zeleně z roku 2010.....	31
Obrázek 1.3.14: Hodnoty diferencí předpovědí s 1-denním rozdílem (výšky hladin 500 hPa) $\left[\frac{(E_{k,k+1} + E_{k+1,k+2})}{2}, E_{k,k+1} - E_{k+1,k+2} \right]$ (křížky), kde $k = 1, \dots, 19$ určuje krok po 12 hodinách a proložení KH (parabola) pro data z roku 2010.....	32
Obrázek 1.3.15: KP (tučně pro počáteční/modelovou chybu, čárkovaně pro počáteční chybu s hodnotami po dni, čerchovaně pro počáteční chybu s hodnotami po 6 h.), MEC, výška hladin 500 hPa, (20°- 90° S) (levý) a (20°- 90° J) (pravý), ze zimy 90/91, hodnoty jsou normalizované.	34
Obrázek 1.3.16: Vyjádření Lyapun. exponentu z KP pro Lorenzův model konvekce λ . (a) určené z aritmetického průměru. (b) určené z geometrického průměru. Tečkovaná čára zachycuje největší Lyapunovův exponent..	36
Obrázek 1.3.17: Kvadratický průměr rozdílů E výšek hladiny 500 hPa mezi j -denní a k -denní předpovědi ($j, k = 0, \dots, 10$) vytvořenou MEC pro severní polokouli a pro data ze zimy 2010–11. (a) předpověď ansámblového průměru. (b) předpověď kontrolní předpovědi..	36
Obrázek 1.3.18: Střední kvadratická chyba ansámblového průměru (E_{EM}), kontrolní předpovědi (E_{CF}) a ansámblový rozptyl (S) vyvíjející se v čase předpovědi (KP) pro MEC, výška hladin 500 hPa ze zimy 04/05.	38
Obrázek 1.3.19: Normovaná KP $E(t)/E(t=0)$ pro $\sqrt{\sum_k \sum_n \sum_m \left[\sum_n^k(m) \right]^2}$ (více viz text) z 15-denní předpovědi MEC v období 14 dní v květnu 2015 s dostupností dat každých 12 hodin. Hodnoty jsou označeny tečkami. Křivkou je označena aproximace KH_{PM}^{KP} (rovnice (1.3.14)).	40
Obrázek 2.1.1: Limitní hodnoty E_{∞}^{MEC} (čárkovaně) a E_{∞}^{MEC} (plně) MEC, severní polokoule, hladina 500 hPa a roční průměry.	45
Obrázek 2.2.1: (a) Rozdíl analýzy a 1-denní předpovědi $E^{MEC}(1)$ (roční průměr, aritmetický průměr \approx geometrický průměr, 1986–2011). (b) Počáteční hodnoty modelu L05 $E^{L05}(0)$ pro $N = 60$ (plně), $N = 90$ (čárkovaně), $N = 120$ (tečkovaně) a $N = 150$ (čerchovaně) (varianta s počáteční chybou, aritmetický průměr \approx geometrický	

průměr), jejichž vývoj má v prvním dni vývoje $E_{Norm}^{L05}(1)$ stejnou normovanou hodnotu jako $E_{Norm}^{ECMWF}(1)$	47
Obrázek 2.2.2: Maximální rozdíl mezi aritmetickým a geometrickým průměrem $Max(E_a - E_g)$ v % z E_{∞} . (a) pro všechna použitá N a $E^{L05}(0)$ modelu L05. Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$. (b) pro MEC.....	49
Obrázek 2.2.3: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{a, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl předpovědí s jednodenním rozdílem, roční aritmetický průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční chybou, aritmetický průměr, σ_N viz a) - o). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$	50
Obrázek 2.2.4: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{g, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl předpovědí s jednodenním rozdílem, roční geometrický průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční chybou, geometrický průměr, σ_N viz a) - o). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$	51
Obrázek 2.2.5: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{a, Norm} - E_{g, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl předpovědí s jednodenním rozdílem, roční průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční chybou, σ_N viz a) - o). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$	52
Obrázek 2.2.6: (a) $E^{MEC}(0)$ (roční průměr, aritmetický průměr \approx geometrický průměr, 1986–2011). (b) $E^{L05}(0)$ pro $N = (60; 90; 120; 150)$ (varianta s počáteční/modelovou chybou, aritmetický průměr \approx geometrický průměr), jejichž normované hodnoty $E_{Norm}^{L05}(0)$ jsou rovny normovaným počátečním chybám $E_{Norm}^{MEC}(0)$	55
Obrázek 2.2.7: Maximální rozdíl mezi aritmetickým a geometrickým průměrem $Max(E_a - E_g)$ v % z E_{∞} . (a) pro všechna použitá N a $E^{L05}(0)$ modelu L05. Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$. (b) pro MEC.....	55
Obrázek 2.2.8: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{a, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl mezi předpovědí a analýzou, roční aritmetický průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční/modelovou chybou, aritmetický	

průměr, σ_N viz a) - o). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$.	56
Obrázek 2.2.9: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{g, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl mezi předpovědí a analýzou, roční geometrický průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční/modelovou chybou, geometrický průměr, σ_N viz a) - o). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$.	57
Obrázek 2.2.10: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{a, Norm} - E_{g, Norm}$. Červeně pro MEC (rozdíl mezi předpovědí a analýzou, roční průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční/modelovou chybou, σ_N viz a) - o). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$.	58
Obrázek 2.2.11: Hodnoty λ , $\Lambda_a(i) \approx \text{konst.}$, $\Lambda_g(i) \approx \text{konst.}$ a), c) aritmetický průměr. b), d) geometrický průměr. a), b) verze s počáteční chybou. c), d) verze s počáteční/modelovou chybou. Červeně pro MEC. Černě pro L05. Modře pro hodnoty Ljapunova exponentu λ modelu L05. Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$.	62
Obrázek 2.2.12: Křivky prediktability L05 ($N = 90$) a MEC, a) – f) varianta s počáteční chybou, g) – l) varianta s počáteční/modelovou chybou. Tučně jsou vyznačeny aritmetické a geometrické průměry. Tečkovaně jsou vyznačeni jednotliví členi ansámblů (L05: $M = 400$, MEC: $M = 365$), ze kterých jsou průměry vypočteny.	63
Obrázek 2.2.13: a), c), e), g), i), k) Časový vývoj $\Lambda_a(i)$ (aritmetický průměr) více viz text. b), d), f), h), j), l) Časový vývoj $\Lambda_g(i)$ (geometrický průměr) více viz text. a) – f) verze s počáteční chybou. g) – l) verze s počáteční/modelovou chybou. Červeně pro MEC. Černě pro L05. Modře pro hodnoty Ljapunova exponentu λ modelu L05. Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$.	64
Obrázek 2.3.1: Diference KP modelu L05, varianta s počáteční chybou, aritmetickým průměrem (PP_a), s počátečními hodnotami $\sigma_{90} = 0,7 - 0,3$ (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH^D_{PP} s parametry z KH^{KP}_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaně). a) - e) PP_a . f) - j) $PP_{a, Elim}$. k) - o) $PP_{a, Full}$.	73

Obrázek 2.3.2: Diference KP modelu L05, varianta s počáteční chybou, geometrickým průměrem (PP_g), s počátečními hodnotami $\sigma_{90} = 0,7 - 0,3$ (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH^D_{PP} s parametry z KH^{KP}_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaně). a) - e) PP_g . f) - j) $PP_{g, Elim}$. k) - o) $PP_{g, Full}$ 74

Obrázek 2.3.3: Diference KP MEC, varianta s počáteční chybou, aritmetický průměr, pro vybrané roky (PP_a) (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH^D_{PP} s parametry z KH^{KP}_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaně). 80

Obrázek 2.3.4: Diference KP MEC, varianta s počáteční chybou, aritmetický průměr, aproximace s parametrem $E_{lim} = E_{\infty}$, pro vybrané roky ($PP_{a, Elim}$) (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH^D_{PP} s parametry z KH^{KP}_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaně). 81

Obrázek 2.3.5: Odhad limitní hodnoty KP MEC $E_{\infty H}^{MEC}$ na základě parametru E_{lim}^{MEC} hypotéz MEC, normovaného rozdílu teoretické limitní hodnoty E_{∞}^{L05} a odhadu parametru E_{lim}^{L05} hypotéz modelu L05: $E_{\infty H}^{MEC} = E_{lim}^{MEC} + (E_{lim}^{MEC} \cdot (E_{\infty}^{L05} - E_{lim}^{L05})) / E_{\infty}^{L05}$ m. Označeny jsou: KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), KH^{KP}_{PP} (modrá), KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaně) a průměr přes hypotézy bez LH (černá). Chybové úsečky ukazují směrodatnou odchylku..... 85

Obrázek 2.3.6: a), b) rozdíl parametru hypotéz α mezi L05 a MEC. Označeny jsou: KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), KH^{KP}_{PP} (modrá) a KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaně). c), d) rozdíl parametru OH_p mezi L05 a MEC. e), f) odhad Ljapunovova exponentu MEC λ^{MEC} na základě parametru α^{MEC} hypotéz MEC, Ljapunovova exponentu λ^{L05} a parametru α^{L05} hypotéz modelu L05 vztahem: $\lambda^{MEC} = \alpha^{MEC} + (\lambda^{L05} - \alpha^{L05}) \text{ den}^{-1}$. Označeny jsou: KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), KH^{KP}_{PP} (modrá), KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaně) a průměr přes hypotézy bez LH (černá). Chybové úsečky ukazují směrodatnou

odchylku. Verze o délce KP 1-10 dní. Levý sloupec verze bez pevného E_{lim} . Pravý sloupec s pevným E_{lim}	86
Obrázek 2.3.7: Diference KP modelu L05, varianta s počáteční/modelovou chybou, aritmetickým průměrem (PM _a), s počátečními hodnotami $\sigma_{90} = \{0,7; 0,6; 0,5; 0,3; 0,2\}$ (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH^D_{PP} s parametry z KH^{KP}_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaně). a) - e) PM _a . f) - j) PM _{a, Elim} . k) - o) PM _{a, Full}	94
Obrázek 2.3.8: Diference KP modelu L05, varianta s počáteční/modelovou chybou, geometrickým průměrem (PM _g), s počátečními hodnotami $\sigma_{90} = \{0,7; 0,6; 0,5; 0,3; 0,2\}$ (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH^D_{PP} s parametry z KH^{KP}_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaně). a) - e) PM _g . f) - j) PM _{g, Elim} . k) - o) PM _{g, Full}	95
Obrázek 2.3.9: Diference KP MEC, varianta s počáteční/modelovou chybou, aritmetický průměr, pro vybrané roky (PM _a) (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH^D_{PP} s parametry z KH^{KP}_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaně).....	101
Obrázek 2.3.10: Diference KP MEC, varianta s počáteční/modelovou chybou, aritmetický průměr, aproximace s parametrem $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$, pro vybrané roky (PM _{a, Elim}) (černá) a aproximace KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), aproximace KH^D_{PP} s parametry z KH^{KP}_{PP} (modrá) a aproximace KH^D_{PM} s parametry z KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaně).....	102
Obrázek 2.3.11: Odhad limitní hodnoty KP MEC $E_{\infty H}^{MEC}$ na základě parametru E_{lim}^{MEC} hypotéz MEC, normovaného rozdílu teoretické limitní hodnoty E_{∞}^{L05} a odhadu parametru E_{lim}^{L05} hypotéz modelu L05: $E_{\infty H}^{MEC} = E_{\text{lim}}^{MEC} + (E_{\text{lim}}^{MEC} \cdot (E_{\infty}^{L05} - E_{\text{lim}}^{L05})) / E_{\infty}^{L05}$ m. Označeny jsou: KH^D_{PP} (červená), KH^D_{PM} (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), KH^{KP}_{PP} (modrá), KH^{KP}_{PM} (modrá, čárkovaně) a průměr přes hypotézy bez LH (černá). Chybové úsečky ukazují směrodatnou odchylku.....	106

Obrázek 2.3.12: a), b) rozdíl parametru hypotéz α mezi L05 a MEC. Označeny jsou: KH_{PP}^D (červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), KH_{PP}^{KP} (modrá) a KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaně). c), d) rozdíl parametru OH_p mezi L05 a MEC. e), f) Odhad Ljapunovova exponentu MEC λ^{MEC} na základě parametru α^{MEC} hypotéz MEC, Ljapunovova exponentu λ^{L05} a parametru α^{L05} hypotéz modelu L05 vztahem: $\lambda^{MEC} = \alpha^{MEC} + (\lambda^{L05} - \alpha^{L05}) \text{ den}^{-1}$. Označeny jsou: KH_{PP}^D (červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), KH_{PP}^{KP} (modrá), KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaně) a průměr přes hypotézy bez LH (černá). Chybové úsečky ukazují směrodatnou odchylku. Verze o délce KP 0-10 dní. Levý sloupec verze bez pevného E_{lim} . Pravý sloupec s pevným E_{lim} 107

Obrázek 2.3.13: Limitní hodnoty KP MEC $E_{\infty H}^{MEC}$ (červeně, plná čára) pro variantu s počáteční/modelovou chybou (Obrázek 2.3.11), $E_{\infty H}^{MEC}$ (červeně, čárkovaně) pro variantu s počáteční chybou (Obrázek 2.3.5) a teoretické Limitní hodnoty E_{∞}^{MEC} (černá, čárkovaně) a E_{∞}^{MEC} (černá, plně) (Obrázek 2.1.1). 114

Obrázek 2.3.14: a), b) Odhad Ljapunovova exponentu λ^{MEC} (černá) jako průměr λ_{PP}^{MEC} (červená) a λ_{PM}^{MEC} (modrá). c), d) Porovnání λ^{MEC} (černá), λ_{PP}^{MEC} (černá, čárkovaně) s parametry α_{PP}^{MEC} hypotéz (varianta s počáteční chybou), KH_{PP}^D (červená), KH_{PM}^D (červená, čárkovaně), LH (žlutá), OH (zelená), KH_{PP}^{KP} (modrá) a KH_{PM}^{KP} (modrá, čárkovaně). e), f) Porovnání λ^{MEC} (černá), λ_{PM}^{MEC} (černá, čárkovaně) s parametry α_{PM}^{MEC} hypotéz (varianta s počáteční/modelovou chybou, barevné označení jako v c), d)). Levý sloupec pro verzi bez pevného parametru $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ respektive $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$. Pravý sloupec pro verzi s pevným parametrem $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ respektive $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$. .. 115

Obrázek 2.3.15: a) Parametr hypotéz β^{PM} pro variantu s počáteční/modelovou chybou. Verze s pevným parametrem $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ (černě). Verze bez pevného parametru $E_{\text{lim}} = E_{\infty}$ (červeně). KH_{PM}^{KP} (plná křivka), KH_{PM}^D (čárkovaná křivka). b)

Absolutní hodnota rozdílu parametrů $|\beta^{PM} - \beta^{PP}|$ variant s počáteční/modelovou a modelovou chybou (označení viz (a)). Tečkovaně proložení lineární regresí. c) Odhad Ljapunovova exponentu λ^{MEC} určeného z porovnání hypotéz (Obrázek 2.3.14), plná křivka, barevné označení pro verzi s pevným a bez pevného parametru viz (a)) a odhad Ljapunovova exponentu na základě odhadu exponenciálního růstu $\lambda^{MEC} = \Lambda_a^{MEC} - (\Lambda^{L05,90} - \lambda^{L05,90})$ (Obrázek 2.2.11, čárkovaně, , plná křivka, barevné označení pro verzi s pevným a bez pevného parametru viz (a), Λ_a^{MEC} je pro MEC (aritmetický průměr), $\Lambda^{L05,90}$ je pro L05, ($N=90$) pro černou křivku aritmetický průměr, pro červenou křivku geometrický průměr do roku 1999 a aritmetický průměr od roku 2000). d) Absolutní hodnota rozdílu parametrů $OH |p^{PM} - p^{PP}|$ variant s počáteční/modelovou a modelovou chybou (barevné označení viz (a)) Tečkovaně proložení lineární regresí..... 116

Obrázek 2.3.16: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{i, Norm}$, verze bez pevného $E_{lim} = E_{\infty}$. Červeně pro MEC (roční aritmetický průměr). Černě pro L05 (varianta s počáteční chybou, geometrický průměr v období 1986–1999, aritmetický průměr v období 2000–2011, σ_N viz a) - o). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$ 117

Obrázek 2.3.17: Porovnání normovaných křivek prediktability $E_{a, Norm}$, verze bez pevného $E_{lim} = E_{\infty}$. Červeně pro MEC (rozdíl mezi předpovědí a analýzou, roční aritmetický průměr, vybráno z období 1986–2011). Černě pro L05 (varianta s počáteční/modelovou chybou, aritmetický průměr, σ_N viz a) - o). Tečkovaně pro $N = 60$, plně pro $N = 90$, čerchovaně pro $N = 120$ a čárkovaně pro $N = 150$ 118

Seznam tabulek

Tabulka 2.1.1: Hodnoty Ljapunova exponentu λ a limitní hodnoty KP E_{∞}^{L05} a E_{∞}^{L05} pro vybrané počty proměnných modelu L05.....	43
Tabulka 2.2.1: Shrnutí Obrázku 2.2.1 (b).	46
Tabulka 2.2.2: Přiřazení KP MEC ke KP L05. První sloupec: počet proměnných N modelu L05. Označení “bez“ znamená bez podobnosti křivek. Druhý sloupec: roky, kdy normovaná KP vypočtená jako roční aritmetický průměr je podobná s normovanou KP modelu L05 s N v daném řádku. Třetí sloupec: procentní zastoupení počtu let, kdy KP NPM je podobná KP L05 s daným N.	48
Tabulka 2.2.3: Porovnání KP MEC L05. První sloupec: počet proměnných N modelu L05 nebo ukázání, u kterého modelu KP roste rychleji nebo pomaleji ($>$, $<$). Druhý sloupec: roky výskytu. Třetí sloupec: četnost výskytu.	48
Tabulka 2.2.4: Shrnutí Obrázku 2.2.6.	54
Tabulka 2.3.1: Průměrné hodnoty $\bar{\alpha}$, \bar{E}_{lim} , $\bar{\beta}$, \bar{p} a směrodatná odchylka $\hat{\alpha}$, \hat{E}_{lim} , $\hat{\beta}$, \hat{p} . Data jsou pro všechny počáteční hodnoty (varianta s počáteční chybou (PP), aritmetický (a), geometrický (g) průměr a délka 1-10 dní, s pevně určeným parametrem (E_{lim}) a plná délka (Full).	71
Tabulka 2.3.2: Hodnoty parametrů aproximací (rovnice (2.3.1) - (2.3.6)) diferencí KP respektive KP o délce 1 – 10 dní modelu L05 (vlevo), o plné délce (uprostřed) a s pevně určeným parametrem E_{lim} (vpravo) modelu L05 ($N = 90$, varianta s počáteční chybou pp^{L05}) pro počáteční hodnoty označené $E(0)$. PP_a značí KP určenou aritmetickým průměrem a PP_g značí KP určenou geometrickým průměrem.	72
Tabulka 2.3.3: Průměrné hodnoty $\bar{\alpha}$, \bar{E}_{lim} , $\bar{\beta}$, \bar{p} a směrodatné odchylky $\hat{\alpha}$, \hat{E}_{lim} , $\hat{\beta}$, \hat{p} . Data jsou pro roční průměry z let 1986–2011 (varianta s počáteční chybou (PP), aritmetický (a) průměr a délka 1-10 dní a 1-10 dní s pevně určeným parametrem E_{lim}).	77
Tabulka 2.3.4: Hodnoty parametrů aproximací diferencí KP respektive KP o délce 1 – 10 dní MEC (roční aritmetický průměr 1986 - 2011, varianta s počáteční chybou pp^{MEC_a}).	78

Tabulka 2.3.5: Hodnoty parametrů aproximací diferencí KP respektive KP o délce 1 – 10 dní s pevně určeným parametrem $E_{lim} = E_{\infty}$ MEC (roční aritmetický průměr 1986 - 2011, varianta s počáteční chybou $PP^{MEC}_{a,Elim}$)..... 79

Tabulka 2.3.6: Rozdíl E_{lim} mezi hypotézami a OH a mezi OH a E_{∞} pro KP MEC vypočtenou aritmetickým průměrem z dat roku označeného v druhém sloupci a pro KP L05 vypočtenou průměrem označeným v prvním sloupci s počáteční hodnotou $E(0)$ označenou ve třetím sloupci. Čtvrtý až osmý sloupec ukazují procentuální absolutní hodnotu rozdílu normovaných vzdáleností mezi MEC a L05 a mezi E_{lim} OH a hypotéz:

$$\left| \left(\left(\frac{E_{lim,OH}^{L05} - E_{lim,hypotéza}^{L05}}{E_{lim,OH}^{L05}} \right) - \left(\frac{E_{lim,OH}^{MEC} - E_{lim,hypotéza}^{MEC}}{E_{lim,OH}^{MEC}} \right) \right) \right| \cdot 100\% . \quad \text{Poslední}$$

sloupec ukazuje procentuální normovanou vzdálenost mezi E_{∞} a E_{lim} OH modelu L05: $\left(\left(\frac{E_{\infty}^{L05} - E_{lim,OH}^{L05}}{E_{\infty}^{L05}} \right) \right) \cdot 100\% .$ Předposlední sloupec ukazuje to stejné jako poslední sloupec, ale pro MEC a devátý sloupec ukazuje rozdíl mezi MEC a L05. Verze o délce KP 1-10 dní. 87

Tabulka 2.3.7: Průměrné hodnoty $\bar{\alpha}$, \bar{E}_{lim} , $\bar{\beta}$, \bar{p} a směrodatná odchylka $\hat{\alpha}$, \hat{E}_{lim} , $\hat{\beta}$, \hat{p} . Data jsou pro všechny počáteční hodnoty (varianta s počáteční/modelovou chybou (PM), aritmetický (a), geometrický (g) průměr a délka 1-10 dní, s pevně určeným parametrem (E_{lim}) a plná délka ($Full$). 92

Tabulka 2.3.8: Hodnoty parametrů aproximací (rovnice (2.3.1) - (2.3.6)) diferencí KP respektive KP o délce 1 – 10 dní modelu L05 (vlevo), o plné délce (uprostřed) a s pevně určeným parametrem E_{lim} (vpravo) modelu L05 ($N = 90$, varianta s počáteční/modelovou chybou PM^{L05}) pro počáteční hodnoty označené $E(0)$. PM_a značí KP určenou aritmetickým průměrem a PM_g značí KP určenou geometrickým průměrem. 93

Tabulka 2.3.9: Průměrné hodnoty $\bar{\alpha}$, \bar{E}_{lim} , $\bar{\beta}$, \bar{p} a směrodatné odchylky $\hat{\alpha}$, \hat{E}_{lim} , $\hat{\beta}$, \hat{p} . Data jsou pro roční průměry z let 1986–2011 (varianta s počáteční/modelovou chybou (PM), aritmetický (a) průměr a délka 0-10 dní a 0-10 dní s pevně určeným parametrem E_{lim}). 98

Tabulka 2.3.10: Hodnoty parametrů aproximací diferencí KP respektive KP o délce 0 – 10 dní MEC (roční aritmetický průměr 1986 - 2011, varianta s počáteční/modelovou chybou PM^{MEC}_a).....	99
Tabulka 2.3.11: Hodnoty parametrů aproximací diferencí KP respektive KP o délce 0 – 10 dní s pevně určeným parametrem $E_{lim} = E_{\infty}$ MEC (roční aritmetický průměr 1986 - 2011, varianta s počáteční/modelovou chybou $PM^{MEC}_{a,Elim}$).....	100
Tabulka 2.3.12: Rozdíl E_{lim} mezi hypotézami a OH a mezi OH a E_{∞} pro KP MEC vypočtenou aritmetickým průměrem z dat roku označeného v druhém sloupci a pro KP L05 vypočtenou průměrem označeným v prvním sloupci s počáteční hodnotou $E(0)$ označenou ve třetím sloupci. Čtvrtý až osmý sloupec ukazují procentuální absolutní hodnotu rozdílu normovaných vzdáleností mezi MEC a L05 a mezi E_{lim} OH a hypotéz: $\left \left(\frac{E_{lim,OH}^{L05} - E_{lim,hypotéza}^{L05}}{E_{lim,OH}^{L05}} \right) - \left(\frac{E_{lim,OH}^{MEC} - E_{lim,hypotéza}^{MEC}}{E_{lim,OH}^{MEC}} \right) \right \cdot 100\%$.	
Poslední sloupec ukazuje procentuální normovanou vzdálenost mezi E_{∞} a E_{lim} OH modelu L05: $\left(\frac{E_{\infty}^{L05} - E_{lim,OH}^{L05}}{E_{\infty}^{L05}} \right) \cdot 100\%$. Předposlední sloupec ukazuje to stejné jako poslední sloupec, ale pro MEC a devátý sloupec ukazuje rozdíl mezi MEC a L05. Verze o délce KP 0-10 dní.	108
Tabulka 2.3.13: Ljapunovův exponent λ^{MEC} , Limitní hodnota chyby předpovědi pro variantu s počáteční chybou $E_{\infty H}^{MEC}$, pro variantu s počáteční/modelovou chybou $E_{\infty H}^{MEC}$ a modelová chyba $ \beta^{PM} - \beta^{PP} $ modelu MEC v období 1986-2011.	120

Seznam použitých zkratek

KP – Křivka prediktability

KH – kvadratická hypotéza

KH_{PP}^D – kvadratická hypotéza určená z difference křivky prediktability bez parametru určujícího modelovou chybu

KH_{PM}^D – kvadratická hypotéza určená z difference křivky prediktability s parametrem určujícím modelovou chybu

KH_{PP}^{KP} – kvadratická hypotéza určená z křivky prediktability bez parametru určujícího modelovou chybu

KH_{PM}^{KP} – kvadratická hypotéza určená z křivky prediktability s parametrem určujícím modelovou chybu

LH – logaritmická hypotéza

OH – obecná hypotéza

L96 – Lorenzův jednoduchý atmosférický model z roku 1996

L05 – Lorenzův jednoduchý atmosférický model z roku 2005

NPM – numerické předpovědní modely

ECMWF – Evropské centrum pro střednědobou předpověď

MEC – model ECMWF

LE – Ljapunovův exponent

CNRM - model METEO-FRANCE, Toulouse

Seznam publikací

Bednář, H. a Raidl, A. 2011. Growth of Error in Weather Prediction with Use of Low-dimensional Atmospheric Model. *WDS*. 2011, Sv. III, stránky 66-71.

— **2012.** Late Stages of Initial Errors Growth in Weather Prediction with Use of Low-dimensional Atmospheric Model. *WDS*. 2012, Sv. III, ISBN 978-80-7378-226-9, stránky 82-87.

— **2018.** Validace Lorenzova 05 Nizko-dimenzionálního Chaotického Modelu pro Simulace Prediktability Počasí. *Meteorologické Zprávy*. 2018, Sv. 71, 5.

Bednář, H., Raidl, A. a Mikšovský, J. 2014b. Estimations of Initial Errors Growth in Weather Prediction by Low-dimensional Atmospheric Model. *In Proceedings of Nostradamus International Conference on Prediction, Modeling and Analysis of Complex Systems*. Nostradamus, 2014b, 289.

— **2014a.** Initial Error Growth and Predictability of Chaotic Low-dimensional Atmospheric Model. *International Journal of Automation and Computing*. 2014a, Sv. 3, 11, stránky 256-264.

— **2013.** Initial Errors Growth in Chaotic Low-dimensional Weather Prediction Model. *In Proceedings of Nostradamus International Conference on Prediction, Modeling and Analysis of Complex Systems*. 2013, Sv. 210, stránky 333-342.

— **2015.** Time Evolution of Initial Errors in Lorenz's 05 Chaotic Model. *The Scientific World Journal*. 2015, stránky 1-9.