Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

## Využití matematiky v ekonomických úlohách

## Utilization of mathematics in economics problems

**Veronika Škrhová**

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2019

Odevzdáním této bakalářské práce na téma *Využití matematiky v ekonomických úlohách* potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 12. 7. 2019

**Poděkování**

Touto cestou bych chtěla poděkovat především prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc. za vedení mé bakalářské práce, trpělivost, cenné rady a komentáře, které mi během psaní práce poskytla. Dále za bleskovou komunikaci a veškerý čas, který mi během zpracovávání práce věnovala.

## Abstrakt

Tématem mé bakalářské práce je využití matematiky v ekonomických úlohách. Cílem mé práce je ukázat na konkrétních příkladech, že matematika je vhodný nástroj při řešení ekonomických problémů a že je s ekonomií úzce spjata. Svou práci člením do dvou kapitol. V první kapitole se věnuji matematické teorii, kterou v druhé části své práce aplikuji. Popisuji zde diferenciální počet funkcí jedné proměnné, konkrétně derivace. Dále se zabývám integrálním počtem, lineárními rovnicemi, kvadratickými rovnicemi a interpolací polynomickou funkcí. V druhé kapitole se věnuji jednotlivým ekonomickým tématům, které nejprve definuji a poté na řešených příkladech ukazuji využití konkrétního matematického aparátu. V ekonomické teorii vždy uvádím potřebné vzorce, pokud existují, s vysvětlením, a příklady opatřuji komentářem, aby bylo jasné, proč zrovna používám konkrétní matematiku. V této kapitole se věnuji poptávce a nabídce, se kterými souvisí pojem elasticita. Dále se zabývám chováním spotřebitele a chováním výrobce. S tím souvisí pojmy přebytek spotřebitele a přebytek výrobce. Nejobsáhlejší část mé práce tvoří chování firmy v krátkém období. Dlouhé období ve své práci nezmiňuji. Definuji zde celkové, mezní a průměrné veličiny, které s chodem firmy souvisí. Těmito veličinami myslím produkt, náklady a příjmy. Neopomínám zisk a charakteristiku bodu zvratu a bodu, kdy firma ukončuje výrobu. Nakonec se v této kapitole věnuji úlohám, kde využívám interpolaci polynomickou funkcí.



**Klíčová slova:** ekonomie, matematika, chování firmy, funkce

## Abstract

Topic of my bachelor thesis is the utilization of mathematics in economic tasks. The aim of the work is to demonstrate that mathematics is the proper tool to solve economic problems and that these two disciplines are closely connected. The thesis is divided into two chapters. The first chapter deals with mathematical theory, which is later applied in the second chapter. Differential calculus of single variable functions, specifically the derivative, is described. Next the integral calculus, the linear equation, the quadratic equation and the polynomial interpolation are outlined. In the second chapter, individual economic themes are described. The themes are first defined and then the use of the specific mathematical apparat is shown on the solved tasks. In economic theory necessary formulas are always listed, where they exist, with an explanation and commentary, if needed, so it is clear why the specific mathematics was used. In this chapter the supply and demand, which is closely connected with the concept of elasticity, is dealt with. Also, the behavior of a consumer and a producer, which both corelates with concepts of surplus of the consumer and surplus of the producer, is followed up on. The largest part of my work focuses on company's behavior in the short term. Company's behavior in the long term is not mentioned. Total, marginal and average values, which are related to the run of companies, are defined as well. By these values I mean product, costs and revenues. I do not forget about break-even point characteristic and the point when company ends its production. The last part of this chapter deals with tasks where the polynomial interpolation is used.



**Key words:** economics, mathematics, company's behavior, function

# Obsah

# Úvod

Tématem mé bakalářské práce je využití matematiky v ekonomických úlohách. Když jsem si vybírala téma své bakalářské práce, s jistotou jsem věděla, že se chci věnovat nějakému praktickému užití matematiky, ne pouze teorii. V mém okolí se často setkávám s dotazy, k čemu je matematika dobrá a kde se využívá v reálném životě. Důvodem, proč jsem vybrala zrovna oblast ekonomie, je, že mé předešlé bakalářské studium bylo na Vysoké škole ekonomické v Praze a já chci touto prací propojit své získané poznatky s matematikou, které se věnuji teď.

Myslím si, že matematika s ekonomií úzce souvisí. Matematika nás nutí přemýšlet o problémech a hledat jejich různá řešení. Zároveň si myslím, že žáci středních škol a studenti vysokých škol ekonomicky zaměřených oborů matematiku berou pouze jako předmět, který je třeba splnit, ale nevidí v něm žádné propojení s ekonomií. Cílem mé práce je ukázat na konkrétních příkladech, že matematika je vhodný nástroj při řešení ekonomických problémů a že je s ekonomií úzce spjata.

Má práce je členěná do dvou kapitol. V první kapitole se věnuji matematickému aparátu, který v práci používám při řešení příkladů. Tato část obsahuje matematickou teorii, která je v další kapitole mé práce aplikovaná. V této kapitole čerpám z učebnic pro gymnázia a z literatury obsahující vysokoškolskou matematiku. Věnuji se diferenciálnímu počtu funkcí jedné proměnné, konkrétně derivacím. Derivace shledávám jako důležitý a velmi užitečný nástroj v souvislosti s ekonomií, proto se jim věnuji podrobněji. Dále zde zmiňuji integrální počet, interpolaci polynomickou funkcí, konkrétně Lagrangeův interpolační polynom, a řešení rovnic. Zabývám se pouze lineárními a kvadratickými rovnicemi.

Druhá kapitola obsahuje definice konkrétních ekonomických pojmů. Věnuji se nabídce a poptávce, s nimiž souvisí jejich elasticita. U nabídky a poptávky se zabývám také přebytkem spotřebitele a přebytkem výrobce. Dále popisuji chování firmy. Vybrala jsem si pouze chování firmy v krátkém období. S firmou souvisí celkové, mezní a průměrné veličiny, které definuji. Jedná se o produkt, náklady a příjmy. Problematiku firmy zakončuji ziskem a charakteristikou bodu zvratu a bodu, kdy firma ukončuje výrobu. V poslední části této kapitoly uvádím příklady na využití interpolace polynomickou funkcí. U každého tématu uvádím řešené příklady, abych ukázala propojení matematiky a ekonomie.

# Matematický aparát

Než se budeme zabývat konkrétním řešením příkladů, uvádíme poznatky z oblasti matematiky, které k tomu budeme využívat. Tomu se věnuje tato první kapitola, ve které čerpám z následujících zdrojů: (Veselý, 1997), (Novotná, 2000), (Hrubý, Kubát, 1997), (Charvát, Zhouf, Boček, 1999).

## 1.1 Derivace funkce

Derivace shledávám jako silný nástroj pro analýzu chování funkcí. Ačkoliv se ve své práci při řešení konkrétních příkladů věnuji pouze derivacím polynomických funkcí, v této kapitole se věnuji derivacím detailněji, protože v jiných případech může být lepší aproximovat závislost i jinými funkcemi.

### 1.1.1 Derivace funkce v bodě a na intervalu

Veselý (1997, s. 126) derivaci v bodě $x_0$ definuje následovně:

„Nechť je funkce $f$ definována v nějakém okolí $U(x_0)$ bodu $x_0$ z $\mathbb{R}$. Potom limitu (pokud existuje)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazýváme derivací funkce $f$ v bodě $x_0$ a značíme ji $f'(x_0)$.
Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ vlastní derivaci. Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ nevlastní derivaci. Pokud vyšetřovaná limita neexistuje, říkáme, že funkce $f$ nemá v bodě $x_0$ derivaci nebo že $f'(x_0)$ neexistuje.“

Dále platí:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Podobně definujeme:

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Hodnoty $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ nazýváme derivace zprava, resp. derivace zleva funkce $f$ v bodě $x_0$.

Funkce $f$ má derivaci v bodě $x_0$, právě když existují obě jednostranné derivace funkce $f$ v bodě $x_0$ a jsou si rovny.

Poznámka: Derivace je směrnice tečny ke grafu funkce v daném bodě, můžeme zapsat:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Kromě značení $f'(x_0)$ existují i jiná značení derivace. pokud bychom neměli na mysli konkrétní bod $x_0$, můžeme derivaci v libovolném bodě intervalu zapsat jako $f'(x)$. Derivaci pak můžeme brát jako funkci proměnné $x$ a zapisovat $y'$. Platí tedy, že zápisy $f'(x) = 3x$ a $y' = 3x$ vyjadřují to stejné. Dále můžeme zapisovat $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, to totiž říká, že derivace vznikla jako limita podílu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Hrubý, Kubát (1997, s. 87-88) uvádí další tvrzení o derivaci funkce:

- Funkce $f$ má v intervalu $\langle a, b \rangle$ derivaci, jestliže má derivaci v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě $a$ má derivaci zprava a v bodě $b$ má derivaci zleva,
- má-li funkce $f$ v bodě $x_0$ derivaci, je v tomto bodě spojitá.

### 1.1.2 Derivace elementárních funkcí

Hrubý, Kubát (1997, s. 89-96) uvádí návod, jak derivovat elementární funkce[1].

***Věta:*** Pro funkci $f\colon y = c, c \in \mathbb{R}$, platí $y' = 0$.

***Důkaz:***

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}\colon y'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

***Věta:*** Pro funkci $f\colon y = x^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, platí $y' = nx^{n-1}$.

***Důkaz:***

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}\colon y'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} =$$

[1] Pod pojmem elementární funkce rozumíme každou funkci, kterou získáme konečným počtem operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí konstantní, mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^n + nx_0^{n-1}h + \ldots + nx_0 h^{n-1} + h^n - x_0^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(nx_0^{n-1} + \ldots + nx_0 h^{n-2} + h^{n-1})}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (nx_0^{n-1} + \ldots nx_0 h^{n-2} + h^{n-1}) = nx_0^{n-1}.$$

***Věta:*** Pro funkci $f: y = \sin x\,, x \in \mathbb{R}$, platí $y' = \cos x$.

***Důkaz:*** Využijeme vztah

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1;$$

pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ platí:

$$y'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{x_0+h+x_0}{2}\sin\frac{x_0+h-x_0}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right] == 1\cdot\cos x_0 = \cos x_0.$$

***Věta:*** Pro funkci $f: y = \cos x\,, x \in \mathbb{R}$, platí $y' = -\sin x$.

***Důkaz:*** Využijeme vztah

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1;$$

pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ platí:

$$y'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0+h) - \cos x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{x_0+h+x_0}{2}\sin\frac{x_0+h-x_0}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right] = -1\cdot\sin x_0 = -\sin x_0.$$

Pro odvození dalších vzorců pro výpočet derivací elementárních funkcí použijeme větu o derivaci aritmetických operací.

***Věta:*** Jestliže funkce $u, v$ mají v bodě $x_0$ derivaci, má v bodě $x_0$ derivaci i součet, rozdíl součin a pro $v(x_0) \neq 0$ i podíl funkcí $u, v$ a platí:

a) $(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$,
b) $(u-v)'(x_0) = u'(x_0) - v'(x_0)$,
c) $(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$,
d) $\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$.

***Důkaz:***

a) Označme $f(x_0) = u + v$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h) + v(x_0+h) - u(x_0) - v(x_0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} + \frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h}\right] =$$
$$= u'(x_0) + v'(x_0).$$

b) Označme $f(x_0) = u - v$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h) - v(x_0+h) - u(x_0) + v(x_0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} - \frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h}\right] =$$
$$= u'(x_0) - v'(x_0).$$

c) Označme $f(x_0) = u \cdot v$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0) + u(x_0+h)v(x_0) - u(x_0+h)v(x_0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)[v(x_0+h) - v(x_0)] + v(x_0)[u(x_0+h) - u(x_0)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{u(x_0 + h)[v(x_0 + h) - v(x_0)]}{h} + \frac{v(x_0)[u(x_0 + h) - u(x_0)]}{h} \right\} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ u(x_0 + h) \cdot \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} + v(x_0) \cdot \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \right\}.$$

Pokud je funkce $u$ v bodě 0 spojitá, můžeme limitu zapsat jako

$$u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0).$$

d) Označme $f(x_0) = \frac{u}{v}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{u(x_0 + h)}{v(x_0 + h)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{u(x_0 + h)v(x_0) - u(x_0)v(x_0 + h)}{v(x_0 + h)v(x_0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{v(x_0 + h)v(x_0)} \cdot \frac{u(x_0 + h)v(x_0) - u(x_0)v(x_0 + h) + u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{1}{v(x_0 + h) \cdot v(x_0)} \cdot \frac{v(x_0)[u(x_0 + h) - u(x_0)] - u(x_0)[v(x_0 + h) - v(x_0)]}{h} \right\}.$$

Pokud je funkce $v$ v bodě 0 spojitá, můžeme limitu zapsat jako

$$\frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Ze vzorce pro derivaci součinu plyne vztah

$$\big(c \cdot u(x)\big)' = c \cdot u'(x), c \in \mathbb{R}.$$

***Věta:*** Pro funkci $f: y = \operatorname{tg} x, x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, platí $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

***Důkaz:*** Pro každé $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$, je

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

***Věta:*** Pro funkci $f: y = \operatorname{cotg} x, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, platí $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

***Důkaz:*** Pro každé $x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi$, je

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

***Věta:*** Pro funkci $f\colon y = x^n, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}^-$, platí $y' = nx^{n-1}$.

***Důkaz:*** Položíme-li $-n = m$, je $m > 0$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, platí

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Předešlá věta o derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu nepokryje všechny případy, a proto zmiňujeme návod, jak derivovat složenou funkci.

Jestliže funkce $z = g(x)$ má derivaci v bodě $x_0$ a jestliže funkce $y = f(z)$ má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$, má složená funkce $y = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ derivaci v bodě $x_0$ a platí

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0).$$

***Věta:*** Pro funkci $f\colon y = \mathrm{e}^x, x \in \mathbb{R}$, platí $y' = \mathrm{e}^x$.

***Důkaz:*** $y'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x_0+h} - \mathrm{e}^{x_0}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x_0}(\mathrm{e}^h - 1)}{h} = \mathrm{e}^{x_0} \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^{x_0} \cdot 1 = \mathrm{e}^{x_0}$.

Využili jsme znalosti limity $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

***Věta:*** Pro funkci $f\colon y = a^x, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, platí $y' = a^x \ln a$.

***Důkaz:*** Nejprve zopakujeme důležité vztahy, které platí mezi logaritmickou a exponenciální funkcí:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \Leftrightarrow x = a^{\log_a x},$$

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\ln x}.$$

Pokud do vztahu $x = \mathrm{e}^{\ln x}$ dosadíme za $x = a$, pro $a > 0$ dostaneme $a = \mathrm{e}^{\ln a}$. Dále tedy platí $a^x = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$.

$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x \ln a}\right)' = \mathrm{e}^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \ln a.$$

***Věta:*** Pro funkci $f\colon y = \ln x\,, x \in \mathbb{R}^+$, platí $y' = \frac{1}{x}$.

***Důkaz:*** Podle definice pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ platí:

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{\frac{x}{x_0} - 1} = \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{\frac{x}{x_0} - 1}.$$

Použijeme substituci kde $u = \frac{x}{x_0}$ a můžeme zapsat

$$y'(x_0) = \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{u \to 1} \frac{\ln u}{u - 1}.$$

Použijeme další substituci, kde $\ln u = t$. Potom $u = e^{\ln u} = e^t$ a píšeme

$$y'(x_0) = \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{t}{e^t - 1} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t}} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{x_0}.$$

Opět jsme zde využili vztah $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

***Věta:*** Pro funkci $f\colon y = \log_a x, x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, platí $y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

***Důkaz:*** Pro $x > 0$ je $x = e^{\ln x}$, můžeme tedy psát $x^n = e^{n \ln x}$. Pro derivaci funkce $y = x^n$ platí,

$$(x^n)' = \left(\mathrm{e}^{n \ln x}\right)' = \mathrm{e}^{n \ln x}(n \ln x)' = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

Zmíníme ještě návod na derivaci inverzní funkce[2] s pomocí které, budeme dokazovat derivace zbývajících funkcí.

Jestliže je funkce $f$ monotónní a spojitá existuje derivace $(f^{-1})'(f(x))$ a je různá od nuly, potom platí

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'\big(f(x)\big)}.$$

(Trnka, 2012)

***Věta:*** Pro funkci $f\colon y = \arcsin x,\ x \in (-1,1)$, platí $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

[2] Inverzní funkcí k prosté funkci $f$ rozumíme takovou funkci $f^{-1}$, pro kterou platí:

1) $D(f^{-1}) = H(f)$,
2) každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právo to $x \in D(f)$, pro které $f(x) = y$. (Trnka, 2012)

***Důkaz:*** $y = \arcsin x$, tedy $x = \sin y$,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y},$$

Využijeme vztah $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y,$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

V tomto případě nemusíme použít absolutní hodnotu, protože $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ a v tomto intervalu nabývá funkce kosinus kladných hodnot. Dosadíme a získáváme:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

***Věta:*** Pro funkci $f: y = \arccos x,\ x \in (-1,1)$, platí $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

***Důkaz:*** $y = \arccos x$, tedy $x = \cos y$,

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y},$$

Využijeme vztah $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$,

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y,$$

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}.$$

V tomto případě nemusíme použít absolutní hodnotu, protože $y \in (0; \pi)$ a v tomto intervalu nabývá funkce sinus kladných hodnot. Dosadíme a získáváme:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

***Věta:*** Pro funkci $f: y = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R}$, platí $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

***Důkaz:*** $y = \operatorname{arctg} x$, tedy $x = \operatorname{tg} y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \cos^2(\operatorname{arctg} x).$$

Ze vztahu trigonometrických a cyklometrických funkcí plyne, že

$$\cos\,(\operatorname{arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

v našem případě

$$\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+x^2}.$$

***Věta:*** Pro funkci $f\colon y = \operatorname{arccotg} x,\ \ x \in \mathbb{R}$, platí $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

***Důkaz:*** $y = \operatorname{arccotg} x$, tedy $x = \operatorname{cotg} y$,

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{cotg} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y = -\sin^2(\operatorname{arccotg} x).$$

Ze vztahu trigonometrických a cyklometrických funkcí plyne, že

$$\sin(\,\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

v našem případě

$$-\sin^2(\operatorname{arctg} x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = -\frac{1}{1+x^2}.$$

### 1.1.3 Užití derivací

Mezi základní úlohy na aplikaci diferenciálního počtu patří vyšetřování průběhu funkce. Celé této problematice se věnovat nebudu, pouze zmíním postupy, jak vyšetřit extrémy funkce a určit inflexní body funkce, protože tuto problematiku budu ve své práci využívat.

**Lokální extrémy**

Pojmem extrémy funkce označujeme maximum a minimum funkce. Jedná se o největší nebo nejmenší hodnotu této funkce na nějaké množině. Tou množinou může být celý definiční obor funkce nebo nějaký interval. Zavedeme si pojmy lokální maximum a lokální minimum.

„Funkce $f$ má v bodě $x_0$ lokální maximum, existuje-li takové okolí $U(x_0)$ bodu $x_0$, že pro všechna $x \in\ U(x_0) \cap D_f$ platí: $f(x) \leq f(x_0)$.

Funkce $f$ má v bodě $x_0$ lokální minimum, existuje-li takové okolí $U(x_0)$ bodu $x_0$, že pro všechna $x \in U(x_0) \cap D_f$ platí: $f(x) \geq f(x_0)$." (Hrubý, Kubát, 1997, s. 105)

Pokud v daných nerovnostech platí rovnost jen pro $x = x_0$, pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální maximum, resp. ostré lokální minimum. Lokální maximum, resp. ostré lokální maximum a lokální minimum, resp. ostré lokální minumum nazýváme souhrnným názvem lokální extrémy.

Pokud má funkce $f$ v bodě $x_0$ lokální extrém a existuje v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, pak je tato derivace nulová. To, že $f'(x_0) = 0$, ještě neznamená, že má funkce $f$ v bodě $x_0$ lokální extrém. Bod, ve kterém má funkce derivaci a hodnota derivace je zde rovna nule, nazýváme stacionárním bodem nebo také „bodem podezřelým z extrému".

Jedním z možných způsobů ověření, zda stacionární body jsou lokálními extrémy, je použití druhé derivace funkce. Druhou derivací rozumíme derivaci derivace a značíme $f''(x_0)$. Zajímá nás, zda je druhá derivace kladná nebo záporná v daném bodě.

„Nechť $f(x_0) = 0$ a nechť existuje v bodě $x_0$ druhá derivace. Je-li

- $f''(x_0) < 0$, má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální maximum,
- $f''(x_0) > 0$, má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální minimum,
- $f''(x_0) = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout. V tomto případě zjišťujeme znaménkové změny 1. derivace v okolí bodu $x_0$." (Hrubý, Kubát, 1997, s. 110)

**Inflexní body**

Pojem inflexní bod souvisí s konvexností a konkávností funkce, definujme nejdříve tyto dva pojmy. Hrubý, Kubát (197, s. 113) definují konvexnost a konkávnost pomocí okolí takto:

„Funkce $f$, která má derivaci v bodě $x_0$, je v bodě $[x_0, f(x_0)]$ konvexní, existuje-li takové okolí $U(x_0)$ bodu $x_0$, že $\forall x \in U(x_0), x \neq x_0$, leží body grafu funkce $f$ „nad tečnou" sestrojenou v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Funkce $f$, která má derivaci v bodě $x_0$, je v bodě $[x_0, f(x_0)]$ konkávní, existuje-li takové okolí $U(x_0)$ bodu $x_0$, že $\forall x \in U(x_0), x \neq x_0$, leží body grafu funkce $f$ „pod tečnou" sestrojenou v bodě $[x_0, f(x_0)]$."

Zmíníme ještě, že pokud je funkce konvexní, resp. konkávní v každému bodě intervalu $I$, říkáme, že je konvexní, resp. konkávní na intervalu $I$.

Konvexnost a konkávnost zjišťujeme pomocí druhé derivace funkce a platí:

- pokud $f''(x_0) > 0$, je funkce $f$ v bodě $x_0$ konvexní,
- pokud $f''(x_0) < 0$, je funkce $f$ v bodě $x_0$ konkávní.

Stejná tvrzení lze vyslovit pro konvexnost a konkávnost na intervalu. Platí:

- pokud v každém bodě intervalu $I$ platí, že $f''(x_0) > 0$, je funkce $f$ na invervalu $I$ konvexní,
- pokud v každém bodě intervalu $I$ platí, že $f''(x_0) < 0$, je funkce $f$ na invervalu $I$ konkávní.

Inflexní bod je takový bod $x_0$ intervalu $I$, ve kterém se funkce $f$ mění z konkávní na konvexní nebo naopak. Pokud je bod $x_0$ inflexním bodem funkce $f$ a pokud má funkce $f$ v tomto bodě druhou derivaci, pak platí, že $f''(x_0) = 0$. (Hrubý, Kubát, 1997)

## 1.2 Integrální počet

### 1.2.1 Primitivní funkce

Nejprve vysvětlíme pojem primitivní funkce. Hrubý, Kubát (1997, s. 135) uvádí:

„Nechť $F, f$ jsou funkce definované v otevřeném intervalu $J$. Jestliže pro všechna $x \in J$ platí

$$F'(x) = f(x),$$

říkáme, že funkce $F$ je primitivní funkcí k funkci $f$ v intervalu $J$."

***Věta:*** Je-li funkce $F$ v intervalu $J$ primitivní funkcí k funkcí $f$, pak každá primitivní funkce k funkci $f$ je tvaru $F(x) + C$, kde $C$ je reálná konstanta.

***Důkaz:*** Pokud máme funkce $F$ a $G$, které jsou primitivní k funkci $f$ na intervalu J, pak platí

$$F'(x) = G'(x) = f(x).$$

Pokud označíme funkci $H(x) = F(x) - G(x)$, derivací funkce $H(x)$ dostaneme

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Derivace funkce $H(x)$ je rovna nule, tudíž se jedná o konstantní funkci a platí

$$F(x) = G(x) + C.$$

Množinu všech primitivních funkci k funkci $f$ nazýváme neurčitým integrálem funkce $f$ a zapisujeme

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, x \in J.$$

Platí: Ke každé funkci spojité v intervalu $J$ existuje v tomto intervalu primitivní funkce. (Hrubý, Kubát 1997)

### 1.2.2 Základní vzorce pro primitivní funkce

Hrubý, Kubát (1997, s. 137-138) uvádí základní vzorce pro primitivní funkce. Jedná se o vzorce získané při odvozování derivací elementárních funkcí v části věnované derivacím.

1. $\int 0\,\mathrm{d}x = C,\ x \in \mathbb{R}$,
2. $\int \mathrm{d}x = x + C,\ x \in \mathbb{R}$,
3. $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, x \in (0, +\infty), n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, pro $n \in \mathbb{N}$ platí uvedený vztah pro $x \in (-\infty, +\infty)$,
4. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,
5. $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C\,, x \in (-\infty, +\infty)$,
6. $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, x \in (-\infty, +\infty)$,
7. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C, x \in (-\infty, +\infty)$,
8. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C, x \in (-\infty, +\infty)$,
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x + C, x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$,
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}\,x + C, x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$,
11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,\ x \in (-1,1)$,
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\,x + C,\ x \in (-\infty, +\infty)$.

***Věta:*** Existují-li v otevřeném intervalu $J$ primitivní funkce k funkcím $f_1, f_2$ a jsou-li $c_1, c_2$ libovolné konstanty, existuje primitivní funkce k funkci $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ a platí

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\,\mathrm{d}x = c_1 \int f_1(x)\mathrm{d}x + c_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z uvedené věty vyplývají tyto vztahy:

$$\int c\, f(x)\mathrm{d}x = c \int f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x.$$

### 1.2.3 Integrační metody

Ačkoliv ve své práci budu integrovat pouze jednoduché polynomické funkce, zmiňuji dvě integrační metody a ukazuji jejich použití.

**Per partes**

„Mají-li funkce $u, v$ v intervalu $(a, b)$ spojité derivace, pak v $(a, b)$ platí

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)\, u'(x)\,\mathrm{d}x.“$$

(Hrubý, Kubát, 1997, s. 143)

Tato metoda je založena na derivaci součinu dvou funkcí. Nechť $u = u(x), v = v(x)$. Víme, že funkce $uv$ má na intervalu $(a, b)$ derivaci a platí $(uv)' = u'v + uv'$. Tím pádem platí $uv = \int (u'v + uv')\,\mathrm{d}x$. Funkce $u, v$ i funkce $u', v'$ jsou na intervalu $(a, b)$ spojité. To znamená, že jsou spojité i funkce $u'v, uv'$ a na intervalu $(a, b)$ k nim existují primitivní funkce $\int u'v\,\mathrm{d}x, \int uv'\mathrm{d}x$. Můžeme psát

$$uv = \int (u'v + uv')\,\mathrm{d}x\,,$$

$$uv = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x,$$

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{dx}.$$

**Příklad 1**

Vypočítejte $\int x \sin x\,\mathrm{d}x\,, x \in (-\infty, +\infty)$.

**Řešení**

Dosadíme do vztahu $\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v$ dx. V zadání máme součin funkcí $x$ a $\sin x$ a naším úkolem je nejprve rozhodnout, jakým způsobem tyto dvě funkce dosadíme do vzorce. Pokud dosadíme takto

$$u = x, \qquad u' = 1,$$

$$v' = \sin x\,, \qquad v = -\cos x,$$

a dosadíme do vzorce

$$\int x \sin x\,\mathrm{d}x = x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\ \mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C,$$

došli jsme docela jednoduše k řešení. Ukážeme si ještě, co by se stalo, kdybychom dosadili opačně.

$$u = \sin x\,, \qquad u' = \cos x,$$

$$v' = x, \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \sin x\,\mathrm{d}x = \sin x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \cos x \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \frac{x^2}{2}\,dx.$$

Vidíme, že bychom znovu museli použít metodu Per partes, protože jinak primitivní funkci z integrálu $\int \cos x \cdot \frac{x^2}{2}\,dx$ neurčíme a výpočet by byl komplikovanější. Proto je třeba si hned na začátku vhodně rozmyslet, jak funkce dosadíme.

**Substituční metoda**

„Nechť funkce $F(t)$ je primitivní funkcí k funkci $f(t)$ v intervalu $(\alpha, \beta)$. Nechť funkce $t = g(x)$ má derivaci $g'(x)$ v intervalu $(a, b)$. Pro každé $x \in (a, b)$ nechť hodnota $g(x)$ patří do intervalu $(\alpha, \beta)$. Pak v intervalu $(a, b)$ je funkce $F(g(x))$ primitivní funkcí k funkci $f(g(x)) \cdot g'(x)$, tj.

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\ \mathrm{d}t, \text{kde } t = g(x).\text{“}$$

(Hrubý, Kubát, 1997, s. 146)

Substituční metoda nám zjednodušuje integrování zavedením nové proměnné, která převede původní funkci na funkci, která se integruje snadněji. Tato metoda je založena na integraci složené funkce. Na jednoduchém příkladu si zase ukážeme její použití.

**Příklad 2**

Vypočítejte $\int \sin 5x \, \mathrm{d}x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

**Řešení**

$$t = g(x) = 5x,$$

$$g'(x) = 5,$$

$$\int \sin 5x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \sin 5x \cdot 5 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \sin 5x \cdot (5x)' \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \sin t \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{5}\cos t + C =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

Obvykle zapisujeme takto:

$$\int \sin 5x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 5x \\ \mathrm{d}t = 5 \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{5} \end{array} \right| = \int \sin t \frac{\mathrm{d}t}{5} = \frac{1}{5}\int \sin t \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{5}\cos t + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

### 1.2.4 Určitý integrál

Nechť $F, f$ jsou funkce definované na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $F'(x) = f(x)$, přičemž derivací funkce $F$ v bodě $a$ rozumíme derivaci v bodě $a$ zprava a derivací funkce $F$ v bodě $b$ derivaci v bodě $b$ zleva, říkáme, že funkce $F$ je primitivní funkcí k funkci $f$ na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.

Nechť $F$ je primitivní funkce k funkci $f$ v intervalu $I$. Rozdíl $F(b) - F(a)$ funkčních hodnot funkce $F$ v libovolných bodech $a, b$ tohoto intervalu se nazývá určitý integrál funkce $f$ v mezích od $a$ do $b$ a značí se $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Určitý integrál nám je roven obsahu plochy ohraničené grafem funkce $f$, osou $x$ a přímkami $x = a, x = b$. Zapisujeme

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b.$$

**Výpočet určitého integrálu**

Nechť $f_1, f_2$ jsou funkce spojité v intervalu $J$, $a, b$ nechť jsou libovolné body z $J$ a $c_1, c_2$ libovolné reálné konstanty. Potom platí

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Následující vztahy jsou speciálním případem této věty

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Je-li $f$ spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

- Jsou-li $f, g$ funkce spojité v intervalu $\langle a, b\rangle$ a je-li $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

- Při záměně mezí určitého integrálu se mění znaménko:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

***Věta:*** Je-li funkce $f$ spojitá v intervalu $J$ a body $a, b, c$ leží v intervalu $J$, pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

***Důkaz:***

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

## 1.3 Lagrangeův interpolační polynom

Novotná (2000, s. 10) definuje Lagrangeův interpolační polynom následovně:

Nechť $T$ je těleso, $n \in \mathbb{N}$, $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots$, $b_n$ jsou prvky z tělesa $T$. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. Potom polynomická funkce $\mathcal{L}_k$ dána předpisem

$$\mathcal{L}_k(x) = \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{k-1})(x - a_{k+1}) \ldots (x - a_n)}{(a_k - a_1) \ldots (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \ldots (a_k - a_n)}$$

je stupně $n - 1$ a platí

$$\mathcal{L}_k(a_1) = 0, \ldots, \mathcal{L}_k(a_{k-1}) = 0, \mathcal{L}_k(a_k) = 1, \mathcal{L}_k(a_{k+1}) = 0, \ldots, \mathcal{L}_k(a_n) = 0.$$

Polynomická funkce $\mathcal{L}$ daná předpisem

$$\mathcal{L}(x) = b_1\mathcal{L}_1(x) + b_2\mathcal{L}_2(x) + \ldots + b_n\mathcal{L}_n(x),$$

pokud má stupeň, je stupně nejvýše $n - 1$ a přitom platí

$$\mathcal{L}(a_1) = b_1, \mathcal{L}(a_2) = b_2, \ldots, \mathcal{L}(a_n) = b_n.$$

## 1.4 Rovnice

Nejprve vysvětlíme pojem rovnice. Charvát, Zhouf, Boček (1999, s. 9) definují rovnici následovně: „Rovnice je zápis rovnosti dvou výrazů, v nichž se může vyskytovat nějaké písmeno ($x, y, t$ apod.) označující tzv. neznámou."

„Každé číslo, jehož dosazením do rovnice dostaneme platnou rovnost, se nazývá řešení rovnice, někdy též kořen rovnice. Vyřešit rovnici znamená najít všechna její řešení neboli množinu všech jejích řešení." (Charvát, Zhouf, Boček, 1999, s. 9)

Při řešení rovnic můžeme využívat ekvivalentní úpravy. Jedná se o takové úpravy, které nezmění řešení rovnice ani obor, na kterém je rovnice definovaná. Mezi tyto úpravy patří

- přičtení stejného čísla nebo výrazu k oběma stranám rovnice,
- odečtení stejného čísla nebo výrazu od obou stran rovnice,
- vynásobení nenulovým číslem nebo libovolným výrazem celou rovnici,
- vydělení celé rovnice libovolným číslem nebo libovolným výrazem různým od nuly.

Mimo ekvivalentních úprav používáme při řešení rovnic ještě důsledkové úpravy. Jedná se o takové úpravy, které nám naopak ještě nějaká řešení mohou přidat, která ale po dosazení zadanou rovnost nesplňují. Důsledkovou úpravou je například umocňování. Jednou z možností, jak získat řešení rovnice je provést zkoušku. Pro každý kořen zvlášť určíme hodnotu výrazu na pravé straně rovnice a na levé straně rovnice. Pokud nám vyjde stejná hodnota výrazu, jedná se o kořen dané rovnice.

### 1.4.1 Lineární rovnice

„Rovnice $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, se nazývá lineární rovnice s neznámou $x$." (Charvát, Zhouf, Boček, 1999, s. 17)

Řešení lineární rovnice $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ můžeme shrnout následovně:

- pokud $a \neq 0$, jediným řešením je $x = -\frac{b}{a}$,
- pokud $a = 0 \ \wedge b = 0$, pak každé číslo $x \in \mathbb{R}$ je řešením,
- pokud $a = 0 \ \wedge b \neq 0$, pak rovnice nemá řešení.

### 1.4.2 Kvadratická rovnice

„Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, se nazývá kvadratická rovnice (s neznámou $x$); $ax^2$ je její kvadratický člen, $bx$ je její lineární člen, $c$ je její absolutní člen.

Výraz $ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, se nazývá kvadratickým trojčlenem."

(Charvát, Zhouf, Boček, 1999, s. 118)

Pokud $c = 0$, to znamená, že rovnice je ve tvaru $ax^2 + bx = 0$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, tak hovoříme o kvadratické rovnici bez absolutního členu. Můžeme ji vyřešit převedením na rovnici v součinovém tvaru

$$ax\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0,$$

kde kořeny jsou čísla $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$.

Pokud je $b = 0$, je $x_1 = x_2 = 0$; číslo 0 nazýváme dvojnásobným kořenem této rovnice. (Charvát, Zhouf, Boček, 1999)

Vrátíme se zpět ke kvadratickému trojčlenu $ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Pokud $b = 0$, to znamená, že rovnice je ve tvaru $ax^2 + c = 0$, kde $a, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Tuto rovnici můžeme zapsat také ve tvaru

$$x^2 = -\frac{c}{a},$$

a hovoříme o ryze kvadratické rovnici.

Řešení této rovnice si podrobně rozdělíme na dva případy. Pokud označíme výraz na pravé straně rovnice $-\frac{c}{a} = d$, rovnice bude ve tvaru $x^2 = d$. Mohou nastat dvě situace:

- $d < 0$, to by znamenalo, že čísla $a, c$ mají stejná znaménka. Tím pádem rovnice nemá v množině reálných čísel řešení, protože každá druhá mocnina reálného čísla $x$ je číslo nezáporné. Má ale řešení v množině komplexních čísel.
- $d \geq 0$, to by znamenalo, že čísla $a, c$ mají různá znaménka nebo $c = 0$. Tím pádem rovnice v množině reálných čísle řešení má a její kořeny určíme takto:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Pokud je $c = 0$, je $x_1 = x_2 = 0$; číslo 0 nazýváme dvojnásobným kořenem této rovnice. (Charvát, Zhouf, Boček, 1999)

Zbývá nám uvést řešení obecné kvadratické rovnice. Rovnici ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, nejprve vydělíme nenulovým číslem $a$. Získáváme

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

První dva členy levé strany rovnice upravíme tak, abychom z nich získali druhou mocninu lineárního dvojčlenu. Této úpravě říkáme doplnění na čtverec. Máme tedy

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Zlomek na pravé straně rovnice má ve jmenovateli výraz $4a^2$, který je pro každé $a \neq 0$ vždy kladný. Existence a počet řešení je tedy závislé na čitateli zlomku. Výraz $b^2 - 4ac$ nazýváme diskriminant a značíme $D$.

Jsou tři možnosti, které mohou nastat:

- $D > 0$, rovnice má dva různé reálné kořeny. K tomu dojdeme tak, že pravou stranu rovnice $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ upravíme tak, aby celý zlomek byl ve druhé mocnině.

Upravený výraz převedeme na levou stranu rovnice a s využitím vzorce rozložíme na součin. Zapisujeme

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0,$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Výraz pod odmocninou je již zmíněný diskriminant a řešení píšeme často stručně ve tvaru

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

- $D=0$, řešením rovnice je jeden dvojnásobný kořen, protože řešíme rovnici $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$, a jejím řešením je $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.
- $D<0$, rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení, protože výraz $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ nemůže být nikdy záporný. Má ale řešení v oboru komplexních čísel. Výraz $\sqrt{D}$ v tomto případě nemá smysl, ale můžeme využít toho, že výraz $\sqrt{-D}$ smysl má, protože $-D>0$. Odvodit řešení můžeme takto:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0, \qquad \text{kde } -D=4ac-b^2, -D>0,$$

S využitím vztahu $A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)$ získáváme

$$\left(x+\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)=0,$$

$$x_1=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Výraz pod odmocninou je záporný diskriminant, řešení často píšeme ve tvaru

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}.$$

Vztah mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice můžeme popsat Viètovými vzorci. Pokud uvažujeme obecnou kvadratickou rovnici ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Pokud její kořeny $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ sečteme, získáváme

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} - b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Pokud kořeny této rovnice vynásobíme, získáváme

$$x_1 x_2 = \frac{\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a \cdot 2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Platí tedy:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Pokud je $a = 1$, můžeme vzorce psát ve tvaru

$$x_1 + x_2 = -b, \qquad x_1 x_2 = c.$$

Platí to i obráceně, pokud $x_1 + x_2 = -b$, $x_1 x_2 = c$, tak čísla $x_1,\ x_2$, jsou kořeny rovnice

$x^2 + bx + c = 0$, protože po dosazení platí

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = (x - x_1)(x - x_2).$$

Poznámka: Viètovy vzorce platí i pro komplexní kořeny kvadratické rovnice.

## Ekonomie

J. J. Rousseau ve svém díle *Rozprava o politické ekonomii*, slovo ekonomie definuje následovně:

„Slovo ekonomie nebo oekonomie pochází z řeckého oikos – dům a nomos – zákon. Původně znamenalo pouze moudré a zákonité spravování domácnosti v zájmu společného blaha rodiny. Později se smysl tohoto slova rozšířil i na spravování velké rodiny, kterou je stát.“ (ROUSSEAU, j. j. Rozprava o politické ekonomii. Praha: SNPL 1956, s. 19)

Zásluhu na vzniku ekonomie jako vědy připisujeme skotskému ekonomovi a filozofovi Adamu Smithovi, který tak učinil vydáním svého díla „Pojednání o podstatě a původu bohatství národů“ v roce 1776 a položil základy klasické politické ekonomie. Ačkoliv se v jeho díle nevyskytuje nic nového, co by předtím nebylo objeveno Smithovými předchůdci, podařilo se mu veškeré dosavadní ekonomické vědění shrnout do jednoho uceleného díla. (Holman, 2001)

Předmětem ekonomie je hledání a zkoumání podnětů, které vedou lidi k tomu, aby uspokojovali své potřeby. Ekonomie dále zkoumá způsoby, kterými své potřeby lidé uspokojují, a snaží se vysvětlit důvody, proč lidé chtějí něco vyrábět. Na člověka nahlíží jako na bytost s neomezenými potřebami ve světě omezených zdrojů. To ho vede k vytváření ekonomické struktury společnosti – musí vyrábět a vstupovat do ekonomických vztahů s jinými lidmi. (Macáková, 2003)

## 1.5 Poptávka

Poptávku můžeme popsat jako závislost dvou veličin, kterými jsou cena a požadované množství. Tato závislost je nepřímo úměrná[3] a platí u většiny zboží a služeb. Spotřebitelé nakupují zboží, jehož množství se odvíjí od ceny, za kterou je nabízeno. Pokud bude cena určitého zboží vysoká, lidé nakoupí pouze malé množství. Naopak pokud bude cena nízká, lidé budou poptávat větší množství tohoto zboží. Vztah mezi množstvím a cenou můžeme popsat tabulkou, grafem a rovnicí. (Vlček, 2009)

Křivka poptávky je klesající, což ekonomové vysvětlují důchodovým a substitučním efektem. Pokud budeme předpokládat, že příjmy spotřebitelů se nemění, s poklesem cen by měli nakupovat větší množství zboží, a naopak s růstem cen by své nákupy omezili. Tomuto jevu říkáme důchodový efekt a můžeme si ho interpretovat na příkladu. Pokud v létě budeme každý

[3] Vlček má na mysli vztah „čím víc, tím míň“. Nikoliv matematickou interpretaci nepřímé úměrnosti, která je dána vztahem $y = \frac{k}{x}$, kde $k$ je libovolné reálné číslo různé od 0 a $x$ je různé od 0.

týden kupovat 500 g jahod za 30 Kč, s příchodem zimy, kdy jejich cena může být dvojnásobná, jejich nákup omezíme a dopřejeme si je třeba pouze dvakrát za měsíc.

Pokud dochází ke zvýšení cen, lidé na to mohou reagovat změnou struktury zboží, které spotřebovávají. Nebudou kupovat tolik drahých statků, a naopak zvýší nákup jiných, levnějších statků. Tento jev nazýváme substituční efekt. Můžeme si ho přiblížit na stejném příkladě jako u důchodového efektu. Pokud v létě kupujeme levné jahody, v zimě místo nich budeme kupovat jiné levnější ovoce – třeba jablka. (Vlček, 2009)

## 1.6 Nabídka

Nabídku stejně jako poptávku můžeme definovat jako závislost dvou veličin – ceny a nabízeného množství. Na rozdíl od poptávky je tato závislost přímo úměrná[4]. Nabídka firmy obvykle reaguje na signál, který vysílá poptávka. Naopak tomu může být příchodem nových výrobků na trh. Nabídka tedy popisuje závislost mezi cenou a množstvím nabízeného zboží, za kterou jsou firmy ochotné toto zboží prodat. Čím vyšší bude na trhu cena jednoho zboží, tím větší množství budou chtít výrobci vyrobit a prodat. Naopak s nízkou cenou zboží klesá i množství, které budou chtít výrobci vyrobit a prodat. Tuto závislost můžeme popsat tabulkou, grafem a rovnicí.

Nabídková křivka je rostoucí, což vyplývá z působení dvou faktorů. Vysoké ceny zboží výrobce motivují ke zvýšení objemu výroby, protože jim to zajistí vyšší tržby a budou mít vyšší zisk. Tento faktor vede k tomu, že výrobce se soustředí na výrobu produktů, které mu zajišťují zisk. Druhým faktorem je fakt, že růst cen zboží přiláká do odvětví nové výrobce. Budou tedy vyrábět i ti, kteří mají vyšší náklady a při nízké ceně výrobku nemohli daný výrobek vyrábět, protože jim to nepřinášelo zisk. (Vlček, 2009)

## 1.7 Cenová elasticita poptávky

Cenová elasticita poptávky je ukazatel, který ekonomové používají k měření reakce poptávaného množství na změnu ceny zboží. Je vyjádřen jako poměr procentní změny množství poptávaného statku ku procentní změně ceny. Tento ukazatel dává odpověď na to, jak se změní výdaje spotřebitele na koupi daného zboží, pokud se změní cena tohoto zboží. Vzorec pro výpočet je následující:

[4] Stejné jako u poptávky – Vlček má na mysli vztah „čím víc, tím víc“. Nikoliv matematickou interpretaci přímé úměrnosti, která je daná vztahem $y = k \cdot x$, kde $k$ je různé od 0.

$$\varepsilon = \left|\frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}}\right|, \text{kde}$$

- $\Delta Q$ je změna poptávaného množství,
- $Q$ je původně poptávané množství,
- $\Delta P$ je změna ceny,
- $P$ je původní cena. (Holman, 2001)

Macáková (2003) uvádí tento vzorec:

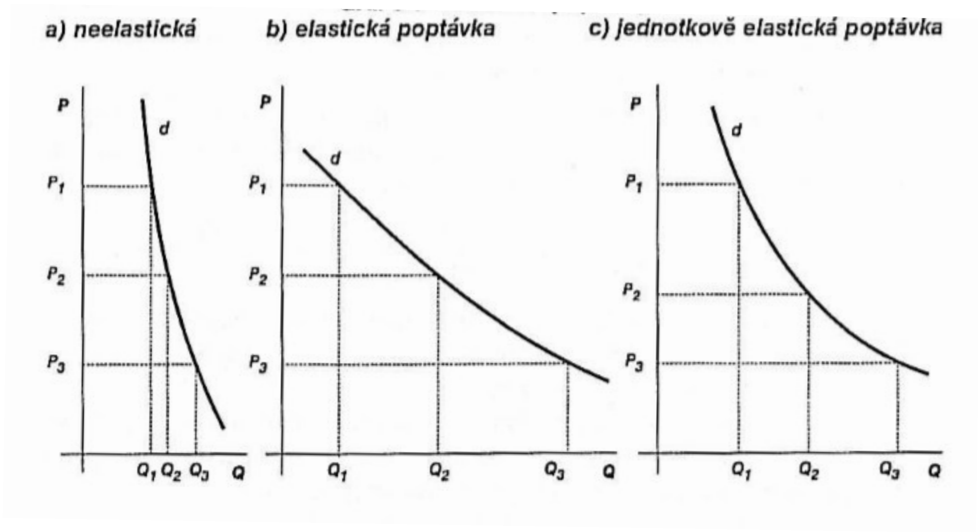
$$\varepsilon = \left|\frac{Q_2 - Q_1}{(Q_2 + Q_1):2} : \frac{P_2 - P_1}{(P_2 + P_1):2}\right| = \left|\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2 + Q_1} : \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}\right|, \text{kde}$$

- $Q_1$ je původně poptávané množství,
- $Q_2$ je poptávané množství po změně,
- $P_1$ je původní cena,
- $P_2$ je cena po změně.

Rozdíl mezi těmito dvěma vzorci si ukážeme na Příkladech 3 a 4.

Pokud je elasticita poptávky větší než 1, jedná se o elastickou poptávku. Procentní změna ceny vyvolá více než procentní změnu objemu poptávaného zboží a zvýšení ceny způsobí pokles výdajů spotřebitele na dané zboží. Pokud je elasticita poptávky menší než 1, jedná se o neelastickou poptávku. Procentní změna ceny vyvolá méně než procentní změnu poptávaného zboží a zvýšení ceny způsobí růst výdajů spotřebitele na dané zboží. V případě, že je hodnota elasticity 1, jedná se o jednotkově elastickou poptávku. Procentní změna ceny vyvolá stejnou procentní změnu objemu poptávaného zboží a výdaje na zboží zůstanou stejné. (Macáková, 2003)

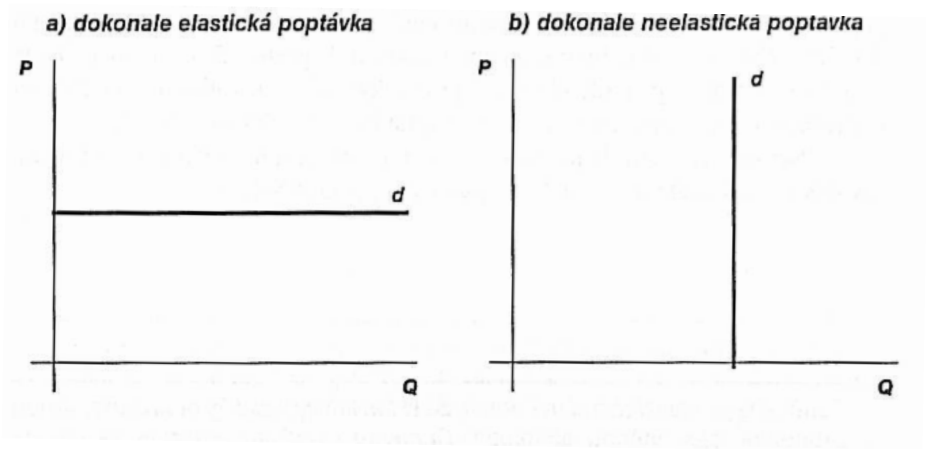
Obrázek 1 – elasticita poptávky




(Macáková, 2003, s. 68)

Elasticita poptávky je patrná i z grafů na Obrázku 1, kde se odvíjí od sklonu křivky poptávky. Čím více je poptávka elastická, tím menší je sklon křivky, a naopak. U neelastické poptávky platí, že křivka je strmější.

Obrázek 2 – dokonale elastická a neelastická poptávka




(Macáková, 2003, s. 68)

Zmíníme ještě dva případy. Pokud vyjde elasticita poptávky ∞, hovoříme o dokonale elastické poptávce a pokud vyjde elasticita poptávky 0, jedná se o dokonale neelastickou poptávku. Na Obrázku 2 vidíme, že u dokonale elastické poptávka se za určitou cenu prodá jakékoliv množství statku. U dokonale neelastické poptávky zase nezávisí na ceně, prodá se stále stejné množství.

Na elasticitu poptávky má vliv skutečnost, o jaký statek se jedná. Neelastická poptávka je po statcích, které lze obtížně nahradit (např. sůl, voda, elektřina), a elastická poptávka je po statcích, které jsou snadno nahraditelné. (Holman, 2003)

**Příklad 3**

Cena cibule se zvýšila z 20 Kč/kg na 25 Kč/kg. Poptávané množství kleslo z 400 kg na 300 kg. Určete cenovou elasticitu poptávky po cibuli.

**Řešení:** Dosadíme do vzorce všechny údaje, které známe.

$\Delta Q = 100,\, Q = 400,\, \Delta P = 5,\, P = 20$

$$\varepsilon = \left|\frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}}\right| = \left|\frac{\frac{-100}{400}}{\frac{5}{20}}\right| = \left|\frac{-100 \cdot 20}{400 \cdot 5}\right| = \left|\frac{-1 \cdot 4}{4 \cdot 1}\right| = 1.$$

Vyšla jednotkově elastická poptávka. Procentní změna ceny vyvolá procentní změnu poptávaného množství.

**Příklad 4**

Cena jablek se snížila z 25 Kč/kg na 20 Kč/kg. Poptávané množství vzrostlo z 300 kg na 400 kg. Určete cenovou elasticitu poptávky po jablkách.

**Řešení:** Dosadíme do vzorce všechny údaje, které známe.

$\Delta Q = 100,\, Q = 400,\, \Delta P = 5,\, P = 25$

$$\varepsilon = \left|\frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}}\right| = \left|\frac{\frac{100}{300}}{\frac{5}{25}}\right| = \left|\frac{100 \cdot 25}{300 \cdot 5}\right| = \left|\frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 1}\right| = \frac{5}{3} = 1,\overline{6}.$$

Vyšla elastická poptávka. Procentní změna ceny vyvolá více než procentní změnu poptávaného množství.

Na Příkladech 3 a 4 ukazuji, že tato metoda výpočtu se nejeví jako spolehlivá. Vidíme, že změna poptávaného množství i změna ceny je stejná, jen v Příkladu 3 dochází ke zdražení a v Příkladu 4 ke zlevnění. Ačkoliv se jedná stále o stejnou poptávkovou křivku, elasticita je různá. Při zvýšení ceny byla poptávka jednotkově elastická, při snížení ceny byla elastická. Proto vyzkoušíme oba příklady vypočítat s pomocí druhého zmíněného vzorce.

**Alternativní řešení Příkladu 3:**

$Q_1 = 400, Q_2 = 300, P_1 = 20, P_2 = 25$

$$\varepsilon = \left|\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2 + Q_1} : \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}\right| = \left|\frac{300 - 400}{300 + 400} : \frac{25 - 20}{25 + 20}\right| = \left|\frac{-100}{700} : \frac{5}{45}\right| = \left|\frac{-100}{700} \cdot \frac{45}{5}\right| =$$
$$= \left|\frac{-1 \cdot 9}{7 \cdot 1}\right| = \frac{9}{7} \doteq 1{,}29$$

**Alternativní řešení Příkladu 4:**

$Q_1 = 300, Q_2 = 400, P_1 = 25, P_2 = 20$

$$\varepsilon = \left|\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2 + Q_1} : \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}\right| = \left|\frac{400 - 300}{400 + 300} : \frac{20 - 25}{20 + 25}\right| = \left|\frac{100}{700} : \frac{-5}{45}\right| = \left|\frac{100}{700} \cdot \frac{-45}{5}\right| =$$
$$= \left|\frac{1 \cdot (-9)}{7 \cdot 1}\right| = \frac{9}{7} \doteq 1{,}29$$

Zde vidíme, že výsledek je stejný, cenová poptávka je elastická. Rozdíl v metodě, kterou uvádí Macáková (2003) oproti metodě, kterou uvádí Holman (2001) je následující – nesrovnáváme zde změnu množství s původním množstvím a změnu ceny s původní změnou ceny, ale změnu porovnáváme s aritmetickým průměrem množství a cen.

Elasticita je poměr změny poptávaného množství a změny ceny. Pokud bychom chtěli určit elasticitu v daném bodě, jeví se derivace jako vhodný nástroj. Abychom mohli elasticitu určit, musíme mít zadanou funkci poptávky a bod, ve kterém chceme elasticitu počítat. Vzorec pro výpočet elasticity, který uvádí Macáková (2003) můžeme upravit takto:

$$\varepsilon = \left|\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2 + Q_1} : \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}\right| = \left|\frac{\Delta Q}{Q_2 + Q_1} : \frac{\Delta P}{P_2 + P_1}\right| = \left|\frac{\Delta Q}{Q_2 + Q_1} \cdot \frac{P_2 + P_1}{\Delta P}\right| = \left|\frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_2 + P_1}{Q_2 + Q_1}\right|.$$

Tímto vzorcem bychom získali elasticitu pouze přibližně. Za hodnotu $P_2$ bychom dosadili cenu, ve které bychom elasticitu chtěli vypočítat a za hodnotu $P_1$ bychom dosadili číslo, které se hodnotě $P_2$ velmi blíží. Hodnoty $Q_1$ a $Q_2$ bychom získali dosazením bodu, ve kterém elasticitu počítáme, do předpisu funkce poptávky. Můžeme tedy výraz $P_2 + P_1$ nahradit pouze hodnotou $P$ a výraz $Q_2 + Q_1$ nahradit výrazem $Q(P)$, který značí hodnotu funkce $Q$ v bodě $P$. Výraz $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ můžeme nahradit derivací funkce $Q$ podle $P$. Vzorec pro elasticitu v bodě P můžeme tedy zapsat jako:

$$\varepsilon(P) = \left|\frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_2+P_1}{Q_2+Q_1}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \cdot \frac{P_2+P_1}{Q_2+Q_1}\right| = \left|Q' \cdot \frac{P}{Q(P)}\right|.$$

(Bauer, Lipovská, Mikulík, Mikulík, 2015)

**Příklad 5**

Funkce poptávky je ve tvaru $P = 25 - 15Q$. Vypočítejte elasticitu v bodě $P = 2$.

**Řešení**

Využijeme vzorec

$$\varepsilon(P) = \left|Q' \cdot \frac{P}{Q(P)}\right|.$$

Nejprve musíme upravit poptávkovou funkci, protože ve vzorci derivujeme $Q$ podle $P$. Dostáváme:

$$Q = \frac{25}{15} - \frac{P}{15} = \frac{5}{3} - \frac{P}{15}.$$

Dosadíme do vzorce:

$$\varepsilon(2) = \left|\left(\frac{5}{3} - \frac{P}{15}\right)' \cdot \frac{P}{Q(P)}\right| = \left|-\frac{1}{15} \cdot \frac{2}{\frac{5}{3} - \frac{2}{15}}\right| = \left|-\frac{1}{15} \cdot \frac{30}{23}\right| \doteq 0{,}087.$$

Poptávka je v bodě 2 neelastická.

## 1.8 Cenová elasticita nabídky

Cenová elasticita nabídky, stejně jako elasticita poptávky, je ukazatel, který se využívá k měření reakce nabízeného množství na změnu ceny zboží. Vyjadřujeme ji jako poměr procentní změny množství nabízeného statku ku procentní změně jeho ceny. Pro výpočet elasticity uvádí Macáková (2003) tento vzorec, který je analogický jako u elasticity poptávky:

$$\varepsilon = \left|\frac{Q_2 - Q_1}{(Q_2 + Q_1): 2} : \frac{P_2 - P_1}{(P_2 + P_1): 2}\right| = \left|\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2 + Q_1} : \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}\right|, \text{kde}$$

- $Q_1$ je původně nabízené množství,
- $Q_2$ je nabízené množství po změně,
- $P_1$ je původní cena,
- $P_2$ je cena po změně.

Stejná kritéria platí pro elasticitu nabídky, jako jsme zmínili výše u elasticity poptávky. Pouze shrneme:

- $\varepsilon > 1$, jedná se o elastickou nabídku,
- $\varepsilon < 1$, jedná se o neelastickou nabídku,
- $\varepsilon = 1$, jedná se o jednotkově elastickou nabídku,
- $\varepsilon = \infty$, dokonale elastická nabídka,
- $\varepsilon = 0$, dokonale neelastická nabídka.

Vyjmenujeme některé faktory, na kterých závisí cenová elasticita nabídky. Jedním z nejhlavnějších faktorů, je časové období, ve kterém se pohybujeme. Čím je časový horizont delší, tím je elasticita nabídky vyšší, protože firmy mají možnost zvětšovat objem své produkce. Také záleží na druhu produkce, charakteru technologií a výrobního procesu a úrovni konkurence. (Macáková, 2003)

## 1.9 Cíl spotřebitele, přebytek spotřebitele

Racionálně smýšlející spotřebitel si na trhu klade otázku, jak rozdělí svůj důchod, aby co nejlépe uspokojil své potřeby. Poměřuje tedy dvě veličiny. Náklady, které musí na daný statek vynaložit, a uspokojení, které mu daný statek přinese. U nákladů je to snadné, jsou určeny tržními cenami statků. Ovšem uspokojení se tak lehce měřit nedá. Ekonomové v tomto případě hovoří o užitku. Macáková (2003, s. 48) jej definuje jako „subjektivní pocit uspokojení plynoucí ze spotřeby jednotlivých statků."

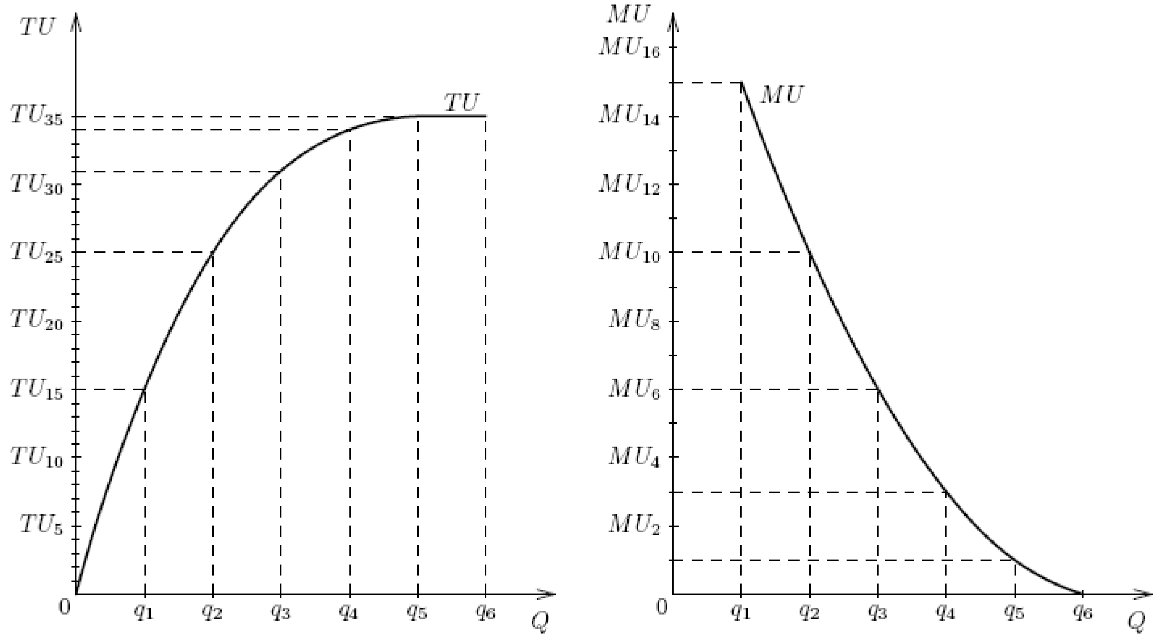
V ekonomické teorii se setkáváme s dvěma přístupy k užitku – užitek je buď měřitelný, či nikoliv. My se budeme zabývat pouze situací, kdy užitek měřitelný je.

Pokud užitek měříme, rozlišujeme užitek celkový (TU – total utility) a mezní (MU – marginal utility). Celkový užitek, jak již z názvu plyne, vyjadřuje celkové uspokojení ze spotřeby určitého statku. Závisí na objemu statku, který spotřebováváme, a na jeho kvalitě. Je dán celkovou částkou, kterou je spotřebitel za daný statek ochotný zaplatit. Mezní užitek vyjadřuje, jak se změní celkový užitek, pokud se množství spotřebovávaného statku zvýší o jednotku. Je dán peněžní částkou, kterou je spotřebitel ochotný zaplatit za další jednotku spotřebovávaného statku. (Macáková, 2003)

U mezního užitku zmíníme ještě pojem „zákon klesajícího mezního užitku". Jedná se o vlastnost mezního užitku, která vyjadřuje, že s růstem objemu spotřebovávaného statku se s každou další spotřebovanou jednotkou mezní užitek snižuje. Při neměnných podmínkách je tedy nejvyšší přírůstek z první spotřebované jednotky statku. Spotřebitel porovnává cenu statku s mezním užitkem, který mu se spotřebou tohoto statku plyne. Křivka poptávky je shodná s křivkou určující mezní užitek. Spotřebitel nakupuje daný statek maximálně do chvíle, kdy se mezní užitek rovná ceně statku. (Macáková, 2003)

Vztah mezi celkovým a mezním užitkem udává Obrázek 3.

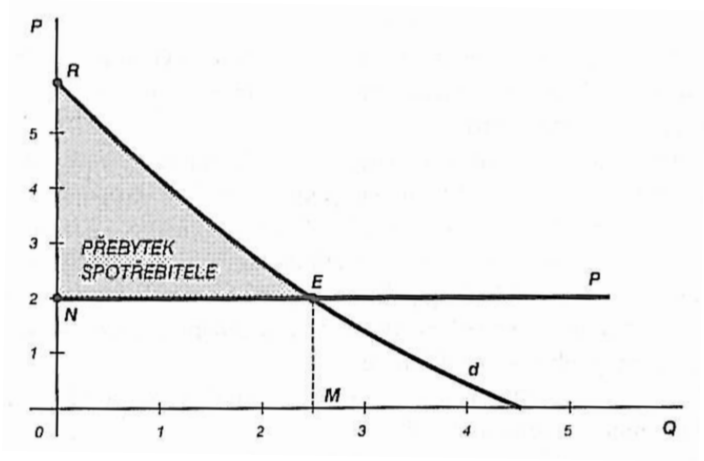
Obrázek 3 – celkový a mezní užitek




(Šrot, Kříž, 2006, dostupné z: http://cgi.math.muni.cz/kriz/prevod_mikro/obrazky/obr5_1.png)

S užitkem spotřebitele souvisí pojem přebytek spotřebitele. Jedná se o rozdíl mezi cenou, kterou spotřebitel skutečně na pořízení statku vynaloží, a cenou, kterou by byl maximálně ochotný vynaložit na nákup tohoto statku. Uvádí se v peněžních jednotkách.

Obrázek 4 – přebytek spotřebitele




(Macáková, 2003, s. 108)

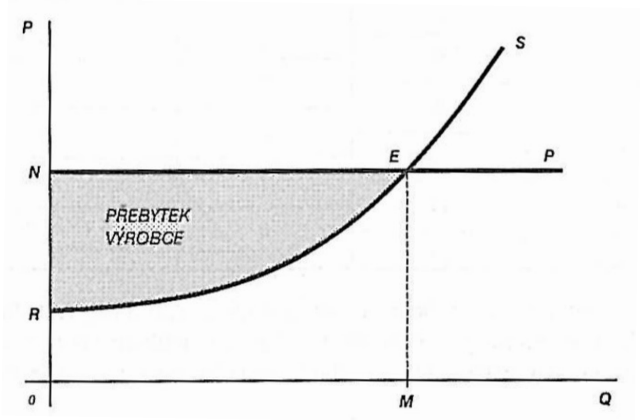
Na Obrázku 4 je patrné, že k určení přebytku spotřebitele musíme zjistit obsah plochy ohraničené přímkou, která určuje cenu statku (označena $P$) a poptávkovou funkcí (označena $d$). Je to plocha ohraničená body $NER$.

## 1.10 Cíl firmy, přebytek výrobce

Co se firmy týče, jejím cílem je maximalizace zisku. Firma je v rovnováze, pokud platí, že cena, za kterou je firma ochotna svůj produkt prodávat, je rovna funkci mezních nákladů, která je stejná jako nabídková funkce. (Macáková, 2003)

V souvislosti s náklady firmy zmiňujeme pojem přebytek výrobce. Jedná se o rozdíl mezi cenou, za kterou firma daný statek prodává, a mezními náklady na jeho výrobu. Mezní náklady jsou náklady na každou další jednotku statku, kterou firma vyrobí.

Obrázek 5 – přebytek výrobce




(Macáková, 2003, s. 108)

Na Obrázku 5 je patrné, že přebytek výrobce vypočítáme jako obsah plochy, která je ohraničená přímkou určující cenu (označena $P$) a nabídkovou funkcí (označena $s$). Stejně jako u přebytku spotřebitele se jedná o plochu ohraničenou body $NER$.

Zmínila jsem, kdy je v rovnováze poptávka a kdy nabídka. Samotný trh je v rovnováze právě tehdy, když je v rovnováze současně poptávka a nabídka, a to nastává v momentě, kdy se mezní užitek rovná mezním nákladům.

Poznámka: **Příklady 6-8** řešíme v obecné rovině, množství $Q$ tedy uvádíme pouze v jednotkách, přebytky spotřebitele i výrobce a cenu uvádíme v peněžních jednotkách. Nejedná se o bezrozměrné veličiny.

**Příklad 6**

Vypočítejte přebytek spotřebitele pokud

a) poptávková funkce je ve tvaru $P_D = 25 - 2Q$ a rovnovážná cena $P_E$ nastává při množství 4 jednotky,

b) poptávková funkce je ve tvaru $P_D = \frac{12}{\sqrt{3Q}}$ a rovnovážná cena $P_E = 6$ peněžních jednotek,

c) poptávková funkce je ve tvaru $P_D = 68 - \frac{3}{2}Q$ a rovnovážná cena $P_E = 30$ peněžních jednotek.

**Řešení**

a) Abychom mohli určit přebytek spotřebitele, je třeba vypočítat obsah plochy ohraničené přímkou, která vyjadřuje rovnovážnou cenu, a poptávkové křivky, viz Obrázek 4. Využijeme k tomu určitý integrál. Víme, že rovnovážná cena nastává při množství $Q = 4$ jednotky, tudíž budeme integrovat na intervalu $\langle 0,4 \rangle$. Nejdříve musíme určit rovnovážnou cenu $P_E$, kterou získáme dosazením množství $Q = 4$ jednotky do poptávkové funkce a vyřešíme rovnici

$$P_E = 25 - 2Q,$$
$$P_E = 25 - 8,$$
$$P_E = 17.$$

Rovnovážná cena je 17 peněžních jednotek. Obsah plochy vypočítáme jako určitý integrál na intervalu $\langle 0,4 \rangle$ z funkce $y = P_D - P_E$, protože nás zajímá plocha nad přímkou vyjadřující rovnovážnou cenu.

$$\int_0^4 (P_D - P_E)\,\mathrm{d}Q = \int_0^4 (25 - 2Q - 17)\,\mathrm{d}Q = \int_0^4 (8 - 2Q)\,\mathrm{d}Q = \left[8Q - 2 \cdot \frac{Q^2}{2}\right]_0^4 =$$

$$= \left[8Q - 2\frac{Q^2}{2}\right]_0^4 = [8Q - Q^2]_0^4 = 8 \cdot 4 - 4^2 - (8 \cdot 0 - 0^2) = 32 - 16 = 16.$$

Přebytek spotřebitele je 16 peněžních jednotek.

b) Budeme postupovat stejně jako v a), pouze místo rovnovážného množství $Q_E$ máme zadanou rovnovážnou cenu $P_E$. Takže nejprve vypočítáme rovnovážné množství $Q_E$. Dosadíme rovnovážnou cenu do rovnice

$$6 = \frac{12}{\sqrt{3Q_E}},$$

$$6 \cdot \sqrt{3Q_E} = 12,$$

$$36 \cdot 3Q_E = 144,$$

$$108 \cdot Q_E = 144,$$

$$Q_E = \frac{144}{108} = \frac{4}{3}.$$

Rovnovážné množství je přibližně $1,\overline{3}$ jednotek. Znovu budeme integrovat, tentokrát na intervalu $\langle 0, \frac{4}{3} \rangle$. Integrovat budeme funkci $y = P_D - P_E$, přitom víme, že funkce $P_E = 6$ peněžních jednotek a určíme obsah plochy mezi funkcemi $P_D,\ P_E$.

$$\int_0^{\frac{4}{3}} (P_D - P_E)\mathrm{d}Q = \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\frac{12}{\sqrt{3Q}} - 6\right)\mathrm{d}Q = \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{12}{\sqrt{3Q}}\mathrm{d}Q - \int_0^{\frac{4}{3}} 6\,\mathrm{d}Q =$$

$$= \frac{12}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\sqrt{Q}} - 6\int_0^{\frac{4}{3}} \mathrm{d}Q = \frac{12}{\sqrt{3}}\left[2\sqrt{Q}\right]_0^{\frac{4}{3}} - 6[Q]_0^{\frac{4}{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{\frac{4}{3}} - 2\sqrt{0}\right) - 6\left(\frac{4}{3} - 0\right) =$$

$$= 24 \cdot \frac{2}{3} - 8 = 16 - 8 = 8.$$

Přebytek spotřebitele je 8 peněžních jednotek.

c) Postupujeme analogicky jako u a) a b). Známe rovnovážnou cenu $P_E$ a potřebujeme vypočítat rovnovážně množství $Q_E$, abychom věděli, na jakém intervalu budeme integrovat. Rovnovážné množství vypočítáme dosazením rovnovážně ceny $P_E$ do předpisu funkce poptávky

$$30 = 68 - \frac{3}{2}Q,$$

$$\frac{3}{2}Q = 38,$$

$$Q = \frac{76}{3}.$$

Rovnovážné množství je přibližně $25,\overline{3}$ jednotek. Integrovat budeme na intervalu $\langle 0, \frac{76}{3} \rangle$. Funkce rovnovážné ceny je ve tvaru $P_E = 30$. Stejně jako v a) a b) počítáme integrál funkce $y = P_D - P_E$, abychom zjistili obsah plochy mezi funkcemi $P_D,\ P_E$.

Získáváme:

$$\int_0^{\frac{76}{3}} (P_D - P_E)\,\mathrm{d}Q = \int_0^{\frac{76}{3}} \left(68 - \frac{3}{2}Q\right) \mathrm{d}Q = \int_0^{\frac{76}{3}} 68\,\mathrm{d}Q - \int_0^{\frac{76}{3}} \frac{3}{2}\mathrm{Q}\,\mathrm{d}Q =$$

$$= 68\int_0^{\frac{76}{3}} \mathrm{d}Q - \frac{3}{2}\int_0^{\frac{76}{3}} \mathrm{Q}\,\mathrm{d}Q = 68[Q]_0^{\frac{76}{3}} - \frac{3}{2}\left[\frac{Q^2}{2}\right]_0^{\frac{76}{3}} =$$

$$= 68 \cdot \left(\frac{76}{3} - 0\right) - \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{\left(\frac{76}{3}\right)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{5\,168}{3} - \frac{5\,776}{12} = \frac{14\,896}{12} = \frac{3724}{3} \doteq 1\,241,\overline{3}.$$

Přebytek spotřebitele je $1\,241,\overline{3}$ peněžních jednotek.

**Příklad 7**

Vypočítejte přebytek výrobce pokud

a) nabídková funkce je ve tvaru $P_S = 10Q + 4$ a rovnovážná cena $P_E$ nastává při množství 20 jednotek,
b) nabídková funkce je ve tvaru $P_S = (2Q + 5)^2$ a rovnovážná cena $P_E = 50$ peněžních jednotek.

**Řešení**

a) Při výpočtu přebytku výrobce budeme postupovat podobně jako při výpočtu přebytku spotřebitele. Budeme integrovat na intervalu $\langle 0, Q_E \rangle$, kde $Q_E$ je rovnovážné množství. Rozdíl bude akorát ve funkci, kterou budeme integrovat. Na Obrázku 5 vidíme, že nás zajímá plocha ohraničená nabídkovou křivkou a rovnovážnou cenou, tudíž budeme integrovat funkci $y = P_E - P_S$. Máme zadané rovnovážné množství $Q_E$, musíme tedy nejprve vypočítat rovnovážnou cenu $P_E$.

   Vyřešíme rovnici:

$$P_E = 10 \cdot 20 + 4,$$
$$P_E = 204.$$

Rovnovážná cena je 204 peněžních jednotek.

Integrovat tedy budeme funkci $y = P_E - P_S$ na intervalu $\langle 0{,}20 \rangle$.

$$\int_0^{20} (P_E - P_S)\,\mathrm{d}Q = \int_0^{20} (204 - 10Q - 4)\,\mathrm{d}Q = \int_0^{20} (200 - 10Q)\,\mathrm{d}Q =$$

$$200 \int_0^{20} \mathrm{d}Q - 10 \int_0^{20} Q\,\mathrm{d}Q = 200 \cdot [Q]_0^{20} - 10 \cdot \left[\frac{Q^2}{2}\right]_0^{20} =$$

$$= 200 \cdot (20 - 0) - 10 \cdot \left(\frac{20^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = 4\,000 - 2\,000 = 2\,000.$$

Přebytek výrobce je 2 000 peněžních jednotek.

b) V tomto příkladu je situace jiná v tom, že nemáme zadané rovnovážné množství $Q_E$, ale rovnovážnou cenu $P_E$. Nejprve tedy musíme určit rovnovážné množství $Q_E$, abychom věděli, na jakém intervalu budeme integrovat. Vyřešíme rovnici:

$$50 = (2Q_E + 5)^2,$$

$$50 = 4Q_E^2 + 20Q_E + 25,$$

$$4Q_E^2 + 20Q_E - 25 = 0,$$

$$Q_{E_1,E_2} = \frac{-20 \pm \sqrt{800}}{8},$$

$$Q_{E_1,E_2} = \frac{-20 \pm 20\sqrt{2}}{8},$$

$$Q_{E_1} = \frac{-5 + 5\sqrt{2}}{2}, \qquad Q_{E_2} = \frac{-5 - 5\sqrt{2}}{2},$$

$$Q_{E_1} \doteq 1{,}04, \qquad Q_{E_2} \doteq -6{,}04.$$

Řešení kvadratické rovnice jsou dvě, nás zajímá ale pouze to kladné. Záporné rovnovážné množství nemá smysl. Rovnovážné množství je tedy $\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{2}$, což je přibližně 1,04 jednotek.

Budeme integrovat funkci $y = P_E - P_S$ na intervalu $\langle 0, \frac{-5+5\sqrt{2}}{2} \rangle$.

$$\int_0^{\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}} (P_E - P_S)\,\mathrm{d}Q = \int_0^{\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}} [50 - (2Q + 5)^2]\,\mathrm{d}Q =$$

$$= \int_0^{\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}} (50 - 4Q^2 - 20Q - 25)\,\mathrm{d}Q = \int_0^{\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}} (-4Q^2 - 20Q + 25)\,\mathrm{d}Q =$$

$$= -4\int_0^{\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}} Q^2\,\mathrm{d}Q - 20\int_0^{\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}} Q\,\mathrm{d}Q + 25\int_0^{\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}Q =$$

$$= 4\int_{\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}}^{0} Q^2\,\mathrm{d}Q + 20\int_{\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}}^{0} Q\,\mathrm{d}Q + 25\int_0^{\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}Q =$$

$$= 4\cdot\left[\frac{Q^3}{3}\right]_{\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}}^{0} + 20\cdot\left[\frac{Q^2}{2}\right]_{\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}}^{0} + 25\cdot[Q]_0^{\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= 4\cdot\left[\frac{0^3}{3} - \frac{\left(\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3}\right] + 20\cdot\left[\frac{0^2}{2} - \frac{\left(\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}\right] + 25\cdot\left(\frac{-5+5\sqrt{2}}{2} - 0\right) =$$

$$= 4\cdot\left[-\frac{\left(-5+5\sqrt{2}\right)^3}{3\cdot 2^3}\right] + 20\cdot\left[-\frac{\left(-5+5\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot 2^2}\right] + 25\cdot\left(\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$-4\cdot\frac{\left(250\sqrt{2} - 750 + 375\sqrt{2} - 125\right)}{24} - 20\cdot\left(\frac{50 - 50\sqrt{2} + 25}{8}\right) + 25\cdot\left(\frac{-5+5\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -\left(\frac{625\sqrt{2} - 875}{6}\right) - 5\cdot\left(\frac{75 - 50\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{125}{2} + \frac{125\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{-625\sqrt{2} + 875 - 1\,125 + 750\sqrt{2} - 375 + 375\sqrt{2}}{6} =$$

$$= \frac{-625 + 500\sqrt{2}}{6} \doteq 13{,}68$$

Přebytek výrobce je $\frac{-625+500\sqrt{2}}{6}$, což je přibližně 13,68 peněžních jednotek.

**Příklad 8**

Vypočítejte

a) celkový přebytek,

b) přebytek spotřebitele,

c) přebytek výrobce,

pokud je zadaná poptávková funkce ve tvaru $P_D = 150 - Q^2$ a nabídková funkce ve tvaru $P_S = (Q+3)^2$.

**Řešení**

a) Celkový přebytek můžeme počítat dvěma způsoby. Buď vypočítáme zvlášť přebytek spotřebitele a přebytek výrobce a tyto dva přebytky sečteme, nebo můžeme celkový přebytek vypočítat rovnou. V našem příkladu máme spočítat všechny tři přebytky, takže by to bylo šikovné spočítat je a sečíst je, ale pokud by nás jednotlivé přebytky nezajímali a chtěli bychom znát pouze ten celkový, je to zbytečně složité. Celkový přebytek, jak je patrné z Obrázku 4 a Obrázku 5, zabírá plochu, která je ohraničená mezi poptávkovou a nabídkovou křivkou. K jeho výpočtu potřebujeme funkci $y = P_D - P_S$, kterou budeme integrovat. Akorát oproti předešlým příkladům neznáme rovnovážné množství $Q_E$. Rovnovážné množství $Q_E$ nastává v bodě, kde se obě funkce protínají, takže rovnicí vypočítáme průsečík těchto dvou funkcí a zjistíme hodnotu $Q$.

$$P_S = P_D,$$
$$(Q+3)^2 = 150 - Q^2,$$
$$Q^2 + 6Q + 9 = 150 - Q^2,$$
$$2Q^2 + 6Q - 141 = 0,$$
$$Q_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{1164}}{4},$$
$$Q_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{291}}{4},$$
$$Q_1 = \frac{-3+\sqrt{291}}{2}, \qquad Q_2 = \frac{-3-\sqrt{291}}{2},$$
$$Q_1 \doteq 7{,}03, \qquad Q_2 \doteq -10{,}03.$$

Řešení kvadratické rovnice jsou dvě, ale v případě rovnovážného množství má smysl pouze kladné řešení. Tudíž rovnovážné množství nastává při $Q = \frac{-3+\sqrt{291}}{2}$, což je přibližně 7,03 jednotek. Teď už můžeme spočítat celkový přebytek, integrovat budeme funkci

$y = P_D - P_S$ na intervalu $\langle 0, \frac{-3+\sqrt{291}}{2} \rangle$.

$$\int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} (P_D - P_S)\,\mathrm{d}Q = \int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} (150 - Q^2 - (Q+3)^2)\,\mathrm{d}Q =$$

$$= \int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} (150 - Q^2 - Q^2 - 6Q - 9)\,\mathrm{d}Q =$$

$$= \int_{0}^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} (-2Q^2 - 6Q + 141)\,\mathrm{d}Q =$$

$$= -2\int_{0}^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} Q^2\,\mathrm{d}Q - 6\int_{0}^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} Q\,\mathrm{d}Q + 141\int_{0}^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} \mathrm{d}Q =$$

$$= 2\int_{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}}^{0} Q^2\,\mathrm{d}Q + 6\int_{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}}^{0} Q\,\mathrm{d}Q + 141\int_{0}^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} \mathrm{d}Q =$$

$$= 2\cdot\left[\frac{Q^3}{3}\right]_{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}}^{0} + 6\cdot\left[\frac{Q^2}{2}\right]_{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}}^{0} + 141\cdot[Q]_{0}^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} =$$

$$= 2\cdot\left[\frac{0^3}{3} - \frac{\left(\frac{-3+\sqrt{291}}{2}\right)^3}{3}\right] + 6\cdot\left[\frac{0^2}{3} - \frac{\left(\frac{-3+\sqrt{291}}{2}\right)^2}{2}\right] + 141\cdot\left(\frac{-3+\sqrt{291}}{2} - 0\right) =$$

$$= 2\cdot\left[-\frac{\left(\sqrt{291}-3\right)^3}{3\cdot 2^3}\right] + 6\cdot\left[-\frac{\left(\sqrt{291}-3\right)^2}{2\cdot 2^2}\right] + 141\cdot\frac{\sqrt{291}-3}{2} =$$

$$= -2\cdot\left(\frac{318\sqrt{291} - 2\,646}{24}\right) - 6\cdot\left(\frac{300 - 6\sqrt{291}}{8}\right) + \frac{141\sqrt{291} - 423}{2} =$$

$$= \frac{-318\sqrt{291} + 2\,646}{12} + \frac{18\sqrt{291} - 900}{4} + \frac{141\sqrt{291} - 423}{2} =$$

$$= \frac{-318\sqrt{291} + 2\,646 + 54\sqrt{291} - 2\,700 + 846\sqrt{291} - 2\,538}{12} =$$

$$= \frac{582\sqrt{291} - 2592}{12} = \frac{97\sqrt{291} - 432}{2} \doteq 611{,}35$$

Celkový přebytek je $\frac{97\sqrt{291}-432}{2}$, což je přibližně 611,35 peněžních jednotek.

b) K určení přebytku spotřebitele potřebujeme znát rovnovážné množství $Q_E$, které jsme vypočítali v části a) a činí $\frac{-3+\sqrt{291}}{2}$ jednotek. Ještě je třeba zjistit rovnovážnou cenu $P_E$ odpovídající tomuto množství, kterou určíme jako v předešlých příkladech dosazením rovnovážného množství do předpisu poptávkové funkce a vyřešíme rovnici:

$$P_E = 150 - Q^2,$$

$$P_E = 150 - \left(\frac{-3+\sqrt{291}}{2}\right)^2,$$

$$P_E = 150 - \left(\frac{291 - 6\sqrt{291} + 9}{4}\right),$$

$$P_E = \frac{300 + 6\sqrt{291}}{4},$$

$$P_E = \frac{150 + 3\sqrt{291}}{2} \doteq 100{,}59.$$

Rovnovážná cena je $\frac{150+3\sqrt{291}}{2}$, což je přibližně 100,59 peněžních jednotek.

Nyní můžeme přejít k výpočtu přebytku spotřebitele. Integrovat budeme na intervalu $\langle 0, \frac{-3+\sqrt{291}}{2} \rangle$. Jedná se o přebytek spotřebitele, takže integrujeme, jako v předešlých příkladech, funkci $y = P_D - P_E$.

$$\int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} (P_D - P_E)\,\mathrm{d}Q = \int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} \left(150 - Q^2 - \frac{150+3\sqrt{291}}{2}\right) \mathrm{d}Q =$$

$$= \int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} \left(-Q^2 + \frac{150-3\sqrt{291}}{2}\right) \mathrm{d}Q =$$

$$= -\int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} Q^2\,\mathrm{d}Q + \frac{150-3\sqrt{291}}{2} \int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} \mathrm{d}Q =$$

$$= -\left[\frac{Q^3}{3}\right]_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} + \frac{150-3\sqrt{291}}{2} \cdot [Q]_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} =$$

$$= -\left[\frac{\left(\frac{-3+\sqrt{291}}{2}\right)^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] + \frac{150-3\sqrt{291}}{2} \cdot \left(\frac{-3+\sqrt{291}}{2} - 0\right) =$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{291}-3\right)^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{159\sqrt{291} - 1\,323}{4} = \frac{-318\sqrt{291} + 2\,646 + 954\sqrt{291} - 7\,938}{24} =$$

$$= \frac{636\sqrt{291} - 5\,292}{24} = \frac{53\sqrt{291} - 441}{2} \doteq 231{,}56.$$

Přebytek spotřebitele je $\frac{53\sqrt{291}-441}{2}$, což je přibližně 231,56 peněžních jednotek.

c) Přebytek výrobce vypočítáme analogicky jako v předchozích případech. Integrovat budeme na intervalu $\langle 0, \frac{-3+\sqrt{291}}{2}\rangle$ funkci $y = P_E - P_S$, přičemž rovnovážná cena $P_E$ je stejná jako v b), tedy $P_E = \frac{150+3\sqrt{291}}{2}$ peněžních jednotek.

$$\int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} (P_E - P_S)\,\mathrm{d}Q = \int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} \left[\frac{150+3\sqrt{291}}{2} - (Q+3)^2\right] \mathrm{d}Q =$$

$$= \int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} \left(\frac{150+3\sqrt{291}}{2} - Q^2 - 6Q - 9\right) \mathrm{d}Q =$$

$$= \int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} \left(-Q^2 - 6Q + \frac{132+3\sqrt{291}}{2}\right) \mathrm{d}Q =$$

$$= -\int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} Q^2\,\mathrm{d}Q - 6\int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} Q\,\mathrm{d}Q + \frac{132+3\sqrt{291}}{2}\int_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} \mathrm{d}Q =$$

$$= -\left[\frac{Q^3}{3}\right]_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} - 6\cdot\left[\frac{Q^2}{2}\right]_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} + \frac{132+3\sqrt{291}}{2}\cdot[Q]_0^{\frac{-3+\sqrt{291}}{2}} =$$

$$= -\left[\frac{\left(\frac{-3+\sqrt{291}}{2}\right)^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] - 6\cdot\left[\frac{\left(\frac{-3+\sqrt{291}}{2}\right)^2}{2} - \frac{0^2}{3}\right] +$$

$$+ \frac{132+3\sqrt{291}}{2}\cdot\left(\frac{-3+\sqrt{291}}{2} - 0\right) =$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{291}-3\right)^3}{3\cdot 2^3} - 6\cdot\frac{\left(\sqrt{291}-3\right)^2}{2\cdot 2^2} + \frac{477+123\sqrt{291}}{4} =$$

$$= \frac{-318\sqrt{291}+2\,646}{24} - \frac{1800-36\sqrt{291}}{8} + \frac{477+123\sqrt{291}}{4} =$$

$$= \frac{-318\sqrt{291}+2\,646-5\,400+108\sqrt{291}+2\,862+738\sqrt{291}}{24} =$$

$$= \frac{528\sqrt{291}+108}{24} = \frac{44\sqrt{291}+9}{2} = 22\sqrt{291} + \frac{9}{2} \doteq 379{,}79.$$

Přebytek výrobce je $22\sqrt{291}+\frac{9}{2}$, což je přibližně 379,79 peněžních jednotek.

Pokud jsme správně počítali v b) a c) a sečteme přebytek výrobce a přebytek spotřebitele, měl by nám vyjít celkový přebytek spočítaný v řešení a). Po dosazení získáváme

$$\frac{53\sqrt{291}-441}{2}+\frac{44\sqrt{291}+9}{2}=\frac{97\sqrt{291}-432}{2}\doteq 611{,}35,$$

což nám skutečně v řešení a) vyšlo.

## 1.11 Chování firmy

Hlavní činností firmy je výroba, což lze jinými slovy definovat jako přeměnu vstupů ve výstupy. Při rozhodování firmy hraje zásadní roli porovnávání použitých vstupů s výsledkem výroby. Abychom toto rozhodování mohli zkoumat, je třeba mít jistý model výroby, který zachycuje vztahy mezi vstupy a výstupy. Tento vztah popisuje produkční funkce. Produkční funkce popisuje vztah mezi množstvím vynaložených vstupů ve výrobě a maximálním množstvím výstupů, které byly v daném období vyrobeny. Vstupy rozumíme práci, půdu a kapitál, jinými slovy výrobní faktory. Pro zjednodušení situace budeme k realizaci potřebovat pouze dva vstupy a těmi jsou práce $(L)$ a kapitál $(K)$. Produkční funkci můžeme psát ve tvaru:

$$Q=f(K,L), \text{kde}$$

- $Q$ je výstup za jednotku času,
- $K$ je vstup kapitálu za jednotku času,
- $L$ je vstup práce za jednotku času. (Hořejší, 2010)

Takto vyjádřená produkční funkce udává, že výstup $(Q)$ můžeme vyrobit různými kombinacemi daných vstupů $(K,L)$. Funkce nepředpokládá výrobní procesy, které by byly neefektivní. Naopak k výrobě výstupu je vždy použita nejefektivnější kombinace vstupů. V případě této nejefektivnější kombinace její výstup závisí na tom, kolik vstupů použije a jak efektivně je užije. (Hořejší, 2010)

Cílem firmy je maximalizovat svůj zisk, ovšem na chování firmy má vliv časový horizont, ve kterém se pohybujeme. V tomto případě rozlišujeme krátké a dlouhé období. My se budeme věnovat pouze období krátkému. (Macáková, 2003)

### 1.11.1 Charakteristika krátkého období

Krátké období (SR – short run) je období, kdy alespoň jeden výrobní faktor, který firma používá je fixní. Pokud firma používá pouze dva výrobní faktory, za fixní vstup se považuje zpravidla kapitál. Kapitálem rozumíme peněžní prostředky vložené do podnikání v peněžní nebo hmotné formě (například budovy a stroje). Firma může být vlastníkem nebo nájemcem kapitálu. Za fixní výrobní faktor je v krátkém období považován kapitál, protože firma nemůže měnit jeho objem za účelem změny výstupu. To naopak neplatí o práci. Objem práce lze v případě potřeby snadno zredukovat nebo naopak zvětšit. Proto je práce považovaná za variabilní vstup. V tomto případě produkční funkce charakterizuje vztah mezi výstupem a objemem vynaložené práce. (Hořejší, 2010)

### 1.11.2 Celkový, mezní a průměrný produkt

Celkovým produktem (TP – total product) rozumíme celkový objem produkce vyrobený určitým objemem výrobních faktorů. S celkovým produktem souvisí průměrný produkt (AP – average product) a mezní produkt (MP – marginal product). Průměrným produktem rozumíme objem vyrobené produkce, který připadá na jednotku vstupu. Určíme ho, pokud vydělíme celkový výstup množstvím použitých výrobních faktorů ve výrobě. Můžeme zapsat:

$$AP = \frac{TP}{F}, \text{kde}$$

- $AP$ je průměrný produkt,
- $TP$ je celkový produkt,
- $F$ je množství výrobního faktoru. (Macáková, 2003)

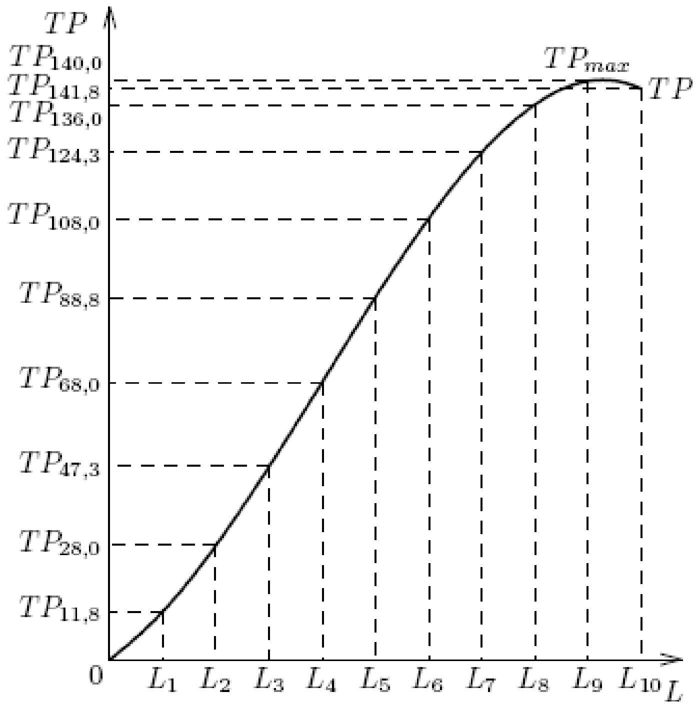
Mezní produkt udává změnu celkového produktu, která je vyvolána změnou množství vstupu o jednotku. Vzorec je ve tvaru:

$$MP = \frac{\Delta TP}{\Delta F}, \text{kde}$$

- $MP$ je mezní produkt,
- $\Delta TP$ změna celkového produktu,
- $\Delta F$ změna množství výrobního faktoru. (Macáková, 2003)

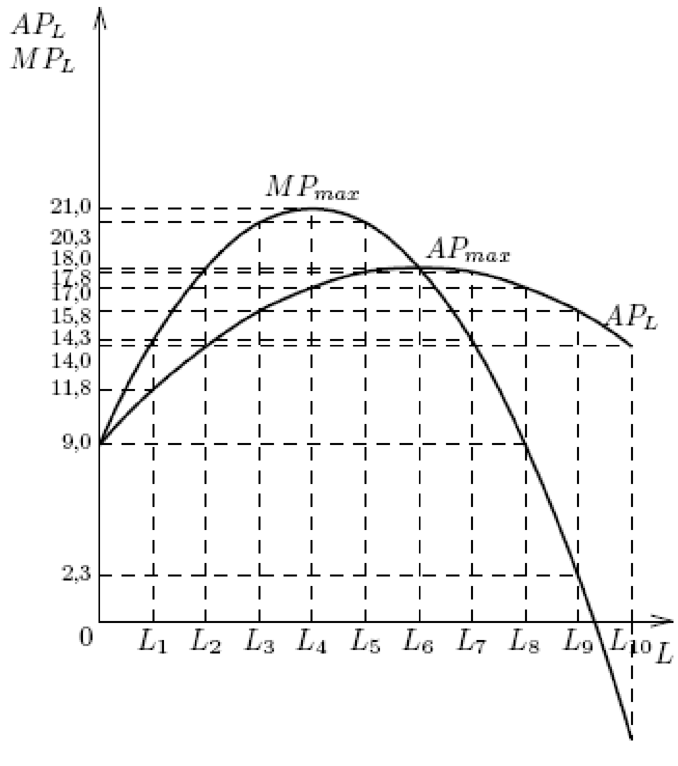
Výše zmíněné veličiny jsou zobrazeny na Obrázku 6 a Obrázku 7.

Obrázek 6 – celkový produkt




(Šrot, Kříž, 2006, dostupné z: http://cgi.math.muni.cz/kriz/prevod_mikro/obrazky/obr6_2.png)

Obrázek 7 – mezní a průměrný produkt

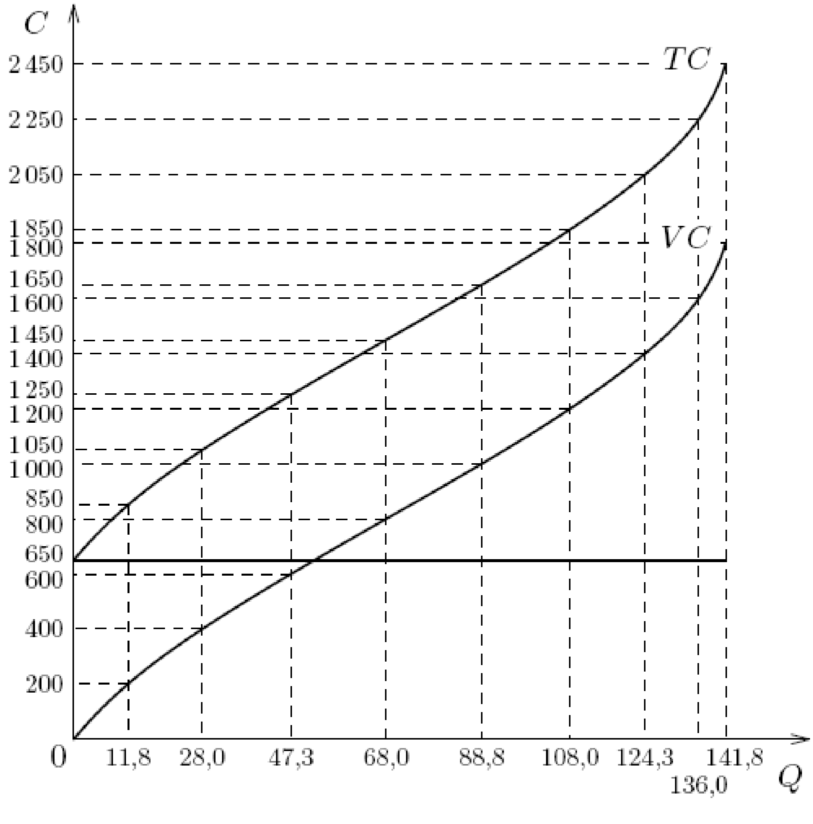



(Šrot, Kříž, 2006, dostupné z: http://cgi.math.muni.cz/kriz/prevod_mikro/obrazky/obr6_2.png)

### 1.11.3 Celkové, mezní a průměrné náklady

Úroveň nákladů potřebných k vyrobení určitého objemu produkce závisí na množství vstupu potřebného k výrobě a cenou jeho jednotky. Přitom musíme ještě počítat s náklady na ostatní výrobní faktory, které jsou konstantní. Tyto náklady nazýváme celkové náklady (TC – total costs). Celkové náklady tvoří dvě složky – náklady variabilní a fixní. Variabilní náklady (VC – variable costs) se mění s množstvím vyrobené produkce. Naopak fixní náklady (FC – fixed costs) se množstvím vyrobené produkce nemění, zůstávají stále stejné. Firma je musí uhradit i v případě, že objem výroby je nulový. (Macáková, 2003)

Obrázek 8 – celkové náklady a jejich složky




(Šrot, Kříž, 2006, dostupné z: http://cgi.math.muni.cz/kriz/prevod_mikro/obrazky/obr6_4.png)

Kromě celkových nákladů rozlišujeme náklady průměrné a mezní. Průměrné náklady (AC – average costs) jsou náklady potřebné na jednotku produkce, vypočítáme je tedy podle vzorce:

$$AC = \frac{TC}{Q}, \text{kde}$$

- $AC$ jsou průměrné náklady,
- $TC$ je celkový produkt,
- $Q$ je vyrobené množství.

Průměrné náklady dále dělíme na průměrné fixní náklady (AFC – average fixed costs) a průměrné variabilní náklady (AVC – average variable costs) a platí:

$$AC = AFC + AVC.$$

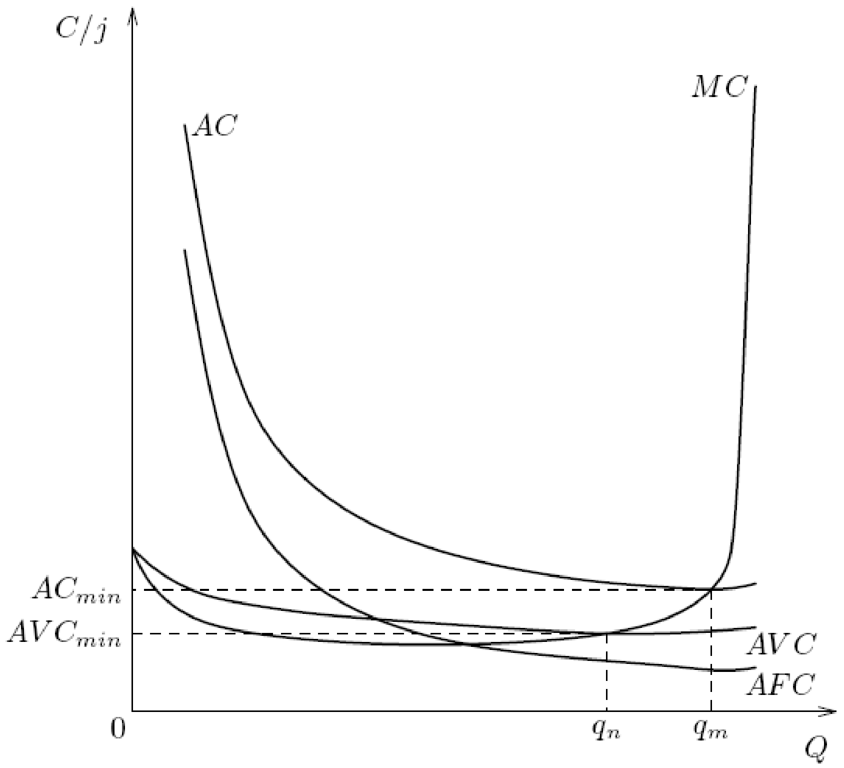
Mezní náklady (MC – marginal costs), jsou důležité pro rozhodování firmy. Jedná se totiž o náklady potřebné k vyrobení další jednotky objemu.

Platí:

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}, \text{kde}$$

- $MC$ jsou mezní náklady,
- $\Delta TC$ je změna celkových nákladů,
- $\Delta Q$ je změna množství vyrobené produkce.

Obrázek 9 – průměrné a mezní náklady




(Šrot, Kříž, 2006, dostupné z: http://cgi.math.muni.cz/kriz/prevod_mikro/obrazky/obr6_6.png)

Poznámka: **Příklady 9-13** řešíme v obecné rovině, množství výstupu $Q$ tedy uvádíme pouze v jednotkách a cenu uvádíme v peněžních jednotkách. Nejedná se o bezrozměrné veličiny.

### Příklad 9

Fixní náklady potřebné na zhotovení určitého výrobku činí 200 peněžních jednotek, variabilní náklady 120 peněžních jednotek na jednotku vyrobeného množství. Určete:

a) funkci celkových nákladů,
b) funkci průměrných nákladů,
c) hodnotu průměrných nákladů za předpokladu, že $Q \to \infty$[5]

**Řešení:**

a) Celkové náklady jsou tvořeny náklady fixními a variabilními, tudíž funkce celkových nákladů $TC$ bude ve tvaru

$$TC = FC + Q \cdot VC.$$

Po dosazení fixních a variabilních nákladů získáváme funkci celkových nákladů ve tvaru

$$TC = 200 + 120Q.$$

b) Průměrné náklady vypočítáme podle vzorce:

$$AC = \frac{TC}{Q}.$$

Dosadíme funkci celkových nákladů, kterou jsme určili v a) a získáváme:

$$AC = \frac{200 + 120Q}{Q} = \frac{200}{Q} + 120.$$

Funkce průměrných nákladů je tedy ve tvaru $AC = \frac{200}{Q} + 120$.

c) Hodnotu průměrných nákladů za předpokladu že množství by se blížilo nekonečnu určíme s pomocí limity.

Určíme

$$\lim_{Q \to \infty} \frac{200}{Q} + 120 = 0 + 120 = 120.$$

[5] Tímto výrazem je myšleno, že hodnota $Q$ není přímo zadaná, ale blíží se k nekonečnu.

Hodnota průměrných nákladů pokud $Q \to \infty$ je 120.

**Příklad 10**

Fixní náklady potřebné na zhotovení určitého výrobku činí 150 peněžních jednotek, variabilní náklady připadající na jednotku vyrobeného množství jsou dány funkcí $VC = 50 + 80Q$. Určete:

a) funkci celkových nákladů,
b) funkci průměrných nákladů,
c) hodnoty celkových nákladů a průměrných nákladů pro $Q = 200$ jednotek.

**Řešení**

a) Stejně jako v Příkladu 9, celkové náklady jsou tvořeny náklady fixními a variabilními, tudíž funkce celkových nákladů $TC$ bude ve tvaru

$$TC = FC + Q \cdot VC.$$

Dosadíme hodnoty fixních nákladů a funkci průměrných nákladů a získáváme:

$$TC = 150 + Q \cdot (50 + 80Q),$$

Po roznásobení závorky a uspořádání členů získáváme funkci celkových nákladů ve tvaru

$$TC = 80Q^2 + 50Q + 150.$$

b) Průměrné náklady, stejně jako v předchozím příkladě, vypočítáme podle vzorce

$$AC = \frac{TC}{Q},$$

do kterého dosadíme funkci celkových nákladů, kterou jsme vypočítali v a) a získáváme:

$$AC = \frac{80Q^2 + 50Q + 150}{Q} = 80Q + 50 + \frac{150}{Q}.$$

Funkce průměrných nákladů je tedy ve tvaru $AC = 80Q + 50 + \frac{150}{Q}$.

c) Hodnotu celkových nákladů pro $Q = 200$ jednotek, zjistíme dosazením pouze do funkce celkových nákladů, počítáme hodnotu funkce v bodě 200:

$$TC = 80Q^2 + 50Q + 150 = 80 \cdot 200^2 + 50 \cdot 200 + 150 = 3\,210\,150.$$

Hodnota celkových nákladů pro množství 200 jednotek je 3 210 150 peněžních jednotek.

Hodnotu průměrných nákladů pro $Q = 200$ jednotek zjistíme stejně jako u celkových, dosadíme hodnotu 200 do předpisu funkce a získáváme:

$$AC = 80Q + 50 + \frac{150}{Q} = 80 \cdot 200 + 50 + \frac{150}{100} = 16\,000 + 50 + 1{,}5 = 16\,051{,}5.$$

Hodnota průměrných nákladů pro množství 200 jednotek je 16 051,5 peněžních jednotek.

**Příklad 11**

Nákladová funkce firmy je ve tvaru $TC = 3Q^3 - 27Q^2 + 100Q$. Určete:

a) funkci průměrných nákladů,
b) funkci mezních nákladů,
c) souřadnice bodu, ve kterém se mění mezní sklon funkce $TC$,
d) souřadnice bodu, ve kterých se funkce průměrných a mezních veličin protínají.

**Řešení**

a) Funkci průměrných nákladů získáme pomocí vztahu, který jsme už použili v Příkladech 9 a 10

$$AC = \frac{TC}{Q},$$

$$AC = \frac{3Q^3 - 27Q^2 + 100Q}{Q} = 3Q^2 - 27Q + 100.$$

Funkce průměrných nákladů je dána předpisem $AC = 3Q^2 - 27Q + 100$.

b) Mezní náklady jsou definovány takto:

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}.$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o poměr změny celkových nákladů a změny množství vstupu, matematický aparát, který využijeme, je derivace. Výraz $\frac{\Delta TC}{\Delta Q}$, vyjadřuje derivaci $TC$ podle $Q$ a můžeme zapsat $TC'$.

$$MC = TC',$$
$$MC = (3Q^3 - 27Q^2 + 100Q)',$$
$$MC = 9Q^2 - 54Q + 100.$$

c) Abychom mohli určit bod, ve kterém se mění mezní sklon funkce $TC$, musíme určit druhou derivaci funkce $TC$ a položit ji rovnu nule. Hledáme totiž inflexní bod této funkce. Vzhledem k tomu, že první derivaci jsme už našli, stačí určit derivaci funkce mezních nákladů.

$$TC' = 9Q^2 - 54Q + 100,$$
$$TC'' = 18Q - 54.$$

Druhou derivaci funkce $TC$ položíme rovnu nule a vyřešíme lineární rovnici:

$$18Q - 54 = 0,$$
$$18Q = 54,$$
$$Q = \frac{54}{18},$$
$$Q = 3.$$

Získali jsme $Q = 3$. Výpočet můžeme ověřit pomocí tabulky.

| $(-\infty, 3)$ | 3 | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|
| $f''(2) = -18 < 0$<br>konkávní | Inflexní bod | $f''(4) = 18 > 0$<br>konvexní |

Vypočítali jsme množství, ve kterém se mění sklon funkce, chybí nám ale ještě výše nákladů v tomto bodě. Množství $Q = 3$ jednotky dosadíme do funkce $TC$ a získáme

$$TC = 3 \cdot 3^3 - 27 \cdot 3^2 + 100 \cdot 3 = 81 - 243 + 300 = 138.$$

Souřadnice bodu, ve kterém funkce mění mezní sklon jsou $I[3; 138]$.

d) Souřadnice bodu, kde se funkce mezních nákladů a průměrných nákladů protínají určíme vyřešením rovnice, kde na jedné straně bude funkce mezních nákladů $MC$, na straně druhé funkce průměrných nákladů $AC$. Řešením rovnice získáme první souřadnici hledaného bodu. K určení druhé souřadnice dosadíme vypočítanou hodnotu buď do funkce mezních nákladů $MC$ nebo do funkce průměrných nákladů $AC$.

$$9Q^2 - 54Q + 100 = 3Q^2 - 27Q + 100,$$
$$6Q^2 - 27Q = 0,$$
$$2Q^2 - 9Q = 0,$$
$$Q(2Q - 9) = 0,$$
$$Q_1 = 0, \qquad Q_2 = \frac{9}{2}.$$

Množství $Q_1 = 0$ jednotek nemá smysl uvažovat. Dosadíme hodnotu $Q_2 = \frac{9}{2}$ jednotek do předpisu funkce průměrných nákladů $AC$ a získáme druhou souřadnici daného bodu.

$$3Q^2 - 27Q + 100 = 3 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 27 \cdot \frac{9}{2} + 100 = 3 \cdot \frac{81}{4} - 27 \cdot \frac{9}{2} + 100 =$$
$$= \frac{243}{4} - \frac{243}{2} + 100 = \frac{-243 + 400}{4} = \frac{157}{4} = 39{,}25.$$

Hledaný průsečík je bod $P_1 = \left[\frac{9}{2}; 39{,}25\right]$.

**Příklad 12**

Funkce celkových nákladů firmy je ve tvaru $TC = 80 + 3 \cdot (Q + 3)^2$. Určete optimální množství výstupu $Q$, při kterém podnik minimalizuje své průměrné náklady.

**Řešení**

Hledáme minimum funkce průměrných nákladů $AC$, a to můžeme najít dvěma způsoby.

a) Z předešlého textu víme, že funkce mezních nákladů protíná funkci průměrných nákladů právě v jejím minimu, takže stačí vypočítat průsečík těchto dvou funkcí a dostaneme řešení.
b) Vzhledem k tomu, že hledáme extrém funkce průměrných nákladů, můžeme ho určit pomocí derivace.

Ukážeme oba způsoby.

a) Nejprve tedy musíme určit funkci průměrných nákladů $AC$ a mezních nákladů $MC$. Funkci průměrných nákladů nalezneme dle vzorce $AC = \frac{TC}{Q}$.

$$AC = \frac{80 + 3 \cdot (Q + 3)^2}{Q} = \frac{80 + 3 \cdot (Q^2 + 6Q + 9)}{Q} = \frac{80 + 3Q^2 + 18Q + 27}{Q},$$

$$AC = 3Q + 18 + \frac{107}{Q}.$$

Funkci mezních nákladů určíme derivací funkce $TC$.

$$MC = (3Q^2 + 18Q + 107)',$$

$$MC = 6Q + 18.$$

Nyní dáme do rovnosti funkce průměrných nákladů $AC$ a mezních nákladů $MC$ a určíme hodnotu $Q$.

$$6Q + 18 = 3Q + 18 + \frac{107}{Q},$$

$$3Q = \frac{107}{Q},$$

$$3Q^2 = 107,$$

$$Q^2 = \frac{107}{3},$$

$$Q = \pm\sqrt{\frac{107}{3}}.$$

Optimální množství nastává, pokud je $Q = \sqrt{\frac{107}{3}}$ jednotek, což je přibližně 5,97 jednotek. Záporná hodnota odmocniny nemá smysl, protože hovoříme o množství.

b) Určíme minimum funkce průměrných nákladů a to tak, že ji zderivujeme a určíme její stacionární bod.

$$AC = 3Q + 18 + \frac{107}{Q},$$

$$AC' = 3 - \frac{107}{Q^2},$$

$$3 - \frac{107}{Q^2} = 0,$$

$$3 = \frac{107}{Q^2},$$

$$3Q^2 = 107,$$

$$Q^2 = \frac{107}{3},$$

$$Q = \pm\sqrt{\frac{107}{3}}.$$

Zápornou hodnotu odmocniny opět neuvažujeme a vidíme, že nám vyšel stejný výsledek jako v prvním případě a firma minimalizuje své průměrné náklady při hodnotě $Q = \sqrt{\frac{107}{3}}$ jednotek, což je přibližně 5,97 jednotek.

Zda má funkce v tomto bodě skutečně minimum ověříme pomocí druhé derivace. Pokud bude hodnota druhé derivace v bodě $Q$ větší než 0, má funkce v daném bodě minimum. Určíme tedy druhou derivaci funkce průměrných nákladů.

$$AC' = 3 - \frac{107}{Q^2},$$

$$AC'' = -2 \cdot \left(-\frac{107}{Q^3}\right),$$

$$AC'' = \frac{214}{Q^3},$$

$$AC''\left(\sqrt{\frac{107}{3}}\right) = \frac{214}{\left(\sqrt{\frac{107}{3}}\right)^3} = \frac{214 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{107}\right)^3} > 0.$$

Ano, výpočet prokázal, že funkce má v bodě $Q = \sqrt{\frac{107}{3}}$ minimum.

### 1.11.4 Celkové, mezní a průměrné příjmy

Příjmy stejně jako produkt a náklady dělíme na celkové, mezní a průměrné. Celkovým příjmem (TR – total revenue) rozumíme celkovou částku, kterou firmy obdrží prodejem svých výrobků. Z logického hlediska plyne, že celkový příjem firmy se určí jako součin objemu prodané produkce a ceny za jednotku produkce. Vzorcem můžeme zapsat následovně:

$$TR = P \cdot Q, \text{kde}$$

- $TR$ je celkový příjem,
- $P$ je cena za jednotku produkce,
- $Q$ je prodané množství produkce. (Macáková, 2003)

Cena a množství vyrobené produkce spolu souvisí a mohou nastat dvě situace. V případě dokonalé konkurence nastává situace, kdy je cena pouze konstantou a není závislá na firmě.

Firma tedy může prodat veškerou vyrobenou produkci, aniž by brala v potaz výši ceny, za kterou ji prodává. Zároveň rozhoduje pouze o objemu výroby, protože cenu nemůže nijak ovlivnit. Druhý případ je takový, že cena je závislá na objemu produkce firmy. Toto nastává pohybujeme-li se na nedokonale konkurenčním trhu a s růstem objemu produkce klesá cena, za kterou ji firma prodává. Firma tím, že rozhoduje o objemu výroby, rozhoduje i o ceně. (Macáková, 2003)

Průměrný příjem (AR – average revenue) je příjem, který firma získala, vztažený na jednotku produkce. Platí tedy

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{P \cdot Q}{Q} = P, \text{kde}$$

- $AR$ je průměrný příjem,
- $TR$ je celkový příjem,
- $P$ je cena za jednotku produkce,
- $Q$ je prodané množství produkce.

Po úpravě vzorce vidíme, že průměrný příjem je cena za jednotku produkce, což dává logický smysl.

Zbývá nám dodefinovat mezní příjem (MR – marginal revenue), který popisuje změnu celkového příjmu, která je vyvolaná změnou vyrobeného množství o jednotku. Platí tedy:

$$MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q}, \text{kde}$$

- $MR$ je mezní příjem,
- $\Delta TR$ je změna celkových příjmů,
- $\Delta Q$ je změna poptávaného množství. (Macáková, 2003).

Na konec zmíním ještě dva důležité okamžiky v průběhu fungování firmy. Bod ukončení výroby neboli bod uzavření firmy nastává v okamžiku, kdy se cena rovná průměrným variabilním nákladům. Dojdeme k tomu tak, že pokud jsou celkové náklady firmy vyšší než celkové příjmy firmy, firma vykazuje ztrátu. A je schopna tuto ztrátu nést až do bodu, kdy se rovnají celkové příjmy variabilním nákladům (fixní náklady platí v každé situaci). Můžeme zapsat takto:

$$TR = VC,$$

$$\frac{TR}{Q} = \frac{VC}{Q},$$

$$P = AVC.$$

Druhý okamžikem firmy je bod zvratu. Jedná se o takové množství produkce $Q$, ve kterém firma nedosahuje ani zisku ani ztráty. Jinak řečeno, celkové příjmy se rovnají celkovým nákladům. Můžeme ho také definovat jako minimum průměrných nákladů. Můžeme zapsat:

$$TR = TC.$$

**Příklad 13**

Funkce celkových příjmů firmy je ve tvaru $TR = -\frac{1}{2}Q^2 + 10Q + 5$. Funkce celkových nákladů firmy je ve tvaru $TC = \frac{5}{2}Q^2 - 8Q + 10$. Určete:

a) funkci průměrného a mezního příjmu,
b) funkci variabilních průměrných nákladů a funkci fixních průměrných nákladů,
c) rozsah výroby, kdy dochází k bodu zvratu,
d) rozsah výroby, kdy dochází k ukončení výroby.

**Řešení**

a) Funkci průměrného příjmu získáme dosazením do vzorce $AR = \frac{TR}{Q}$, získáváme:

$$AR = \frac{-\frac{1}{2}Q^2 + 10Q + 5}{Q} = -\frac{1}{2}Q + 10 + \frac{5}{Q}.$$

Funkce průměrného příjmu je ve tvaru $AR = -\frac{1}{2}Q + 10 + \frac{5}{Q}$.

Vzhledem k tomu, že mezní příjem je definován jako změna veličin, kterými je určený, k určení této funkce využijeme stejně jako u funkce mezních nákladů derivace.

$$MR = \left(-\frac{1}{2}Q^2 + 10Q + 5\right)',$$

$$MR = -Q + 10.$$

Funkce mezních nákladů je ve tvaru $MR = -Q + 10$.

b) Funkce variabilních a fixních nákladů získáme z předpisu funkce celkových nákladů. Víme, že variabilní náklady závisí na objemu výroby, fixní nikoliv. Z předpisu funkce celkových nákladů $TC = \frac{5}{2}Q^2 - 8Q + 10$ je patrné, že funkce variabilních nákladů je ve tvaru

$$VC = \frac{5}{2}Q^2 - 8Q,$$

a funkce fixních nákladů je ve tvaru

$$FC = 10.$$

Funkce průměrných variabilních a fixních nákladů získáme jednoduchou úpravou a to tím, že funkci vydělíme množstvím $Q$, abychom dostali náklady na jednotku produkce. V případě variabilních nákladů dostáváme funkci

$$AVC = \frac{\frac{5}{2}Q^2 - 8Q}{Q} = \frac{5}{2}Q - 8.$$

Stejným způsobem získáme funkci průměrných fixních nákladů

$$AFC = \frac{10}{Q}.$$

c) Z předešlého textu víme, že bod zvratu nastává v situaci, kdy nevzniká zisk ani ztráta, tudíž celkové příjmy $TR$ se rovnají celkovým nákladům $TC$. Dáme tedy do rovnosti tyto dva vztahy a vypočítáme množství $Q$, ve kterém si jsou tyto dvě funkce rovné.

$$TR = TC,$$

$$-\frac{1}{2}Q^2 + 10Q + 5 = \frac{5}{2}Q^2 - 8Q + 10,$$

$$3Q^2 - 18Q + 5 = 0,$$

$$Q_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{264}}{6},$$

$$Q_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{11}{6}}, \qquad Q_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{11}{6}},$$

$$Q_1 \doteq 2{,}85\,, \qquad Q_2 \doteq 0{,}15.$$

Bod zvratu nastává při množství produkce $Q_1 = 0{,}15$ jednotek a $Q_2 = 2{,}85$ jednotek.

d) Z předešlého textu víme, že firma ukončuje výrobu, pokud se celkové příjmy rovnají alespoň variabilním nákladům.

$$TR = VC,$$

$$-\frac{1}{2}Q^2 + 10Q + 5 = \frac{5}{2}Q^2 - 8Q,$$

$$3Q^2 - 18Q - 5 = 0,$$

$$Q_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{384}}{6},$$

$$Q_{1,2} = \frac{18 \pm 8\sqrt{6}}{6},$$

$$Q_1 = 3 + \frac{4\sqrt{6}}{3}, \qquad Q_2 = 3 - \frac{4\sqrt{6}}{3},$$

$$Q_1 \doteq 6{,}27, \qquad Q_2 \doteq -0{,}27.$$

Záporná hodnota nemá v tomto případě smysl, tudíž firma ukončuje svou výrobu, pokud množství produkce je $Q = 6{,}27$ jednotek.

### 1.11.5 Zisk

Ziskem rozumíme rozdíl mezi celkovými příjmy a celkovými náklady.

Zisk značíme $\pi$ a platí vzorec:

$$\pi = TR - TC, \text{kde}$$

- $\pi$ je zisk,
- $TR$ jsou celkové příjmy,
- $TC$ jsou celkové náklady. (Macáková, 2003)

S využitím průměrných příjmů a průměrných nákladů můžeme vyjádřit zisk na jednotku produkce následovně

$$\frac{\pi}{Q} = \frac{TR}{Q} - \frac{TC}{Q},$$

přitom celkové příjmy na jednotku produkce můžeme zapsat jako průměrné příjmy a celkové náklady na jednotku produkce můžeme zapsat jako průměrné náklady

$$A\pi = \frac{\pi}{Q} = AR - AC,$$

a zisk proto můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\pi = (AR - AC) \cdot Q.$$

Co se zisku týče, v závislosti na nákladech, které bereme v potaz, rozlišujeme dva typy zisku. Náklady dělíme na explicitní a implicitní. Explicitní náklady jsou skutečně vynaložené náklady, které evidujeme v účetnictví. Mohou to být například mzdy, nájemné za použití výrobních faktorů, náklady za nakoupený materiál. Pokud tyto náklady odečítáme od celkového příjmu, hovoříme o účetním zisku.

Implicitní náklady jsou jinými slovy náklady obětované příležitosti. Tyto náklady vyjadřují ztrátu užitku z druhé nejlepší příležitosti, kterou firma mohla realizovat. Vysvětlíme si to na příkladu. Pokud firma vlastní výrobní zařízení a realizuje svou vlastní výrobu, implicitní náklady tvoří její ušlý zisk z toho, kdyby výrobní zařízení pronajímala. O ekonomickém zisku tedy hovoříme, pokud od celkového příjmu odečítáme jak explicitní, tak i implicitní náklady, protože implicitní náklady jsou důležité pro rozhodování firmy. Vzorce pro výpočet jak účetního, tak ekonomického zisku můžeme shrnout následovně

$$\textit{účetní zisk} = TR - \textit{explicitní náklady},$$

$$\textit{ekonomický zisk} = TR - \textit{explicitní náklady} - \textit{implicitní náklady}.$$

Cílem firmy je maximalizovat svůj zisk a najít optimální objem produkce. Svůj zisk maximalizuje v situaci, kdy se mezní příjmy rovnají mezním nákladům

$$MR = MC.$$

Pokud by nastala situace, že mezní příjmy budou větší než mezní náklady, zvýšíme-li objem výroby o jednotku, celkové příjmy se zvýší. Zvýší se i celkové náklady, ale méně než celkové příjmy. Zisk sice vzroste, ale objem produkce není optimální, je nižší než optimální hodnota.

Pokud nastane opačná situace, mezní příjmy budou menší než mezní náklady, zvýšíme-li objem výroby o jednotku, celkové náklady se zvýší, ale méně než celkové příjmy. Zisk tedy klesne a není maximální a objem produkce také není optimální, jeho hodnota je vyšší. Pokud bychom objem výroby snížili o jednotku, celkové náklady klesnou více než celkové příjmy a zisk by vzrostl.

Poznámka: **Příklad 14** řešíme v obecné rovině, množství výstupu $Q$ tedy uvádíme pouze v jednotkách a cenu uvádíme v peněžních jednotkách. Nejedná se o bezrozměrné veličiny.

**Příklad 14**

Funkce celkových příjmů firmy je ve tvaru $TR = -\frac{3}{2}Q^2 + 15Q + 10$. Funkce celkových nákladů je ve tvaru $TC = \frac{1}{2}Q^2 - 5Q + 20$ Určete:

a) maximum funkce celkového zisku,
b) maximum funkce průměrného zisku,
c) rozsah výroby, kdy dochází k bodu zvratu.

**Řešení**

a) Funkci celkového zisku získáme odečtením funkcí celkových nákladů $TR$ od celkových příjmů $TC$.

$$\pi = TR - TC,$$
$$\pi = -\frac{3}{2}Q^2 + 15Q + 10 - \left(\frac{1}{2}Q^2 - 5Q + 20\right),$$
$$\pi = -2Q^2 + 20Q - 10.$$

Funkce celkového zisku je ve tvaru $\pi = -2Q^2 + 20Q - 10$.

Nyní je třeba najít její maximum. Abychom našli maximum funkce, zderivujeme ji a nalezneme její stacionární bod.

$$\pi = -2Q^2 + 20Q - 10,$$
$$\pi' = -4Q + 20,$$
$$-4Q + 20 = 0,$$
$$4Q = 20,$$
$$Q = 5.$$

Vypočítali jsme, že bod $Q = 5$ jednotek je stacionární bod. Musíme ověřit, zda se jedná vážně o maximum, které chceme zjistit. To ověříme pomocí druhé derivace. Zda má funkce v tomto bodě vážně maximum ověříme tak, že pokud bude hodnota druhé derivace v bodě $Q = 5$ menší než 0, tak má funkce v daném bodě skutečně maximum.

$$\pi' = -4Q + 20,$$
$$\pi'' = -4 < 0.$$

Výpočet prokázal, že funkce má v bodě $Q = 5$ jednotek opravdu maximum.

b) Nejprve musíme určit funkci průměrného zisku. Stačí když funkci celkového zisku vydělíme množstvím produkce Q

$$A\pi = \frac{\pi}{Q} = \frac{-2Q^2 + 20Q - 10}{Q} = -2\mathrm{Q} + 20 - \frac{10}{Q},$$

Funkce průměrného zisku je ve tvaru $A\pi = -2Q + 20 - \frac{10}{Q}$.

Stejně jako u předchozího příkladu, chceme určit maximum této funkce. Budeme postupovat stejně jako v a), určíme derivaci této funkce a nalezneme její stacionární bod.

$$A\pi = -2Q + 20 - \frac{10}{Q},$$

$$A\pi' = -2 + \frac{10}{Q^2},$$

$$-2 + \frac{10}{Q^2} = 0,$$

$$2Q^2 = 10,$$

$$Q^2 = 5,$$

$$Q = \pm\sqrt{5}.$$

V tomto případě má smysl pouze kladná hodnota, záporná hodnota nemá z ekonomického hlediska smysl. Vyšlo nám, že bod $Q = \sqrt{5}$ je stacionární bod funkce.

Zbývá nám pomocí druhé derivace ověřit, zda se jedná opravdu o maximum, které hledáme.

$$A\pi' = -2 + \frac{10}{Q^2},$$

$$A\pi'' = -2 \cdot \frac{10}{Q^3},$$

$$A\pi'' = -\frac{20}{Q^3},$$

$$A\pi'' = -\frac{20}{\left(\sqrt{5}\right)^3} < 0.$$

Hodnota druhé derivace v bodě $Q = \sqrt{5}$ je záporná, ověřili jsme, že funkce má v bodě $Q = \sqrt{5}$ maximum.

c) Pokud známe funkci celkového zisku, další způsob určení bodu zvratu je takový, že funkci celkového zisku položíme rovnu nule a vyřešíme rovnici.

$$-2Q^2 + 20Q - 10 = 0,$$

$$2Q^2 - 20Q + 10 = 0,$$

$$Q_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{320}}{6},$$

$$Q_{1,2} = \frac{20 \pm 8\sqrt{5}}{6},$$

$$Q_1 = \frac{10}{3} + \frac{4\sqrt{5}}{3}, \qquad Q_2 = \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{5}}{3},$$

$$Q_1 \doteq 6{,}31, \qquad Q_2 \doteq 0{,}35.$$

Vyšla nám dvě řešení, body zvratu nastávají při hodnotách $Q_1 \doteq 6{,}31$ jednotek a $Q_2 \doteq 0{,}35$ jednotek.

## 1.12 Interpolace

Pojem interpolace vznikl z latinských slov inter a polare, která v překladu znamenají „vylepšit vkládáním". Znamená nalezení přibližné hodnoty funkce, pokud známe hodnoty funkce v jiných bodech intervalu. Jedná se o odhad nebo přibližné určení předpisu funkce na základě hodnot, které máme k dispozici.

Jedním ze známějších, a ne tak náročným způsobem na realizaci interpolace funkce, pokud máme k dispozici pouze diskrétní body, se jeví Lagrangeův interpolační polynom. Způsob jeho výpočtu je vysvětlen v první kapitole.

**Příklad 15**

V tabulce máme hodnoty průměrné mzdy a její vývoj v roce 2016.

| Čtvrtletí | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Průměrná mzda v Kč | 26 683 | 27 452 | 27 396 | 29 491 |

Vlastní zpracování na základě dat www.czso.cz

Určete funkci, který bude interpretovat tuto závislost.

**Řešení**

K určení funkce, která popisuje tuto závislost, využijeme Lagrangeův interpolační polynom. Ten bude v bodech

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$ nabývat funkčních hodnot

$b_1 = 26\,683, b_2 = 27\,452, b_3 = 27\,396, b_4 = 29\,491$. Nejprve určíme jednotlivé polynomy $\mathcal{L}_1,\ \mathcal{L}_2,\ \mathcal{L}_3,\ \mathcal{L}_4$:

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} = \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{-6} = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{3}x + 4,$$

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{2} = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - \frac{19}{2}x - 6,$$

$$\mathcal{L}_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} = \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{-2} = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 7x + 4,$$

$$\mathcal{L}_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{6} = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{11}{6}x - 1.$$

S pomocí dílčích polynomů určíme výsledný polynom:

$$\mathcal{L}(x) = 26\,683\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{3}x + 4\right) + 27\,452\left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - \frac{19}{2}x - 6\right) +$$

$$+27\,396\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 7x + 4\right) + 29\,491\left(\frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{11}{6}x - 1\right) =$$

$$= 496x^3 - \frac{6\,777}{2}x^2 + \frac{14\,925}{2}x + 22\,113$$

Polynom interpretující závislost vývoje průměrné mzdy je ve tvaru

$496x^3 - \frac{6\,777}{2}x^2 + \frac{14\,925}{2}x + 22\,113$.

**Příklad 16**

Tabulka znázorňuje vývoj cen za krabičku cigaret Marlboro v letech 2013–2016.

| Rok 20xx | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| Cena v Kč | 90 | 96 | 101 | 105 |

Vlastní zpracování na základě dat www.mfcr.cz

Na základě uvedených dat sestavte polynom, který bude vyjadřovat tuto závislost, a určete, jakou cenu lze očekávat v roce 2017.

**Řešení**

Opět využijeme Lagrangeův interpolační polynom, který bude v bodech
$a_1 = 13, a_2 = 14, a_3 = 15, a_4 = 16$ nabývat funkčních hodnot
$b_1 = 90, b_2 = 96, b_3 = 101, b_4 = 105$. Nejprve určíme jednotlivé polynomy $\mathcal{L}_1$,
$\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_4$:

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{(x-14)(x-15)(x-16)}{(13-14)(13-15)(13-16)} = \frac{x^3 - 45x^2 + 674x - 3360}{-6} =$$
$$= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{15}{2}x^2 - \frac{337}{3}x + 560,$$

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{(x-13)(x-15)(x-16)}{(14-13)(14-15)(14-16)} = \frac{x^3 - 44x^2 + 643x - 3120}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}x^3 - 22x^2 + \frac{643}{2}x - 1560,$$

$$\mathcal{L}_3(x) = \frac{(x-13)(x-14)(x-16)}{(15-13)(15-14)(15-16)} = \frac{x^3 - 43x^2 + 614x - 2912}{-2} =$$
$$= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{43}{2}x^2 - 307x + 1456,$$

$$\mathcal{L}_4(x) = \frac{(x-13)(x-14)(x-15)}{(16-13)(16-14)(16-15)} = \frac{x^3 - 42x^2 + 587x - 2730}{6} =$$
$$= \frac{1}{6}x^3 - 7x^2 + \frac{587}{6}x - 455,$$

$$\mathcal{L}(x) = 90\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{15}{2}x^2 - \frac{337}{3}x + 560\right) + 96\left(\frac{1}{2}x^3 - 22x^2 + \frac{643}{2}x - 1560\right) +$$
$$+ 101\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{43}{2}x^2 - 307x + 1456\right) + 105\left(\frac{1}{6}x^3 - 7x^2 + \frac{587}{6}x - 455\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{39}{2}x - 79$$

K určení předpokládané ceny v roce 2017 využijeme získaný polynom. Dosadíme za neznámou $x$ hodnotu 17 a určíme hodnotu výrazu.

$$\mathcal{L}(17) = -\frac{1}{2}\cdot 17^2 + \frac{39}{2}\cdot 17 - 79 = -\frac{289}{2} + \frac{663}{2} - 79 = 108.$$

Polynom vyjadřující závislost ceny cigaret je ve tvaru $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{39}{2}x - 79$. V roce 2017 lze očekávat cenu 108 Kč za krabičku cigaret.

# Závěr

Cílem této práce bylo na konkrétních příkladech ukázat využití matematiky v ekonomii a poukázat na úzké propojení matematiky a ekonomie. Dle mého názoru se mi cíl práce podařil splnit. Má práce obsahuje přehled řešených příkladů z oblasti mikroekonomie. Věnovala jsem se poptávce, nabídce a chování firmy v krátkém období. Řešení příkladů je detailně popsáno a opatřeno potřebnými komentáři, aby bylo čtenáři jasné, proč byl použit daný matematický aparát a jak bylo dosaženo výsledku. Zadání příkladů je pro přehlednost na obecné rovině, nevěnovala jsem se konkrétním situacím. Poslední příklady, které ve své práci uvádím, se věnují interpolaci polynomickou funkcí. Tato část s částí předešlou příliš nesouvisí, ale tuto tématiku jsem považovala za důležitou, protože interpolace, nejen polynomickou funkcí, má v ekonomii široké využití.

Práce by mohla být použitá jako výukový materiál do předmětu Matematika pro ekonomy, který je vyučován na Národohospodářské fakultě Vysoké školy ekonomické v Praze. Vzhledem k tomu, že při řešení příkladů jsem hodně používala derivace a integrální počet, mohla by má práce být zařazená jako výukový materiál do předmětu Aplikace matematické analýzy, který je vyučován na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy.

## Seznam použité literatury


[1] BAUER, Luboš, Hana LIPOVSKÁ, Miloslav MIKULÍK a Vít MIKULÍK. *Matematika v ekonomii a ekonomice*. Praha: Grada, 2015. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-4419-3.

[2] HOLMAN, Robert. *Ekonomie*. 3. aktualiz. vyd. Praha: C. H. Beck, 2002. ISBN 978-80-7179-681-7.

[3] HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia: Diferenciální a integrální počet*. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6063-2.

[4] CHARVÁT, Jura, Jaroslav ZHOUF a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 978-80-7196-362-2.

[5] MACÁKOVÁ, Libuše. *Mikroekonomie: základní kurs*. 8. aktualiz. vyd. Slaný: Melandrium, 2003. ISBN 80-861-7538-3.

[6] NOVOTNÁ, Jarmila a Milan TRCH. *Algebra a teoretická aritmetika: sbírka příkladů*. 2. dopl. vyd. Praha: Univerzita Karlova, 2000. ISBN 80-7290-007-2.

[7] ŠROT, Karel a Pavel KŘÍŽ. Vztah průměrných a mezních nákladů. In: *Mikroekonomie* [online]. 2006 [cit. 2019-07-10]. Dostupné z: http://cgi.math.muni.cz/kriz/prevod_mikro/obrazky/obr6_5.png

[8] ŠROT, Karel a Pavel KŘÍŽ. Vztah TP, AP a MP. In: *Mikroekonomie* [online]. 2006 [cit. 2019-07-10]. Dostupné z: http://cgi.math.muni.cz/kriz/prevod_mikro/obrazky/obr6_2.png

[9] ŠROT, Karel a Pavel KŘÍŽ. Celková a mezní užitečnost. In: *Mikroekonomie* [online]. 2006 [cit. 2019-07-10]. Dostupné z: http://cgi.math.muni.cz/kriz/prevod_mikro/obrazky/obr5_1.png

[10] ŠROT, Karel a Pavel KŘÍŽ. Celkové náklady a jejich složky. In: *Mikroekonomie* [online]. 2006 [cit. 2019-07-10]. Dostupné z: http://cgi.math.muni.cz/kriz/prevod_mikro/obrazky/obr6_4.png

[11] TRNKA, Karel. *Derivace a její aplikace ve středoškolské matematice s využitím internetu*. Praha, 2012. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.

[12] VESELÝ, Jiří. *Matematická analýza pro učitele*. Praha: Matfyzpress, 1997. ISBN 80-858-6323-5.

[13] VLČEK, Josef. *Ekonomie a ekonomika*. 4., zcela přeprac. vyd. Praha: Wolters Kluwer Česká republika, 2009. ISBN 978-80-7357-478-9.