Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Jana Hanušová

Cesty učitele ke konstruktivistickým přístupům

doktorská disertační práce

Školitel : prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.
Školící pracoviště : Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Pedagogická fakulta
Univerzita Karlova v Praze

Praha, 2007

Prohlašuji, že jsem svou disertační práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.
Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze 28.3.2007

Mgr. Jana Hanušová

Děkuji svému školiteli prof. M. Hejnému za odborné vedení mé disertační práce, zájem a množství času, které mi věnoval.

Mgr. Jana Hanušová

Obsah

Seznam obrázků

Úvod

V roce 1995 jsem zapojila do vzdělávacího kurzu pro učitele matematiky, který pod názvem Iniciativa organizovala Pedagogická fakulta UK v Praze. Zde jsem měla možnost poprvé slyšet myšlenky, které jsem vnímala ve zkušenostech z výuky, ale které jsem nebyla schopna sama formulovat tak zřetelně, jak to dělali naši přednášející. Jednalo se o přístup učitele k matematice a k žákovi, o způsob jejich komunikace, o cesty, jimiž se poznání dostává do vědomí žáka. Cítila jsem, že to, co na přednáškách, seminářích a individuálních konzultacích získávám, odpovídá na moje otázky, jak zlepšit své vlastní vyučování. Podrobněji tuto moji „vstupní etapu" do teoretičtějších pater didaktiky matematiky popisuji ve čtvrté kapitole. Tam uvádím, jak se moje seminární práce tvořená v rámci Iniciativy stala začátkem cesty k doktorskému studiu.

V roce 1999 jsem nastoupila do doktorského studia s osobním cílem získat co nejlepší odbornou základnu pro zkvalitnění mé pedagogické práce. Tímto mým zaměřením byla dána volba tématu. Nejprve jsem vyzkoušela různé menší experimenty, které z hlediska toho, co zde předkládám, lze označit za předexperimenty. První lépe připravený, realizovaný i evidovaný experiment se týkal kostkových těles (současná terminologie zde používá termín krychlová tělesa). Potom následovaly další rozsáhlejší experimenty, z nichž první byl věnován vyvozování vzorce pro povrch rotačního válce žáky a druhý odhalení myšlenky goniometrických funkcí.

Oba experimenty byly věnovány stejnému didaktickému problému, který orientoval nejen moji výzkumnou práci, ale i pedagogické působení:

Jak účinně bojovat proti formálním znalostem žáků v matematice?

Paralelně s tímto bádáním vstupovaly do mé práce i přidružené problémy, zejména:

1. Jaké jsou klady, jaké zápory a jaká jsou úskalí konstruktivistického přístupu ve vyučování matematice?
2. Jak organizovat práci třídy, aby každý žák, bez ohledu na jeho kognitivní styl, matematickou vyspělost a pracovní rytmus, měl možnost optimálního rozvoje?
3. Jak reagovat na chybu žáka, aby se tato nestala pro žáka hrozbou, ale poučením?
4. Jakými prostředky lze motivovat kolegy učitele, aby získali pocit, že je užitečné zvýšit konstruktivistické prvky ve své pedagogické práci?

Jádro předložené práce tvoří uvedené dva experimenty. Experiment, nazvaný Studenti odhalují vzorec pro povrch válce, je prezentován ve druhé kapitole. Experiment, nazvaný Otevírání světa goniometrie, je představen ve třetí kapitole. Oba experimenty jsou dokumentovány kopiemi žákovských řešení zadaných úloh, doplněny analýzami a rozbory písemných dokumentů.

První kapitola obsahuje shrnutí teoretických myšlenek, které jsem ve svém výzkumu používala, v poslední kapitole je sebereflexe.

První kapitola

Radost z uvažování a z chápání je nekrásnějším darem přírody.

Nejvýznamnějším uměním učitele je probouzet v žácích radost tvořit a poznávat.

Albert Einstein

1. Teoretické pozadí

V této kapitole stručně představím některé teoretické poznatky, které dále ve své práci využívám. Kapitola je rozdělena do dvou částí.

V první části, nejrozsáhlejší, popíšu jednu z teorií poznávacího procesu v matematice, a to teorii generických modelů (1.1.1). V práci jsou diskutovány možné příčiny neúspěchů žáků v matematice. Jednou z příčin může být formální poznatek, který charakterizuji v dalším odstavci (1.1.2). Výrazným faktorem v poznávacím procesu je způsob vnímání – pojmy proces, koncept a procept se zabývám v odstavci 1.1.3. Dále se zmíním o atomární analýze (1.1.4), kterou využívám v analýze dat. Možnosti zvýšení účinnosti vyučovacích metod nabízejí konstruktivistické přístupy ve vyučování (1.1.5) a teorie didaktických situací (1.1.6). Výčet použitých myšlenek a pojmů didaktiky ukončím zmínkou o akčním výzkumu (1.1.7).

Ve druhé části kapitoly bude stručně shrnuta problematika geometrie a goniometrie a jejich postavení ve výuce na gymnáziu.

1.1 Myšlenky didaktiky matematiky použité v práci

1.1.1 Teorie generických modelů (TGM)

V didaktice matematiky existuje řada teorií, které se zabývají poznávacím procesem.

Jmenujme například dichotomii procedurálních a konceptuálních znalostí (Hiebert, Lefevre, 1986), APOS teorii (Dubinsky, 1991), teorii proceptu (viz níže odstavec 1.1.3), teorii reifikace (Sfard, 1991), teorie abstrakce v kontextu (Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus, 2001). Ve své práci nejvíce využívám přístup M. Hejného, proto se o něm zmíním podrobněji.

Pro porozumění procesu nabývání poznání vůbec, poznání matematického pak zvláště, je potřebné mít jistý model. Ten, který je v našich úvahách použit, byl vytvořen Vítem a Milanem Hejným již před 40 lety. Od první verze byla tato teorie vícekrát přepracovávána a já zde čerpám především z její prezentace v publikacích: Hejný a kol., 1990; Hejný, Kuřina, 2001; Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004, Hejný, Stehlíková, 1999. Hlavní teze modelu spočívá v tom, že klíčovým prvkem poznatku není jeho dokonalá a pamětí uchovaná podoba, ale to, co autoři nazývají generický model. Tento termín dal jméno i celé teorii – *teorie generických modelů*. Popis procesu poznávání vychází z toho, že člověk obvykle nejdříve porozumí několika konkrétním příkladům, všímá si, co mají společného, a dochází tak k obecnějším a abstraktnějším poznatkům.

Proces zrození a budování matematického poznatku je možné rozložit do série hladin a dvou hladinových přechodů, zdvihů (Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004, s. 27). Proces můžeme znázornit schématem:

motivace → izolované modely → generické modely → poznatek

1. Hladina *motivace*. Motivace k poznávání pramení z rozporu mezi „nevím" a „chtěl bych vědět" (podle Hejný, Kuřina, 2001, s. 105). Motivace je předpokladem zahájení procesu učení, představuje jeho úspěšný start. Malé dítě se zajímá o vše, co ho obklopuje, klade spoustu otázek. Ve škole se stává, že dítě zvědavost opouští. Pokud se ale žák nebude chtít učit, nebude mít zájem něco poznávat, nemůže žádný poznatek vybudovat, protože nebude aktivní. Vnitřní motivace, neboli vlastní zájem dítěte o zvládnutí nějaké dovednosti nebo oblasti znalostí, je pro učení daleko účinnější pobídkou než příkaz z vnějšku. Klíčovými pojmy ve vzdělávání se stávají individualita a svoboda (viz např. Vondráková, v Mönks, Ypenburg, 2002, s. 96).
2. Hladina *izolovaných modelů*. Jde o postupné nabývání zkušeností s konkrétními případy budoucího poznání. Čím víc takových různorodých modelů dítě pozná, tím pevnější bude jeho výsledné poznání. Izolovanými modely čísla 3 jsou 3 jablka, 3 knoflíky...; izolované modely jsou reprezentanty obecného pojmu. Znalost, která není opřena o žádný izolovaný model – o žádnou konkrétní představu, je obvykle formální (viz odstavec 1.1.2).
3. Zobecnění. Izolované modely se ukládají do vědomí člověka nejdříve odděleně, pak se začnou objevovat vzájemné souvislosti, izolované modely se začnou seskupovat, organizovat.
4. Hladina *generických modelů*. Generický model má obecnější charakter než libovolný izolovaný model a může zastupovat kterýkoliv z izolovaných modelů. Izolovaný model má charakter ukázky, generický model představuje obecný návod, algoritmus,

vzorec, graf...Například generickým modelem pro počítání předmětů jsou zejména prsty a počítadlo.

5. *Abstrakční zdvih*. Je to okamžik zrodu abstrakčního poznatku – náhlé uzření nové, abstrakčně vyšší skutečnosti – žák dojde k objevu. Jde o hlubší vhled do daného poznání. Často je provázen symbolickým záznamem, který novou strukturu reprezentuje. Je zřejmé, že objevy hrají v matematice podstatnou roli (Hejný, Kuřina, 2001, s. 113)[1]:

   Historie matematiky je do značné míry historií zrodu nových idejí, vyučování matematice by mělo být lemováno objevy žáků. Samozřejmě to nebudou objevy nových matematických myšlenek, ale především pochopení toho, JAK TO VLASTNĚ JE. Objev je akt mentální konstrukce. Je to nejdůležitější akt procesu poznání vůbec.

6. Hladina krystalizace. Nové poznání se propojuje na předchozí vědomosti. Nejdříve na úrovni modelů, potom na úrovni abstraktního poznání. Obvykle jde o dlouhodobý proces.

1.1.2 Formální poznatek

Stává se, že ve vyučovacím procesu není dán dostatečný prostor tvorbě izolovaných modelů, nebo se dokonce v zájmu „urychlení" tato etapa úplně vynechá. To je pak příčinou *formálních znalostí* – žák se snaží převzít hotový poznatek a zapamatovat si ho. Je pak schopen dobře reprodukovat definice, poučky, vzorce, používat nacvičené postupy podle vzorových příkladů. Není však schopen dál tvořivě formální poznatky použít. Není schopen je rozvíjet, propojovat, obměňovat. V. Hejný a M. Hejný (1977) takové poznání nazývají „protézou" poznání.

Choroba formalismu deformuje soubor matematických vědomostí žáka. Ještě více je formalismem devastována oblast jeho matematických schopností. Nákaza zpomaluje, někdy docela zastavuje rozvoj takových důležitých způsobilostí, jakými jsou schopnost analyzovat problémovou situaci, schopnost třídit soubor jevů, hierarchizovat poznatky z hlediska jejich důležitosti, formulovat složitější myšlenky, tvořit hypotézy, argumentovat apod.

Formalismus vede člověka k povrchnímu pohledu na svět matematiky, ale nejenom matematiky, k nadhodnocování sféry jevové a ke ztrátě citlivosti vůči podstatám. Bacil

[1] Přímé citáty budou v dalším textu označeny čarou po levé straně.

formalismu napadá nejen matematické vědomosti a schopnosti člověka, ale proniká až do osobnostní sféry, do hodnotového systému, do sebehodnocení, do metakognice a následně pak do oblasti životních strategií. Bacil formalismu snižuje intelektuální sebedůvěru žáka, vnucuje mu zhoubné a osudové přesvědčení, že jeho rozum nestačí na pochopení náročnějších věcí a vztahů, že nemá na to, aby svět, ve kterém žije, kriticky hodnotil. Je nucen se spolehnout na rozhodnutí jiných. Nabádá ho k vyhýbání se situacím, které vyžadují jeho intelektuální schopnosti (Hejný, Stehlíková, 1999, s. 29).

Největší nebezpečí formalismu hrozí tam, kde se učivo dá zabalit do pouček a vzorců, šablonových postupů. Znalosti žáků se jeví úplné a bezchybné, při řešení nestandardních úloh si však žáci neví rady.

I když teoreticky vzato umíme formalizmus redukovat – stačí doplnit žákům chybějící zkušenosti, tj. chybějící izolované modely – realizace této didaktické myšlenky již tak snadná není.

1.1.3 Proces, koncept, procept

Pojmy *proces* a *koncept* charakterizují dva duální způsoby, kterými naše vědomí vnímá pojmy, vztahy, situace, jevy a události reálného světa, a to, jak s nimi dál pracuje.

Pojmu proces odpovídá změna, přeměna, pohyb, tvoření, konstrukce, vznikání, deformování, zanikání.

Pojmu koncept odpovídá stav, neměnnost, stálost, existence, trvalost, bytí.

Přívlastkem procesuální označujeme ty obsahy, aktivity či stavy našeho vědomí, ve kterých rozhodující roli hraje čas. Slovo konceptuální označuje nadčasové obsahy či stavy našeho vědomí.

Učíme-li žáky písemné dělení nebo řešení lineárních rovnic, učíme je proces. Jestliže žákům vysvětlujeme pojem čtverec nebo funkce, snažíme se o to, aby se v jejich vědomí vytvořila příslušná představa, koncept tohoto pojmu.

Vliv procesuálního a konceptuálního vnímání skutečnosti na matematický řešitelský postup popisují M. Hejný a A. Michalcová (2001, s. 59).

Pred štyridsiatimi rokmi maďarský didaktik Zoltán Dienes (1960) vyslovil myšlienku, že mnoho pojmov (konceptov) matematiky sa vyvinulo z matematických činností (procesov).

Hlboká myšlienka, ktorú budeme neskôr ilustrovať príkladmi, si našla v osemdesiatych rokoch veľa stúpencov.

Mentálny pohyb pretvorenia či dotvorenia procesu na koncept skúmalo veľa bádateľov z viacerých pozícií a v rozličných súvislostiach. Uveďme aspoň tie tri, ktoré sú zmienené v článku Gray –Tall (1994). Koncept, ktorý vzniká v dôsledku abstraktne hlbšieho pochopenia niektorých procesov, dostal meno „entification“ (Kaput, 1982), „reification“ (Sfard, 1989), „encapsulation“ (Dubinsky, 1991).

Učitele by dualita pojmů proces a koncept mohla vést k rozmýšlení, kterým z těchto způsobů předkládat žákům látku. To však je mylné. Oba zdánlivě protilehlé konce je třeba spojit do jednoho celku – *proceptu.*

Termín procept vytvořili E. Gray a D. Tall jako složeninu anglických slov process a concept (Gray, Tall, 1994). Termín vznikl jako výsledek hluboké analýzy duality procesu a konceptu.

V matematice se stejný znakový systém používá jak pro proces (jako je sčítání 2+3), tak i pro produkt tohoto procesu (součet 2+3). Dvojznačnost zápisu umožňuje člověku pružně v myšlenkách přecházet od procesu, kterým nějakou úlohu řeší, ke konceptu, pomocí kterého s ní manipuluje jako částí širšího mentálního schématu. Znak, který přirozeně reprezentuje amalgam dvojznačnosti proces/koncept, se nazývá procept. Později je tento termín upřesněn: Elementární procept je *amalgam* (slitina) tří složek: *procesu*, který vytvoří matematický *objekt*, a *znaku*, který reprezentuje jak proces, tak objekt.

M. Hejný (1999) zavádí pojem *procesuální transfer*. Nazývá tak změnu, která proběhne ve vědomí člověka, který procesuálně zadanou situaci či úlohu uchopí konceptuálně, nebo konceptuálně danou situaci uchopí procesuálně.

1.1.4 Atomární analýza

Atomární analýza je jednou z kvalitativních metod analýzy řešitelského procesu žáka. Její zpracování zde je založeno zejména na publikaci Hejný, Michalcová (2001, s. 103 – 108).

Řešitelský proces probíhá tak, že nejdřív se odehrávají složité postupy ve vědomí a z nich se určité záznamy, fragmenty dostanou na papír. Z těchto napsaných fragmentů se potom snažíme modelovat původní procesy, které probíhaly ve vědomí žáka. Je to činnost velmi náročná, vyžaduje mnohé zkušenosti a účinnou technologii práce. Jednou z takových výzkumných technologií je atomární analýza.

Při běžném čtení žákovských písemných řešení se učitel zaměřuje na detekci a opravování chyb a následné ohodnocení práce. Cílem zkoumání při atomární analýze není hodnocení žákovského řešení, ale vytvoření modelu řešitelského procesu.

Smyslem modelování žákovských řešitelských procesů je posun od hodnocení k diagnostice, zvyšuje se schopnost učitele porozumět žákům, jejich úvahám a myšlenkovým pochodům, jejich omylům a chybám. To se pak projeví nejen v kvalitnější komunikaci ale i v interakci učitel – žák, především v posílení důvěry žáka ve smysluplnost debaty s učitelem. Učitel navíc chybujícímu žákovi účinněji pomáhá, protože místo vysvětlování, jak to má být správně, vede žáka k poznání, proč se chyby dopustil a jak se má v budoucnosti v podobné situaci chovat.

Při zkoumání žákovského řešení je pečlivě evidována a prozkoumána každá maličkost, každý „grafický atom" písemného projevu žáka (podrobnější popis celé analýzy lze najít např. v Hejný, Michalcová, 2001, nebo Stehlíková, 2000).

Mechanismus řešitelského procesu lze rozčlenit do tří etap:

První etapa je vytvoření modelu řešitelského procesu – vypovídá o tom, CO se dělo v mozku.

Druhá etapa je zaměřená na odhalování příčin toho, PROČ žák postupoval právě tak, jak postupoval. Obě etapy se vztahují k jedinému žákovi.

Třetí etapa se zaměří na POROVNÁNÍ několika modelů žákovských řešení téže úlohy. Jsou hledány společné prvky jednotlivých modelů a pomocí nich pak obecné zákonitosti, kterými byly zkoumané modely řízeny.

Jestliže analýzu písemného projevu žáka provádí skupina učitelů, postupuje jejich bádání výrazně rychleji, než když analýzu provádí jeden člověk sám. Rozdílnost interpretací toho, co žák napsal, spočívá v odlišnosti zkušeností badatelů. Objeví se víc názorů, víc výkladů žákova myšlenkového postupu i víc kritických hodnocení těchto výkladů. Bohatá paleta názorů výrazně urychluje celou analýzu, roste naděje, že se věrný názor objeví poměrně rychle a bude společným úsilím jako věrný i rozpoznaný.

Každý účastník debaty si navíc uvědomí, že jeho interpretace je pouze jedna z možností. Zvyšuje se tak jeho schopnost autokorekce při posuzování prací žáků, empatie i schopnost rozšířit rámec svých zkušeností při dalších analýzách. Díky doktorandským seminářům jsem měla možnost takové skupinové analýzy zažít opakovaně a jsem přesvědčena, že právě tato zkušenost posunula výrazně moje porozumění pro velikou různorodost myšlenkových procesů žáků.

1.1.5 Konstruktivistické přístupy

O konstruktivizmu a jeho přednostech pro vyučování se v didaktice matematiky mluví asi od 80. let minulého století, není to však jasně vymezená teorie a různí autoři jej definují různě. Ať dostává jakékoli přívlastky (radikální, sociální, didaktický, realistický, kognitivní apod.), vždy je důraz kladen na aktivitu žáka. Žákům není předkládán soubor hotových poznatků, ale žáci jsou podněcováni k hledání a konstruování vlastní poznatkové struktury pomocí vhodně volených aktivit, úloh, otázek i diskusí.

Ztotožňuji se s názorem, že „naše porozumění tomu, jak se konstruktivizmus promítá do školy, je náš osobní konstrukt" (Stehlíková, 2006). Proto zde stručně podám své porozumění konstruktivistickým přístupům k vyučování matematice.

V posledních 15 letech byly konstruktivistické přístupy zkoumány z mnoha hledisek v mnoha zemích světa. S konstruktivistickým přístupem jsem se poprvé setkala prostřednictvím desatera konstruktivizmu formulovaným F. Kuřinou.

1. Aktivita – matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, ne jen jako její výsledek (soubor definic, vět a důkazů).
2. Řešení úloh – podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování.
3. Konstrukce poznatků – poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Zkušenosti – vytváření poznatků je podmíněno zkušenostmi poznávajícího (z reálného života, ve škole z experimentování, z řešení úloh).
5. Podnětné prostředí – základem matematického vzdělávání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost, což je dáno tvořivým učitelem a dostatkem vhodných podnětů (otázky, úlohy, problémy…).
6. Interakce – sociální interakce přispívá ke konstrukci poznatků (diskuse, porovnávání výsledků, formulace, argumentace…).
7. Reprezentace a strukturování – charakteristické je použití různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa. Dílčí zkušenosti a poznatky jsou orientovány, tříděny, hierarchizovány, vznikají obecnější a abstraktnější pojmy.
8. Komunikace – značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky (neverbální vyjadřování, matematická symbolika).

9. Vzdělávací proces – je nutno jej hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice (vytváření představ, pojmů a postupů), zvládnutí matematického řemesla (vyžaduje nácvik, paměťové zvládnutí pravidel, definic…), aplikace matematiky.
10. Formální poznání – vyučování, založené na předávání informací nebo návodů, vede především k ukládání informací do paměti. Takové poznání je pseudopoznáním, je poznáním pouze formálním.

(podle M. Hejný, F. Kuřina, 2001, s. 160 – 161).

I když základní výše uvedené myšlenky přetrvávají, značný počet nových výzkumů se do našeho poznání konstruktivizmu promítá různými obměnami a akcenty.

Z českých autorů je to např. F. Kuřina, který dále mluví o tzv. realistickém konstruktivismu, který lépe odpovídá reálným možnostem aplikace konstruktivistických přístupů ve výuce. Kromě výše uvedených zásad zdůrazňuje také možnost transmise určitých partií, ovšem stále tak, aby docházelo k vytváření matematiky v mysli poznávajícího jedince: „Při řešení .... problému můžeme přirozeně sdělovat žáku všechny potřebné informace, vysvětlovat pojmy, odkazovat na poznatky v příručkách a encyklopediích, ale *vše ve službách rodící se matematiky v duševním světě žáka*. Konstruktivní vyučování tedy může obsahovat transmisi celých partií, může obsahovat i instrukce k řešení typických úloh.“ (Kuřina, 2002, s. 6) Realistický konstruktivizmus zdůrazňuje nutnost řešení problémů a problémových situací pro poznávání jedince, nicméně mluví explicitně i o čerpání podnětů z okolního světa a zprostředkovaně z učebnic a další literatury, případně prostřednictvím výpočetní techniky a internetu.

Z pohledu učitelovy práce v hodině matematiky jsou myšlenky konstruktivizmu pojednány v (Stehlíková, 2007). Autorka vymezuje sedm principů podnětně vedené výuky (podle samotné autorky se nejedná o uzavřený seznam):

1. Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.
2. Učitel předkládá žákovi podnětné problémy/úlohy.
3. Učitel se snaží vytvořit aktivní učební prostředí.
4. Učitel rozvíjí žákovu schopnost samostatného a kritického myšlení.
5. Učitel chápe chybu jako vývojové stádium žákova porozumění matematice a impuls pro další práci.
6. Učitel iniciuje a moderuje diskuse mezi žáky o matematické podstatě problému.
7. Učitel zdůrazňuje diagnostiku žákova porozumění spíše než reprodukci odpovědi.

Experimenty předložené v této práci (i další má učitelská práce), jsou založeny na konstruktivistických principech, které jsem uvedla výše.

1.1.6 Teorie didaktických situací

Proces učení se probíhá v situacích. V každé situaci proces učení ovlivňuje obsahová náplň a sociální klima.

G. Brousseau (La théorie des situations didactiques) v teorii didaktických vymezuje pojem *situace* (la situation) [2] jako soubor okolností (v nichž se jedinec nachází) a vztahů (spojujících jedince s okolím).

Nedidaktická situace (la situation non-didactique) je situace, která nezávisí ani na vyučujícím, ani na žákovi, neslouží pro didaktickou potřebu.

Didaktickou situací (la situation didactique) označuje situaci, která slouží pro didaktickou potřebu.

„A-didaktické situace" [3] (les situations a-didactiques) jsou takové učební situace, ve kterých učitel, kromě pokynů k práci, neprojevil svoji vůli, své zásahy. Jsou to tedy takové situace, které probíhají bez pokynů učitele na úrovni znalostí.

Jinak řečeno. A-didaktická situace dovoluje žákovi něco zjistit, vytvořit si model a zkontrolovat ho, vytvořit nový model apod. bez přímých vnějších zásahů. Vnější zásahy se mohou vyskytnout, ale pouze např. k udržení pozornosti apod., tedy pedagogicky, aktér (žák) jedná samostatně. Proces učení vyplývá přímo ze situace, nemusí být předem dán cíl učení, dítě nemusí tušit, že je učeno. Zpětnou vazbu nepředstavuje učitel, ale prostředí, sama situace.

Na doktorandském semináři Kralupech v roce 2002 byl přítomen Pierre Clanché, který mi vysvětlil pojem a-didaktické situace. Myslím, že jeho způsob zasluhuje podrobnější popis. Pojem a-didaktická situace mi osvětloval na hře podobné Nimu.

Začali jsme hru hrát a Pierre hru před koncem zarazil se slovy: „Máš to vyhrané." Já jsem prozradila, že vyhraji vždycky, protože znám strategii. Pro mě toto nebyla a-didaktická situace, protože jsem nic nového neobjevila. Pro dítě, které hru nezná, to ale a-didaktická situace je. Hru hraje s cílem vyhrát. Pokud opakovaně vyhrává a odhalí takovou strategii, že dokáže vyhrát každou hru, pak průběh hry novou myšlenku vyprovokoval i potvrdil nebo vyvrátil. Nebyl to učitel, kdo vedl žáka k poznání, ale situace sama.

---

[2] „Une situation est l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve; et des relations qui l'unissent à son milieu." G. Brousseau (La théorie des situations didactiques, s.2)

[3] Les situations "a-didactiques" sont les situations d'apprentissage dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève va faire : ce sont celles qui fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances. (Brousseau, G., 1998)

Podstata a-didaktické situace tedy tkví ve dvou faktorech závislých na učiteli: předně, je na něm, aby a-didaktickou situaci navodil; tj. aby žákům předložil přiměřeně náročný úkol, který motivuje jejich zvědavost. Dále pak učitel musí odolat nutkání vstoupit do myšlenkového procesu žáků radou nebo informací, protože by tím mohl celý proces zdeformovat.

Pojetí didaktických situací je v souladu s myšlenkami autorů v (Hejný, Kuřina 2001, s. 94), kde na dvou příbězích motivují čtenáře k přemýšlení, zda „Prozradit, či neprozradit" správné řešení problému.

Autoři jsou přesvědčeni, že předčasné prozrazení správného řešení sice v dané chvíli urychluje rozšíření vědomostí, ale dlouhodobě zpomaluje rozvoj schopnosti objevovat nové věci. Připravuje dítě o radostný zážitek autonomního objevu, negativně ovlivňuje strategii učení, orientuje jej k přebírání hotových poznatků, a ne ke konstrukci poznatků vlastních.

Neprozrazení doplněné formulací další, návodné, úlohy naopak podněcuje hledání nové strategie.

1.1.7 Akční výzkum

Proměny v pojetí vzdělávání a školy znamenají výrazné změny v pojetí učitelské profese. Výrazně se zvyšují nároky na schopnost učitele analyzovat vlastní činnost, prezentovat a fundovaně argumentovat své pojetí práce, spolupracovat s kolegy (roste „kolektivní" pojetí učitelské profese), kvalitně komunikovat s rodiči i širším sociálním okolím apod. (Spilková, 2004). To učitele vede k hledání opory v teorii, následně pak k zapojení se do výzkumů. Jednou z možností je například forma *akčního výzkumu.*

Učitelé, účastnící se akčního výzkumu, pozorují, kladou si otázky, analyzují, sdílejí názory a vyhodnocují výsledky. Akční výzkum je popisován jako praktický výzkum, který je realizován učiteli v praxi na rozdíl od akademického výzkumu, který je realizován akademickými výzkumníky. Typ výzkumu, který provádějí učitelé, se může odlišovat od výzkumu, který je prováděn akademiky, ale není méně významný nebo relevantní. Učitelé jsou limitováni časem, mají vyučovací povinnosti. Výsledky jejich výzkumu odpovídají jejich okamžitým aktivitám. Výsledky výzkumu mají omezené využití, jsou více subjektivní (Nezvalová, 2003).

V pedagogice je *akční výzkum* chápán jako nástroj, který učitelům pomáhá lépe poznávat problémy své vlastní praxe a řešit je (Janík, 2004).

Autor uvádí dvě definice pojmu akční výzkum. První podle J. Průchy, J. Mareše a E. Waltrové (2003, s. 14), druhou podle J. Elliotta (1981, s.1):

(1) – Akční výzkum je takový druh výzkumu, jehož cílem je zlepšovat určitou část vzdělávací praxe.

(2) – Akční výzkum je učiteli prováděná systematická reflexe profesních situací s cílem jejich dalšího rozvinutí.

Přívlastek „akční“ vystihuje podstatu tohoto typu výzkumu. Akci můžeme chápat ve dvou významech:

- Akcí je míněna určitá situace, kterou učitel zkoumá, aby jí porozuměl a mohl ji zlepšit v případě, že není spokojen.
- Akcí je míněno jednání učitele, které má vést ke zlepšení zkoumané situace.

Akční výzkum je nesen jednáním učitele, které vychází z určité problematické situace a směřuje k jejímu řešení. Toto jednání je v podstatě řešení problému a může se odehrávat na intuitivní úrovni, stejně jako na úrovni vědomé.

Jevem, který akční výzkum spouští a udržuje v činnosti je určitá problémová situace, kterou učitel prožívá jako subjektivně významnou – má dojem, že ve třídě něco nefunguje (Janík, 2004).

Podle Nezvalové (2003) akční výzkum studuje reálnou školní situaci. Cílem akčního výzkumu je také zlepšit profesionalitu učitele, rozvíjet jeho pedagogické myšlení a dovednosti, zkvalitnit jeho rozhodovací procesy, ovlivnit hodnotovou orientaci učitele a posílit jeho naději a víru v možnosti zkvalitnění jeho pedagogické zkušenosti. Akční výzkum je pozorováním sebe sama: reflektuje profesionální praxi a hledá alternativní přístupy k dosažení lepších výsledků. Akční výzkum zkvalitňuje praxi, zlepšuje porozumění této praxi a zlepšuje situaci, ve které se tato praxe odehrává. Akční výzkum je současně zaměřen na žáka i na učitele. Akční výzkum má potenciál zkvalitnit školu jako místo pro vzdělávání žáků a růst profesionality učitele.

Průběh akčního výzkumu lze nejjednodušeji znázornit ve dvoufázovém modelu *výzkumu a akce* nebo jinak řečeno *reflexe a jednání*. V první fázi učitel získává poznatky o problému (výzkum), v druhé fázi uplatňuje řešení problému (akce), ke kterému na základě svého výzkumu došel. Tyto dvě fáze se opakují v gradujícím cyklu (Janík, 2004).

Sagor (1992) uvádí pět kroků akčního výzkumu:

- formulace problému;
- sběr dat;
- analýza dat;
- sdělení výsledků;
- akční plán.

Podstatou akčního výzkumu není metoda, ale aktivita, činnost. Cyklus akčního výzkumu je doprovázen sérií otázek v jeho průběhu: Co dělám? Co to znamená? Jak to dělám? Jak to mohu dělat jinak? Co žáci skutečně dělají? Co se učí? Jak je to důležité? Co se učím? Co teď zamýšlím dělat? (Nezvalová, 2002)

Akční výzkum ve škole lze realizovat ve spolupráci s vysokoškolskými učiteli, kteří mohou působit v roli poradců (Nezvalová, 2002). Takováto spolupráce vyžaduje nové přístupy, založené na vzájemné důvěře a respektu. Profesionální růst učitelů je podporován kolegiální spoluprací. Spolupráce mezi vysokoškolskými učiteli a učiteli realizujícími akční výzkum vytváří propojení mezi teorií a praxí, odstraňuje rozdíly mezi teoretiky a praktiky. Je to ovšem proces dlouhodobý, přinášející rozvoj profesionality všem zúčastněným. Vysokoškolští učitelé také profitují z této spolupráce. Mají možnost sledovat aplikaci teoretických poznatků v praxi, chápat potřeby praxe a podle toho orientovat své teoretické výzkumy (Nezvalová, 2002).

1.2 Geometrie ve výuce matematiky

Ve své práci jsem se zaměřila na některé aspekty konstruktivisticky vedené výuky geometrie. Proto si zde stručně všimneme postavení geometrie a dále goniometrie ve výuce gymnázia.

1.2.1 Místo geometrie ve výuce gymnázia

Geometrie na gymnáziu je soustředěna do čtyř hlavních témat: planimetrie, stereometrie, trigonometrie a analytická geometrie. Poslední dvě témata jsou úzce vázána na jiné oblasti matematiky. Trigonometrie na funkce a algebru a analytická geometrie na algebru. K těmto se vrátíme v úvodu do třetí kapitoly. Druhá kapitola se věnuje problematice, která spadá do syntetické geometrie. Hlavním objektem je zde síť válce, která propojuje 2D a 3D geometrie. Stručně připomeňme gymnaziální osnovy syntetické geometrie.

Na nižším gymnáziu se žáci seznamují s rovinnými i prostorovými geometrickými útvary, učí se je pojmenovat, porovnávat, třídit; řeší základní početní i konstrukční úlohy.

Na vyšším gymnáziu se téma planimetrie rozšiřuje o náročnější geometrické konstrukce (upřesňuje se jejich popis), o důkazové úlohy, o řešení obecného trojúhelníku. V tématu stereometrie se žáci učí zobrazovat prostorové útvary, řeší úlohy na výpočty povrchů a objemů těles.

Syntetická geometrie na gymnáziu zůstává epizodická, nemá ambici strukturace, ale na druhé straně dává nepřeberné množství problémových situací, které umožňují rozvíjet různé (meta)kognitivní psychické funkce žáka. Například lze využít geometrii ke kultivaci schopnosti vizualizovat aritmetické nebo algebraické situace, což přispívá k budování kompaktní matematické struktury. O vztahu školní geometrie a aritmetiky píší M. Hejný a D. Jirotková (Svět aritmetiky a svět geometrie. In: Hejný, Novotná, Stehlíková 2004, s.125).

Aritmetika a geometrie tradičně představují dva základní pilíře školské matematiky a z hlediska historie matematiky byly tyto oblasti jediné části matematiky až do nástupu diferenciálního počtu. Oblast školské matematiky je tradičně zaměřena na číslo, základní početní operace, strukturu čísel, rozšiřování přirozených čísel na racionální a záporná a rovnice. Tuto strukturu výuky aritmetiky nacházíme již nejméně dvě století bez vážnější změny. Naproti tomu vyučování geometrii doznalo jenom v posledním století výrazných změn. ...vztah aritmetiky a geometrie je nerovnovážný. Aritmetika, která je opřená o pevnou strukturu, se jeví spíše jako stabilní disciplína, ale geometrie značně podléhá převládajícím pedagogickým a didaktickým názorům příslušné doby.

Aritmetické znalosti jsou pro praktický život člověka důležitější než znalosti geometrické. Geometrie však nabízí dítěti větší paletu možností kultivace jeho intelektu. Jedná se především o prostor pro tvořivost. Ve světě aritmetiky se tvořivost zaměřuje na odhalování různých pravidelností a vztahů mezi již existujícími objekty. V geometrii však může dítě objevovat i nové objekty, s nimiž se zatím nesetkalo.

Neustálenost osnov a epizodičnost syntetické geometrie umožňují obohacovat dané učivo o různé zajímavé a didakticky vhodné dodatky. Učiteli se zde otevírá větší prostor pro jeho didaktickou tvořivost. V své praxi jsem nabízenou možnost využila v několika případech, které uvádím v odstavci 2.1.

1.2.2 Místo goniometrie ve výuce gymnázia

Na gymnáziu se goniometrické funkce obvykle vyučují ve dvou etapách:

1. Na nižším gymnáziu v kvartě (odpovídá 9. třídě ZŠ) se goniometrické funkce, přesněji trigonometrické vztahy, zavádějí jako poměry stran v pravoúhlém trojúhelníku

2. Na vyšším gymnáziu v sextě (odpovídá 2. ročníku střední školy) se pomocí jednotkové kružnice rozšiřuje trigonometrický vztah na goniometrickou periodickou funkci s definičním oborem **R**.

M. Hejný (1990, s. 451, 452) popisuje šest význačných složek učiva trigonometrie v učebnicích matematiky.

1. Studium geometrických situací, především útvarů v rovině.
2. Odvozování goniometrických vzorců a hledání vzájemných souvislostí mezi nimi.
3. Manipulace se vzorci, zejména řešení goniometrických rovnic a nerovnic.
4. Práce s tabulkami goniometrických funkcí a využití trigonometrie v zeměměřičství (případně v astronomii)
5. Studium goniometrických funkcí a jejich využití při modelování periodických dějů ve fyzice.
6. Zkoumání struktury komplexních čísel využitím goniometrického tvaru komplexního čísla.

Ve výuce na gymnáziu jsou zastoupeny všechny uvedené složky. V první etapě (úroveň ZŠ) je trigonometrie součástí planimetrie a zaměřuje se na řešení pravoúhlého trojúhelníka – složky 1) a 4). Práce s tabulkami je posunuta do role „svědka" historického vývoje, při výpočtech se využívají kalkulátory.

Ve druhé etapě (úroveň SŠ) se zvýrazňují složky 2) a 3) při zavádění a studiu vlastností goniometrických funkcí, složka 4) je rozšiřována a zobecňována při řešení obecného trojúhelníka a v analytické geometrii, složky 5) a 6) v aplikacích. Ve složce 5) dochází jak k posunu od jedné konkrétní funkce, např. $f(x) = 2\sin(x + 30°)$, ke struktuře funkcí $F(x,a,b) = a \cdot \sin(x + b)$, tak i k aplikacím těchto poznatků ve fyzice. Ve složce 6) se goniometrické funkce stávají silným nástrojem komplexních čísel.

Druhá kapitola

Budiž učitelům zlatým pravidlem, aby všechno bylo předváděno všem smyslům, kolika možno.

Jan Ámos Komenský

2. Studenti odhalují vzorec pro povrch válce

Kapitola je rozdělena do osmi části. V první jsou popsány autorčiny vlastní zkušenosti s výukou geometrie (2.1); ve druhé části zkušenosti s výukou matematiky ve třídě A (2.2); třetí část je věnována experimentu V1 (2.3); ve čtvrté a páté části je popsána příprava a průběh experimentu V2 (2.4, 2.5); v šesté části analýza práce skupin 1, 2 , 6 a 8; v sedmé části interakce mezi žáky v jednotlivých skupinách (2.7); osmá část je věnována nástroji komparace řešitelských strategií jednotlivých skupin.

2.1 Moje zkušenosti s výukou geometrie

Předmětem kapitoly bude experiment V2: **Objevování vzorce pro povrch válce.** Na jeho přípravu i realizaci, měly zásadní vliv jak moje předchozí zkušenosti s výukou geometrie (odstavec 2.1), tak zkušenosti žáků (odstavec 2.2), kteří do experimentu vstupovali, i naše vzájemná spolupráce (v té době již čtyřletá).

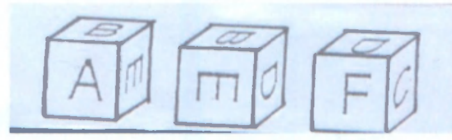
2.1.1 Kostková tělesa

Z mých předchozích zkušeností považuji za důležité zmínit zejména experiment K1: Kostková tělesa uskutečněný v roce 1995 na gymnáziu v Mnichově Hradišti, jehož cílem bylo porovnat postupy řešení prostorových úloh žáky primy až septimy sedmiletého studia (v roce 1995 ještě sedmileté studium, další ročník již osmileté studium) a žáky druhého až čtvrtého ročníku čtyřletého studia. Experimentu se zúčastnilo celkem 215 žáků z devíti tříd. Žáci řešili tyto tři úlohy:

Úloha 2.1: Nakreslete pohled zepředu, shora a zleva na „kostkové těleso"[4]*, které uvidíte.*

[4] V současné terminologii jsou v tomto prostředí používány termíny krychlové těleso a stavba.

Úloha 2.2: Na obrázku 2.1 jsou tři pohledy na stejnou krychli. Na stěnách jsou písmena A, B, C, D, E a F. Které písmeno je na protější stěně ke stěně označené písmenem E?



Obrázek 2.1: Pohled na krychli

Úloha 2.3: Máš krychli sestavenou z 27 stejných kostek. Přidám ti jednu takovou kostku. Kolik kostek potřebuješ, abys mohl těleso doplnit opět do tvaru krychle?

Testovací list je uveden v příloze 2.1.1a., pokyny pro zadávající učitele v příloze 2.1.1b. Při zadávání úloh byla použita sada 64 stejných dřevěných krychliček. Po vypracování testu měli žáci možnost ověřit svá řešení manipulací s těmito krychličkami.

Výsledky experimentu K1 s velikou pravděpodobností přispěly ke konstrukci scénáře experimentu V2. Jedná se o tyto při myšlenky:

- Téměř všichni žáci, kteří postupovali chybně v řešení úloh 2.2 a 2.3, při následné manipulaci s kostkami velmi rychle uviděli zdroj chyb a byli pak schopni samostatně svá řešení opravit. Dá se předpokládat, že těmto žákům chyběla zkušenost poznání v činnosti a manipulace s krychličkami jim tuto zkušenost přinesla. Uvedená situace poukazuje na to, že pro řešení úloh prostorové geometrie jsou rozhodující taktilní a manipulativní zkušenosti, a proto při objevování vzorce pro povrch válce budou žáci modelovat.
- Porovnání výsledků testů z různých tříd poukazovalo na fakt, že aktuální učivo ovlivní výsledek testu. Je třeba najít takové zadání úkolu, aby zkušenost, kterou žáci při jeho řešení nabudou, měla trvalejší ráz.
- Ukázala se značná rozdílnost ve znalostech a zkušenostech žáků (někteří jedenáctiletí žáci v primě jsou výrazně lepší než někteří sedmnáctiletí žáci v septimě). Proto není vhodné frontální vyučování, ale je nutné každému žákovi dát možnost postupovat jeho vlastním tempem.

První z uvedených tří myšlenek byla opětovně zdůrazněna i v následujícím experimentu K2. Pozorována byla skupina osmi žáků neúspěšných v testu z K1. Byla vytvořena série gradovaných úloh tak, aby bylo možné pozorovat postupy řešení jednotlivých žáků a hledat tak příčiny jejich neuspěchů, aby žáci v co největší míře modelovali objekty a manipulovali s nimi. Tito žáci pak řešili další test. Při porovnání výsledků obou testů se opět potvrdilo, že manipulace s reálnými objekty je velmi účinná činnost při rozvíjení geometrické představivosti.

2.1.2 Čtverečkovaný papír

Další výrazné až klíčové zkušenosti přinesly úlohy řešené v prostředí čtverečkovaného papíru. Žákům je toto prostředí dostatečně blízké, jeho velkou předností je především to, že přirozeně propojuje geometrii s aritmetikou. Umožňuje snadno znázorňovat geometrické útvary, umísťovat je do soustavy souřadnic, zviditelňuje jak tvarové tak metrické vlastnosti útvarů. Podnětné náměty pro činnosti v prostředí čtverečkovaného papíru jsem čerpala z publikace Hejný, Jirotková, (1999). Byly to zejména úlohy na téma dělení úsečky, Pickova formule a měření úhlu, kterými jsem se zabývala důkladněji a o kterých bude v dalším referováno podobněji.

- Do běžné výuky jsem pak začleňovala například úlohy z následujících témat:
- oddíl 3.1. Cestování na čtverečkovaném papíře – v sekundě při probírání soustavy souřadnic
- oddíl 3.2. Metoda uvolňování souřadnic a oddíl 3.3 Prodlužování úsečky – v kvintě a sextě jako propedeutiku analytické geometrie
- kapitola 4. Obsah mřížového útvaru – v primě a v sekundě při probírání obsahů rovinných útvarů.

Každá z uvedených částí textu je zde ilustrována jednou úlohou:

Úloha 2.4: Na čtverečkovaném papíru vyber libovolný mřížový bod a označ ho A. Pracuj tak, aby soused neviděl umístění bodu. Pak sousedovi slovně popiš polohu bodu A. Soused podle tvé instrukce bod A zakreslí do svého čtverečkovaného papíru. Obrázky porovnejte.

Úloha 2.4 je autorčina původní, vytvořena pro potřeby skupinového vyučování; je inspirována textem příkladu 3.1 (Hejný, Jirotková, 1999, s.17).

Úloha 2.5: Je dána úsečka RS, kde R(0,0), S(3,2). Najděte aspoň tisíc různých mřížových bodů X(u,v), které leží na prodloužení úsečky RS. (Úloha 3.3, s.36).

Úloha 2.6: Je dána úsečka AB, A(0,0), B(1,0). Dále je dáno jedenáct bodů $C_{-5}(-5,1)$, $C_{-4}(-4,1)$, ..., $C_0(0,1)$, ..., $C_4(4,1)$, $C_5(5,1)$. Který z jedenácti trojúhelníků ABC_n, n= -5, -4, ..., 4, 5 má obsah a) nejmenší, b) největší? (Cvičení 4.9, s. 42)

Dělení úsečky

V roce 2001 řešili žáci ze sekundy, tercie a kvarty osmiletého studia a druhého ročníku čtyřletého studia úlohy z oddílu 5.1. Dělení úsečky v daném poměru Hejný, Jirotková, (1999, s. 52, 54).

Úloha 2.7: Je dána úsečka AB, A(0,0), B(3,1).
Tuto úsečku rozdělte na 1. dvě shodné úsečky
2. tři shodné úsečky
3. čtyři shodné úsečky

Úloha 2.8: Mřížovou úsečku rozdělte v poměru 1. 1 : 2
2. 2 : 3
3. 4 : 7

Žáci řešili zadané úlohy nejprve samostatně, pak pokračovali v řešení ve skupinách a na závěr o postupech řešení diskutovali.

Strategie řešení úloh se lišily využitím různých matematických prostředků v závislosti na věku řešitelů. Ve třídě sekunda žáci využívali především vlastností obdélníků a čtverců, což přímo vyplynulo z prostředí čtverečkovaného papíru. Někteří žáci kombinovali geometrii s výpočty poměrů (nedávno byly probírány zlomky), jiní intuitivně využívali podobnost. Ve třídách tercie a kvarta žáci úlohy nejen řešili, ale byli vedeni i k potvrzování správnosti svého řešení. Argumentovali, sami přirozenou cestou objevovali techniku matematických důkazů, využívali vět o shodnostech trojúhelníků.

Pickova formule

Připomínáme, že obsah $S(T)$ mřížového trojúhelníku T na čtverečkovaném papíře lze určit ze vztahu

$$S(T) = \frac{h(T)}{2} + v(T) - 1,$$

kde znakem h(T) označujeme počet mřížových bodů ležících na hranici trojúhelníku T a znakem v(T) počet mřížových bodů ležících uvnitř trojúhelníku T. Tento vztah nese jméno svého objevitele Georga Picka. Dodejme, že platí nejen pro trojúhelníky, ale obecně pro všechny mřížové mnohoúhelníky.

Pickovu formuli (v roce 2001) hledali žáci sekundy a tercie (v odstavci 2.3 označena jako třída A) osmiletého studia i účastníci matematického tábora.

Výzkumný problém :

> *Hledejte Pickovu formuli, která říká, jak vzájemně souvisí čísla S(T), h(T) a v(T) pro libovolný trojúhelník T.*

Někteří žáci přijali úlohu nejdříve vlažně, dokonce s nechutí, ale pak je výzva vtáhla do „děje" tak silně, že jejich následné výpovědi jasně dokumentují míru motivace (uvedeno níže).

Ve třídách sekunda a tercie bylo organizační uspořádání stejné. Žáci pracovali první hodinu ve skupinách, druhou hodinu na malé „vědecké" konferenci jednotlivé skupiny předložily stav svého výzkumu a návrhy formule. Ostatní skupiny tyto návrhy ověřovaly a hodnotily. V sekundě po první hodině žádná skupina správný vzorec nenašla, ani na konferenci se správné řešení neobjevilo. Někteří žáci dobrovolně ve výzkumu pokračovali a o svém objevu pak informovali ostatní spolužáky v úvodu dalších hodin. Po větším úsilí se dvěma chlapcům podařilo formuli objevit. V tercii byla úspěšná jedna dvojice chlapců, ale třídě výsledek nesdělili, počkali až na společné hodnocení.

Na matematickém táboře pracovali výzkumníci samostatně. Úloha byla zadána při matematickém zaměstnání, řešení hledali dobrovolníci ve volném čase, své objevy nejprve přísně tajili. Bádání žáky opravdu zaujalo, s napětím sledovali, jestli někdo vzorec objevil.

Při hledání Pickovy formule žáci počítali obsahy trojúhelníků, zopakovali si vlastnosti trojúhelníků, třídili a zpracovávali data, hledali systém záznamu získaných dat a jejich zpracování.

Po řešení úloh na dělení úsečky a po hledání Pickovy formule ve třídách sekunda a tercie žáci popsali svoje dojmy a pocity během práce. Ukázalo se, že žáky práce na čtverečkovaném papíře většinou zaujala, bavila je a přinášela jim radost.

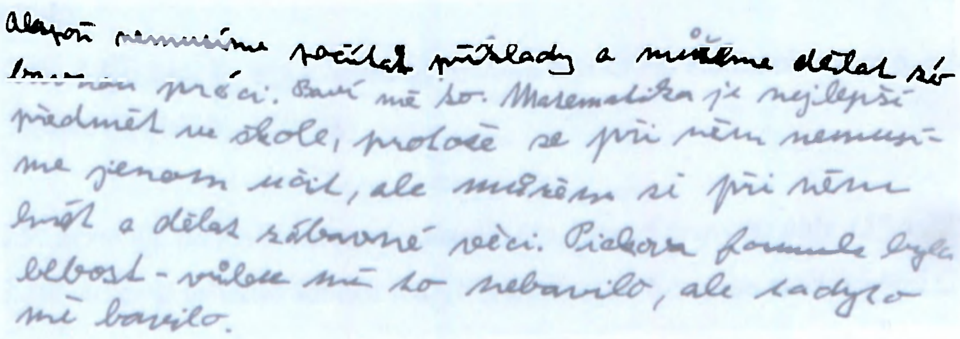
V sekundě nejprve žáci hledali Pickovu formuli, s odstupem několika hodin pak dělili úsečku. Žáci v této třídě na objevování nebyli zvyklí, v té době měli zkušenost pouze s několika menšími objevitelskými úkoly, učili se pracovat ve skupinách. Při hodinách vznikla pěkná pracovní atmosféra, bylo zřejmé, že většinu žáků práce bavila. Svoje pocity zaznamenali po hodině dělení úsečky. Bez výhrad a velice pozitivně bylo přijímáno téma dělení úsečky, několik kritických připomínek měli žáci k tématu Pickova formule. Jako ilustrace poslouží následující ukázky žákovských sebereflexí:

Moje pocity při Matematice

Ze začátku hodiny jsem myslel, že se budu v hodině flákat, že mě probíraná látka nebude zajímat, ale potom co jsme objevili správné odpovědi na první zadání úkolu, mě to najednou začalo bavit. Měl jsem radost, když jsme objevili něco nového. Při tom jsem cítil takové zvláštní chvění někde uvnitř. Pocit, že opravdu ~~roz~~ něčemu rozumím a ještě mě to zajímá.

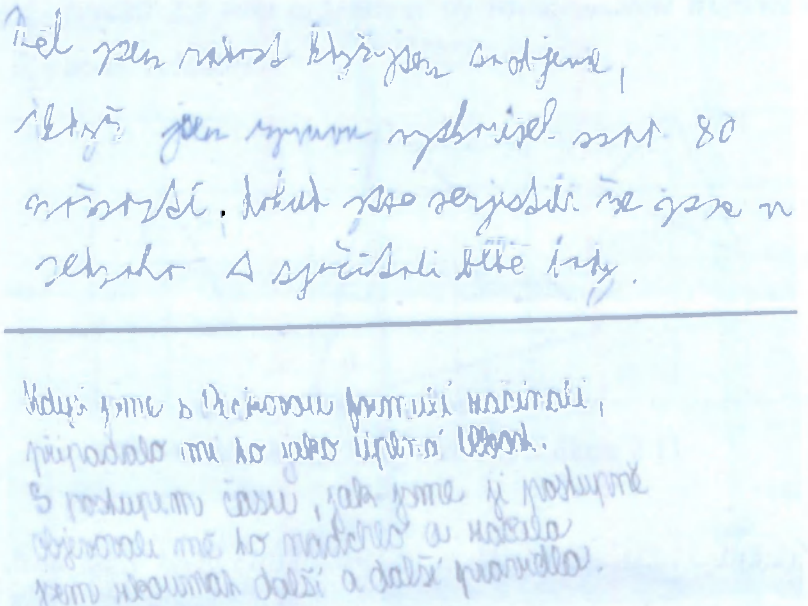
Byla jsem ráda, když jsme dostali čtverečkovaný papír a zadání úloh, protože takové „bádání" mě baví, zvláště, když se mi podaří přijít na řešení, a to se mi teď právě podařilo (teda, aspoň doufám, že ano!). Ale s tou druhou úlohou už to bylo horší! Musela jsem rázem na řešení za a) - ale taky mě to moc potěšilo když mě něco opravdu baví, tak jdu s chutí do toho! - a tohle mě bavilo, a hodně.

Když jste přinesla čtverečky a řekla, že budeme bádat moc se mi do toho nechtělo. Řekl jsem si ach jo, už zase. 1. příklad byl lehký, ale druhý o mnoho těžší. Spolu s Martinem jsme přišli na to, jak na něj vyzrát a to už mě začínalo bavit. Nakonec jsem byl docela smutný, když jsme měli končit. „Pickova formule" to bylo opačně. Ze začátku mě to bavilo, ale pak už vůbec. Proto mě také dneska tak to „bádání" rozhodilo. Jinak je to ale docela prima.


Alespoň nemusíme počítat příklady a můžeme dělat tvořivou práci. Baví mě to. Matematika je nejlepší předmět ve škole, protože se při něm nemusíme jenom učit, ale můžeme si při něm hrát a dělat zábavné věci. Pickova formule byla blbost - vůbec mě to nebavilo, ale tadyto mě bavilo.

Obrázek 2.2a: Čtverečkovaný papír – sebereflexe žáků sekundy

V tercii žáci psali sebereflexi po hledání Pickovy formule. V této třídě byli žáci na objevování zvyklí, běžná byla i forma práce ve skupinách. Zde jsou dvě ukázky:


Když jsme s Pickovou formulí začínali, připadalo mi to jako úplná blbost. S postupem času, jak jsme ji postupně objevovali, mě to nadchlo a začala jsem zkoumat další a další pravidla.

Obrázek 2.2b: Čtverečkovaný papír – sebereflexe žáků tercie

Při dělení úsečky řešili žáci na začátku jednoduché úlohy, které velice brzy přinesly radost z objevu správného řešení, což žáky velice povzbudilo do další práce, dokonce většina z nich řešila následné dobrovolné domácí cvičení.

Hledání Pickovy formule bylo proti dělení úsečky velmi náročné na čas, trpělivost a vytrvalost, celá řada dílčích výsledků mnohdy nevedla k cíli, což některé žáky odradilo, jiné naopak provokovalo k dalšímu intenzivnímu zkoumání.

Měření úhlů

V roce 2001 řešili žáci kvarty a druhého ročníku čtyřletého studia úlohy ze 6. oddílu Měření úhlů Hejný, Jirotková, (1999, s. 57, 58)

Úloha 2.9: Sestrojte na čverečkovaném papíře jen pomocí pravítka úhly 45° a 225°

Úloha 2.10: Je dána mřížová úsečka AB, A(0,0), B(m,n). Sestrojte mřížový bod C tak, aby / ∡CAB/ = 45°. Řešte pro

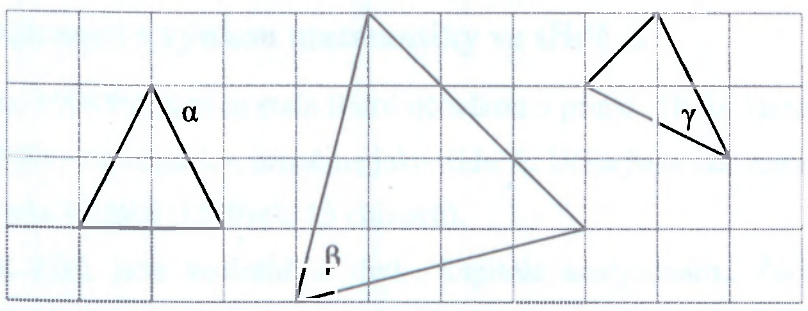
a) (m,n) = (3,1)

b) (m,n) = (5,-2)

c) (m,n) = (m,3)

d) obecně

Úloha 2.11: Na obrázku 2.3 jsou nakresleny tři rovnoramenné trojúhelníky. Uspořádejte vnitřní úhly α, β, γ podle velikosti.



Obrázek 2.3: Trojúhelníky k úloze 2.11

Úloha 2.12: Jsou dány body O(0,0), P(5,0) a dále body A(2,1), B(5,2), C(7,4), D(16,6), E(22,11) a F(101,50). Uspořádejte podle velikosti úhly : α = ∡AOP, β = ∡BOP, γ = ∡COP, δ = ∡DOP, ε = ∡EOP, φ = ∡FOP

Při řešení úloh si žáci připomněli vlastnosti rovinných útvarů, podobnost a poměry.

Úloha 2.12 se v kvartě stala východiskem zavedení goniometrických funkcí tangens a kotangens. Podrobněji je řešení úlohy rozvedeno ve třetí kapitole v části předexperiment G 1, kde je tato úloha označena ÚG. Zkušenosti s úlohami 2.9 – 2.12 byly podnětem ke změně ve výuce goniometrie, trigonometrie a především goniometrických funkcí.

Zkušenosti s řešením úloh na čtverečkovaném papíře přinesly velmi cenná pozorování, která značně přesáhla rámec geometrie a výrazně ovlivnila další výuku:

- netradičně formulovaná úloha odhalí formálnost znalostí, slouží jako diagnostika stupně porozumění pojmu, dává možnost pozorování žáků

- posloupnost dílčích úkolů se stupňující se obtížností (úlohy 2.4, 2.5, 2.7, 2.8, 2.10 a 2.12) pomáhá vytvořit podmínky pro hledání vlastní cesty, pro individuální přístup, motivuje žáka k vysokému pracovnímu nasazení
- vhodně nastavená obtížnost prvních kroků pomáhá odstraňovat strach z chyby a omylu, psychické bloky typu „stejně nic nevymyslím", pomáhá vytvořit dobrou atmosféru v hodině, příznivou pro zaujetí žáků, pozitivní napětí – „objevím nebo neobjevím ?"
- naopak příliš vysoká obtížnost bez dílčích úkolů (pro některé žáky hledání Pickovy formule) utlumuje zájem
- práce ve skupinách vytváří situace rozvíjející komunikaci jak mezi žáky vzájemně, tak mezi žáky a učitelem

2.2 Moje zkušenosti s výukou matematiky ve třídě A

Ve školním roce 1998/99 jsem se stala třídní učitelkou v primě. Třídu, kterou jsem vedla až do oktávy (2005/2006) – do maturity, označme jako třídu A. Učila jsem zde matematiku po dobu osmi let. Ve třídě bylo 30 žáků (15 dívek, 15 chlapců).

Práce několika žáků jsou ve druhé a třetí kapitole analyzovány. Žáci zde vystupují pod fiktivními jmény: Adam, Aleš, Anna, Bohouš, Boris, Emil, Eliška, Ester, Eva, Hana, Havel, Helena, Karel, Klára, Lenka, Linda, Mirek, Olda, Ota, Tonda a Veronika.

V následujícím odstavci uvádím několik epizod, které se odehrály na mých hodinách v této třídě v průběhu jejich studia a ilustrují nejen znalosti a zkušenosti žáků, ale i klima, které ve třídě na hodinách matematiky panovalo. Seznam zkušeností by mohl být daleko rozsáhlejší, ale pro potřeby ilustrace je snad postačující. Uvedené zkušenosti nejsou úzce zaměřeny pouze na experiment „válec", ale jsou pojaty ve větší šířce a budou zároveň využity u popisu a u analýzy experimentu „úhel".

1. Klasifikace trojúhelníků (prima 1998/99, žáci jedenáctiletí)

Téma: Klasifikace trojúhelníků. Při půlené hodině cvičení z matematiky žáci pracovali ve skupinách po čtyřech. Měli připravené úlomky špejlí daných délek, z těch sestavovali různé trojúhelníky. Skupiny dostaly zadány tyto úkoly :

1. *Zjistěte, ze kterých tří úlomků lze sestavit trojúhelník a ze kterých nikoliv. Pokuste se formulovat pravidlo, které umožní předem rozhodnout, zda trojúhelník lze sestavit, známe-li délky úlomků.*
2. *Rozdělte trojúhelníky do skupin podle délek stran – charakterizujte jednotlivé skupiny.*
3. *Rozdělte trojúhelníky do skupin podle velikosti vnitřních úhlů – charakterizujte jednotlivé skupiny.*

Po splnění jednotlivých úkolů následovala diskuse. Původně diskuse probíhala na úrovni učitel – třída, postupně pak přešla do spontánní rozpravy ve třídě (žáci se nehlásili o slovo, diskutovali o matematickém problému samostatně mezi sebou bez zásahu učitele). Později se podobný přechod od řízené diskuse k diskusi spontánní stal součástí hodin matematiky a kolegové konstatovali, že podobná tendence třídy, diskutovat problémy vzájemně mezi sebou, se objevuje ve třídách, v nichž učím matematiku. Nutno doložit, že někdy mi dělalo potíže takovou diskusi utlumit, když mě k tomu situace nutila – zejména časový tlak.

Při diskusi po vypracování třetího úkolu, po zhodnocení charakteristiky ostroúhlých trojúhelníků, se žáci zaměřili na trojúhelníky pravoúhlé. Část diskuse jsem zaznamenala:

Učitelka : Jak jste poznali, který trojúhelník je pravoúhlý ?

Linda : Pravoúhlý trojúhelník má aspoň jeden z vnitřních úhlů pravý.

Učitelka : Říkáš – aspoň jeden z vnitřních úhlů pravý ? To znamená, že jich může mít i víc pravých ?

Linda : Ano, třeba dva.

Emil : (vykřikuje bez vyzvání) To je nesmysl, to nejde !

Adam : (opět bez vyzvání) A proč by to nešlo ?

Žáci : To by přeci nebyl trojúhelník !

Linda – nic neříká, jen překvapeně sleduje spolužáky.

Emil : Podívej, když vezmu jednu stranu (bere jeden úlomek špejle) a k tomu přidám druhou pod pravým úhlem (přidává druhý úlomek) a k tomu pak třetí taky pod pravým úhlem (doplňuje třetí úlomek), tak se přeci strany neprotnou a není to trojúhelník.

Zkušenosti pro učitele:

- žáci byli při modelování „vtaženi do děje“
- sami objevovali nové souvislosti

- pro podpoření svého argumentu při vysvětlení a upřesnění pojmu pravoúhlý trojúhelník použili modelování
- činnost je vedla ke vzájemné komunikaci, byli nuceni argumentovat, formulovat myšlenky, upřesňovat vyjadřování
- již v primě byli žáci schopni diskutovat bez zábran o svých názorech

2. Koza Serafína (prima 1998/99, žáci jedenáctiletí)

Výuka matematiky v této třídě byla doplňována zajímavými úlohami, které žáci dostávali formou dobrovolných domácích cvičení. Mezi nejoblíbenější patřila „Koza Serafína", tu zadávám žákům primy jako propedeutiku k množinám bodů dané vlastnosti. Námět pochází z časopisu Kvant č.5 – ročník 1974, uvedená verze (viz příloha 2.2.1) je převzata ze sbírky úloh a námětů pro práci s matematickými talenty na ZŠ (Bachelová, 1992, s. 22).

Úloha je zadána formou příběhu. Vypráví se v něm o chlapci Míšovi na prázdninách, který měl povinnost pást kozu. Nejprve ji přivazoval jedním provazem k jednomu kolíku na dostatečně velké louce, pak kozu pásl na pruhu louky omezeném kukuřičným polem, přivazoval ji dvěma kolíky a měl dva provazy. Žáci mají za úkol navrhnout, jak má chlapec kozu uvázat a nakreslit útvary, které koza vypase.

Text úlohy žáci vyslechli jako vyprávění a při hodině řešili první úkol. Za domácí cvičení řešili druhý úkol – pás louky mezi kukuřicí. Úloha pokračuje dalším líčením starostí Míši s uvazováním kozy, kde se mění podmínky – tvar louky, počet kolíků, přibude další koza. Náročnější úkoly v pokračování úlohy řešili žáci už jen jako dobrovolné domácí cvičení a třídu pak seznámili s výsledky svého bádání.

Překvapivě žáky neodradil zdlouhavý text úlohy, přijímali ho jako vyprávění příběhu. První úkol – odhalit, že vypasená plocha má tvar kruhu, byl pro žáky snadný. Vyřešili ho téměř všichni velmi rychle. Druhý úkol přinesl několik různých námětů, které se staly podnětem k živé diskusi a k hledání optimálního řešení. Většina žáků uvedla, že je třeba natáhnout provaz mezi dva kolíky, kozu uvázat na kratší provaz, který bude klouzat po provaze mezi kolíky. Diskutovali jsme nejen umístění kolíků a délku provazu pro kozu, ale i technické provedení – jak to zařídit, aby se koza do provazu nezamotala.

Žák Tonda přišel s nápadem, že kozu uváže na karabinu, tu navlékne na provaz připevněný mezi dva kolíky (provaz je o něco delší než je vzdálenost kolíků). Správně pak nakreslil a pojmenoval vzniklý útvar. Odhalil tak provázkovou konstrukci elipsy. O tři roky později na otázku: „Vzpomínáte si na některý váš osobní objev v matematice, při kterém jste prožili radost?“ Tonda odpověděl: koza Serafína. To potvrzuje, že objev elipsy byl pro chlapce skutečně silným zážitkem.

Zkušenosti pro učitele:

- úloha zadaná formou příběhu byla pro jedenáctileté žáky silně motivační
- otevřenost úlohy umožnila uplatnit tvořivý přístup žáků, přinesla pestrou škálu různých řešení, byla podnětná pro diskusi
- při hledání optimálního řešení žáci argumentovali, upřesňovali formulace, zvažovali souvislosti
- dobrovolnost domácího cvičení umožnila vyniknout žákům, které neodradila časová náročnost úkolu. Byli to i takoví žáci, kteří potřebují víc času na rozmýšlení a při hodinách bývají zastíněni rychlejšími spolužáky
- myšlenka kozy Serafíny jako první izolovaný model elipsy, který Tonda samostatně objevil, neupadla v jeho vědomí v zapomnění. To znamená, že tato myšlenka byla virtuálně přítomna v některých dalších úvahách, které chlapec dělal a tedy po dobu tří let zrála v jeho kognici.

3. Poznávání čísla π (tercie 2000/2001, žáci třináctiletí)

Téma: Obvod kruhu. Číslo π žáci poznávali při probírání tématu kruh. Žáci nejprve pomocí mnoha měření kruhových předmětů objevili, že u kruhů je poměr obvod/průměr nezávislý na velikosti kruhu a je roven přibližně číslu 3. Někteří žáci si na číslo π vzpomněli, zejména ti, kteří pracují často s kalkulačkou. V tabulkách a na kalkulačkách jsme pak našli hodnotu $\pi \approx 3{,}14$ a získané poznání o poměru obvod/průměr jsme stručně zapsali vztahem $l = 2\pi r$ a $l = \pi d$.

Téma: Obsah kruhu. Po seznámení se a zažití pojmu obvod kruhu jsme přistoupili k hledání způsobu, jak určit obsah kruhu. První pokusy žáků většinou vycházely z kruhu vepsaného do čtverce na čtverečkovaném papíře, pak postupně žáci počítali celé čtverečky uvnitř kruhu, přidávali další části čtverečků, které ležely na obvodu. Tato činnost byla zdlouhavá a podle žáků nevedla dostatečně rychle k cíli. Následovala výzva : „Rozdělte kruh na 12 částí tak, aby se z nich dal sestavit útvar blízký k útvaru, který dobře znáte.“ Činnost dělení a sestavování nových útvarů dovedla žáky k poznání, že obsah kruhu je dán součinem čísel πr a r.

Zkušenosti pro učitele:

- žáky činnost zaujala
- ti, kteří skutečně poctivě měřili a počítali, získali dostatečnou zkušenost se vztahem průměru a délky kružnice (izolované modely)
- mnozí žáci znali číslo π už dříve, nejčastěji z kalkulátoru
- při hledání obsahu kruhu mohl být ještě pro některé žáky ponechán větší prostor k vlastní cestě objevu, například vpisováním a opisováním mnohoúhelníků

4. Optimalizační úloha (tercie 2000/2001, žáci třináctiletí)

Další oblíbené modelování je pomocí provázků, překládáním papíru, využíváním různých skládaček – tyto činnosti často pomohly oživit výuku. Mnoho inspirací nabízely především semináře a dílny pro učitele matematiky, které na toto téma vedli Vladimíra Čuhajová (například: „provázková geometrie", skládání pravidelných n-úhelníků z papíru bez stříhání...) Václav Sýkora (například: „krabicování", geometrie překládaného papíru, origami...), Alena Šarounová (například: měření pomocí historických nástrojů, modelování těles z netradičních sítí, „dlaždicování"...). Mnoho z těchto námětů jsem se svými žáky ve výuce realizovala.

Zkušenosti žáků z těchto činností se pak promítaly ve způsobech řešení dalších úloh. Dokumentují to například žákovská řešení osvědčeného projektu „Hledej útvar". Pilotní úlohou byla následující úloha:

Úloha 2.13: Najděte rovinný útvar o maximálním obsahu při daném obvodu 24 cm.

Je to upravené cvičení 11 z učebnice *Kruhy a válce* (Herman, 1996, s.61)

Pro řešení úlohy dostali žáci do skupiny provázek a čtverečkovaný papír. V některých skupinách žáci hodně využívali možnosti modelování pomocí provázku, v jiných rýsovali a potřebné údaje zjišťovali měřením a pak teprve počítali, v dalších načrtávali do čtverečkovaného papíru. Chlapci s dobrým logickým myšlením a prostorovou představivostí rovnou vyslovovali hypotézy, které ověřovali výpočtem.

Některé zajímavé diskuse ve skupinách jsem zaznamenala již během hodiny.

V jedné skupině žáci po celou dobu velmi dobře spolupracovali, k modelování útvarů využívali provázek, tužky, čtverečkovaný papír, živě diskutovali.

Emil : Obsah čtverce je 16 cm². To je nějak divný.

Učitel : Vymodelujte tento čtverec pomocí vašeho provázku.

Žáci modelovali a vyvodili závěr, že strana čtverce je 7 cm (provázek byl pružný a žáci ho příliš napínali) – viz obrázek 2.4.

Obrázek 2.4: Modelování pomocí provázku

Učitel : Můžete se o správnosti přesvědčit výpočtem ?

Žáci : Obsah je 49 cm².

Učitel : Teď tedy věříte, že strana čtverce je 7 cm ?

Emil : No, dyť jsme dopočítali S = 49 cm².

Učitel: Ověřte ještě jinak délku strany čtverce v souvislosti s jeho obvodem.

Eva : No jo, dyť 4 x 7 je 28 a ne 24 !

Při výpočtu obsahu vymodelovaného lichoběžníku žáci této skupiny narazili na problém určení výšky.

Emil : Výška je kolmá na protější stranu a prochází vrcholem ? Tak to nemůže být, jak říkala Eliška, že prochází středem protější strany.

V jiné skupině chlapci testovali mnohoúhelníky, potřebovali konstrukci pětiúhelníku. O problému přemýšleli i večer doma a druhý den přišli s objevem, který předvedli i ostatním.

Dodatek: B. Wollring objevil velmi zajímavý postup konstrukce pravidelných n-úhelníků, kde n je liché číslo – vychází z toho, že žáci umějí snadno narýsovat například šestiúhelník. Ten narýsují a vystřihnou. Dál vystřihnou ze šestiúhelníku jeden rovnostranný trojúhelník, dostanou tak plášť pravidelného pětibokého jehlanu, ten spojí a obkreslí podstavu – pravidelný pětiúhelník.

V další skupině dívky přesně rýsovaly, přesně počítaly. Problém nastal při porovnání obsahu rovnoběžníku a obdélníku stejného obvodu. Dívky řešení neviděly ani při nakreslení obrázku, kde pomocí přenesení trojúhelníku převedly rovnoběžník na obdélník. Tváře se jim rozjasnily v okamžiku, kdy jsme útvary modelovali pomocí provázku a provázkem pohybovali.

Veronika : *Když já nikdy nic nevidím.*

Učitel : *Ani teď ne ?*

Veronika : *Teď už jo, ale sama od sebe ne.*

Úlohu jsme pochopitelně v průběhu jedné hodiny nevyřešili, i když kromě jedné skupiny všichni označili kruh za útvar o maximálním obsahu. Zdůvodnění jsme věnovali ještě další dvě vyučovací hodiny. Většinu žáků problém zaujal a dobrovolně v bádání pokračovali i doma. Diskutovali jsme o tom, co je a co není dostatečným důkazem toho, že kruh je hledaným útvarem. Dokazování jsme neuzavřeli, slíbili jsme si, že se příležitostně k této úloze budeme vracet ještě ve vyšších ročnících.

Zkušenosti pro učitele:

- při třídění rovinných útvarů a porovnávání jejich obsahů si žáci zopakovali řadu pojmů
- žáci spontánně formulovali myšlenky a své formulace opravovali.
- často se projevila nepřesnost ve vyjadřování (čtverec má stěny), ta se však dala korigovat
- porovnáním výsledků s ostatními skupinami žáci sami přicházeli na chyby ve výpočtech
- modelování pomohlo objasnit vlastnosti rovnoběžníku
- při hledání útvaru žáci sami generovali další problémy a hledali jejich řešení
- projekt motivoval žáky k dalšímu přemýšlení i k dobrovolné domácí činnosti
- rozhodování o správném výsledku si vynutilo úvahy o metodách důkazů

5. Měření výšky budovy – práce v terénu. (kvarta 2001/2002, žáci čtrnáctiletí)

Téma: Řešení pravoúhlého trojúhelníku – praktická úloha – Změřte výšku budovy naší školy. Žáci předem navrhli postup práce, připravili si pomůcky a následující hodinu v terénu prakticky ověřili navržený postup.

Pro měření výškového úhlu s žáky vyrábíme pomůcku „kvadrant“ (inspirováno dílnou pro učitele matematiky vedenou Alenou Šarounovou).

Zkušenosti pro učitele (kromě některých dříve uvedených):

- praktické měření v terénu oživilo vyučování, bylo silně motivující
- žáci použili několik rozdílných strategií řešení
- při skupinové práci diskutovali, při měření zcela přirozeně spolupracovali

6. Měření délky plotu – práce v terénu. (sexta 2003/2004, žáci šestnáctiletí)

Téma: Řešení obecného trojúhelníku – praktická úloha:

Úloha 2.14: Určete délku plotu před protějším domem.

Podmínka: Veškerá měření provádějte pouze ve třídě a z okna třídy.

Žáci nejprve navrhli a pak realizovali postup pro určení délky plotu. Nejčastěji žáci změřili vzdálenost dvou oken, z nichž pak zaměřili okraje plotu a určili potřebné úhly. K měření délky použili pásmo, k měření úhlů obyčejné úhloměry. Změřené údaje použili k výpočtu délky plotu – nejčastěji užitím sinové věty. Na závěr ověřili přesnost svých měření a výpočtů změřením skutečné délky plotu venku. Následovalo porovnávání postupů řešení a dosažené přesnosti.

Pro žáky bylo překvapivé, že se některé výsledky značně odlišovaly od skutečnosti. V diskusi pak došli k závěru, že slabým místem v jejich postupu bylo především nepřesné měření úhlů, získali tak zkušenost, že správně použitá teorie sama o sobě nestačí k úspěšnému řešení reálného úkolu, je nutné zvážit i technickou stránku realizace. Společně zvažovali možnosti vylepšení přesnosti měření.

Zkušenosti pro učitele (kromě jiných dříve uvedených):

- při praktické činnosti žáci získávají cenné zkušenosti s technickou realizací
- aplikační úloha prověřila schopnost řešit obecný trojúhelník

2.3 Experiment V1

Ve třídě, označme ji B, jsem učila matematiku od tercie (1999/2000) do oktávy (2004/2005). Žáci byli zvyklí na konstruktivistické pojetí výuky.

V červnu 2000 jsme v této třídě probírali téma povrch válce. Žáci již znali pojem rotační válec, s pojmy podstava a plášť se setkali u kvádru. Činnosti byly připraveny tak, aby žáci mohli odvodit vzorec na výpočet povrchu válce na základě vlastních pozorování a zkušeností, a aby modelovali. Žákům byly rozdány barevné papíry, na tabuli byla napsána výzva:

Úloha 2.14:

1. *Navrhněte síť válce, tuto síť narýsujte na barevný papír.*
2. *Síť válce vystřihněte a modelováním válce ověřte správnost.*
3. *Změřte potřebné údaje a vypočtěte povrch vymodelovaného válce.*

Nalezněte vzorec pro výpočet povrchu válce.

Žáci pracovali ve skupinách, během jedné vyučovací hodiny téměř všechny skupiny úspěšně úkol dokončily.

Byla to jedna z hodin, kde „objevovací" činnost žáků nahradila klasickou formu frontální výuky – instruktivní výklad nové látky. Tak se zrodila myšlenka zopakovat stejný postup v následné třídě a získat tak materiály pro možnost prezentace „objevovací" činnosti žáků.

Postup byl zopakován v říjnu 2001. V následujících oddílech je tato experimentální hodina označena jako experiment V2.

2.4 Příprava experimentu V2

2.4.1 Vstupní údaje

Experiment proběhl ve třídě A, o které je psáno v odstavci 2.2. Stalo se tak v období, kdy žáci byli v kvartě (30 žáků – 15 dívek, 15 chlapců).

Téma hodiny:

Objevování vzorce pro výpočet povrchu rotačního válce za použití teorie izolovaného modelu, s důrazem na vytvoření generického i abstraktního modelu.

Cíl experimentu:

Mapovat myšlenkové procesy žáků při objevování vzorce pro povrch válce.

2.4.2 Scénář experimentu V2

Zvažovala jsem formu práce žáků a výzvu, kterou budou k práci motivováni. Pokud jde o formu, byla zvolena skupinová práce, neboť v dané třídě má na většinu žáků tato forma motivační vliv. Pro „nastartování" a usměrňování práce žáků bude použita stejná výzva jako v experimentu V1 – úloha 2.14 (viz odstavec 2.3.)

K realizaci této alternativy budou žáci potřebovat barevné papíry, nůžky a rýsovací potřeby. Učitel přinese barevné papíry, ostatní pomůcky mají žáci u sebe.

Žák vychází z představy válce (případně jej kreslí), navrhuje jeho síť – musí objevit, že plášť válce je vlastně obdélník a jedna jeho strana má délku rovnou obvodu kruhu podstavy. Dál žák manipulací vytváří fyzický model sítě a z ní pak fyzický model válce. Je zřejmé, že je zde bohatá manipulativní zkušenost a tedy i větší pravděpodobnost správného řešení úlohy.

2.4.3 Sběr dat

V průběhu experimentu bude dělána fotodokumentace a aspoň heslovité poznámky o zajímavých jevech, které se na hodině vyskytnou. Na závěr hodiny budou od žáků vybrány jejich písemné práce i vytvořené modely. Písemné dokumenty žákovských prací – viz přílohy 2.6.1 – 2.6.5, 2.7.3; modely sítí vytvořených žáky – viz příloha 2.7.3; foto-dokumentace – viz přílohy 2.7.1, 2.7.2.

2.4.4 Očekávání učitele

Předpokládaný řešitelský proces žáků je možné rozdělit do tří částí. První část, iniciovaná úlohami 1 a 2, je zaměřená na manuální modelování geometrických objektů se záměrem získat zkušenosti s prostorovým objektem a jeho sítí. Druhá část, iniciovaná úlohou 3, vede žáky k měření a třetí, poslední, iniciovaná úlohou 4, k abstrakci procesu měření a počítání s cílem objevit obecný vzorec. Postup od druhé části ke třetí je abstrakčním zdvihem od izolovaného modelu k modelu univerzálnímu (Hejný, Kuřina 2001, s. 84).

V dubnu 2004 jsem zpětně rekapitulovala svá očekávání a porovnávala je s výsledky analýz. Očekávání učitele nebylo zachyceno písemně před experimentem, ale následně při analýzách žákovských prací.

Očekávala jsem:

- žáci budou aktivně zapojeni do činnosti

- skupiny dojdou k objevení vzorce, některé rychleji, jiné pomaleji s podporou manipulativní činnosti. Byla jsem připravena pomáhat slabším skupinám zejména jsem je chtěla nabádat k modelování.

Pokud jde o konkrétní kroky objevu, vycházelo moje očekávání z vlastní zkušenosti a lze jej rozložit do následujících položek:

- náčrt sítě – objeví se u všech skupin, bude východiskem pro modelování i výpočet
- objev vztahu mezi „délkou" pláště (a) a obvodem podstavy (l); tento vztah budeme v budoucnu stručně psát „a ↔ l"
- použití vztahu mezi poloměrem (r) a obvodem podstavy (l)
- ověření správnosti sítě sestavením modelu
- měření veličin potřebných pro výpočet povrchu
- číselný výpočet povrchu z naměřených (zvolených) údajů na modelu
- formulace vzorce
- dosazení do objeveného vzorce.

2.5 Průběh experimentu V2

2.5.1 Celkový pohled

15.10. 2001 - čtvrtá vyučovací hodina, přítomno 28 žáků – 13 dívek a 15 hochů.

Na začátku hodiny jsem vyzvala žáky, aby se rozdělili do dvou až čtyřčlenných skupin. Tento způsob organizace hodiny je pro tuto třídu běžný a žáci jej plní okamžitě a spontánně. Každé z osmi vytvořených skupin jsem dala několik barevných papírů a jeden bílý. K tomu jsem řekla: „Barevné papíry máte na experimentování a na ten bílý mi napište, jak jste postupovali." Na tabuli jsem pak napsala všechny čtyři úkoly uvedené ve výzvě v úloze 2.14 (viz odstavec 2.3).

Skupiny se ihned pustily do práce, která trvala 35 minut. Klima bylo zcela uvolněné, sedm skupin po celou dobu pracovalo zaujatě. Výjimku tvořila skupina číslo 6 složená ze čtyř chlapců, z nichž na počátku pracoval pouze jeden a ostatní tři se bavili.

Já jsem se věnovala fotografování a zaznamenávání práce a chování žáků. Ojediněle jsem na požádání pomohla návodnou úlohou.

Po objevení vlastních vzorců mohli zástupci skupin udělat „špionáž" u ostatních skupin a porovnat výsledky. Měla jsem ještě připraveno ověření správnosti vzorců kontrolním výpočtem povrchu válce jiné skupiny. Domnívala jsem se však, že to v tu chvíli již nebylo nutné. „Špioni" chyby odhalili.

Na závěr hodiny jednotlivé skupiny prezentovaly výsledky své práce – obrázek sítě, model vytvořeného válce a vzorec, který objevily. Společně jsme upřesnili terminologii a značení (podstava, plášť, výška válce, poloměr podstavy) a já jsem na tabuli shrnula podstatné a správné objevy žáků.

Další hodinu jsme vzorec procvičovali řešením úloh. Následnou písemnou práci napsali téměř všichni žáci správně, vyskytly se pouze drobné nedostatky.

Experimentální data zahrnovala:

1) modely sítí válců a písemné záznamy žáků při hledání vzorce pro povrch válce,

2) písemný popis práce, který o svém hledání vzorce napsala každá skupina,

3) písemné záznamy o průběhu experimentu, které jsem po hodině zapsala,

4) fotografie zachycující práci jednotlivých skupin

5) dodatečné rozhovory s několika žáky, které se uskutečnily s odstupem půl roku (v polovině dubna 2002).

Analýzy materiálů sub 1) až 4) ukázaly, že další zajímavé informace by mohly poskytnout následné rozhovory s některými žáky třídy. O datech takto získaných mluví položka 5).

2.5.2 Popis práce jednotlivých skupin – přehled

Každá skupina měla jinou organizaci práce a objev vzorce probíhal jiným způsobem. V následujícím odstavci uvedu v přehledu velmi stručnou charakteristiku všech osmi skupin a symbolicky popíšu postup práce skupiny.

Skupina č. 1 – dva chlapci s dobrým matematicko-logickým uvažováním i prostorovou představivostí, oba úspěšní řešitelé okresních kol MO

Postup 1: (na vedlejším papíru) *náčrt sítě → vzorec povrchu válce algebraicky* (ústně sdělen učitelce; ta je zaskočena – viz odstavec 2.6.1).

Učitelka chlapce žádá, aby vzorec ověřili, vytvořili model válce a na něj aplikovali odvozený vzorec.

Postup 2: (nový) *náčrt sítě → volba rozměrů → výpočty → vzorec povrchu válce slovně → vzorec povrchu válce algebraicky → síť → správný model → výpočet dosazením do vzorce*

Poznámka: podrobnou analýzu práce této skupiny uvádím v odstavcích 2.6.1 a 2.7.2

Skupina č. 2 – čtyři dívky zaměřené spíše na jazyky, jedna z nich s dobrou prostorovou představivostí

Postup: *náčrt prostorového modelu válce → vzorec povrchu válce slovně → volba rozměrů → výpočty → měření → síť → správný model → výpočet obsahu kruhu → výpočet obsahu obdélníku → sečtení údajů*

Poznámka: podrobnou kognitivní analýzu práce této skupiny uvádím v odstavci 2.6.2.

Skupina č. 3 – tři dívky, u kterých se vyskytuje psychický blok („stejně nic nevymyslím, matika mi moc nejde, ale chci to zkusit objevit, abych to lépe pochopila"), a jeden chlapec, spíše jazykový typ

Postup: postupují přesně podle instrukcí, odhadují síť – nejprve zkusmo několik neúspěšných pokusů

vystřižení sítě → chybný model → vystřižení změněné sítě → jiný chybný model→ měření obdélníku a výpočet r → správný model → vzorec slovně

Poznámka: podrobnou analýzu práce této skupiny z pohledu interakcí mezi žáky uvádím v odstavci 2.7.4

Skupina č. 4 – dva chlapci s dobrým matematicko-logickým myšlením, vše promýšlejí do souvislostí a důsledků

Postup: *náčrt sítě → volba rozměrů → výpočty → vzorec povrchu symbolicky → výpočet obsahu kruhu → výpočet obsahu obdélníku → síť → chybný model → opakování pokusu → správný model → vzorec algebraicky*

Poznámka: podrobnou analýzu práce této skupiny z pohledu interakcí mezi žáky uvádím v odstavci 2.7.1

Skupina č. 5 – čtyři chlapci technicky zaměření s matematicko-logickým myšlením, jeden z nich je úspěšným řešitelem okresních kol MO

Postup: (bez nákresu okamžitě obecný vzorec) $2\pi r^2 + lv$ *→ volba rozměrů → výpočty → správný model → výpočet dosazením do vzorce*

Poznámka: práce skupiny je analyzována v souvislosti s vývojovými diagramy v odstavci 2.8.2 a přílohách 2.8.5 a 2.8.6

Skupina č. 6 – čtyři chlapci, kteří mají problémy s udržením pozornosti, výpočty v matematice provádějí výhradně pomocí kalkulátoru, nevydrží sedět v klidu, vyhovuje jim činnost v pohybu (např. praktické měření a výpočet průměrné rychlosti nebo „běhavé" diktáty)

Postup: *vzorec z přehledu → volba rozměrů → výpočty → měření → síť → chybný model → opakování pokusu → správný model → vzorec jiný než z přehledu*

Poznámka: podrobnou analýzu práce této skupiny uvádím v odstavcích 2.6.3 a 2.7.3.

Skupina č. 7 – dva chlapci, dvě dívky, vůdčí osobnost skupiny dívka s dobrým matematicko-logickým myšlením a dobrou prostorovou představivostí

Postup: *volba rozměrů, výpočty, narýsování sítě → správný model → vzorec slovně → vzorec symbolicky → výpočet dosazením do vzorce*

Skupina č. 8 – čtyři svědomité, pracovité dívky s rozvinutou jazykovou inteligencí

Postup: *slovní popis postupu i výpočtu → rozměrů → měření → síť → výpočty → správný model → vzorec slovně → vzorec symbolický → vzorec algebraický → výpočet povrchu dosazením do vzorce*

Poznámka : Analýzu práce této skupiny uvádím v odstavci 2.6.4.

2.6 Analýza práce skupin 1, 2 , 6 a 8

V tomto odstavci jsou uvedeny podrobné analýzy práce vybraných skupin, které se jevily jako nejzajímavější. Velmi stručně je popsáno sociální klima ve skupině (interakcím mezi žáky se podrobně věnuje odstavec 2.7), postup objevu vzorce a komentář.

Připomeňme 4 složky úlohy tak, jak byly zadány žákům (viz 2.3)

1. Navrhněte síť válce, tuto síť narýsujte na barevný papír.
2. Síť válce vystřihněte a modelováním válce ověřte správnost.
3. Změřte potřebné údaje a vypočtěte povrch vymodelovaného válce.
4. Nalezněte vzorec pro výpočet povrchu válce.

Analýzou žákovských prací bylo identifikováno 12 kognitivních fenoménů, které mohou mít účast na řešitelském procesu.

1. Představa válce (samo sebou se rozumí, že rotačního)
2. Představa sítě válce; žáci znají síť hranolu i jehlanu. Znalost projekce 3D do 2D. Znalost sítě válce – 2 shodné kruhy a obdélník
3. Manuální zručnost – realizace
4. Porovnání představy a produktu.
5. Identifikace parametrů: poloměr, délka a šířka obdélníka.

6. Poznání že obvod kruhu je délkou obdélníka.
7. Znalost vzorce pro obsah kruhu
8. Znalost vzorce pro obvod kruhu
9. Znalost vzorce pro obsah obdélníku
10. Numerické dosazení
11. Kalkulace
12. Artikulace výsledků.

2.6.1 Skupina č. 1

Složení skupiny: dva chlapci, Boris a Bohouš, v době experimentu oba úspěšní řešitelé okresních kol MO.

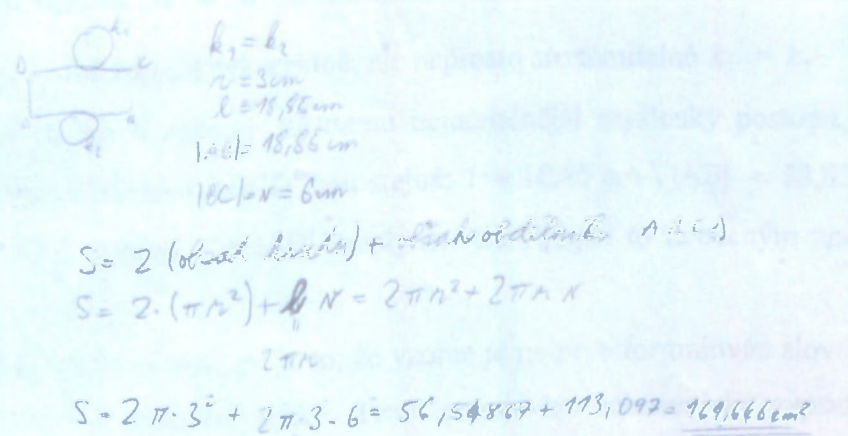
Sociální klima: Spolupráce obou žáků je dialogická, žádný z nich není dominantní, myšlení obou je paralelní, nedochází ke konfliktu.

Žáci řeší danou úlohu dvakrát.

Postup1: (nemáme o něm žádný písemný doklad) Žáci velice rychle načrtnou na pomocném papíru síť a přivolané učitelce sebevědomě řeknou správný výsledný algebraický vzorec.

Učitelka žádá, aby úlohu vyřešili v té šíři, jak je v zadání. Chlapci nejprve protestovali: „To je zbytečné!" a pak se ne příliš nadšeně pustili do práce [7][5]. Tím začíná druhý řešitelský postup.

Postup 2: Kopie žákovského řešení skupiny č.1 – viz obrázek 2.5 (příloha 2.6.1)



Obrázek 2.5: Řešení skupiny č.1 na bílém papíru

[5] Číslo v hranaté závorce odkazuje k příslušnému bodu v následném komentáři, kde je daný jev podrobněji analyzován.

Evidence:

E1: Žáci nakreslí síť válce jako obdélník $ABCD$ se správně „přilepenými" kruhy/kružnicemi [1] označenými k_1 a k_2.

E2: Obrázek (jeho rozměry jsou asi 3 cm x 3 cm) není geometrická reprezentace sítě, ale schéma sítě které obsahuje předpokládaný postup řešení. To lze vidět z označení objektů: písmeny A, B, C, D zdůrazňují, že se jedná o obdélník (který je v realitě pláštěm válce) a malými písmeny u kruhů zdůrazňují, že bude nutno počítat obvod. Vše další je jen rutina. Vše je napsáno úhledně, tužkou.

E3: Žáci nalezli hledaný vzorec, ale ani model válce, ani konkrétní výpočet neudělali. Až na přímou výzvu učitelky tyto pro ně „podřadné" věci dodělali.

E4: Model vytvořili z barevného papíru podle zvolených čísel a konkrétní výpočet na poslední řádek bílého papíru zapsali perem.

E5: Síť byla udělána úhledně.

Komentáře: Jak bylo uvedeno v poznámce pod čarou, některé z bodů komentáře se vztahují ke konkrétním krokům v postupu. V tomto případě jde o body 1 – 4. Další body komentáře nemají tak přesnou lokalizaci a vztahují se k větším celkům, nebo k celému procesu.

K1: Termínem „kruh/kružnice" označujeme synkretickou představu žáků, ve které oba pojmy, kruh i kružnice, nejsou dostatečně odlišeny označením. V předcházejících hodinách jsme důsledně rozlišovali mezi kružnicí značenou malým písmenem k a kruhem značeným velkým K.

K2: Shodnost kruhů zapsali nekorektně, ale naprosto srozumitelně $k_1 = k_2$.

K3: Zajímavý je jejich způsob záznamu nejnáročnější myšlenky postupu, totiž toho, že obvod kruhu a délka obdélníku ABCD jsou stejné: $l \approx 18{,}85$ cm \ $|AB| \approx 18{,}85$ cm. Důsledně vzato, z těchto vztahů rovnost $l = |AB|$ neplyne. Ale chlapci to uvedeným způsobem zřejmě chápali.

K4: Nejzajímavější částí postupu je to, že vzorec je nejprve formulován slovně, a teprve pak jsou místo slov použity příslušné znaky. Tento proces lze schématicky zapsat posloupností: poznání v činnosti → vytvoření představy → poznání ve slovech → znakový zápis (*)
V uvedeném případě je názorně ilustrována právě poslední šipka tohoto procesu.

K5: Vyvozování vzorce je na bílém papíru, avšak podrobnější vysvětlení postupu, které tam mělo podle instrukce učitelky být, chybí. Oba žáci se zřejmě domnívali, že jejich zápis je zcela jasný.

K6: Ze záznamů je jasné, jak k objevu došlo. Je pravděpodobné, že oba žáci měli ve své představě příslušné schéma sítě i způsobu tvorby vzorce téměř okamžitě. Svou představu přehledně formulovali zápisem.

K7: Oběma žákům se nelíbilo, že je učitelka žádala, aby vytvořili model a udělali numerický výpočet, protože tuto činnost považovali za podřadnou. Našli bez pomoci učitelky abstraktní poznatek (vzorec) a učitelka žádala, aby našli i generický model. To museli cítit jako plýtvání časem i energií a proto se vůči tomu trochu vzepřeli. Svoji nelibost s příkazem učitelky projevili v dodatečných rozhovorech (viz odstavec 2.7.2) nízkým ohodnocením náročnosti úlohy.

K8: Vhodnější reakce učitelky by vedla k nasměrování zájmu žáků do oblasti pro ně neznámé. Například, aby našli rozměry válce, jehož povrch je 200 cm^2, nebo aby sestrojili síť komolého kužele.

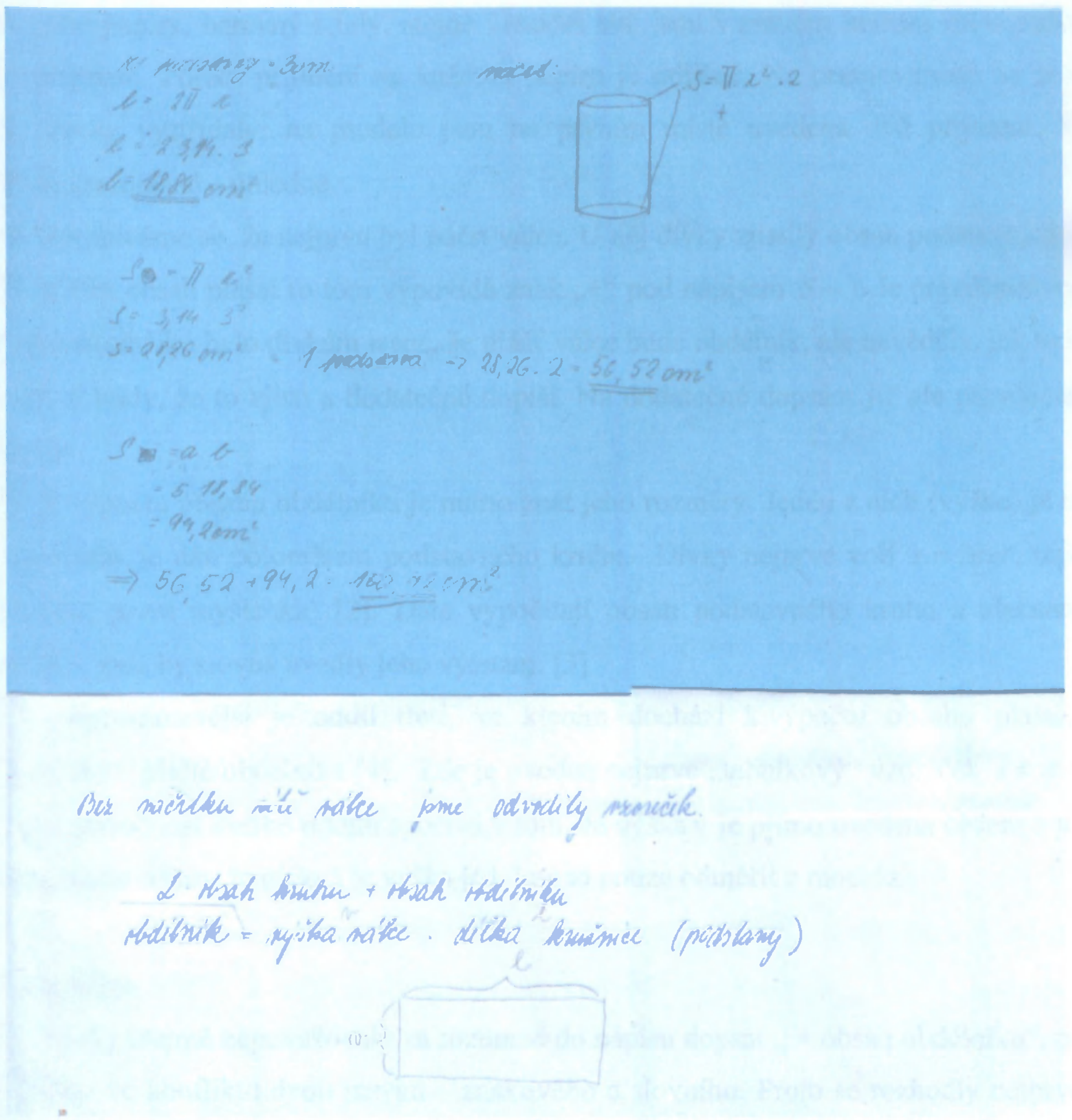
Shrnutí: Chlapci hned od začátku měli jasnou představu rotačního válce i sítě válce včetně správného přiřazení délky kružnice a strany obdélníku, nepotřebovali rozhodovat ani kontrolovat. Jejich kontrola proběhla jen na úrovni myšlenkové a představ. Kontrola modelem byla zbytečná. Mají s jistotou zvládnuté vzorce pro výpočet délky kružnice i obsahu kruhu. Mají dobrou prostorovou představivost, vše jim připadá evidentní, neváhají. Zvládnutí vzorce pro výpočet povrchu válce je na úrovni abstraktního poznání.

2.6.2 Skupina č. 2

Složení skupiny: čtyři dívky, Klára má dobrou prostorovou představivost, další tři dívky jsou zaměřeny spíše na jazyky; všechno „svědomité studentky“.

Sociální klima: Dobrá spolupráce všech dívek.

Postup: Kopie žákovského řešení skupiny č. 2 – viz obrázek 2.6 (příloha 2.6.2)



Obrázek 2.6: Řešení skupiny č.2 na modrém a bílém papíru

<u>Evidence:</u>

E1: Na modrém papíru u obrázku válce je nápis $S = \pi r^2 \cdot 2$ {= 36 cm}[6] + [1] .

E2: Nápisy jsou uspořádány do třech oddílů pod sebou.

E3: Ve třetím oddílu poslední, čtvrtý řádek je od třetího mírně odsazen a zdá se, že tvoří samostatný oddíl.

E4: Na bílém papíru je perem napsáno vysvětlení postupu [7].

E5: V poslední řádce je slovo „obdélník" napsáno na přelepce. Pod ní bylo slovo válec.

E6: Přiložen je správný model sítě.

---

[6] Ve složené závorce jsou uvedeny nápisy, které byly vygumovány, ale jsou ještě znatelné.

E7: Oba papíry, barevný i bílý, stejně i model sítě jsou v pravém horním rohu podepsány čtveřicí příjmení. Pořadí příjmení na každém papíru je odlišné. Na prvním místě se postupně všechny dívky vystřídaly, na modelu jsou na prvním místě uvedena dvě příjmení. Vše je provedeno krasopisně a úhledně.

E8: Domníváme se, že nejprve byl náčrt válce. U něj dívky zjistily obsah podstavných kruhů a chtěly přičíst obsah pláště (o tom vypovídá znak „+" pod nápisem $S=$). Je pravděpodobné, že již v tomto okamžiku bylo dívkám jasné, že plášť válce bude obdélník, ale nevěděly, jak to napsat [1], proto si řekly, že to zjistí a dodatečně dopíší. Na dodatečné dopsání již ale pravděpodobně zapomněly.

E9: K výpočtu obsahu obdélníku je nutno znát jeho rozměry. Jeden z nich (výška) je možno volit, ale druhý je dán poloměrem podstavného kruhu. Dívky nejprve volí $r = 3cm$, najdou l (první oddíl, první myšlenka) [2]. Dále vypočítají obsah podstavného kruhu a získané číslo zdvojnásobí, aniž by slovně uvedly jeho význam. [3]

E10: Nejzajímavější je oddíl třetí, ve kterém dochází k výpočtu obsahu pláště, tedy obdélníka, resp. pláště/obdélníka [4]. Zde je uveden nejprve „tabulkový" vzoreček $s = a \cdot b$. [5] Druhá pozoruhodnost třetího oddílu spočívá v tom, že výška v je přímo uvedena číslem 5 a nikde není ani zmínka o tom, že číslo 5 je výška [6]. Lze to pouze odměřit z modelu.

<u>Komentáře:</u>

K1: Dívky zřejmě nepovažovaly za rozumné do nápisu dopsat „ + obsah obdélníku", protože by zde došlo ke konfliktu dvou jazyků – znakového a slovního. Proto se rozhodly nejprve najít znakové vyjádření.

K2: Z toho, že první výpočet není věnován obsahu kruhu, usuzujeme, že v dané chvíli jako naléhavější v myslích dívek byla myšlenka obsahu obdélníka/pláště válce, pro kterou je rozhodující jeho rozměr.

K3: Zdá se, že význam zdvojnásobení se jevil dívkám jasný ze dvou indicií: z obrázku trochu výše a z předchozího zápisu „1 podstava".

K4: Vyjádřením „obsahu pláště = obdélníka" rozumíme představu, která má procesní charakter a přenáší představu pláště na představu obdélníka. Vyjádřením „obsahu pláště/obdélníka" rozumíme představu, která má statický, konceptuální charakter a je spojením jak pláště, tak obdélníka. Podobné představy nacházíme v mnoha oblastech matematiky (a nejen matematiky). Například pro nás jsou znaky 0,75 a $\frac{3}{4}$ identické. Máme-li vypočítat $\frac{3}{4} + 0{,}05$, napíšeme okamžitě 0,8. Pro žáka šestého ročníku to je úloha, kterou řeší ve dvou krocích. V prvním převede zlomek $\frac{3}{4}$ na desetinné číslo 0,75 a ve druhém kroku čísla spočítá. Tedy ve vědomí dítěte není rovnost „$0{,}75 = \frac{3}{4}$“ identitou, ale poznatkem, který vyžaduje zvláštní energii k tomu, aby byl aktualizován. Situace je analogická jako při tvorbě proceptu. I zde pro žáka 6. ročníku nedošlo ještě k tomu, aby ze znaků $\frac{3}{4}$ a 0,75 byl v jeho vědomí vytvořen amalgám (viz 1.1.5).

K5: Tabulkový vzoreček byl v úvodu každého oddílu, jenže v obou předchozích byl význam použitých znaků π, r, l v souladu se značením válce. Zde dochází k možnému šumu, neboť mezi písmeny a, b a obrázkem není žádné propojení.

K6: Z vysvětlení na bílém papíru vyplývá, že dívky objevily propojení mezi rozměry obdélníka a rozměry válce (výška a obvod podstavného kruhu). Slovní vysvětlení je doplněno náčrtem obdélníku s označením rozměrů písmeny v a l. Dále z uvedeného dosazení čísla 5 plyne, že v představě dívek, nebo přinejmenším té, která to píše, je spojení a/v. To tedy naznačuje, že otázka položená v předchozí poznámce je řešena v prospěch konceptu „obsahu pláště/obdélníka“.

K7: Toto vysvětlení opět odpovídá postupu (*) z komentáře K4 skupiny č.1 (viz odstavec 2.6.1). Hlavní důraz je na slovním uchopení celé situace, nikoli na uchopení symbolickém. Výsledný „vzoreček“ je napsán ve dvou řádcích. V prvním je uvedeno, ze kterých částí se obsah skládá, ve druhém pak jak se vypočte druhá část tohoto součtu. Z uchopení dívek vidíme, že první část – obsah dvou kruhů – je snadná, protože je přímo propojena na známý vzoreček. Druhá část je pro dívky náročná, protože je jí věnován zvláštní řádek.

Shrnutí: Dívky na začátku vycházely z představy válce, ten zdařile zakreslily obrázkem. Na něm si uvědomily vztah mezi obvodem kruhu podstavy a délkou obdélníku pláště. Domnívám se, že tento obrázek byl pro dívky již v roli generického modelu pro všechny segmenty procesu vyvozování vzorce povrchu válce. Speciálně pro klíčový vztah: délka podstavné kružnice se rovná jednomu rozměru rozvinutého pláště.

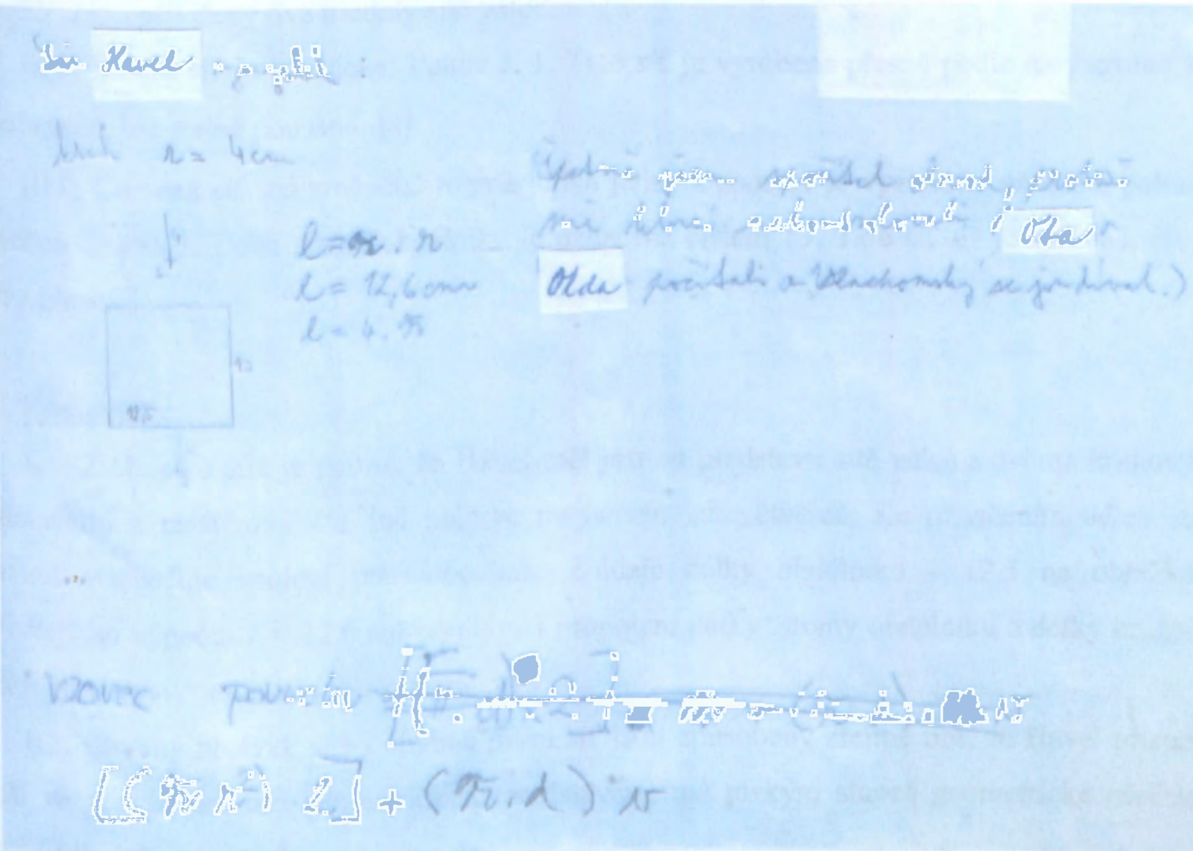
2.6.3 Skupina č. 6

Složení skupiny: čtyři chlapci, dobří počtáři, pojmenujme je Havel, Ota, Olda a Tonda. Výpočty provádějí výhradně pomocí kalkulátoru, pokud mají možnost i na počítači. Mají problémy s udržením pozornosti, nevydrží sedět v klidu, vyhovuje jim činnost v pohybu (např. praktické měření a výpočet průměrné rychlosti nebo „ běhavé diktáty“).

Sociální klima: Chlapci zpočátku vůbec nespolupracovali. Havel byl dominantní. Zbývající tři žáci byli na počátku hodiny zaměřeni pozorností spíše na diskusi o časopisu, který si nestihli prohlédnout o přestávce. Na pokyn vyučující se zapojili i oni do činnosti.

Postup: Téměř okamžitě po zadání úkolů chlapci radostně hlásili, že mají hotovo, že nalezli vzorec a mávali pravítkem s přehledem vzorců. Dostali pokyn. „Dobře, když už znáte vzorec, tak jen navrhněte síť, vymodelujte válec, změřte potřebné údaje, dosaďte do vzorce a vypočtěte povrch vymodelovaného válce.“ Činnost se však odvíjela jinak. Vzorec z pravítka se nikde v zápisu řešení neobjevil. Havel začíná kreslením náčrtu sítě, ostatní se k němu přidávají později.

Kopie žákovského řešení skupiny č. 6 – viz obrázek 2.7. (příloha 2.6.3)



Obrázek 2.7: Řešení skupiny č. 6 na bílém papíru

Evidence:

E1: Na bílém papíru je tužkou podepsán příjmením pouze Havel.

E2: Tužkou vlevo nahoře je napsáno: „Sám Havel vymyslel“.

E3: V levé horní části papíru je malý obrázek (3cm×5cm) – narýsovaná síť válce (původní síť je pouze schematicky načrtnuta od ruky a vygumována).

E4: Síť je znázorněna čtvercem se správně připojenými kruhy, středy kruhů jsou označeny písmenem S, poloměry vyznačeny úsečkou a připsáno číslo 4. Čtverec má u spodní vodorovné strany připsáno číslo 12,5 a vedle pravé svislé strany číslo 13. [3]

E5: Uprostřed stránky je následující text ve dvou řádcích: 1. řádek psaný perem.

E6: Vzorec povrchu (další text je celý přeškrtnutý) [(πd) { závorka byla původně umocněna na druhou – intenzivně přeškrtáno} $(\pi d)x2$] {škrtnuto x } $+(\pi d)$. {přeškrtáno 13 } v . [6]

E7: 2. řádek psaný tužkou: $\left|\left(\pi r^2\right)\cdot 2\right| + (\pi d)\cdot v$ [7] .

E8: Není uveden konkrétní výpočet, ani není provedeno dosazení naměřených veličin.

E9: Jsou přiloženy dva modely sítě válce.

E10: Modrá síť je označena: Pokus č. 1. Tato síť je vyrobena přesně podle narýsované sítě na obrázku, je i stejně popsaná. [8]

E11: Červená síť má změněné rozměry. Na jedné z podstav je vyznačen střed S a poloměr označen číslem 3. Delší strana obdélníku je označena číslem 13. Tato síť už je správná, ale ne zcela přesná.

Komentáře:

K1: Z obrázku sítě je patrné, že Havel měl jasnou představu sítě válce s dvěma kruhovými podstavami a pláštěm. Plášť byl nejprve narýsován jako čtverec, ale označením délek stran obrázek naznačuje spojení plášť/obdélník. Z údaje délky obdélníku – 12,5 na obrázku a z vedlejšího výpočtu l = 12,6 cm vyplývá i propojení délky strany obdélníku a délky kružnice. Nikde není vysvětleno, kde se vzalo číslo 13.

K2: Chybný obrázek sítě i chybná první síť jsou způsobeny zřejmě tím, že Havel přisuzuje větší váhu vzorcům než geometrickým představám; má nízkým stupeň geometrické představy – obvodu kruhu.

K3: Vzorec pro výpočet délky kružnice je chybný. Do chybného vzorce je správně dosazeno.

K4: Vysvětlující komentář byl zřejmě dopsán dodatečně až po zkušenosti s první chybnou sítí. Zajímavý je postoj Havla, který vidí příčinu chyby v nespolupracujících spolužácích. Jednoho z nich dokonce nazval hanlivou přezdívkou a obvinil z toho, že se jen díval. Z dodatečných rozhovorů se ukázalo, že to tak nebylo – (viz odstavec 2.7.3 a přílohy 2.7.5 a, b)

K5: Ze zaškrtané druhé mocniny je vidět, že chlapci (na vzorci už pracovali společně) vnímají, že potřebují obsah kruhu a ne délku kružnice, ale nejsou si jisti ve vzorci pro obsah kruhu. Přeškrtnutá 13 místo písmene v poprvé naznačuje zápis propojení výšky válce a strany obdélníku. (V myšlenkách zřejmě toto spojení bylo už dřív). Číslo 13 je asi škrtnuto proto, že se do zápisu s písmeny nehodí. Intenzivní přeškrtávání svědčí o postoji k chybě. Je zde viditelná snaha „zahladit stopy" po tom, že je někde něco nesprávně. Předchozí sebekritické komentáře byly napsány na pokyn vyučující, která žádala žáky, aby chybnou síť nevyhazovali, ale naopak napsali odůvodnění, proč je chybná.

K6: Závěrečný vzorec není uveden ve tvaru rovnice, ale pouze jako výraz. Není tam ani žádné slovní vyjádření vztahu, ani označení povrchu. Pro vyjadřování těchto chlapců je typické, že běžně sdělují jen holý výsledek bez vysvětlení, bez slovní odpovědi. Váhání ve vyjádření obsahu kruhu pomocí průměru je vyřešeno užitím poloměru. Naopak původní chyba ve výpočtu délky kružnice je napravena užitím průměru.

K7: Tato chybná síť chlapcům pomohla odhalit chybu ve výpočtu délky kružnice.

K8: Je zajímavé, že v zápisu z hodiny na bílém papíru úplně chybí slovní vyjádření vzorce a není tam ani žádné vysvětlení výpočtu obsahu pláště. Zdá se, že z postupu (*) (str. 47) vypadla část poznání ve slovech. Domnívám se, že poznání ve slovech proběhlo pouze na úrovni rozhovoru mezi chlapci a nebylo dokumentováno v zápisu. Potvrzení této teze najdeme v dodatečných rozhovorech (přílohy 2.7.5 a, b).

K9: Zdá se, že Havel má odlišný způsob uchopování skutečnosti než ostatní tři chlapci. Náčrt sítě svědčí ve prospěch konceptu, narýsovaná síť s označenými rozměry o proceptu. Ostatní chlapci vnímají spíš procesuálně. Pro tyto chlapce je náročné udržet pozornost, nebaví je činnost, při které rychle nemají hmatatelný výsledek. Nemají chuť se pouštět do úvah a objevování, kde cíl je nejistý a ne snadno dosažitelný. Zadání úkolů v této hodině pro ně možná nebylo dostatečně motivující, neměli dostatečně přesně vymezenou činnost. Konkrétní jednotlivé úkoly jsou pro ně přijatelnější. Asi by bylo vhodnější dát jim víc různých možností pro dílčí pomocné úlohy, aby si mohli rozdělit práci. Například mohli dostat do skupiny dvě různé papírové krabičky od sýrů ve tvaru válce s cílem vymodelovat stejný válec z barevného papíru, vypočítat jeho povrch. Podle reakcí žáků je možné potom upřesňovat další návody buď jako jednodušší nebo náročnější.

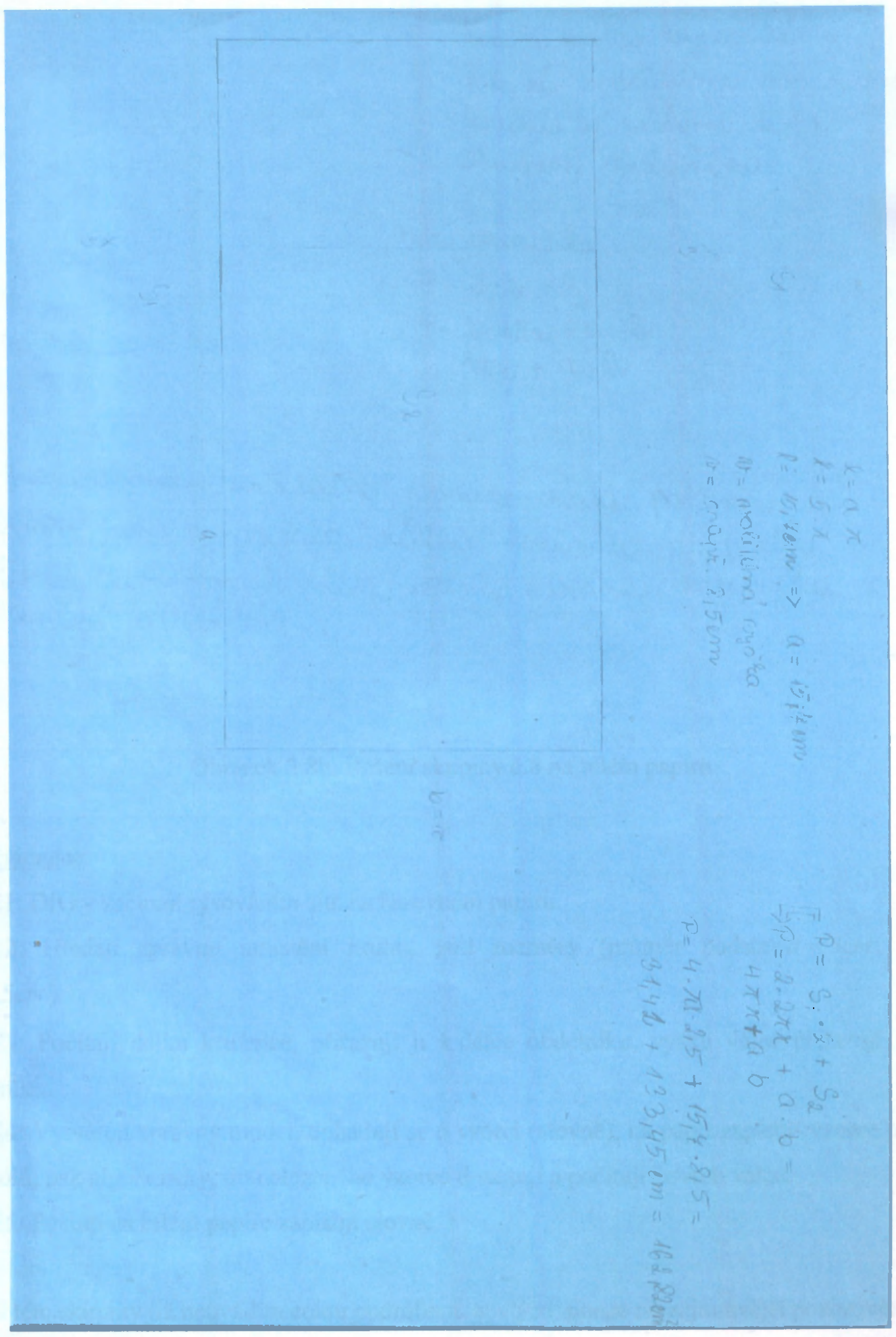
Shrnutí: Chlapci správně viděli schéma sítě válce i vztahy mezi obvodem kruhu a délkou obdélníku. Chybu udělali při výpočtu délky kružnice. Kontrolou vytvořením modelu z chybné sítě chybu objevili a odstranili. Domnívám se, že při řešení již při rýsování sítě měli chlapci správnou představu vztahů – byl tedy vytvořen generický model vzorce pro povrch válce. Po opravě byl upevněn vzorec pro výpočet délky kružnice, pro který zřejmě chyběly dostatečné zkušenosti na úrovni izolovaných modelů – doplněním se stalo rozvinutí obvodu podstavy do strany obdélníku.

2.6.4 Skupina č. 8

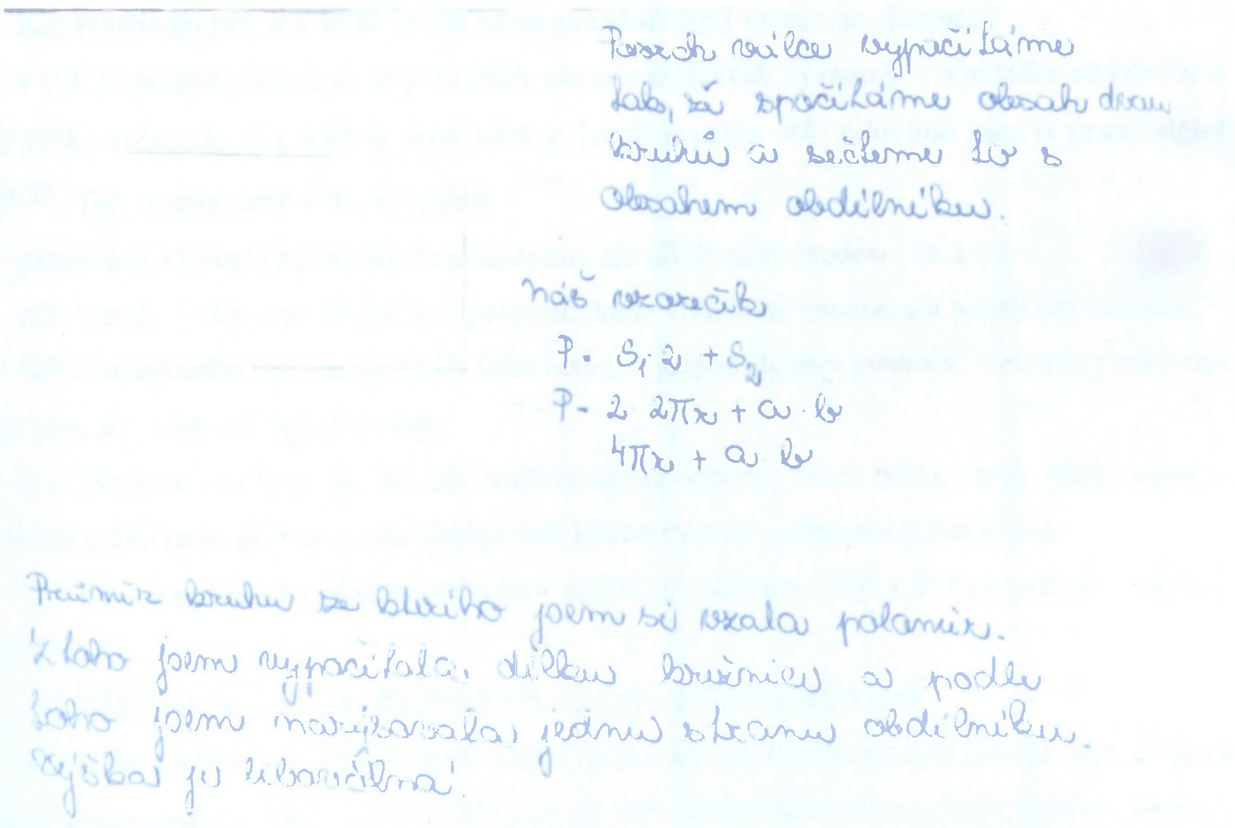
Složení skupiny: čtyři svědomité, pracovité dívky s rozvinutou jazykovou inteligencí – Hana – dobrá počtářka, Helena – výrazně jazykově zaměřená, Linda – velice pečlivá, snaživá, Veronika – klidná, pomalá.

Sociální klima: dívky spolupracují, diskutují, nehádají se. Iniciátorem činnosti je Hana. Veronika přihlíží, zkoumá Haniny návrhy. Helena se snaží být zaměstnaná a užitečná, počítá na kalkulačce numerické výpočty, které dostane za úkol od Hany. Linda zapisuje myšlenky a výsledky bádání, snaží se pochopit, co Hana s Veronikou vytvářejí.

Postup: Kopie žákovského řešení skupiny č. 8 – viz obrázky 2.8a, 2.8b (přílohy 2.6.4, 2.6.5)



Obrázek 2.8a: Řešení skupiny č.8 na modrém papíru


Povrch válce vypočítáme tak, že spočítáme obsah dvou kruhů a sečteme to s obsahem obdélníku.

náš vzoreček

$P = S_1 \cdot 2 + S_2$

$P = 2 \cdot 2\pi r + a \cdot b$

$4\pi r + a \cdot b$

Průměr kruhu ze [illegible] jsem si vzala poloměr. Z toho jsem vypočítala délku kružnice a podle toho jsem narýsovala jednu stranu obdélníku. Výška je libovolná.

Obrázek 2.8b: Řešení skupiny č.8 na bílém papíru

Evidence:

E1: Dívky začínají rýsováním sítě na barevném papíru.

E2: Hledají správné umístění kruhů, volí rozměry (průměr podstav $d = 5cm$, výšku $v = 8{,}5cm$).

E3: Počítají délku kružnice, přiřazují ji k délce obdélníku, výšku válce přiřazují k šířce obdélníku.

E4: Vytvářejí správný model, dohadují se o vzorci (slovně), na papír zapisují vzorec pomocí symbolů, pak algebraicky, do nalezeného vzorce dosazují a počítají povrch válce.

E5: Postup na bílém papíře zapisují slovně.

U této skupiny již neuvádím celou podrobnou analýzu, pouze nejzajímavější pozorování.

Komentáře:

K1: Důležitý jev: nikde není napsáno l = a. Tato rovnost je pouze na úrovni čísel, tedy na úrovni generického modelu.

K2: Používání písmen, které je základem pro abstraktní vzorce, je chatrné:

v = b je použito nikoli ve smyslu čísel, ale sémantických významů – b je šířka obdélníku a v je výška válce. Je to podobné jako když o hraně krychle AB mluvíme jako o straně stěny $ABCD$. Tedy kontextové kotvení pojmů.

písmena a a l mají stejnou číselnou hodnotu, ale nikde není uvedeno, že a = l.

K3: Vztah l = d.π není důsledkem geometrického vhledu do situace, ale paměťový záznam.

K4: Z uvedeného vidíme, že dívky ještě neumí v jazyce algebry pracovat. Nelze to považovat za chybu, ale pouze za stupeň vývoje.

K5: Naopak pozitivní je, že zde vidíme určité vhledy, které dívky mají: plášť válce a obdélník jedno jsou; podstavy jsou kruhy; vidí klíčový vztah – přiřazení (geometrie).

K6: Písmena jsou ve významu jmen (v = výška, a = délka b = šířka, P = povrch, d = průměr, r = poloměr).

K7: Dále jsou ve významu čísel (8,5 cm, 15,7 cm, 162,82 cm2, 5 cm)

K8: Schází schopnost zapsat vztah objektů pomocí písmen. Zde jdou do úrovně čísel. Zřejmě jsou schopné podle „svého" vzorce vypočítat povrch libovolného válce, pokud budou znát jeho rozměry – jsou tedy na úrovni generického modelu.

2.7 Interakce mezi žáky v jednotlivých skupinách

V tomto oddíle je ilustrována práce čtyř skupin, které se jevily nejzajímavější z pohledu interakcí mezi žáky. Vždy je uvedeno sociální klima ve skupině, popis situace postupu objevu vzorce a komentář. Vzhledem k časovému odstupu čtyř let je možné porovnat zde popsané interakce mezi žáky s jejich interakcemi v oktávě.

2.7.1 Skupina č. 4

Složení skupiny: dva chlapci, pojmenujme je Adam a Aleš, oba se zájmem o matematiku, s rozvinutým kauzálním myšlením, vše promýšlejí do souvislostí a důsledků.

Sociální klima: Chlapci jsou dobří přátelé ve škole i v běžném životě. Rodinné zázemí je podobné – rodiny s více dětmi, ekonomicky slabší. V jednání obou se projevuje pokora, ve vztahu k okolí jsou tolerantní, ne však zakřiknutí, dokážou obhajovat svůj názor, dobře argumentují.

Adam má problémy s grafickým projevem, má pomalé osobní tempo, na doporučení psychologa dostává na vypracování písemných prací víc času než ostatní žáci. V listopadu 2001 se projevila psychická labilita s depresivními sklony (o rok později nastala krize, která si vyžádala medikamentózní léčbu.) Spolužáci oceňují jeho rozsáhlé znalosti z mnoha oborů (záliba v encyklopediích) a především schopnost všímat si souvislostí.

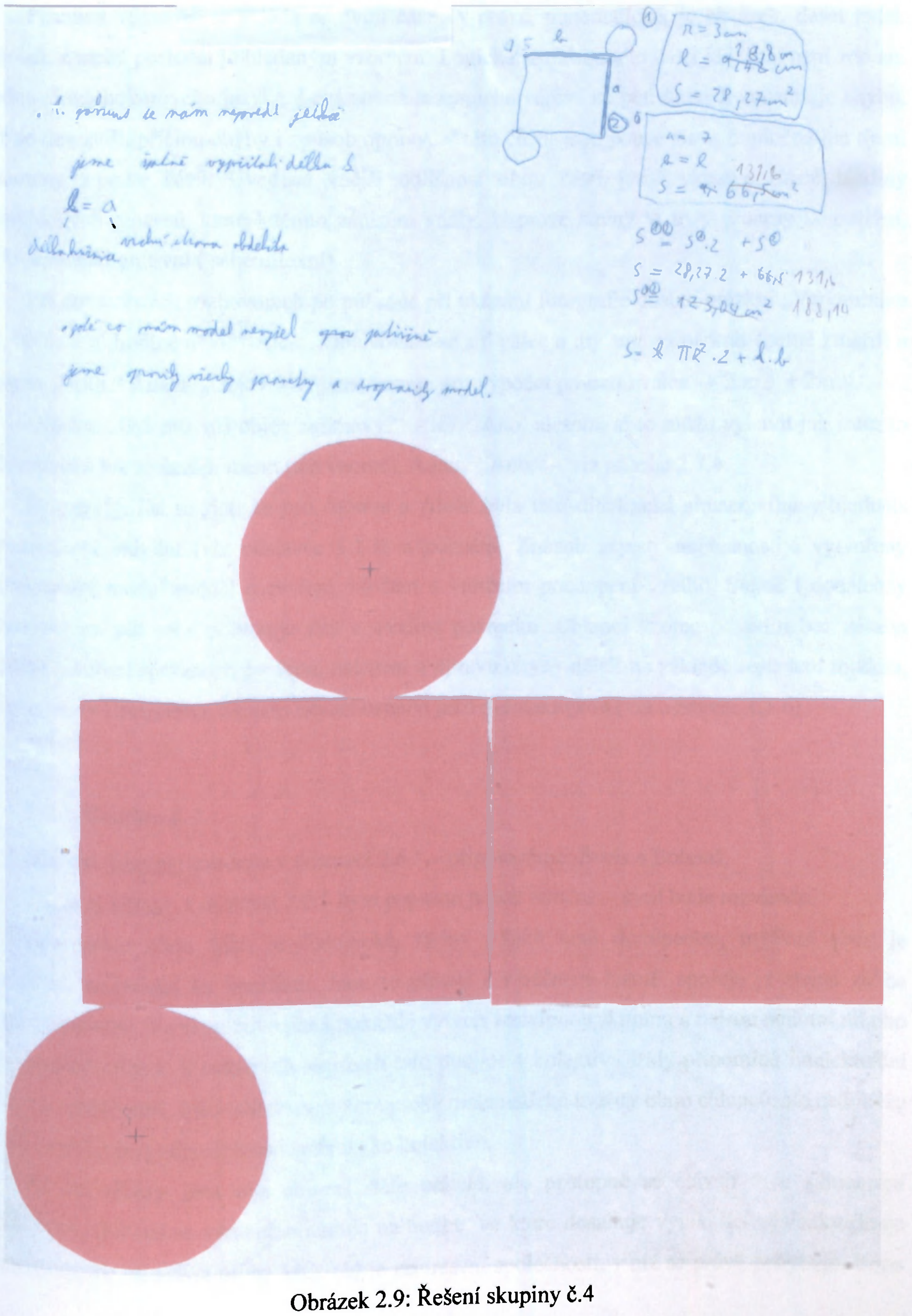
Aleš, velice pracovitý, bystrý žák, rychlý v úsudku, někdy zbrklý. S Adamem se dobře doplňují. Až do oktávy zůstávají oba dobří přátelé. Aleš se stal Adamovi velkou oporou v době osobní krize. Aleš se postupně stal jednou z nejvýraznějších osobností ve třídě, je schopen otevřeně diskutovat o problémech, logicky argumentovat.

Popis postupu:

Chlapci společně hledají řešení, diskutují – viz příloha 2.7.1 – fotografie č.1.

Vycházejí z představy válce v trojrozměrném prostoru, načrtávají síť a hledají souvislosti s tělesem. Nalezené vztahy nejprve formulují slovně, jen ústně, potom se snaží myšlenky zformulovat písemně, hledají formu zápisu. Na fotografii č. 1 Adam rýsuje kruh podstavy. Na fotografii č. 2 Aleš počítá délku kružnice, Adam čeká na výsledek, aby mohl narýsovat plášť válce. Délku kružnice vypočetli chlapci poloviční. Podle náčrtu a s využitím zvolených rozměrů a uvedených výpočtů chlapci rýsují síť, tu složí a zjišťují, že válec nevyjde, že plášť je poloviční. Uvědomují si chybu, jejíž objevení nevyvolalo v žádném z žáků negativní reakci. Chybu vnímají jako zdroj poučení, nikoliv jako jev nežádoucí. Opravují síť, sestavují válec, opravují číselné výpočty, dokončují záznam postupu řešení.

Velice zajímavá je písemná výpověď, kterou chlapci o své práci dokládají – viz obrázek 2.9 (příloha 2.7.3)



Obrázek 2.9: Řešení skupiny č.4

Písemná výpověď se skládá ze dvou částí. V pravé, matematické, je obrázek, deset řádek nápisů, z nichž poslední je hledaným vzorcem. Logická struktura této části je jasná, není zde ani jedno slovo hovorového jazyka. Levá strana písemného zápisu na pěti řádcích konstatuje chybu, jíž se dopustili, příčinu chyby i způsob opravy. V této části jsou pouze slova doplněná jen třemi písmeny z pravé části. Uvedená vnější odlišnost obou částí jasně ukazuje různé hladiny psychických procesů, které k těmto zápisům vedly. U pravé strany to byly procesy kognitivní, u levé metakognitivní (sebereflexní).

Při dodatečných rozhovorech po půl roce při ukázání fotografie dostali otázku: „Vzpomínáte si, co se v té hodině dělo?" Aleš: „Objevovala se síť válce a my sme to párkrát špatně změřili a pak to slepili." Adam: „Objevovali jsme vzorec pro výpočet povrchu válce → $2.\pi r^2 + 2\pi r.v.$"

Otázka: „Byl pro vás objev zajímavý?" Aleš: „Ano, alespoň si to můžu vybavit jak jsem to objevoval a tak to nezapomenu (ten vzorec). Adam: „Ano." – viz příloha 2.7.4.

Komentář: Dá se říct, že pro Adama a Aleše byla tato didaktická situace silná z hlediska abstrakčního zdvihu (viz odstavec 1.1.1) a poznání. Způsob zápisu, nepřesnosti i vytvořený opravovaný model svědčí o tvoření, hledání a vnitřním pochopení vztahů. Stejně i dodatečný rozhovor po půl roce potvrzuje sílu a trvalost poznatku. Chlapci vzorec odvodili bez zásahu učitele, ověření správnosti postupu, nalezení a opravu chyby dělali na základě sestavení modelu. Podle teorie Brousseaua lze tuto situaci označit jako a-didaktickou (viz odstavec 1.1.6).

2.7.2 Skupina č. 1

Složení skupiny: uvedeno v odstavci 2.6.1 – připomeňme: Boris a Bohouš.

Sociální klima: v odstavci 2.6.1 bylo popsáno pouze stručně – nyní bude rozvinuto.

Spolupráce obou žáků je dialogická, žádný z žáků není dominantní, myšlení obou je paralelní, nedochází ke konfliktu. Jsou to přátelé i v běžném životě, spojuje je stejná záliba v programování. Ve skupinové práci pokaždé vytvoří uzavřenou skupinu a nejsou ochotni nikoho dobrovolně přibrat. V některých situacích tato dvojice v kolektivu třídy připomíná intelektuální elitu ve společnosti. Jako učitel uznávám vysoké matematické kvality obou chlapců, ale nedokážu zvýšit jejich pocit odpovědnosti směrem ke kolektivu.

Až do oktávy jsou oba chlapci stále přátelé, ale postupně se stávají více autonomní v zálibách. Bohouš se výrazně orientuje na hudbu, ve které dosahuje vynikající výsledky (hraje na klavír), ale již neřeší úlohy MO; rád je primusem společnosti, v níž se právě pohybuje. Boris zůstává u matematiky a programování. Ve společnosti se nerad předvádí. Oba po maturitě odcházejí studovat na MFF UK.

Popis postupu: z pohledu kognitivního byl postup popsán v odstavci 2.6.1. Nyní bude popis postupu zaměřen na interakce.

Na fotografii č.1 –(příloha 2.7.1) – chlapci ve druhé lavici za Alešem a Adamem – je znatelné pracovní zaujetí na začátku bádání až do brzkého formulování hledaného algebraického vzorce – v odstavci 2.6.1 označeno jako Postup1. Když chlapci práci ukončili, dávali to provokativně najevo.

Na fotografii č. 3 – (příloha 2.7.1) – je Bohouš při předvádění vytvořeného modelu a při potvrzení správnosti výpočtů, které chlapci udělali až na požádání – v oddíle 2.6.1 označeno jako Postup2. Z výrazu tváře můžeme číst uspokojení z úspěchu, ale zároveň i trochu pohrdání, že úkol nebyl moc zajímavý, vše bylo jasné hned při zadání.

Při dodatečných rozhovorech po půl roce na otázku „Byl objev vzorce zajímavý?" odpověděli: Boris: „Dalo se to čekat, mohlo to být zajímavější.", Bohouš: „Nezajímavý, bylo to jen kombinování starších vzorců".

Komentář: Moje žádost o splnění úkolů 2 a 3 vyvolala mezi mnou a dvojicí jisté pnutí. Chlapci moji žádost považovali za něco, co je zbytečně zdržuje a žádá od nich manuální činnosti, na které se dívají jako na něco intelektuálně méněcenného. Na dané hodině byla moje reakce spontánní. Až později v domácí analýze jsem hlouběji poznala příčiny mého asi ne právě nejvhodnějšího chování. Počínání žáků jsem ve chvíli mé reakce evidovala ve dvou úrovních:

matematické – zde nebylo, co chlapcům vytknout

sociální – zde bylo sociálně nevhodné jejich nadřazování se nad třídou (řečeno vnitřním hlasem žáků: „my jsme zde daleko nejlepší").

Druhou z úrovní jsem vyhodnotila jako dominantní a navíc jsem si myslela, že by bylo vhodné, aby chlapci získali i manipulativní zkušenosti. Žádala jsem je proto, aby udělali něco i proti své vůli. Když toto počínání hodnotím zpětně, vidím jeho hlavní nedostatek v autoritativnosti mého přístupu. Mohla jsem reagovat dvěma různými způsoby:

připomenout žákům, jak v minulosti též něco tvrdili, a to se pak ukázalo nepravdivé; o tuto jejich zkušenost pak opřít žádost, aby svůj vzorec prověřili.

dát jim další a náročnější úkol; například aby našli rozměry válce, jehož povrch je 200 cm^2, nebo aby sestrojili síť kužele, nebo dokonce komolého kužele.

Po této zkušenosti jsem připravovala do následujících hodin ještě další náročnější úkoly. Ukázalo se však, že občas se tak zvýraznil rozdíl mezi těmito žáky a zbytkem třídy, což nemělo pozitivní vliv na klima objevování. U méně úspěšných žáků to prohlubovalo pocit vlastní neschopnosti objevit něco nového. Lépe se osvědčilo zadávat úkoly, které rozvíjejí zadaný problém na obecnější úrovni. Chlapci tak okolí nedeprimovali, naopak při závěrečném shrnutí pomohli dotvořit rámec poznatku.

Popsaná situace neměla žádný vliv na naše dobré přátelské vztahy. Žáci mají mnoho zkušeností s tím, že učitelé po nich autoritativně vyžadují činnosti daleko méně smysluplné. Naopak v hodinách matematiky jsou jejich připomínky brány v úvahu a diskutovány.

2.7.3 Skupina č. 6

Složení skupiny: uvedeno v odstavci 2.6.3 – připomeňme: Havel, Ota, Olda a Tonda - fotografie č. 4 – příloha 2.7.1. Můžeme ještě dodat, že schopnost řešit matematické problémy a úspěšnost při řešení je u tří chlapců srovnatelná, Olda má výsledky v matematice slabší.

Sociální klima: v odstavci 2.6.3 bylo popsáno klima při experimentální hodině. Zde bude doplněno o širší souvislosti. Chlapci jsou přátelé, do školy společně dojíždějí ze sousedního města. Často si vzájemně ze sebe dělají legraci, občas mají sklony posmívat se, až ubližovat, ostatním spolužákům. Až do oktávy jsou pořád kamarádi, vztahy k ostatním spolužákům se urovnaly. Olda od sexty studuje na odborném učilišti. Havel a Ota odcházejí po maturitě studovat na techniku obor mechatronika, Tonda na stavební fakultu.

Popis postupu: jak bylo uvedeno v odstavci 2.6.3, téměř okamžitě po zadání úkolů chlapci - společně radostně hlásili jejich splnění – vzorec našli na pravítku v přehledu vzorců. Společně prožívali radost z přelstění učitelky, z provokace. Je zřejmé, že chlapci neměli pocit ohrožení, věděli, že si provokaci mohou dovolit. Já jsem je pochválila za pohotovost, za rychlé vyřešení problému a dala jsem jim pokyn k modelování (uvedeno v 2.6.3). Poměrně dlouhou formulací náhradního úkolu jsem se snažila na chlapce zapůsobit ne autoritou osobnosti, ale autoritou práce.

Po úvodní společné provokaci, při skutečném řešení úkolů však chlapci téměř nespolupracovali. Havel se snažil plnit úkol. Pozornost zbývajících tří žáků byla na počátku zaměřena spíše na Otu. Ten nestihl uložit časopis, který si prohlížel o přestávce. Tento moment zachycuje fotografie č. 5 (příloha 2.7.1). U Oty jsou znatelné rozpaky, Havel s Oldou se situací baví.

Havel pokračuje v práci, ostatní přihlížejí a komentují. Havel kreslí náčrt sítě, gumuje ho, rýsuje novou síť s označením a číselnými údaji. Správně si uvědomuje vztah mezi délkou kružnice a stranou obdélníka pláště, chybně počítá délku kružnice. Další tři chlapci začínají spolupracovat. Havel rýsuje síť podle vypočtených a zvolených rozměrů a skládá model, ten však nevyšel. Na fotografii č. 6 (příloha 2.7.1) zklamaný Havel ukazuje nepovedený model. Z gesta Oldy se dá číst, že se dostali do situace, že byli „nachytáni na švestkách", že dělali něco nesprávně.

Fotografie č. 4 zachycuje, jak se ve stejné chvíli Ota baví a Tonda zaujatě sleduje. Opravený model je už správný. Havel opravuje návrh vzorce, který zapisuje užitím písmen ve tvaru algebraického výrazu, ne jako rovnost. V zápise důkladně přeškrtává chybné záznamy, zamazává stopy po omylu.

Vzorec z pravítka se nikde v zápisu řešení neobjevil.

Komentář:

K1: Dominantní postavení Havla nesouviselo s jeho intelektovými schopnostmi, ale spíš z jeho sociální hierarchie hodnot. Převzal zodpovědnost za skupinu a na ostatní byl chvílemi nazlobený. Ti však byli v pohodě a dobré náladě. Dochází zde ke střetu hodnot Havla a ostatních členů skupiny. Havel je ctižádostivý, záleží mu na studijních výsledcích. U Oty a Oldy momentálně převládla nechuť pracovat. Z výrazu Oldy na fotografii č. 4 je vidět, že mu nevadí, že sám nic neobjeví, že je to situace pro něho obvyklá.

K2: Výraz Tondy je naopak soustředěný. Tonda se při hodinách snaží, ale ne vždy je dostatečně pohotový, aby úspěšně řešil úkol, má obavy z chyby, raději reprodukuje naučené poznatky.

K3: Zajímavý je komentář Havla při popisu řešení úlohy (obrázek 2.7, s.52; nebo příloha 2.6.3), kde za příčinu neúspěchu označil spolužáky, kteří jeho práci nekontrolovali.

V dodatečných rozhovorech po půl roce se ukázalo, že účast tří chlapců (Olda, Ota, Tonda) nebyla tak pasivní, jak se to jevilo při hodině.

Na otázku: „Vzpomínáte si, jak probíhalo objevování vzorce ve vaší skupině?" odpovídali samostatně bez domlouvání se – viz obrázky 2.10a, 2.10b (přílohy 2.7.5a, b).

(6)

1) Vzpomínáte si, jak probíhalo objevování vzorce ve vaší skupině?

2) Jakou činnost byste volili raději, abyste se zapojili aktivně do práce?

3) Vzpomínáte si na nějaký váš osobní „objev" v matematice, při kterém jste prožili pocit radosti?

1) nejdříve jsme si vyřídili [illegible]

2) počítání v příkladech

3) [illegible] čerpadla vyčerpají a za kolik přiteče do nádrže 4 000 l

1) Věděli jsme vzorec na výpočet obsahu kruhu (tj. podstavy) a pak spočítali obsah čtverce (obdélníku) výška · délka toho kruhu. Podstava musí být 2x

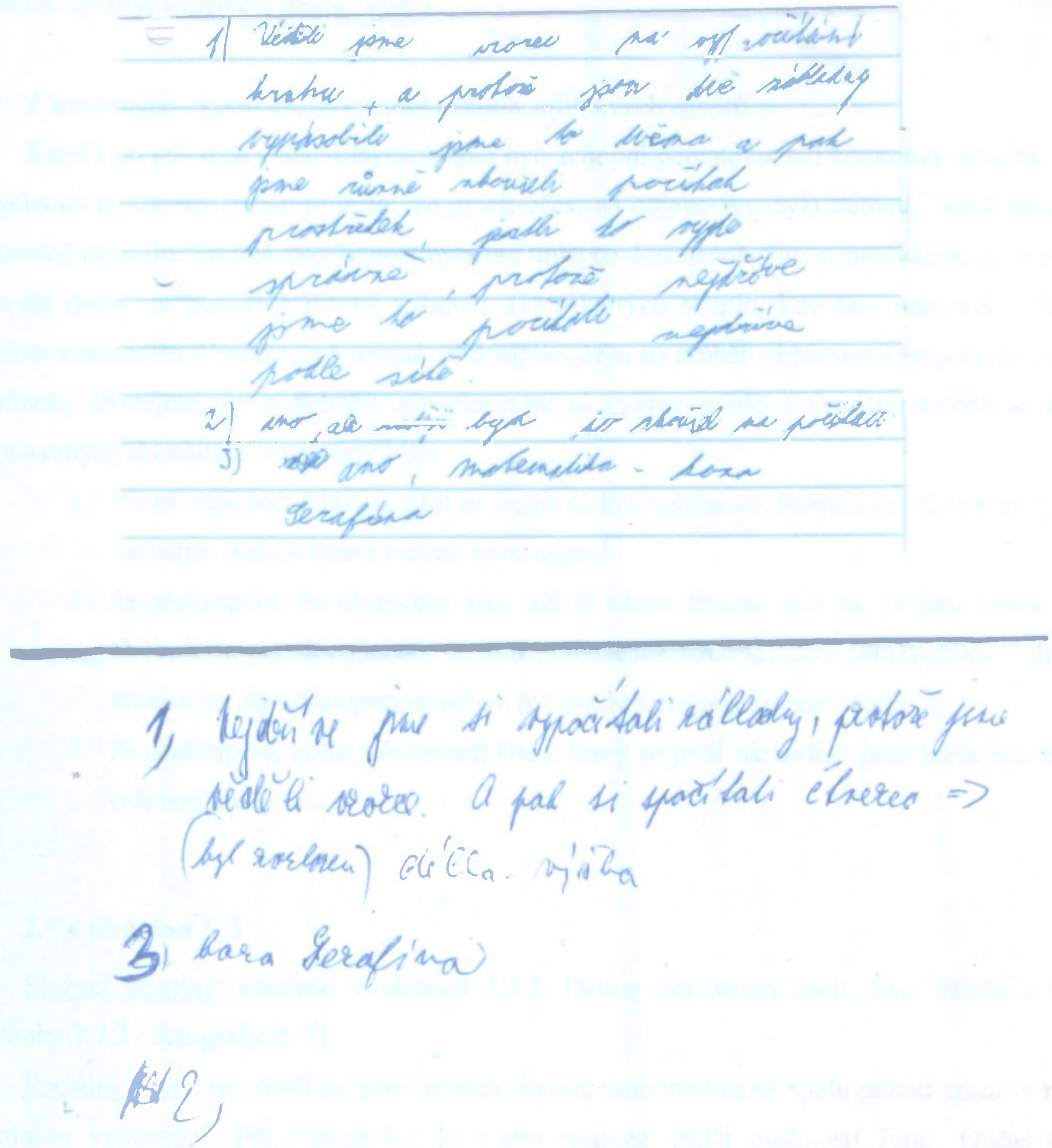
3) Síť v matematice na rozložení na součin

2) Počítání příkladů

Obrázek 2.10a: Dodatečné rozhovory skupina č.6 – Ota a Havel

Ota: „Nejdříve jsme si vypočítali základny."

Havel: „Věděli jsme vzorec na výpočet obsahu kruhu (té podstavy) a poté spočítali obsah čtverce (obdélníku), výška . délka toho kruhu. Podstava musí být 2x "



Obrázek 2.10b: Dodatečné rozhovory skupina č.6 – Tonda a Olda

Tonda (o kterém Havel hanlivě napsal, že se jen díval): „Věděli jsme vzorec na vypočítání kruhu, a protože jsou dvě základny vynásobili jsme to dvěma a pak jsme různě zkoušeli počítat prostředek, jestli to vyjde správně, protože nejdříve jsme to počítali nejdříve podle sítě. Raděj bych to zkoušel na počítači."

Olda : „ Nejdříve jsem si vypočítali základny, protože jsme věděli vzorce.A pak si spočítali čtverec $\Rightarrow$ (byl rozložen) délka . výška

Z uvedených výpovědí lze vyvodit několik zajímavých závěrů

Když i po půl roce všichni čtyři chlapci byli schopni pamatovat si i konkrétní schéma, nebo myšlenku z původní práce, je jasné, že jejich účast na objevování byla aktivní i když se to tak původně nejevilo. Zřejmě tato činnost byla pro chlapce dostatečně silným prožitkem, že si po tak dlouhé době vše poměrně přesně vybavili. (U některých skupin, kde žáci pracovali s daleko větším nasazením v hodině, mě naopak překvapilo, že si na průběh objevování vzpomínali velmi obtížně.) Dodejme, že o dobrém zapamatování si vzorce svědčí i úspěšně zvládnuté úlohy v písemných zkouškách všech čtyř žáků.

1. Psané výpovědi žáků ukazují na jejich nízkou schopnost formulovat vlastní myšlenky verbálně. Jedině Havel tenkrát něco napsal.
2. Je překvapivé, že chlapcům více utkvěl obraz čtverce než to, že toto řešení bylo chybné. Je pravděpodobné, že toto je důsledek silné vizuální paměti žáků – chybný čtverec na obrázku opraven nebyl, byl pouze korigován model tělesa.
3. Je překvapivé, kolik toho uvedl Olda, který se jevil na hodině jako zcela bez zájmu o řešení úlohy.

2.7.4 Skupina č. 3

Složení skupiny: uvedeno v odstavci 2.5.2. Dejme jim jména Emil, Eva, Eliška a Ester (příloha 2.7.2 - fotografie č. 7).

Sociální klima: na rozdíl od předchozích skupin, tato čtveřice se spolu přátelí pouze v rámci školního vyučování. Při matematice je v této skupině vůdčí osobností Emil. Občas mívá problémy s kázní, je poměrně ctižádostivý, rád je středem pozornosti. Po kvartě odešel studovat střední průmyslovou školu elektrotechnickou. Eva a Eliška jsou výrazně orientované na společenské vědy a na jazyky. Ester má slabé studijní výsledky ve všech předmětech. Dívce je věnována zvláštní příloha 2.7.6.

Popis postupu: tato skupina při práci postupovala přesně podle instrukcí. Nejprve odhadovali síť a bez výpočtů realizovali několik neúspěšných pokusů. To je přinutilo měřit a počítat, až postupně vymodelovali správnou síť a správně odhalili vztahy. Postup a výsledky bádání formulovali slovně. Neuvedli algebraický zápis vzorce, neprovedli číselné dosazení ani žádný výpočet. Během celé činnosti vládla ve skupině dobrá nálada, atmosféra spolupráce, pohoda.

Komentář:

K1: Na fotografii č. 7 (příloha 2.7.2) můžeme pozorovat soustředěný výraz Emila, který se snaží sdělit své nápady a zřejmě dává dívkám instrukce, jak mají tvarovat model válce.

K2: Dívky se snaží být aktivní, působit dojmem spolupráce a aspoň se všechny dotýkají papíru. Na fotografii č. 8 (příloha 2.7.2) je zachycen jeden z neúspěšných pokusů o model válce. Emil tento neúspěch prožívá silně emotivně, dívky vypadají pobaveně.

K3: Fotografie č. 9 zachycuje Emila v roli učitele, z jeho výrazu se dá vyčíst, že mu velmi záleží na tom, abych si této role všimla. (Na tuto skutečnost mě upozornil P. Clanché[7] a já jsem si uvědomila, že z fotografie velice přesně vystihl jeden povahový rys chlapce.) V této chvíli Ester a Eliška už pouze přihlížely.

K4: Při podrobnějším zkoumání se ukázalo, že skutečný objev udělal pouze Emil. Domnívám se, že pro něho lze situaci označit za a-didaktickou.

K5: Dívky svou aktivitu spíš pouze předstíraly. Při hodině se zdálo, že Emil dívkám pomohl pochopit vztahy a vzorec. Při dodatečných rozhovorech po půl roce se však ukázalo, že přesně se činnosti i vzorce vybavují pouze Emilovi, ten také označil objev za zajímavý. V hodnocení nijak nezmiňuje svoji vůdčí roli. Jedna z dívek napsala to, co si myslela, že očekávám, že objev byl zajímavý. Jinak dívky si na činnost při hodině moc nevzpomínají. Mluví pouze o nůžkách, vzorce neuvádějí.

[7] Cenné podněty k další práci jsem získala během setkání doktorandů v květnu 2003 v Kralupech na přednášce P. Clanché. Poprvé jsem se zde setkala s pohledem antropo-didaktickým. Navíc jsem měla možnost s P. Clanché konzultovat moji práci, jeho připomínky a jeho zájem mne velmi povzbudily. Kognitivní analyzy jsem se pak pokusila doplnit o popisy interakcí mezi žáky.

2.8 Nástroj komparace řešitelských strategií jednotlivých skupin

Následující odstavec popisuje složitou a zdlouhavou cestu hledání nástroje pro vzájemné porovnání práce skupin. Tato cesta se dá rozdělit do tří etap:

1. etapa – od textu k vizualizaci
2. etapa – snaha o univerzální vývojový diagram
3. etapa – příprava prezentace.

1. etapa – od textu k vizualizaci

Experimentální hodině předcházel experiment V1 (podrobněji v odstavci 2.3) – podobně vedená hodina v jiné třídě v červnu 2 000. Dobrá zkušenost z této hodiny mne vedla ke snaze zopakovat stejný postup v následné třídě a získat tak materiály pro možnost prezentace „objevovací“ činnosti žáků. Při přípravě experimentální hodiny jsem se proto zaměřila na získání takových materiálů, které bude možné předložit kolegům na seminářích (žákovské práce a fotografie). Analyzovaná hodina se uskutečnila 15. října 2001.

V březnu 2002 jsem vedla dílnu pro učitele na konferenci „Dva dny s didaktikou matematiky“ na PF UK v Praze. Tam jsem poprvé v jedné části dílny použila jako ukázku část materiálů – práce vybraných skupin a album fotografií se stručnými popisy a o těch jsme s učiteli diskutovali. Při přípravě popisů fotografií jsem musela rekapitulovat činnost jednotlivých skupin a tím vznikly moje první pokusy o záznamy řešitelských postupů. Při jejich tvorbě jsem vycházela ze žákovských písemných dokumentů. Ukázka několika těchto popisů postupů je uvedena v příloze 2.8.4.

Takto psané postupy však nebyly dostatečně přehledné pro možnost porovnávání práce skupin, ale staly se východiskem pro moji činnost. Snažila jsem se najít vhodný způsob vizualizace. Již dlouho jsem měla dobré zkušenosti s využitím vývojových diagramů jako nástroje, který jasně a srozumitelně popíše různé procesy. Bylo pochopitelné, že k tomuto nástroji jsem se obrátila zcela samozřejmě. Hlavní myšlenkou, kterou jsem sledovala, byla snaha zachytit rozdílnost cest:

- přímé cesty řešení
- hledání s návraty (smyčky v diagramu)
- body, ve kterých docházelo k rozhodování (rozhodovací bloky)

Těmto požadavkům vývojový diagram jako nástroj vyhovoval. Doufala jsem, že všech osm řešitelských postupů, které jsem zaznamenala, bude možné zobrazit na jediném větším vývojovém diagramu. Doufala jsem též, že tato technologie umožní najít sérii ukazatelů, pomocí nichž budu umět porovnávat jednotlivé postupy.

Již v únoru 2002 jsem vytvořila sérii osmi vývojových diagramů – přesněji řečeno jejich primární podobu – pro každou skupinu jeden. Do nich jsem postupně připisovala poznámky, doplňovala další aspekty ovlivňující řešitelský proces. Jejich současnou „pracovní" podobu uvádím v přílohách 2.8.1a – h.

Zkušenosti z kognitivních analýz prací skupin 1 a 2, provedených v období leden – březen 2002 metodou atomární analýzy, se promítly i do dalšího postupného upřesňování diagramů. Začalo se ukazovat, že samotné písemné záznamy žáků pro rekonstrukci skutečného postupu řešení nestačí. Alespoň na některé z vyvstalých otázek jsem se pokusila najít odpověď prostřednictvím dodatečných rozhovorů v dubnu 2002. Pro každou skupinu jsem napsala na papír několik otázek a požádala jsem žáky o písemnou odpověď (přílohy 2.7.4; 2.7.5 a,b). S některými žáky jsem pak ještě dál hovořila.

2. etapa – snaha o univerzální vývojový diagram

Na základě osmi upřesněných vývojových diagramů jsem pak vytvořila dva „polo"-globální diagramy:

pro skupiny 1 až 4 (příloha 2.8.2a)

pro skupiny 5 až 8 (příloha 2.8.2b).

Dalším krokem v mém plánu mělo být vytvoření globálního – univerzálního diagramu pro všechny skupiny, kde by bloky byly společné, lišily by se cesty. Pohled na tyto dva vytvořené polo-globální diagramy však nepovzbuzoval moji víru, že globální diagram pro všechny skupiny bude lehké vytvořit. Jednak zde byly bloky, které byly pouze v jednom z polo-globálních diagramů, jednak spleť různobarevných čar byla již v každém z těchto diagramů hodně složitá a jejich příští vložení do jediného diagramu by vedlo k nepřehlednosti. Stále jsem se ale snažila jednotlivé bloky globálního diagramu uložit do roviny tak, aby úplná síť spojů mezi bloky byla realizovatelná. Výsledkem tohoto snažení je soubor bloků (příloha 2.8.3), který v dalším nazýváme Základ diagramu – ten vznikl v červnu 2002. Nakonec se ale ukázalo, že doplnění všech potřebných šipek do Základu vede ke grafickému chaosu.

Navíc se u této práce objevila další překážka. Ukázalo se, že je obtížné, a v některých případech téměř nemožné, určit přesné pořadí kroků řešitelského procesu pouze z písemných záznamů. Důležitost této skutečnosti narůstala, čím hlouběji jsem pronikala do myšlenkových procesů jednotlivých skupin. Rozhodla jsem se nejdříve opětovně vytvořit dílčí vývojové diagramy pro jednotlivé skupiny a to tak, že do Základu zaznamenám šipkami řešitelský proces té které skupiny. Způsob, kterým tato analýza probíhala, je uveden v odstavci 2.8.1.

V dalším období (v letech 2003 a 2004) jsem se zaměřila víc na hlubší analýzy činností jednotlivých skupin než na jejich porovnávání. To jsem také prezentovala na setkání doktorandů v květnu 2003 v Kralupech. Diskuse nad písemnými dokumenty žáků byly velmi inspirativní, přinesly další postřehy, které jsem dříve nevnímala, navíc znovu zazněl požadavek na porovnání práce skupin.

3. etapa – příprava prezentace

V lednu 2005 jsem se rozhodla prezentovat tento experiment na konferenci CIEAEM. Mým cílem bylo ukázat, že při konstruktivistickém způsobu vyučování je možné a užitečné, aby různé skupiny žáků řešily daný problém různými způsoby. Různorodost přístupu jednotlivých skupin přinese pak učiteli bohatý materiál o řešitelských procesech žáků, zejména o strategiích. Vrátila jsem se tedy znovu k původní myšlence vizualizace porovnání práce skupin v diagramu. Bylo mi jasné, že proniknutí do mého schématu vyžaduje hodně vysvětlování a hodně času, není proto použitelné pro prezentaci ani jako východisko pro diskusi s učiteli na seminářích.

S odstupem času a s dalšími zkušenostmi s jinými analýzami, jsem začala uvažovat o zjednodušeném schématu, kde nebude tolik podrobností, ale pouze základní kroky. Upustila jsem od symboliky vývojových diagramů – ponechala jsem pouze obdélníky pro záznam činnosti a spojovací šipky pro vyznačení cest. Místo rozhodovacích bloků jsem použila další obdélník s popisem činnosti – například „opakování pokusu" – tím nahrazuji znázornění fáze návratu v procesu hledání.

Celý objevitelský proces jsem rozčlenila do tří fází:

1. Uchopení problému v myšlení
2. Vlastní řešitelský proces
3. Včlenění do systému

Podrobněji schéma rozvádím v odstavci 2.8.2.

Následovala snaha tyto tři fáze aplikovat na práci skupin. Před tímto členěním jsem zapsala do rámečků jednotlivé kroky řešení a snažila jsem se je srovnat tak, aby se mezi nimi daly vyznačit cesty postupu řešení. Při kreslení na papír se mi to stále nedařilo. Aby se rámečky daly snadněji přemísťovat, použila jsem zpracování na počítači, ale ani to ještě nepřinášelo stručné a přehledné rozjasnění celého problému. Pak jsem kroky napsala na malé lístečky, které jsem mnohokrát přeskupila. Velké zjednodušení přineslo barevné rozlišení kroků v návaznosti na uvedené fáze. Výsledné přehledy podrobně uvádím v odstavci 2.8.2. Musím ještě dodat, že ani ty nevznikly na první pokus. Řazení jednotlivých kroků jsem mnohokrát měnila. Vždy, když jsem schéma vytvořila, jsem byla přesvědčená, že je správné. S odstupem času, když jsem se k práci znovu vracela, jsem však postřehla další souvislosti a schéma jsem upřesňovala a přetvářela. Zdálo se, že tato činnost je zbytečná a nemůže přinést kvalitní výsledek v podobě přesného schématu. Každá změna však v sobě skrývala velice malý, ale domnívám se že cenný, krůček k hlubšímu proniknutí do způsobu myšlení žáků a tím k pochopení jejich činnosti. Proto jsem ve svém snažení pokračovala.

Nakonec jsem se rozhodla vytvořit osm jednotlivých rozdílných diagramů na společném základu lišících se cestami. Tak lze přehledně a názorně porovnat řešitelské strategie skupin. Při prezentaci v PowerPointu je tato metoda dobře realizovatelná. Všechny diagramy uvádím v odstavci 2.8.2. Poprvé jsem tyto výsledné diagramy prezentovala v květnu 2005 na setkání doktorandů ve Zlenicích a následně pak v červenci 2005 na konferenci CIEAEM na Sicílii.

Při psaní práce v roce 2006 jsem znovu schémata dotvářela a upřesňovala. Potvrdilo se však, že přesnou kognitivní analýzu z mých materiálů nemohu udělat. Bylo by třeba přesně zaznamenat – nejlépe na video – každou skupinu od první do poslední chvíle procesu řešení. Ale ani takový záznam by nedal úplný pohled na to, jak proces probíhal. Scházely by totiž vnitřní myšlenkové kroky řešitelů – tedy to nejdůležitější, co chceme zkoumat.

2.8.1 Příklad tvorby diagramu 5. skupiny

Jak jsem uvedla v předchozím odstavci, finální podoba diagramů vznikala postupně a zdlouhavě. Do Základu jsem doplňovala šipky pro každou skupinu zvlášť, vycházela jsem při tom z písemných dokumentů. Vytvořená schémata jsem následně konzultovala s vedoucím práce, ten odkrýval další hlubší pohledy do myšlenkových pochodů žáků, byl to další krok v seznamování se s metodou atomární analýzy. Společně jsme upravovali schémata a hledali jsme takovou podobu, která by se co nejvíc přiblížila skutečnému postupu řešení – tuto fázi tvorby diagramu lze označit za klíčovou. V příloze 2.8.6 je pracovní verze schématu pro 5. skupinu vytvořená při konzultaci. Zde je dobře vidět naše hledání, opravování, upřesňování. Jsou tam vloženy další obdélníky se značkou v levém horním rohu (např.: představa 3D – situace) – ty mapují myšlenky žáků, které nebyly uvedeny v písemném žákovském záznamu, ale musely proběhnout buď jen v hlavách žáků nebo v ústní podobě při diskusi. Toto zjištění bylo pro mne velice cenné, to jsem si před tím neuvědomovala. Podobně jsem pak postupovala v diagramech i pro ostatní skupiny.

Ukázalo se, že schéma Základ v dané podobě není vyhovující. Ve schématu bylo třeba zviditelnit i další aspekty, podstatné pro pohled učitele – například ukázat, co vedlo k sebekontrole, k objevení omylu, ke korekci chyb. To už se v tomto typu diagramu nepodařilo. To byl hlavní důvod toho, že jsem na delší dobu schémata odložila a vrátila se k nim až v lednu 2005.

Snažila jsem se shrnout všechny dosavadní zkušenosti z analýz prací skupin a udělat jejich přehlednou sumarizaci. Využila jsem jednak prvotní náčrty diagramů, do nichž jsem vpisovala poznámky, které jsem považovala za podstatné, ale i diagramy zakreslené do Základu a diskutované při konzultacích. Jako příklad uvádím v příloze 2.8.1e jednu z pracovních verzí diagramu pro 5. skupinu, která po všech doplněních sloužila jako podklad pro finální podobu diagramu. Na rozboru této verze schématu ilustruji, co ovlivňovalo tvorbu finálního diagramu.

Schéma diagramu lze rozčlenit do několika oddílů, které byly doplňovány postupně na základě řady podnětů z různých pohledů. Zarámováním oblastí těchto oddílů se dá rozlišit a zviditelnit jejich rozdílný význam a odhadnout období, ve kterém vznikaly. Takto upravený diagram je na obr.2.11 na straně 75 (příloha 2.8.5).

Oddíl A

Vznikl jako první – výchozí – na základě prvního záznamu postup - není proto totožný s postupem uvedeným v přehledu v odstavci 2.5.2. Již v této části čteme „stopy" hledání při konzultacích a při analýzách:

- Původní popis postupu nezvažuje, že počátečním podnětem k činnosti bylo zadání úkolu. V tomto diagramu je úvodní blok nazván Výzva učitele. Blok má význam začátku řešitelského procesu – je tady ve tvaru obdélníku – v důsledném dodržování symboliky vývojových diagramů by měl být kruhový. Během mapování řešitelského postupu se ukázala ještě další nová výzva učitele – tady je to naznačeno tím, že vycházejí z prvního obdélníku dvě šipky. To by ale znamenalo, že je to blok rozhodovací – měl by být kosočtverec. Hned na začátku se ukázala řada nepřesností z pohledu zásad vývojových diagramů.
- Z druhého bloku vede šipka k poznámce „okamžitý vhled jednoho, ostatní vidí" – tato poznámka nezapadá do popisu posloupnosti činností, ale je důležitá pro mne jako učitele z hlediska hodnocení skupinového vyučování.

- Třetí blok oboustrannou šipkou mezi slovy výpočet a volba dokumentuje hledání a opravování správného pořadí kroků.
- Diagram obsahuje dvě kruhové oblasti – mají význam dvou různých typů výsledků.

Oddíl B

Snaha o zmapování způsobu myšlení žáků skupiny – vícevrstvé myšlení, propojení algebry a geometrie (symbol a ↔ g) – doplnění vychází z kognitivních analýz.

Oddíl C

Popis atmosféry, snaha o nezaujatý popis toho, co se dělo – inspirováno konzultací s P.Clanché, po analýzách z pohledu interakcí mezi žáky.

Oddíl D

Při ověřování funkčnosti Základu (příloha 2.8.6) si vedoucí práce všiml nesrovnalosti v písemném zápisu žáků – to vedlo k odhalení, že zřejmě model vytvořil někdo jiný, než ten kdo počítal – odtud pochází informace o spolupráci a zapojení žáků. Stejně i další poznámka v oddíle D – „přímá cesta, chtělo to náročnější úkol“ je podstatná z hlediska mojí sebereflexe při hodnocení hodiny a hlavně z hlediska přípravy dalších hodin.

Oddíl E

Evidence vypovídající o pečlivosti modelování - zde zřejmě není ukazatelem míry schopnosti přesného provedení, spíš vyjadřuje postoj žáků, že tato činnost byla zbytečná – vyplynulo z kognitivní analýzy – souvisí se způsobem myšlení žáků.

Oddíl F

Poznámka didaktická – souvisí s přístupy – „1 konstr. – 3 instr.“ znamená, že pro jednoho žáka byl nový poznatek získán vlastní konstrukcí, pro ostatní tři žáky se jednalo o instrukci od spolužáka. To odpovídá v pojetí didaktických situací tomu, že pro jednoho z žáků se podařilo vytvořit situaci a-didaktickou, pro zbývající tři žáky pouze didaktickou.

Oddíl G

Navazuje na kognitivní analýzu – zviditelnění okamžiku, který svědčí o zásadním objevu

Oddíl H

Doplnění po dodatečných rozhovorech – jak si vybavují činnost po půl roce.

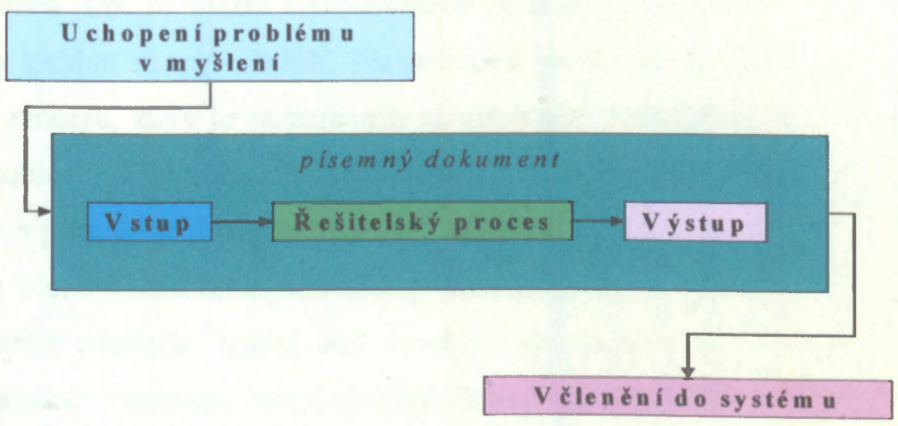
Poznámka: Později jsem byla upozorněna, že podobnou metodu záznamu řešitelského procesu použili i další autoři Hejný 1991 ADUC, OBZORY Stehlíková 1993 ADUC, Krupka 1999 OBZORY.

2.8.2 Porovnání práce jednotlivých skupin – přehled

Po mnoha úpravách jsem nakonec dospěla k následující podobě schématu, kterou jsem uvedla ve své prezentaci v červenci 2005 na konferenci CIEAEM na Sicílii.

Všechny diagramy, o kterých byla do této chvíle řeč, mapují řešitelské postupy zaznamenané v písemných dokumentech žáků. Každý krok zapsaný v diagramu má reálný podklad a najdeme jeho opodstatnění v podobě konkrétního záznamu. Objevitelský proces je však širší. Širší rámec zvažuji v následující finální podobě diagramu.

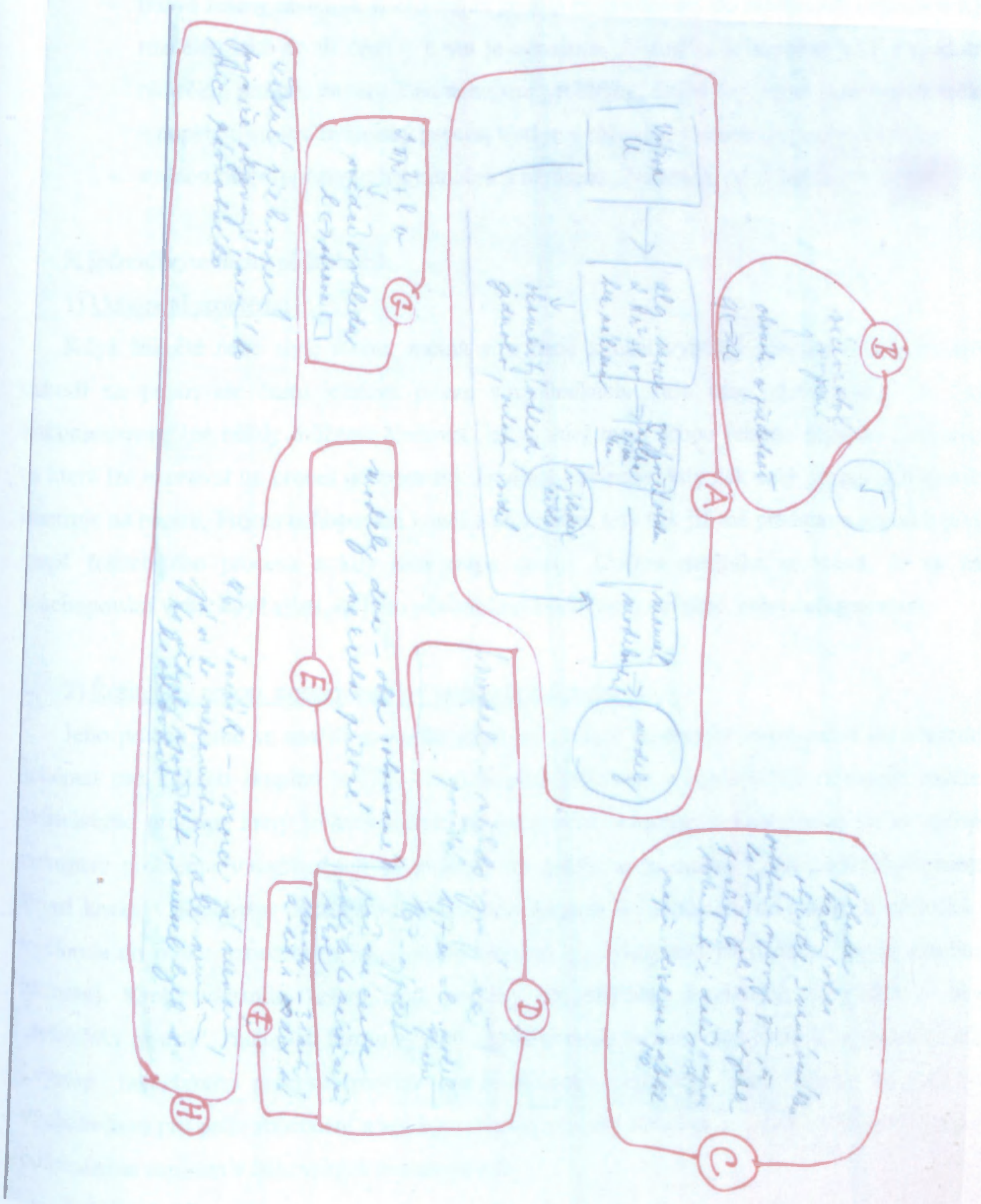
Tři fáze řešitelského procesu znázorněné graficky jsou na obrázku 2.12.



Obrázek 2.12: Tři fáze řešitelského procesu

Obrázek znázorňuje celkový rámec jednotlivých diagramů:

- modrý obdélník s nápisem „Uchopení problému v myšlení" vyjadřuje procesy, které se odehrály mezi zadáním úkolu a prvním zaznamenaným zápisem



Obr.2.11: Experiment V2 – fáze tvorby diagramu

- tmavě zelený obdélník znázorňující postup zaznamenaný do písemných dokumentů je rozdělen také do tří částí – první je označena „Vstup“ a je zapsána také v modrém rámečku, protože navazuje na uchopení problému; druhá je v jasně zeleném rámečku – popisuje vlastní řešitelský proces; třetí je v růžovém rámečku, označena výstup
- stejnou růžovou barvou má rámeček s nápisem „Začlenění do systému“

K jednotlivým fázím podrobněji:

1) Uchopení problému

Když žák čte nebo slyší úlohu, začíná si o dané situaci vytvářet představy. Někdy něco nahodí na papír, ale často zůstává pouze v myšlenkách. Tato část jeho aktivity se nedá dokumentovat. Jen někdy můžeme sledovat, jak si žáci mezi sebou řeknou nějakou informaci, ze které lze usuzovat na proces uchopování. Jsou ale i případy, kdy žák celý proces uchopování ilustruje na papíru. Proces uchopování končí v okamžiku, kdy žák již má představu aspoň o první etapě řešitelského procesu a kdy tuto etapu zahájí. Ovšem nezřídka se stává, že se žák k uchopování vrátí, když zjistí, že jeho původní uchopení bylo neúplné, nebo deformované.

2) Řešitelský proces zaznamenaný v písemných dokumentech

Jeho průběh jsme se snažili zrekonstruovat na základě písemných dokumentů do vlastních schémat pro každou skupinu zvlášť. Na uchopení problému v myšlenkách navazuje začátek řešitelského procesu, který je zaznamenán na písemném dokumentu. Domnívám se, že způsob uchopení problému v myšlenkách se promítá do úvodního záznamu v písemném dokumentu. První kroky v písemném dokumentu jsem proto zapsala do schématu do modrých rámečků a vyčlenila do bloku označeného jako „vstup“(možná by bylo přesnější označení první písemný záznam). Kroky vlastního řešení jsou uvedeny ve schématu v zelených rámečcích – blok „řešitelský proces“. Písemnou formu výsledku jsem zapsala do růžových rámečků a označila jako „výstup“ řešitelského procesu (možná lépe – uvedený výsledek). Tento výstup by měl být východiskem pro další zobecnění a aplikace. Každý použitý rámeček a každá vyznačená šipka je odůvodněna zápisem v žákovských dokumentech.

3) Včlenění do systému

Pro upevnění nově získaného poznatku je nutné jeho začlenění do poznatkové struktury žáka. To navazuje na výstup řešitelského procesu. V dalších problémech a úlohách budou žáci nový poznatek používat jako nástroj.

Diagramy pro porovnání řešitelských strategií

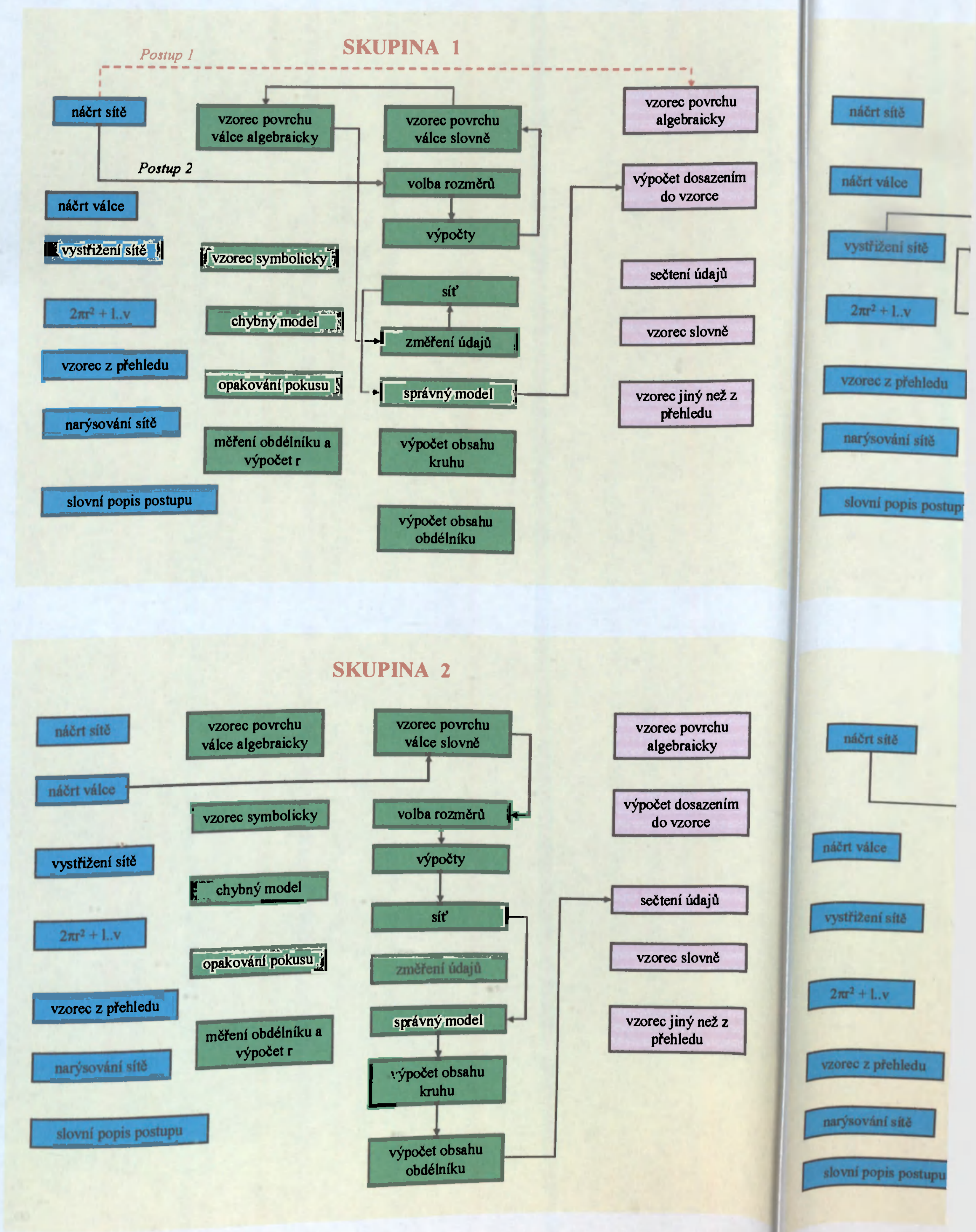
Při psaní této kapitoly jsem se znovu vrátila ke schématům práce jednotlivých skupin a znovu jsem musela udělat další upřesnění, finální diagramy proto nejsou úplně totožné s diagramy v prezentaci pro CIEAEM. Po sumarizaci uvedených analýz jsem dospěla ke konečné podobě diagramů, na kterých je možné porovnat řešitelské strategie jednotlivých skupin - viz obr.2.13 na vložených stránkách.

Šipky ve schématech sledují pořadí jednotlivých kroků řešení, ukazují rozdílné cesty, jsou evidentní cesty přímé i cesty s návraty.

U osmi skupin bylo zaznamenáno sedm různých vstupů, osm rozdílných cest řešení a pět rozdílných výstupů.

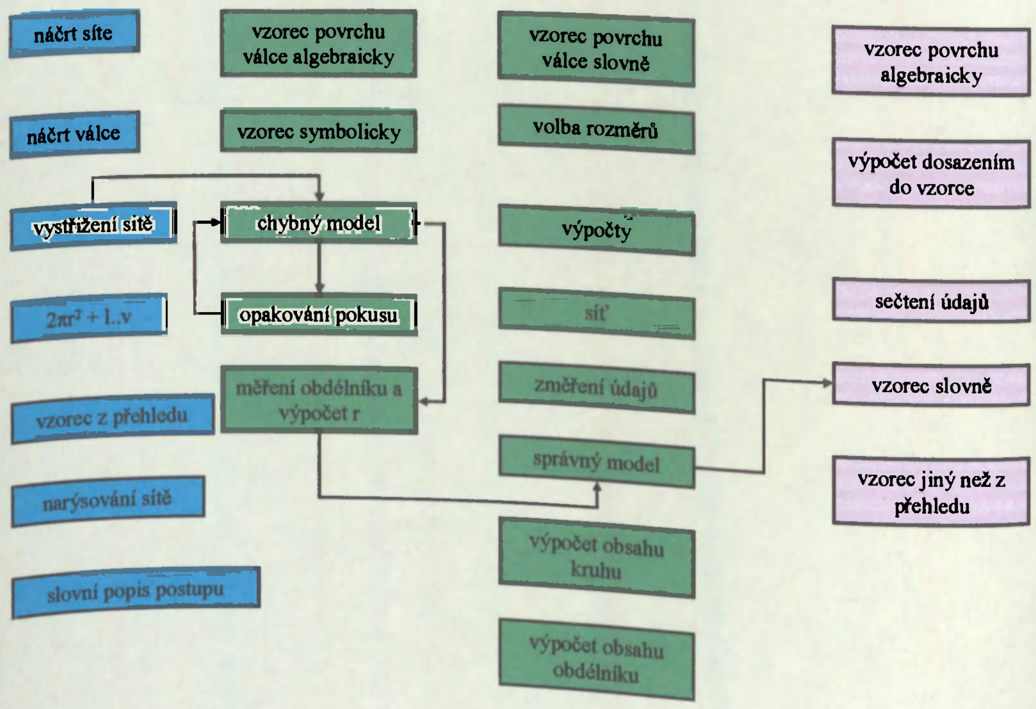
Různorodost řešitelských strategií ukazuje na širokou paletu kognitivních stylů žáků. Pro učitele je toto poznání cenné tím, že v daném konkrétním postupu lze vidět obecnější zákonitosti myšlení jednotlivých žáků. To pak umožní učiteli adresněji pomáhat žákovi v jeho zlepšování se (volbou úloh pro něj vhodných).

Rozmanitost žákovských řešení vypovídá o edukačním stylu učitele – tato teze je předmětem práce Hejný (2005). Výzkum zatím není ukončen, ale současné výsledky potvrzují, že rozmanitější řešení jsou z těch tříd, v nichž edukační styl učitele byl tvořivější, a málo rozmanité - z těch tříd, v nichž edukační styl učitele je transmisivní.

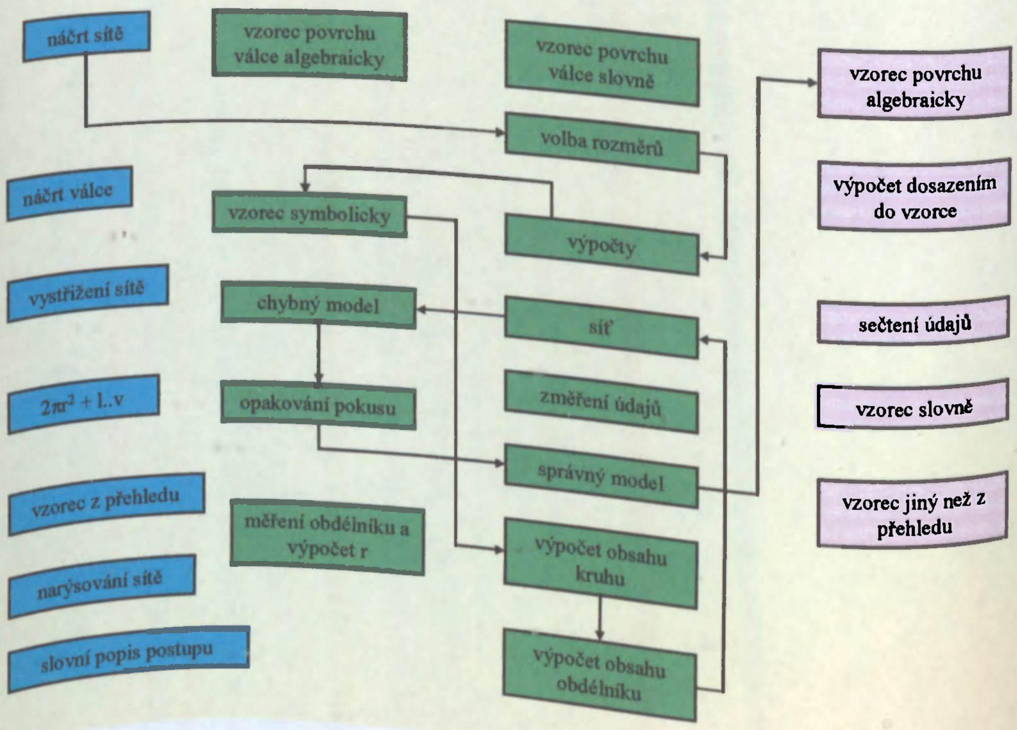


Obr.2.13: Porovnání řešitelských strategií všech skupin

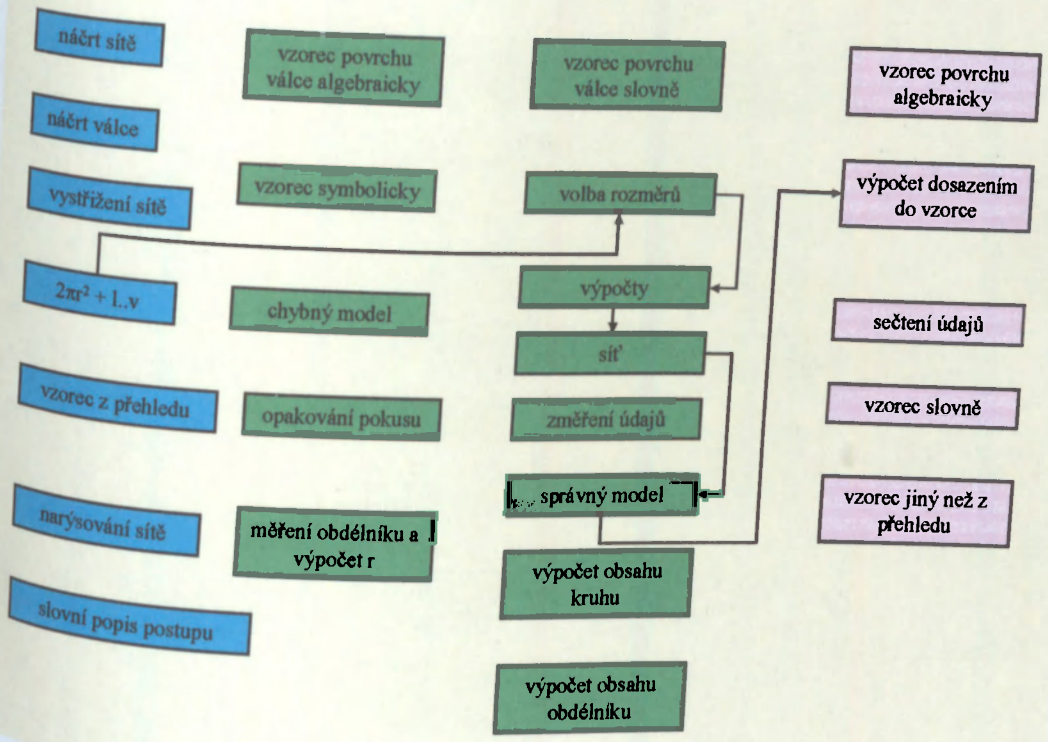
SKUPINA 3



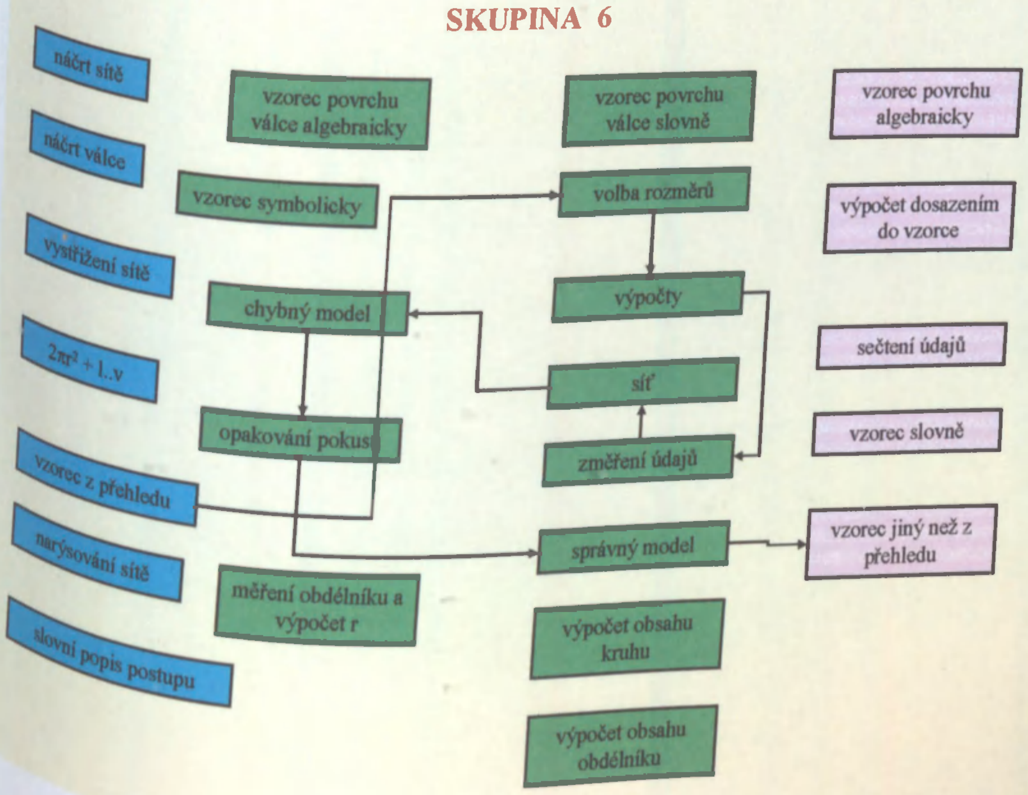
SKUPINA 4



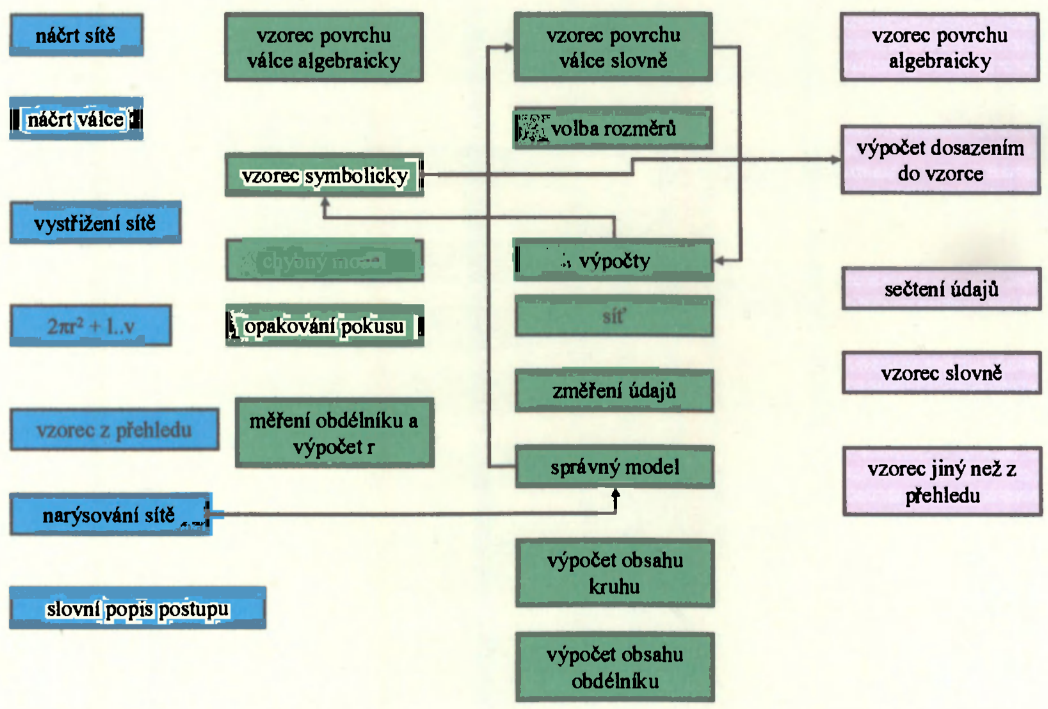
SKUPINA 5



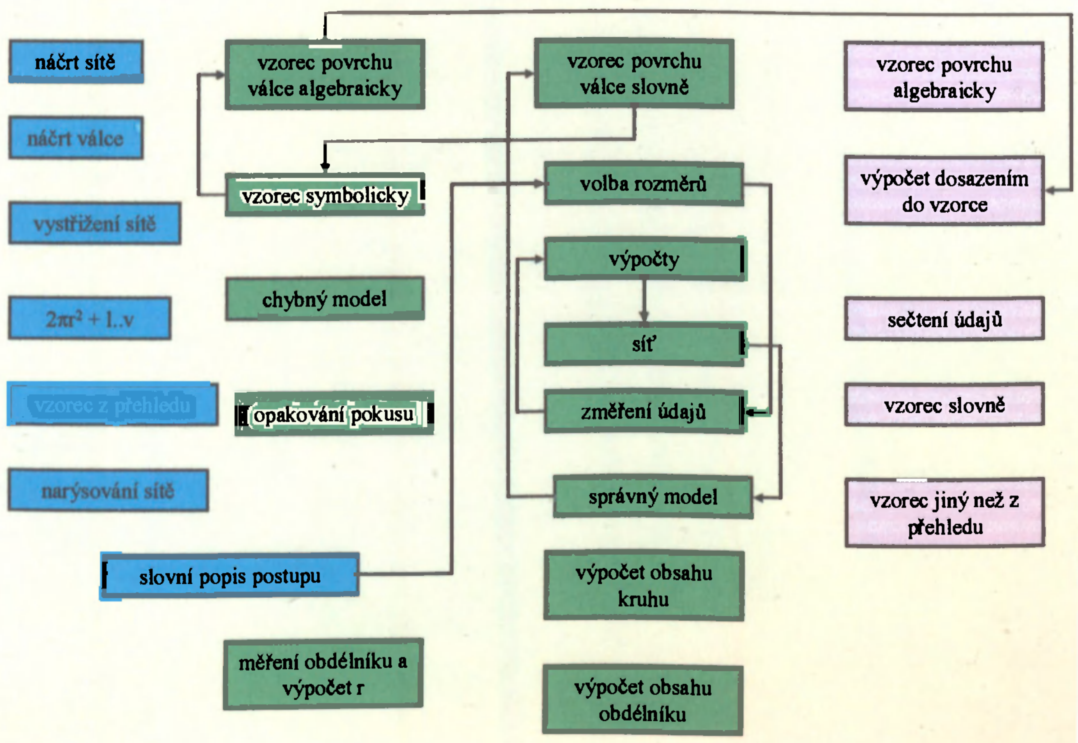
SKUPINA 6



SKUPINA 7



SKUPINA 8



Třetí kapitola

Matematika zviditelňuje neviditelné

Keith Devlin

3. Otevírání světa goniometrie

Jádrem kapitoly je experiment G2: Otevírání světa goniometrie. Kapitola je rozdělena do šesti částí.

V první části (3.1) jsou uvedeny autorčiny osobní zkušenosti s výukou goniometrie, další části jsou věnovány samotnému experimentu.

Ve druhé části (3.2) je popsán první experiment G1, který hlavnímu experimentu sloužil jako předexperiment.

S realizací experimentu seznamuje třetí část (3.3), ve čtvrté části (3.4) jsou uvedeny analýzy žákovských řešení, doplněné třinácti kopiemi žákovských písemných dokumentů. Pátá část (3.5) seznamuje čtenáře se závěry s analýz.

Poslední šestá část (3.6) je věnována sumarizaci analýz z pohledu dalšího postupu učitele.

K práci je přiloženo DVD se záznamem práce tří skupin při řešení stejné úlohy v průběhu experimentu G3 realizovaném na matematickém táboře. V příloze DVD jsou analyzovány výňatky z diskuse žáků.

3.1 Osobní zkušenosti s výukou goniometrie

Zkušenosti ze střední školy (ekonomická škola, vyšší gymnázium)

Po mnoho let jsem goniometrické funkce zaváděla ve druhém ročníku čtyřleté střední školy (střední ekonomická škola, čtyřleté gymnázium, odpovídající sexta osmiletého gymnázia) a pravidelně jsem konstatovala, že znalosti žáků jsou zde velice formální. Byla jsem přesvědčena, že je to důsledek tradičního vyučování, kterým žáci prošli na základní škole, založeného na deklarativní prezentaci goniometrických funkcí. V něm je žákům předložen pravoúhlý trojúhelník s vyznačeným úhlem α a s označenými délkami stran a,b,c. K tomu je řečena informace: „Poměr protilehlé ku přeponě nazýváme sinus“ a je připsána formule $\sin\alpha = a/c$. Analogicky je tomu i u ostatních goniometrických funkcí.

Od žáků je požadováno, aby uvedené pojmy a vztahy přijali jako pravdivé skutečnosti, i když nevidí smysl tohoto poznání. To ale většině žáků nevadí, protože jejich meta-zkušenost jim říká, že ve škole je nutno vstřebávat předkládané poznatky bez nároku na zdůvodnění jejich prezentace.

Bylo mi jasné, že na existujících formálních poznatcích trigonometrických vztahů nelze úspěšně budovat pojem goniometrické funkce, a proto jsem začátek tématického celku věnovala jistému „zživotňování" formálních poznatků žáků. Tyto zkušenosti jsem později využila, když jsem učila v tercii sedmiletého gymnázia ve třídě C (níže rozvedeno).

Především jsem se snažila v poznatcích žáků znaky a,b,c nahradit pojmy protilehlá odvěsna, přilehlá odvěsna, přepona. Dále jsem věnovala dost úsilí tomu, aby si žáci uvědomili, že v dané situaci není rozhodující velikost trojúhelníků, ale pouze jejich tvar, tj. že pracujeme nikoli v metrické ale v podobnostní transformační grupě. I pak ale značný počet žáků měl ještě dlouho problémy s hlubším porozuměním goniometrickým situacím a značné potíže se objevily při rozšiřování definičního oboru goniometrických funkcí na celé **R**, především při zavádění goniometrických funkcí pomocí orientovaného úhlu a jednotkové kružnice. Řada žáků vnímala goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku jako jednu uzavřenou záležitost a odděleně pak, jako něco jiného a nového, goniometrické funkce v jednotkové kružnici. Cenné potvrzení této mé zkušenosti o oddělení dvou přístupů ke goniometrii mi poskytla kolegyně L. Ilucová v autobiografické výpovědi poslané mailem:

> Moje problemy s goniometriou...
>
> Pri goniometrii sa mi vybavuju 3 stycne body: 1. pravouhly trojuholnik, na ktorom sa funkcie vysvetli ako pomery stran (ZS, vtedy 8.rocnik), 2. jednotkova kruznica, uhol, grafy goniometr. funkcii (z jednotk. kruznice; 2.rocnik gymnazia), 3. hodnoty goniometr. fcii pre dane uhly pouzivane pri numerickom rieseni uloh.
>
> Kazdu z tem som ovladala dobře, aj som chapala, ze je to k jednej teme, ale nevidela som spojitost, logicku prepojenost lebo mi ju nikto neukazal.

Shrňme. Z uvedeného vyplývají (podle mých zkušeností) hlavní didaktická úskalí porozumění goniometrickým funkcím:

1. zjednodušení pojmu sinus na asociaci: $\sin \leftrightarrow a/c$, analogicky pro další funkce cos, tg, cotg

2. zjednodušení pojmu sinus na asociaci protilehlá/přepona, analogicky pro další funkce cos, tg, cotg
3. snížená schopnost pracovat s úhly přesahujícími 90° a neschopnost pracovat s úhly přesahujícími 360°
4. neschopnost porozumět periodicitě funkce.

O didaktických úskalích goniometrických funkcí jsem několikrát diskutovala s učiteli matematiky na vlastním pracovišti i na různých setkáních. Někteří popisovali podobné zkušenosti a shledávali toto téma jako didakticky náročné, jiní konstatovali, že s výukou goniometrických funkcí problémy nemají, že jejich žáci všechny potřebné vzorce ovládají.

Zkušenosti z osmiletého gymnázia (nižší gymnázium)

Po dvanácti letech mého působení na střední škole jsem začala učit na nižším gymnáziu a tím jsem získala nový impuls pro řešení této problematiky. Zkušenosti, které jsem v uvedené oblasti získala v letech 1991 až 2005, se vztahují ke třem třídám, v nichž jsem v uvedeném období probírala tématický celek goniometrické funkce. Třídy označené A a B jsou představeny ve druhé kapitole (třída A v odstavci 2.2, třída B v odstavci 2.3).

Ve třídě C jsem byla třídní učitelkou. Učila jsem tam matematiku celých sedm let – od primy (1991/1992) až do maturity (1997/1998) – v té době bylo naše gymnázium sedmileté. Žáky třídy C jsem seznamovala s goniometrickými funkcemi já sama ve školním roce 1993/94, když byli v tercii.

Výše popsané zkušenosti z výuky na střední škole se pro mne staly vnitřní výzvou, abych se pokusila zlepšit přípravu žáků na úrovni ZŠ. Používali jsme učebnici Šedivý a kol. (1991), která byla v té době jako jediná dostupná, a sbírku úloh Bušek a kol. (1992). Goniometrické funkce ostrého úhlu jsou v učebnici zavedeny užitím podobnosti pravoúhlých trojúhelníků. Červeně zvýrazněné vzorce určené k zapamatování jsou uvedeny pouze ve zkrácené podobě ve tvaru zlomků s písmeny a,b,c. První zavedenou funkcí je sinus.

Od počátku jsem si uvědomovala úskalí, které jsem uvedla v bodech 1) a 2). Hledala jsem cesty, jak otevřít žákům oblast goniometrických funkcí a jak jim pomoct proniknout do této oblasti matematiky. Věděla jsem, že bez přímých zkušeností nemůže žák zcela přijmout a porozumět poučce, kterou mu nabídne učebnice nebo učitel. V té době jsem postupovala zcela intuitivně. Dnes již vím, že můj tehdejší způsob uvažování lze vyjádřit termíny izolovaný a generický model: „Musím nabídnout žákům dostatečný počet izolovaných modelů, aby každý sám byl schopen ve svém vědomí vytvořit (konstruovat) z nich model generický." Proto jsem se snažila ukázat žákům větší počet trigonometrických situací, které jim umožnily budovat generický model pojmu sinus přes sérii izolovaných modelů. Stejně samozřejmě i pro jiné goniometrické funkce.

Pro první zkušenost žáků s goniometrickými funkcemi jsem zvolila následující úlohu:

Úloha 3.1:

1. *Narýsujte úhel KLM o velikosti 60 °.*
2. *Na rameno LK umístěte bod X v libovolné vzdálenosti od bodu L.*
3. *Z bodu L vztyčte kolmici k, průsečík k s ramenem LM označte Y.*
4. *V pravoúhlém trojúhelníku změřte délky stran.*
5. *Vypočtěte poměr| XY| :| LY| a porovnejte vypočtený výsledek se spolužáky.*

Následovala diskuse o objevené skutečnosti. Pak žáci ve „svém" úhlu volili další body na rameni *LK* v různých vzdálenostech od bodu *L* a zkoumali další takto vzniklé pravoúhlé trojúhelníky. Nejprve porovnávali velikosti vnitřních úhlů, pak počítali poměry stran a porovnávali je. Sami došli k objevu, že pro daný úhel jsou poměry odpovídajících si stran stejné, což zdůvodňovali podobností trojúhelníků. Stejnou úlohu opakovali pro jiný úhel. Někteří žáci již další opakování nepotřebovali, prožité zkušenosti se posunuly na úroveň generického modelu.

Až po těchto zkušenostech jsem žáky seznámila s tím, že se matematici domluvili na názvech příslušných poměrů – sinus, kosinus, tangens a kotangens.

Následovalo rýsování a měření různých pravoúhlých trojúhelníků, určování hodnot goniometrických funkcí vlastním výpočtem, pak porovnávání s hodnotami na kalkulátorech, aplikace při řešení pravoúhlého trojúhelníku.

Navzdory této přípravě jsem pozorovala pro mne překvapivý jev. Žáci třídy C v tercii velice dobře zvládli goniometrické funkce úhlu v pravoúhlém trojúhelníku, i přesto však v kvintě (školní rok 1995/96) měli potíže při pochopení goniometrických funkcí v celém **R**. Otázku, jak žákům již v tercii otevřít svět trigonometrie tak, aby v kvintě byli schopni navázat na své poznání a propojit ho na goniometrii, jsem ještě nedokázala vyřešit.

Zde začíná druhá část mých zkušeností, která se týká výuky stejného tématu v dalších dvou třídách. Je na místě připomenout, že v těchto letech jsem intenzivně hledala odpovědi na otázky, které přinášela výuka na nižším gymnáziu. Účastnila jsem se didaktických seminářů, studovala odbornou literaturu, prošla programem „Iniciativa“, začala rozšiřovat své znalosti doktorandským studiem na KMDM PF UK.

Musela jsem čekat pět let, než jsem znovu učila stejnou látku. Tentokrát to bylo v kvartě a ne v tercii, protože zavedením povinné deváté třídy došlo k rozvolnění učiva ze tří na čtyři roky a sedmileté gymnázium bylo transformováno na osmileté.

Třídu B jsem učila od tercie (1999/2000) do oktávy (2004/2005). Zde jsem poprvé nahradila tradiční způsob zavedení goniometrických funkcí z pravoúhlého trojúhelníku úlohou (úloha ÚG – ve druhé kapitole označena Ú 2.12), která dovedla žáky k objevu možnosti porovnávání velikosti úhlů pomocí poměru. Řešení pravoúhlého trojúhelníku následovalo jako aplikace objevených funkcí. Změna přinesla překvapivě dobré výsledky. Bohužel jsem nevytvořila žádné záznamy, ani nearchivovala žákovské práce. Situaci jsem označila jako experiment G1, který se pak stal předexperimentem pro následující experiment G2 mého výzkumu. Experiment G1 je podrobněji popsán v odstavci 3.2.

Jako experiment G2 jsem zorganizovala hodinu, při které žáci řešili úlohu ÚG ve třídě A, kde jsem zopakovala stejný postup zavedení goniometrických funkcí jako ve třídě B. Z experimentu G2 jsem udělala podrobné analýzy. Příprava a průběh experimentu G2 jsou popsány v odstavci 3.3, analýzy žákovských řešení v odstavci 3.4.

Kromě těchto zkušeností s experimentálním vyučováním jsem uskutečnila v roce 2005 experiment G3 na matematickém táboře. Účastníci tábora také řešili úlohu ÚG. Tři skupiny jsem při práci natočila na DVD, ze záznamu jsem přepsala zajímavé části diskuse, ty jsem pak analyzovala. Ukázka této analýzy je v příloze 3.1.1. DVD se záznamem je k práci přiloženo.

3.2 Experiment G1 ve třídě B

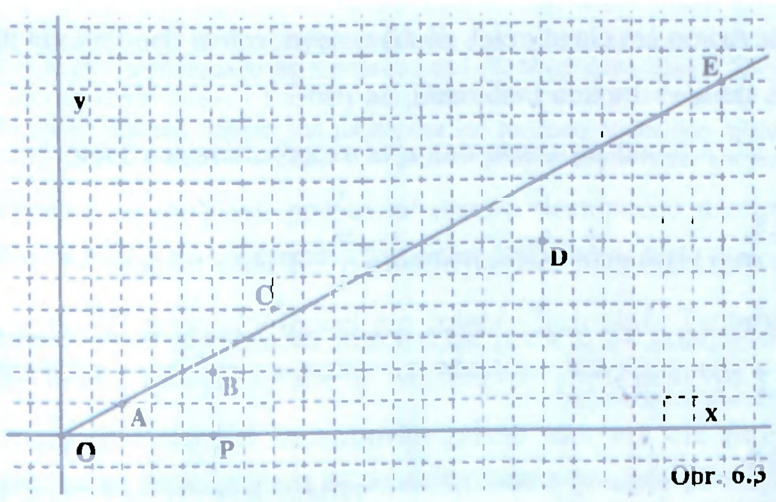
V květnu 2001 jsem se pokusila vylepšit edukační strategii výuky tématického celku trigonometrie – goniometrie ve třídě B, která byla právě v kvartě. Velice mě v tu dobu oslovoval konstruktivistický přístup. Postupné nabývání zkušeností je však jen jednou z jeho myšlenek. Další myšlenkou tohoto trendu je „dominantní úloha“. Jedná se o úlohu, která je žákům předložena hned ve vstupní hodině a která motivuje žáky k činnosti. Smysl úlohy je motivovat i slabší žáky, aby mohli vlastní aktivitou získávat autentické zkušenosti a tím se s novou oblastí seznámit pro ně přijatelným způsobem. Je velice dobré, když úloha dává příležitost i vyspělým žákům hledat hlubší jevy a souvislosti a když je schopna dalších modifikací ať již z hlediska propojení na jiné oblasti matematiky, tak i z hlediska variování stupně obtížnosti. Je zřejmé, že dominantní úloha musí být formulována tak, aby ji všichni žáci dobře rozuměli, tj. aby každý žák měl jistou představu o tom, jak by se tato úloha nebo aspoň některá její část dala řešit. Značné požadavky, které jsou na dominantní úlohu kladeny ukazují, že není lehké pro jednotlivé tématické celky takovou úlohu najít. Po značném úsilí jsem takovou úlohu objevila ve skriptech Hejný, Jirotková (1999 , str. 58), pro přehlednost jsem ji v dalším textu označila ÚG (ve druhé kapitole je uvedena jako jedna ze zkušeností pod označením Ú2.12):

Úloha ÚG:

Jsou dány body $O[0,0]$, $P[5,0]$ a dále body $A[2,1]$, $B[5,2]$, $C[7,4]$, $D[16,6]$, $E[22,11]$ a $F[101,50]$. Uspořádejte podle velikosti úhly $\alpha = \sphericalangle AOP$, $\beta = \sphericalangle BOP$, $\gamma = \sphericalangle COP$, $\delta = \sphericalangle DOP$, $\varepsilon = \sphericalangle EOP$, $\varphi = \sphericalangle FOP$.

Řešení:

Autorské řešení (ve skriptech na straně 59) je na obrázku 3.1.



Řešení. Na obrázku 6.3 jsou narýsovány všechny body ze zadáni kromě bodu F. Z obrazku je předné vidět. že $\alpha = \varepsilon$, protože prodloužená úsečka OA prochází bodem E. Z obrazku je dále patrné. že $\beta < \delta < \alpha = \varepsilon < \gamma$. Bod F, který leží mimo obrázek, není dostupný smyslovemu poznání. Jestliže se však zamyslíme nad souřadnicemi bodů, které vidíme, muzeme pozorovat. že body, které leži „pod" polopřímkou OE, mají podíl (druhá souřadnice : první souřadnice) menší než ½ a bod C, který leží „nad" polopřímkou OE, má tento podíl vetsi nez ½. Bod F má uvedený podíl menši než ½, proto zřejmě bude $\varphi < \alpha$. Na druhé strane stoupaní polopřímky OD je dáno uvedeným podílem, který je roven číslu 6:16. Stoupání polopřímky OF je dáno číslem 50:101. Pomoci kalkulačky zjistíme, že stoupaní polopřímky OD je rovno 6:16 = 0,375, stoupání polopřímky OF je rovno 50:101 = 0,495 a stoupání polopřímky OB je rovno 2:5 = 0,4. Máme tedy výsledek $\delta < \beta < \varphi < \alpha = \varepsilon < \gamma$.

Obrázek 3.1: Autorské řešení úlohy ÚG

Očekávaná řešení žáků:

Žáci budou rýsovat nebo načrtávat v prostředí čtverečkovaného papíru, což jim pomůže odhalit zákonitost. Ke zviditelnění nedostupného bodu $F[101,50]$ mohou využít

- podobnost – zmenšení útvaru v poměru
- zkušenost z kreslení grafů např. ve fyzice
- poměr souřadnic jako prostředek k porovnávání velikosti úhlů
- graf přímé úměrnosti – konstanta k – koeficient přímé úměrnosti rozhoduje o strmosti grafu

To je výčet témat, která mají vztah k řešení úlohy a která byla již dříve ve třídě probrána.

Přínos úlohy ÚG pro zavedení goniometrických funkcí

Při řešení ÚG na čtverečkovaném papíru je třeba porovnávání několika úhlů v jediném obrázku. Úhly jsou dvou různých typů: ty, které lze měřit a provnávat měřícími nástroji, protože leží na papíře (v terminologii P. Vopěnky – v osvětlené části roviny), a ty, které se na papír již nevejdou (leží za obzorem). Měřením a porovnáváním úhlů prvního typu, získá žák vhled do situace a několik konkrétních izolovaných modelů. Jakmile ale má pracovat s úhlem, který leží za obzorem, musí hledat myšlenkový nástroj na překročení obzoru. Někteří žáci obzor posunuli tím, že čtverečkovaný papír nastavili. Pak bylo nutno obzor posunout a dát těmto žákům nové úlohy, které leží výrazně za možností posouvání obzoru dostupného manipulativním řešením. Jakmile žáci objevili, že velikost úhlu lze posoudit pomocí poměru, který známe jako funkci tangens/kotangens, vytvořili generický model pro řešení všech úhlů. Tento generický model se stal pro ně vstupní branou do goniometrie. Nejenže se stal klíčovým poznatkem budoucí goniometrické struktury (protože byl konstruován žákem samým), ale zároveň ukázal žákům smysluplnost této důležité kapitoly matematiky.

Učiteli pak již stačí žákům říct, že to, co objevili je v matematice nazváno termínem tanges resp. kotangens. Samo toto sdělení má silně motivační charakter. Žák vidí, že vlastní úvahou objevil něco, co v matematice má jméno a je tedy důležité. Sebevědomí žáka tím narůstá.

Úloha G se dá využít jako pilotní úloha k dalším úvahám (viz odstavce 3.4, 3.5 a 3.6). Využití tangens a kotangens při řešení pravoúhlého trojúhelníka je pak aplikací vlastností těchto funkcí.

Dá se předpokládat, že tímto netradičním zavedením goniometrických funkcí jsou ošetřena didaktická úskalí uvedená v odstavci 3.1. Navíc získané zkušenosti nejsou ohraničené pravoúhlým trojúhelníkem, hned od začátku je vytvořena vazba na funkce a jejich vlastnosti, poznatky se propojují.

Poprvé jsem využila úlohu ÚG v kvartě v květnu 2001 (třída B – experiment G1). S výsledkem jsem byla spokojena. Žáci zde sami objevili, že při porovnávání velikostí úhlů lze každý úhel vyjádřit pomocí poměru dvou délek. K před-pojmu (pre-konceptu) tangens dospěli nikoli přes trojúhelník, ale přes prostředí čtverečkovaného papíru.

Důsledky pro experiment G2

Ukázalo se, že žáci třídy B snadněji a rychleji zvládli učivo goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku na úrovni základní školy. Mnohé otázky, které jsme diskutovali v průběhu řešení ÚG, přesáhly rámec učiva ZS.

Ve školním roce 2002/2003 – v sextě – jsem v této třídě mohla konstatovat, že rozšíření definičního oboru goniometrických funkcí na R většině žáků nečinilo potíže. Žáci zcela přirozeně pokračovali v ÚG tím, že zvolili a zakreslili další body do grafu z ÚG. Tyto body umístili do různých kvadrantů a samostatně odečítali hodnoty goniometrických funkcí a z nich pak usuzovali na vlastnosti těchto funkcí.

Pouze u několika žáků se později objevily „klasické“ potíže. Když jsem pak víc přemýšlela nad prací těchto žáků v hodinách, zjistila jsem, že zřejmě mají „reprodukční“ způsob učení (jsou schopni nejen poznatky, ale i rozsáhlé postupy zvládnout pamětně bez hlubšího pochopení). Přestože byla úloha zadána jako „objevitelská“, oni se zaměřili až na výsledek, který zhodnotili jako důležitý pro zapamatování si.

Někteří žáci sami přišli na výhodnost umístění bodů na jednotkové kružnici. Objevili, že lze snadno odečíst hodnoty funkcí sinus a kosinus pouze z jejich souřadnic. Při skupinové práci pak nacházeli různé vlastnosti goniometrických funkcí a bylo jasné, že v této oblasti nabyli značné zkušenosti. Úspěšně pak zvládali i další úlohy jako: sestrojování grafu goniometrických funkcí, řešení základních goniometrických rovnic, objevení goniometrických identit, následně i téma komplexních čísel.

Z hlediska výuky jsem hodnotila uskutečněný experiment jako velice zdařilý, žel v průběhu této práce jsem byla tak vtažena do role učitele, že jsem zapomněla na roli experimentátora. Dokumentace žákovských projevů byla příliš útržkovitá. Zkušenost z experimentu G1 mě přivedla k přesvědčení, že zavedení goniometrických funkcí netradičně prostřednictvím úlohy ÚG je účinnější, než tradiční postup přes pravoúhlý trojúhelník.

Rozhodla jsem se, že v následující třídě budu experiment nejen opakovat, ale i dokumentovat, experiment G1 poslouží v roli předexperimentu.

Při následujícím experimentu G2 je třeba:

- vést si podrobnou evidenci
- získat co nejvíce materiálů k dokumentování práce žáků
- použít stejnou dominantní úlohu

3.3 Realizace experimentu G2

Hned v následujícím školním roce 2001/2002 jsem experiment uskutečnila ve třídě A, která byla právě v kvartě.

3.3.1 Vstupní údaje

Charakteristika třídy

Experiment proběhl ve stejné třídě, jako experiment V2 popsaný ve druhé kapitole – to znamená ve třídě A – v kvartě (30 žáků, 15 dívek, 15 chlapců). Žáci byli zvyklí pracovat ve skupinách. Objevování a diskuse byly v matematice časté a běžné činnosti. Žáci měli zkušenosti s několika projekty v matematice, ve fyzice i s rozsáhlejšími projekty, které propojovaly víc předmětů.

Téma hodiny:

Zavedení goniometrických funkcí za použití teorie generického modelu, s důrazem na vytvoření generického i abstraktního modelu – zadáním a řešením dominantní úlohy ÚG, využitím prostředí čtverečkovaného papíru.

Cíl experimentu:

Mapovat myšlenkové procesy žáků při objevování nástroje pro porovnávání velikosti úhlů.

3.3.2 Sběr dat

Pro splnění vytčeného cíle bylo třeba získat potřebné materiály pro následné analýzy. Žáci během hodiny používali čtverečkovaný papír na řešení úlohy a bílý papír na zaznamenání postupu a zdůvodnění řešení. Obojí na konci hodiny odevzdali.

Získaná data lze rozdělit do dvou kategorií:

Práce na čtverečkovaném papíře – přílohy 3.5.1 (obr.1), 3.5.2 (obr.2)

Zdůvodnění postupu na bílém papíře – přílohy 3.5.1 (obr.2), 3.5.3 (obr.1)

3.3.3 Předchozí zkušenosti žáků

Žáci znají zobrazování bodů v soustavě souřadnic, grafické porovnávání úhlů, podobnost trojúhelníků, poměry, zlomky, pojem funkce, graf funkce, definiční obor, obor hodnot, pojem lineární funkce. Mají zkušenosti s objevováním.

3.3.4 Očekávání učitele

Před druhým pokusem jsem podrobněji promyslila zkušenost z experimentu G1 pro využití úlohy ÚG (odstavec 3.2) ve výuce. Především jsem se snažila poznat příčiny úspěšnosti této úlohy. Uvědomila jsem si následující:

- Řešení úlohy začíná rýsováním, které žáka vtáhne do aktivní práce
- Úloha má komplexní charakter a rozpadá se na sérii podúloh:
  - identifikace úhlů $\alpha, \beta, \ldots, \varphi$
  - nalezení způsobu, jak uchopit vzdálené body E a F
  - odhalení nástroje, jímž lze šestici úhlů uspořádat podle velikosti
- Dřívější žákovská řešení ukázala různé přístupy. Pomalejší žáci uchopili nejprve čtyři snadné úhly $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ a hledali, povzbuzeni tímto úspěchem, jak postupy uvedených čtyř izolovaných modelů přenést na dva náročnější případy (ε, φ). Pokročilí žáci rychle přistupovali k náročnějším úlohám, které představovaly generický model řešení. Někteří dospěli k objevení pojmu tangens (jméno tohoto poznatku jsem jim pak řekla), vnímali funkční závislost velikosti zlomku na velikosti úhlu.

- Právě uvedenou volitelnost rychlosti postupu žáka při řešení úlohy jsem vnímala jako její hlavní přednost, protože přirozeným způsobem zaměstnala všechny žáky třídy a navíc do jisté míry umožnila učiteli diagnostikovat žáky.

Popsaná zkušenost z experimentu G1 mi posloužila jako scénář pro následující experiment G2 – předložit třídě úlohu, sledovat různé řešitelské strategie, nevstupovat žákům do myšlenkových procesů, komunikovat, když o to žák sám projeví zájem a případně iniciovat diskuse mezi žáky.

3.3.5 Průběh výuky G2

Experiment G2 – první hodina

24. 6. 2002 – 4. vyučovací hodina, přítomno 28 žáků – 14 dívek a 14 chlapců

Vstupní atmosféra: konec školního roku, klasifikace je již uzavřená, horko – otevřená okna i dveře, ostatní třídy již mají volný program. Vzhledem k tomu, že tři žáci třídy budou po prázdninách navštěvovat jinou střední školu a podle osnov by měli znát úvod do goniometrie, rozhodla jsem se i za těchto okolností experiment uskutečnit a požádat třídu o spolupráci a o pomoc svým třem kamarádům. Byla jsem velice příjemně překvapena pozitivní reakcí třídy.

Zadání úkolů: na tabuli jsem napsala znění úlohy ÚG. Žáci dostali čtverečkované papíry na řešení a bílé papíry na zaznamenání postupu. Pracovat měli nejprve samostatně, pak měli svoje úvahy porovnat se sousedem, následně mohli podle potřeby pokračovat v práci ve čtveřicích, případně mohli konzultovat s kýmkoliv ze třídy. Na bílém papíru měli oddělit čarou úvahy, které doplnili po konzultaci s někým dalším.

Pozorování v průběhu hodiny: žáci pracovali s velkým zaujetím, nejprve samostatně, pak vzájemně diskutovali, vytvořili příjemnou pracovní atmosféru. Opět se potvrdilo, že několik žáků ihned při zadávání vidělo, jak spolu úhly souvisejí. Tito žáci byli schopni srovnat všechny úhly – pracovali na úrovni generického modelu. Do řešení se pustili i slabší žáci, kteří si s body $A-E$ uměli docela dobře poradit, problémy nastaly až s bodem F, který je nedostupný a je nutno jej uchopit pomocí „teoretického“ nástroje. Například dvě dívky porovnávaly prvočíselné rozklady ve zlomku tvořeném souřadnicemi bodů. Jiná dívka, Lenka, bod F řešila pomocí nastaveného papíru. Tento postup mne vedl k doplnění úlohy o další bod $G[1050,548]$, který nelze řešit nastavováním papíru. Mimochodem, tento bod pomohl i ostatním žákům prověřit domněnky, k nimž se dopracovali.

Experiment G2 – druhá hodina – příprava

Po první „objevitelské“ hodině jsem prohlédla žákovská řešení. Potvrdila se moje pozorování z hodiny. Dva žáci objev dokončili – ti mohou dál zkoumat vlastnosti objevené funkce; ostatní budou pokračovat dál v hledání.

Při čtení záznamů na bílém papíru jsem zjistila, že žáci většinou nezapsali zdůvodnění svého postupu, ani úvahy, které k řešení vedly. Cílem experimentu G2 však bylo mapovat myšlenkové procesy žáků, proto jsem je požádala, aby toto zapsali dodatečně další hodinu na modrý papír.

Tak vznikla třetí kategorie sebraných dat:

Podrobnější vysvětlení na modrém papíře – přílohy 3.5.2 (obr.1), 3.5.3 (obr.2)

Experiment G2 – druhá hodina – průběh

O dva dny později jsme v bádání pokračovali:

26. 6. 2002 – 4. vyučovací hodina přítomno 30 žáků - 15 dívek a 15 chlapců

Atmosféra: poslední hodina matematiky v tomto školním roce (první dvě vyučovací hodiny filmové představení)

Pokračovali jsme v práci. Já jsem se věnovala zejména třem odcházejícím žákům, ale i další žáci se snažili problém dořešit. Zároveň jsem všechny žáky požádala, aby na modré papíry, které jsem jim rozdala, popsali svůj řešitelský postup.

3.3.6 Konstatování

Na konci druhé hodiny bylo možné žáky roztřídit do tří kategorií, podle toho, jak blízko se dostali k objevu závislosti velikosti úhlu na poměru souřadnic příslušného bodu.

Do první skupiny patří ti žáci, kteří samostatně závislost objevili.

Do druhé skupiny patří ti žáci, kteří k poznání došli v důsledku diskuse s jinými žáky.

Do třetí skupiny patří ti žáci, kterým se zatím nepodařilo dojít k danému poznatku.

Toto je pouze velmi hrubé dělení z hlediska kognitivní analýzy. Ukazuje se však jako velmi užitečné pro přípravu učitele na další vyučovací hodinu a pro volbu další výukové strategie. Jako učitel vidím v tomto rozdělení dvě výhody.

1. Tato hrubá analýza není tolik časově náročná jako analýzy podrobné, a proto se dá stihnout v rámci přípravy na další vyučovací hodinu za běžného školního provozu.

2. Ukáže, jaké úkoly by mohly být zadány, aby žáci mohli pokračovat ve vlastním tempu a vlastním směru bádání, aby se objevitelský proces nezastavil přesměrováním do jiné, nejisté oblasti, případně předčasným sdělením výsledku.

Při hlubším pohledu do žákovských prací v průběhu podrobné kognitivní analýzy se ukázalo, že v každé ze tří uvedených skupin se dá vysledovat ještě další rozdělení podle užité řešitelské strategie. Každá práce je svým způsobem originální. Z pohledu třídění podle postupů řešení se dá rozlišit devět různých strategií (podrobněji viz kapitola 3.4 a 3.6).

3.4 Analýzy žákovských řešení

Metodologie analýzy

Při organizaci běžné hodiny používám nejčastěji práci ve skupinách. Tentokrát jsem chtěla mapovat podrobněji myšlenkové pochody jednotlivých žáků při řešení úlohy, proto jsem nejprve požadovala, aby začal řešit každý sám a nejen výpočty, ale i svoje úvahy zapisoval na bílý papír. Cílem této „individualizace“ bylo získání co možná nejširšího spektra řešitelských strategií.

Po této etapě bylo žákům doporučeno porovnat vlastní řešení se spolužákem a případně ve skupince různé přístupy diskutovat.

Etapa konzultací a diskusí spojitě přešla do etapy nového uchopení problému. Každý žák byl požádán, aby záznamy z této třetí etapy oddělil čárou od záznamu etapy první.

Východiskem pro analýzy byla písemná žákovská řešení, která se skládají ze tří částí: obrázku na čtverečkovaném papíru, obrázků a výpočtů na bílém papíru a komentářů na modrém papíru. Dále zde byly písemné záznamy mých pozorování, které jsem stručně dělala v průběhu hodiny a pak podrobněji po hodině.

Řešení každého žáka bylo analyzováno způsobem přejatým z publikace Hejný, Michalcová (2001). Nejprve tedy byla udělána atomární evidence všeho, co bylo možné na písemných záznamech zjistit. Pak byly jednotlivé evidované jevy komentovány, případně s doplněním o moje poznámky psané k experimentu. Dále byly jednotlivé žákovské práce porovnány a byly hledány základní strategické postupy při řešení.

V této kapitole uvádíme pouze ilustraci z uvedených analýz. Jako příklad podrobných analýz práce žáků jsem vybrala dvě práce – první ukázku práce žákyně, která se jeví jako neúspěšná, a druhou práci žáka výrazně nadaného na matematiku.

3.4.1 Analýza práce Anny

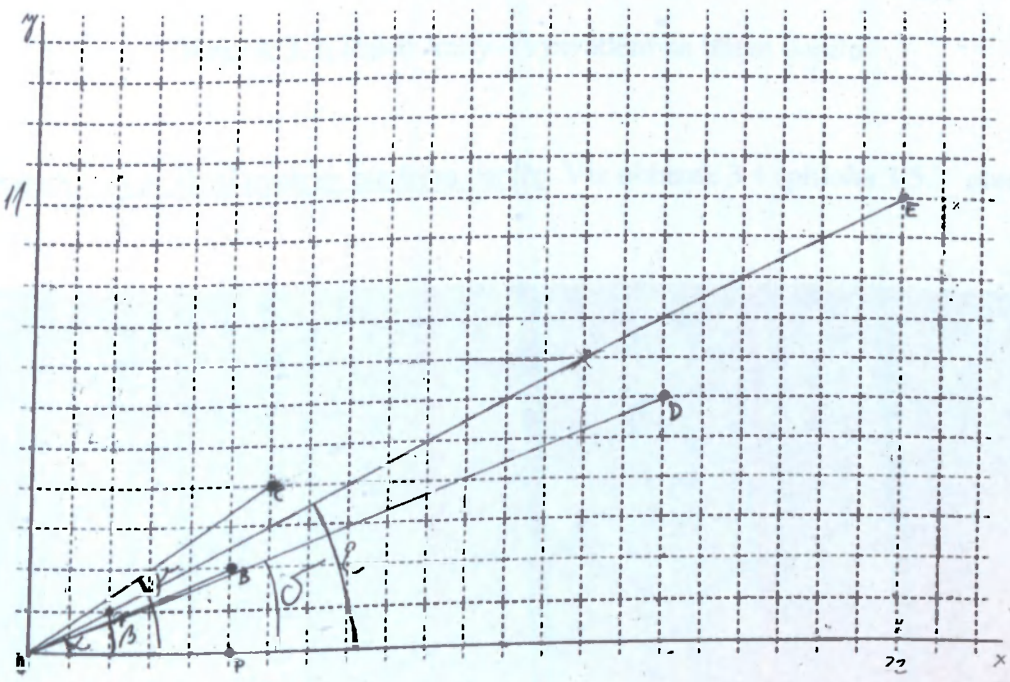
Charakteristika Anny

Anna je zajímavá nejen svým přístupem k matematice ale i po stránce osobnostní. Je velice hloubavá, ráda přichází „věcem na kloub“, podávané informace nepřijímá nekriticky, snaží se vše dávat do souvislostí, často přichází s otázkami, které směřují do hloubky problému. Již od primy se zajímá o kosmologii, čte odbornou literaturu o vzniku vesmíru, v oblasti techniky má přehled především o letadlech a vojenských vozidlech. V případě, že je ve škole nucena pamětí uchovat jisté poznatky, kterým nerozumí, vede to u ní k odmítavému postoji. Často se zadaným problémem zabývá dál doma a o přestávce přichází s dalšími nápady. Pokud se jí však nepodaří vyřešit nějakou úlohu, má sklon se podceňovat.

Práce Anny na hodině ji zařadila do třetí skupiny klasifikace uvedené v 3.3.6 (žáci, jimž se po první hodině nepodařilo dojít k poznatku).

Analýza žákovského řešení Anny

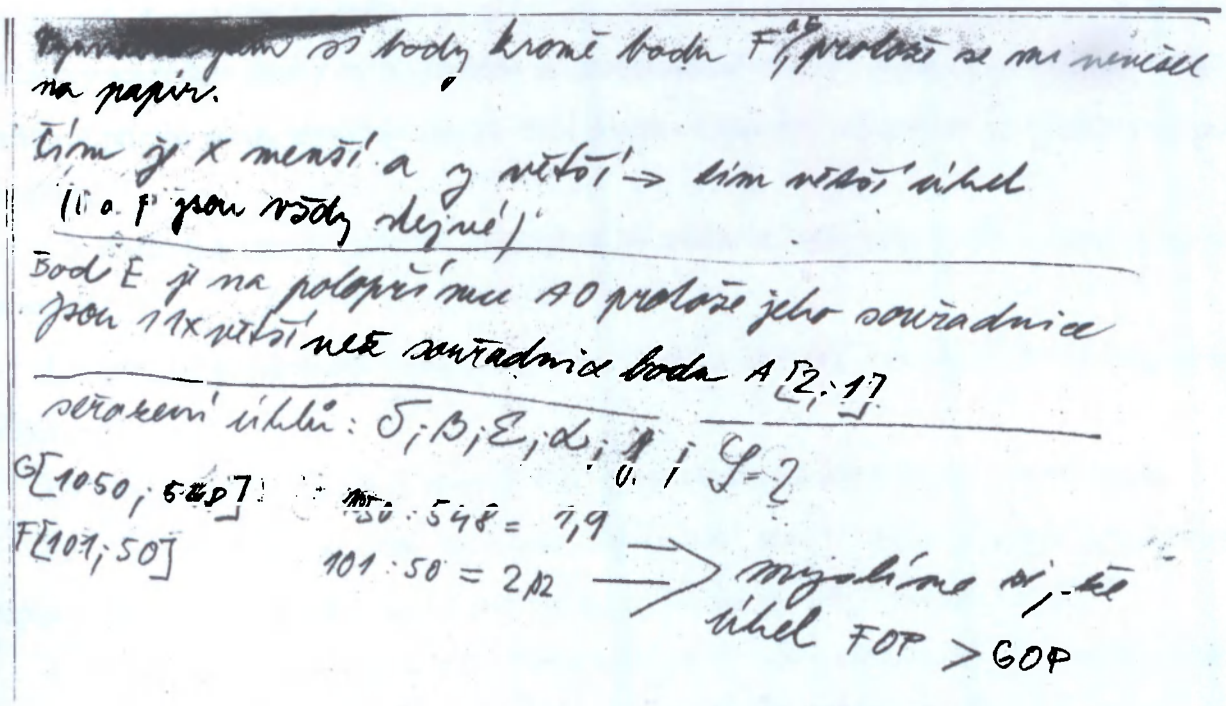
Text na čtverečkovaném papíře : Viz obrázek 3.2 (příloha 3.5.1 obrázek 1.)



Obrázek 3.2: Řešení Anny na čtverečkovaném papíře

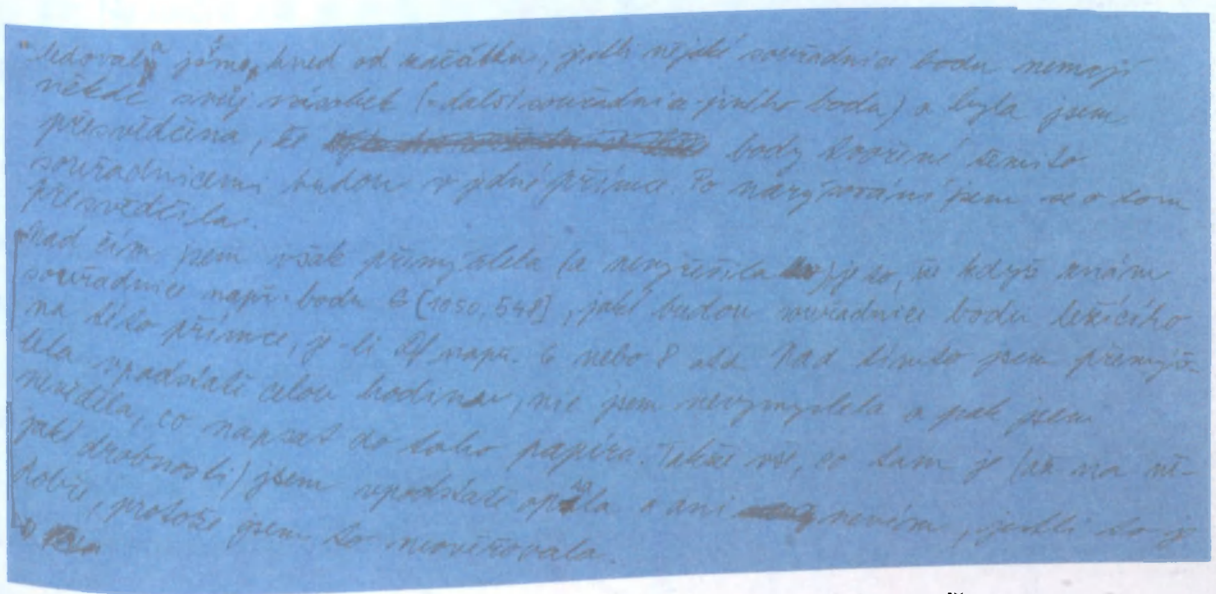
Poznámka: Některé informace při kopírování originálu do tiskové podoby zanikají. Jsou podrobně rozvedeny v evidencích.

Vysvětlení postupu na bílém papíře : Viz obrázek 3.3 (příloha 3.5.1 obrázek 2.)


[illegible] jsem si body kromě bodu F, protože se mi nevešel na papír.
Tím je x menší a y větší → tím větší úhel
(1. a F jsou vždy stejné)
Bod E je na polopřímce AO protože jeho souřadnice jsou 11x větší než souřadnice bodu A [2; 1]
seřazení úhlů: δ; β; ε; α; [illegible]; φ = ?
G[1050; 548] : [illegible] 50 : 548 = 1,9
F[101; 50] 101 : 50 = 2,02 → myslíme si, že úhel FOP > GOP

Obrázek 3.3: Práce Anny – vysvětlení na bílém papíře

Podrobnější vysvětlení úvah na modrém papíře: Viz obrázek 3.4 (příloha 3.5.2 obrázek 1.)


Sledovala jsem, hned od začátku, jestli nějaké souřadnice bodu nemají někde svůj násobek (= další souřadnice jiného bodu) a byla jsem přesvědčená, že ~~[illegible]~~ body, kterých [illegible] souřadnicemi budou v jedné přímce. Po narýsování jsem se o tom přesvědčila.
Nad tím jsem však přemýšlela (a nevyřešila [illegible]), že když znám souřadnice např. bodu G [1050; 548], jaké budou souřadnice bodu ležícího na této přímce, je-li x např. 6 nebo 8 atd. Nad tímto jsem přemýšlela [illegible] celou hodinu, ale jsem nevymyslela a pak jsem [illegible], co napsat do toho papíru. [illegible] jaké drobnosti) jsem [illegible] opět a ani [illegible] nevím, jestli [illegible] (protože jsem to neověřovala.

Obrázek 3.4: Práce Anny – vysvětlení na modrém papíře

Evidence

E1: Na kopii práce na čtverečkovaném papíře není znatelné gumování. Na originále lze vysledovat stopy po gumování zápisu zadání – výčet bodů zadaných souřadnicemi zapsaný do prvních dvou řádků, papír byl původně na výšku. Dále jsou znatelné stopy po vygumování soustavy souřadnic (osa x byla původně na předposlední mřížové přímce dole, osa y na druhé mřížové přímce zleva, pouze ve spodní části papíru). Opravený obrázek je narýsován na papíru na šířku.

E2: Počátek soustavy souřadnic je posunut do levého dolního rohu – osa x vodorovná, osa y svislá.

E3: Obrázek je narýsován tužkou, osy x, y – perem, část osy x (úsečka OP) je narýsována tužkou.

E4: Body O, P, A, B, C, D, E jsou vyznačeny výraznými plnými kolečky, bod F chybí.

E5: Úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ jdou za sebou v abecedním pořadí, řecká písmena systematicky zapisována za čáru obloučku. Řecká písmena jsou větší než písmena označující body.

E6: Koncová ramena úhlů končí v bodech B, C, D, E – jsou narýsována jako úsečky. Pouze rameno úhlu α je prodloužené, (při kontrole pomocí pravítka zjištěno napojení v bodě A) končí v bodě E.

E7: OAE je lomená čára.

E8: Pouze u bodu E jsou vyznačeny souřadnice – úseky na osách označeny čísly 22,11.

E9: Na úsečce OE je stopa po gumování dalšího neoznačeného bodu. Přes gumování je znatelné obnovení úsečky OE. Ze stop je patrné označení souřadnic tohoto bodu [14,7].

E10: Bod C má chybnou x-ovou souřadnici proti zadání. Na obrázku [6,4], v zadání [7,4].

E11: Na bílém papíru – psáno tužkou – první věta nad čarou – popis činnosti – narýsování podle zadání, vysvětlení, proč chybí body F a G (G doplněn dodatečně). Další věta vypovídá – o vztahu x, y a velikosti úhlu.

E12: Pod první čarou je tužkou napsána věta zdůvodňující, proč bod E leží na polopřímce AO.

E13: Pod druhou čarou je neúplná odpověď na zadanou otázku a výpočty týkající se bodů F a G s porovnáním velikosti úhlů FOP a GOP.

E14: Na modrém papíru na začátku textu je přepis: Sledovaly jsme – opraveno na Sledovala jsem.

E15: Ve třetím řádku je přeškrtaný nápis: „tyto dvě souřadnice bu"

E16: Celý druhý odstavec na modrém papíru vysvětluje, o čem Anna přemýšlela a co pak zapsala a proč. V odstavci je třikrát škrtáno, na levé straně je přes celý odstavec šipka, která směřuje ke škrtu pod nápisem. V textu použit symbol *Df*

Komentáře k evidencím

K1: Anna nejprve přečetla zadání úlohy, pečlivě ho přepsala na čtverečkovaný papír (situovaný na výšku), zakreslila osy. To vše je vygumováno, ale dobře znatelné.V takto zvolené soustavě souřadnic není žádná stopa po zakreslených bodech. Anna si zřejmě uvědomila, že se jí v tomto uspořádání body do obrázku nevejdou. Vzhledem k tomu, že nejsou vyznačeny ani body O, P, A, C, D, které by se tam vešly, dá se předpokládat, že geometrickou situaci Anna vnímala jako koncept. Kdyby totiž Anna vnímala situaci procesuálně, vyznačila by všechny tyto body a až u bodu E, který by nebylo možné vyznačit, by začala uvažovat o změně polohy papíru. Ona však se rozhodla změnit polohu papíru a umístění soustavy souřadnic bez rýsování, jen po přečtení souřadnic bodů.

K2: Na otočeném papíru cíleně umístila souřadnice do levého dolního rohu, pro zakreslení bodů nechala co největší prostor. Zadání již neopisovala. Zřejmě začala přemýšlet o strategii a nepotřebovala jinou náhradní činnost.

K3: Při podrobném zkoumání (papír proti světlu) je vidět, že celé osy jsou narýsovány keramickým perem, úsečka OP je přes tenkou čáru perem vytažena tužkou. To svědčí o tom, že osy souřadnic Anna narýsovala jako první a byla si jistá v jejich umístění. Zvýraznění jinou barvou odděluje i významově osy od ostatních čar na obrázku (slouží k orientaci a nejsou součástí úhlů). Úsečka OP je tužkou, protože dominantní funkce této úsečky je vztah ke všem úhlům. V Anniných separovaných modelech úhlů představuje jejich společné počáteční rameno.

K4: Výrazně velkými kolečky jsou vyznačeny body, kterými si Anna byla jistá. Nepřítomnost bodu F nejprve zdůvodnila tím, že se na papír nevešel, teprve z dodatečného vysvětlení vyplývá (viz K16), že v tuto chvíli probíhaly Anně hlavou neevidované myšlenkové pochody, že hledala, jak změnit souřadnice bodu, aby se dostal do viditelné oblasti, jak ho posunout po přímce a přiblížit ho tak k počátku. Z geometrie tak přešla do oblasti aritmetiky.

K5: Ze způsobu zápisu se dá usoudit, že úhly jsou hlavním objektem zkoumání. Zatím však jsou pouze pečlivě zakresleny, geometrické porovnání velikosti úhlů zřejmě Anna zatím nevidí. Domnívám se, že je v tuto chvíli příliš zaujata řešením aritmetického problému, který je zaměřen pouze na zkoumání souřadnic bodů na jedné přímce. Z tohoto pohledu jsou pro Annu zajímavé především body A a E.

K6: Pro zviditelnění zkoumaných úhlů použila Anna separované modely, ve kterých koncová i počáteční ramena jsou znázorněna úsečkami. V tomto modelu se ztrácí neohraničenost úhlu a tím i propojení na neviditelnou oblast.

K7: Zalomení čáry OAE svědčí o tom, že byla nejprve narýsována úsečka OA a potom úsečka AE. Čára OAE dokumentuje Annino přesvědčení, že body A, E leží na stejné přímce – vyjádřeno jejím jazykem (myšleno na téže polopřímce OA). Toto přesvědčení vyplývá z úvahy popsané na modrém papíře: „...jestli nějaké souřadnice bodu nemají někde svůj násobek a byla jsem přesvědčena, že body tvořené těmito souřadnicemi budou v jedné přímce."

K8: Označení úseků na osách pouze u bodu E může mít dvojí důvod. Jedná se o bod nejdál od počátku a je tedy větší pravděpodobnost omylu, napočítání čtverečků a označení číslem dává jistotu správného umístění. Může to však také souviset se zaujatostí na řešení problému s násobky souřadnic. Bod E je v tomto směru nápadný.

K9: Zvolení dalšího bodu na téže úsečce a vyznačení jeho souřadnic, které jsou násobky souřadnic bodu A, spíš potvrzují druhou možnost. Vygumování tohoto bodu a znovu propojení úsečky svědčí o nejistotě. Doplněný bod domněnku Anny potvrdil, ale nebyl v zadání, možná proto jej vygumovala.

K10: Chyba v zakreslení bodu se vyskytla pouze u bodu C, pravděpodobně se jedná o přehlédnutí. Poloha bodu C vzhledem k Annině myšlence není rozhodující.

K11: V první větě se Anna snaží popsat činnost při řešení úlohy. Tato věta skutečně odpovídá tomu, co pozorujeme na čtverečkovaném papíru. Je napsána osobnostně a činnostně, což potvrzuje domněnku, že Anna teprve hledá řešení.

Druhá věta:" Čím je x menší a y větší → tím větší úhel (O a P jsou vždy stejné)" nemá nikde žádnou další souvislost. Je napsána nad první čarou, kde měly být zapsány vlastní úvahy žáka. Po prvním přečtení (bez vysvětlení na modrém papíru), jsem se domnívala, že v hlavě Anny proběhly úvahy, které nebyly zaznamenány, nebo byly napsány na nějaký pomocný papír. Při porovnání s prací sousedky a po přiznání na modrém papíru se ukázalo, že tuto druhou větu Anna opsala bez porozumění od sousedky. První čára tedy neodděluje vlastní úvahy od společných.

K12: Věta pod druhou čárou: „Bod E je na polopřímce AO protože jeho souřadnice jsou $11\times$ větší než souřadnice bodu $A[2,1]$." je zajímavá z několika důvodů. Podle umístění pod čáru by měla tato myšlenka přijít až po konzultaci se sousedkou. Evidence E7 – E9 však potvrzují, že Anna hledala důkaz pro tuto myšlenku ve svém obrázku. V práci sousedky se tato věta vyskytla také na stejném místě – to znamená po konzultaci s Annou. Dříve se však v práci sousedky žádná souvislost s touto úvahou neobjevila. Vysvětlení přináší upřesnění z následující hodiny na modrém papíru. Z něho je vidět, že to bylo první, nad čím Anna přemýšlela, neuměla však myšlenku zformulovat. Po konzultaci se sousedkou, které své úvahy vysvětlovala, formulaci zřejmě společně vytvořily. Ve větě je poprvé použita polopřímka, v obrázku se neobjevila žádná. Anna polopřímku označila chybně AO, sousedka ji má označenou správně OA.

K13: Celý text pod druhou čarou je pouze opsán při konzultaci s dalšími skupinami. V seřazení úhlů podle velikosti úhel ε je zařazen jako menší než úhel α. Anna věnovala spoustu energie na objev, že body A a E leží na téže polopřímce, přesto si neuvědomila, že se úhly α a ε rovnají, nebo přinejmenším nevnímala, co píše. Je pravděpodobné, že otázka o koincidenci bodů O, A, E byla kontextem, v němž dominovala aritmetická úvaha, zatímco při porovnávání úhlů α, ε viděla dívka jen kontext geometrický.

K14: Přepis z množného čísla na jednotné dokumentuje, že se jedná opravdu o vlastní úvahy Anny. Škrtání svědčí o tom, že Anna výpověď právě tvoří, neměla ji předem promyšlenou ani připravenou. Výpověď naznačuje i časový průběh řešení. První myšlenka směřovala ke zkoumání souřadnic bodů ležících na přímce. Pak následovalo rýsování, které myšlenku potvrdilo. Věta: „Po narýsování jsem se o tom přesvědčila“ poukazuje nejen na časovou posloupnost řešení, ale i na Anninu schopnost kritického myšlení.

K15: Během psaní se snaží o přesnou formulaci. Minulou hodinu měla Anna největší potíže právě s formulováním myšlenky.

K16: Celý tento odstavec vyznívá dost skepticky – slova : „...nevyřešila..., nic jsem nevymyslela a pak jsem nevěděla, co napsat do toho papíru“. Anna se přiznává, že vše až na nějaké drobnosti opsala. Tyto „drobnosti“ však představují správnou a potvrzenou myšlenku. „...ani nevím, jestli to je dobře, protože jsem to neověřovala.“ Opět potvrzuje Anninu schopnost kritického myšlení.

Anna se hned od začátku zaměřila na souřadnice bodů na přímce – uvědomila si, že to budou násobky. Dál si uvědomuje, že přes tuto závislost by mělo být možné dostat bod po přímce do viditelné oblasti. Domnívám se, že Anna zde hledala souvislost s grafem přímé úměrnosti.

Tomu by odpovídala i věta: „...když znám souřadnice např. bodu $G[1050{,}548]$, jaké budou souřadnice bodu ležícího na této přímce, je-li Df např. 6 nebo 8 atd.“ Chybné použití symbolu pro definiční obor opět potvrzuje potíže s přesným vyjadřováním, zřejmě měla na mysli body s x-ovou souřadnicí 6 nebo 8, které by mohla do obrázku umístit.

Další komentář

Anna ve své výpovědi vyjádřila pocit, že nic nevyřešila, že nic neobjevila. Podobně zareagovala i jedna kolegyně po přečtení Anniny práce slovy „To je nějaká slabá žákyně! Co to píše za nesmysly?“ Domnívám se, že podrobná analýza však ukázala něco jiného. Anna má problémy s formulací myšlenek, cestu k řešení vidí v souvislosti s funkcí přímá úměrnost. Ve vědomí už je na stopě správného objevu vlastní cestou.

Po této analýze jsem měla pocit, že by bylo potřeba vytvořit další situaci cílenou přímo pro Annu tak, aby sama poznala, že i její cesta vede k cíli.

Připravila jsem níže uvedenou sérii návodných úloh a doufala jsem, že pomocí této série a s časovým odstupem, se Anně podaří řešení původní úlohy dokončit. Návodné úlohy vycházejí z vlastností přímé úměrnosti, které jsou pro Annu známé.

V září po prázdninách jsem Anně dala zadání devíti úloh napsané na počítači. Při zadání úloh dostala Anna pokyn: „Vrať se k řešení úlohy o úhlech. Přečti si záznamy z předchozích hodin, pokus se úlohu dořešit. Zjisti, jestli se v zápisech nevyskytují nějaké chyby nebo nepřesnosti. Pokud ano, oprav je. Jestliže se ti nedaří úlohu dořešit, řeš postupně následující návodné úlohy. Ty nemusíš řešit všechny, v kterémkoliv okamžiku se můžeš vrátit k původní úloze.“

Úloha 3.2:

1. *Ve větě: „Bod E je na polopřímce AO protože jeho souřadnice jsou 11× větší než souřadnice bodu A[2; 1].“ najdi nepřesnosti a oprav je.*
2. *Je úsečka OE částí grafu nějaké funkce? Které? Najdi rovnici této funkce.*
3. *Ověř, zda body K[8;4], L[8;5], M[6;9], N[28;15], G[1050;548] leží na grafu této funkce.*
4. *Najdi souřadnice dalšího dosud neuvedeného bodu, který bude ležet na grafu této funkce.*
5. *Body Q[6;...], R[24;...] a S[100;...] leží na polopřímce OA. Nalezni chybějící souřadnice. Správnost řešení ověř rýsováním.*
6. *Úsečka OB je částí grafu funkce f, úsečka OD částí grafu funkce g. Najdi rovnice funkcí f a g.*

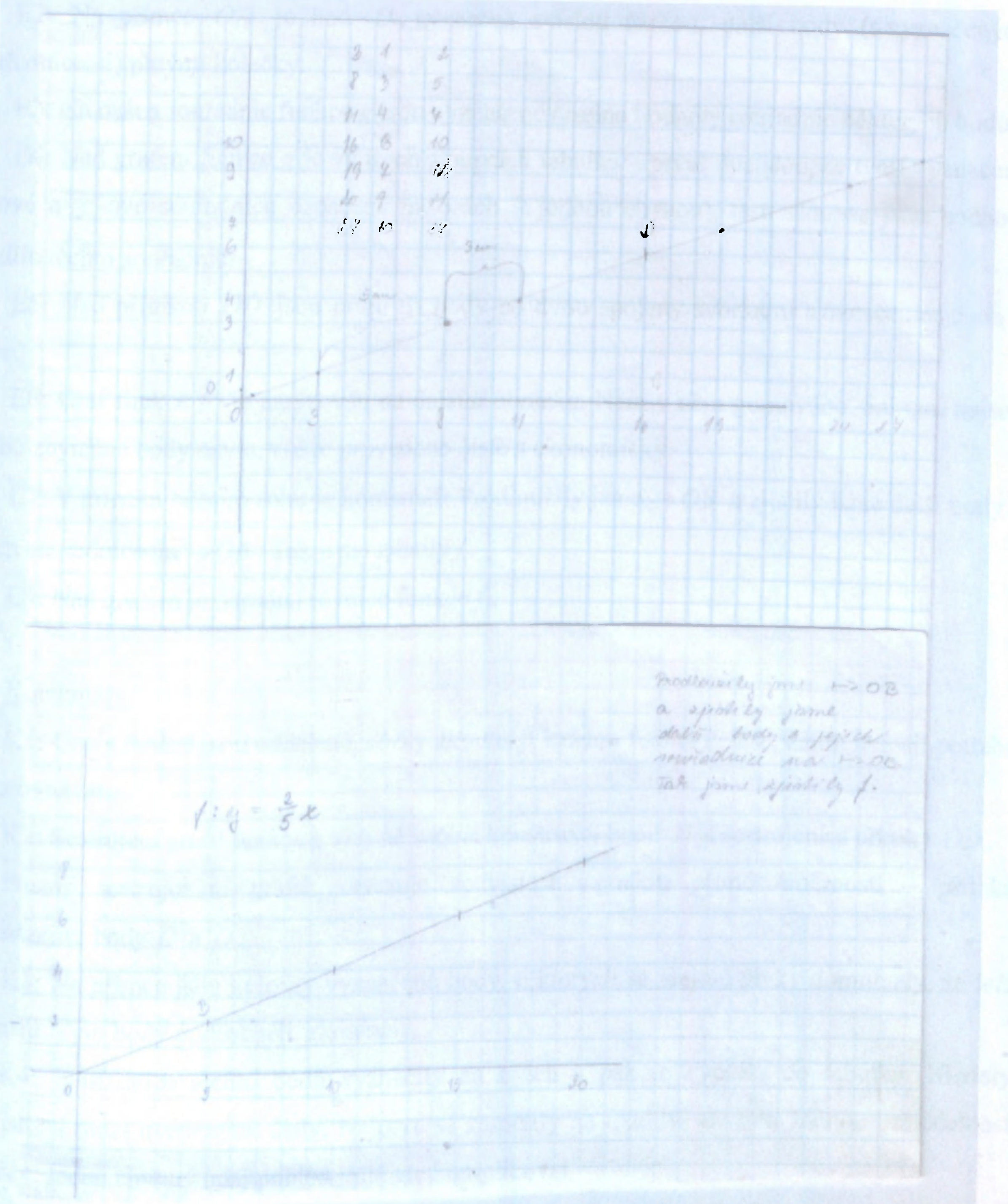
7. *Podle svého obrázku srovnej úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ podle velikosti. Porovnej tuto odpověď se zápisem na bílém papíru.*
8. *Najdi souvislost rovnic funkcí f a g s velikostmi úhlů β a ε.*
9. *Ověř správnost posledního sdělení uvedeného na bílém papíru.*

První úloha pomáhá upřesnit formulace. Úlohy druhá až čtvrtá připomínají funkci přímá úměrnost. Pátá úloha pomáhá najít souvislost grafu přímé úměrnosti a polopřímky OA. Šestá až osmá úloha vede ke hledání vztahu koeficientu přímé úměrnosti a velikosti úhlu, což je zároveň propedeutika zavedení funkce tangens i směrnice přímky.

Analýza řešení návodných úloh

Tyto úlohy řešila Anna ve dvojici se sousedkou doma. Výsledky svého bádání odevzdaly na třech papírech. Na jednom z nich byly správné výsledky (bez postupu řešení) prvních pěti úloh, ze šesté úlohy jen zjednodušené zadání. Na dvou čtverečkovaných papírech bylo řešení šesté úlohy, které se jeví jako klíčové z hlediska procesu objevování. Řešení úloh 7 –9 dívky uvedly pouze ústně, zdálo se jim vše jasné, není to už třeba zapisovat.

Řešení 6.úlohy: Viz obrázek 3.5 (příloha 3.5.5)



Obrázek 3.5: Práce Anny – šestá návodná úloha

Evidence (pouze zjednodušené, stručné):

E1: Každá z funkcí f a g je narýsována do samostatné soustavy souřadnic na čtverečkovaném papíře.

E2: Na přímce OD je bod D vyznačen svislou čárkou, další body (s vyznačenými souřadnicemi) plnými kolečky.

E3: Na osách souřadnic funkce g jsou vyznačené číselné hodnoty souřadnic některých bodů.

E4: Nad grafem funkce g je ve třech sloupcích tabulka – první dva sloupce tvoří vyznačené x-ové a y-ové souřadnice označené na osách (s jednou chybou), třetí sloupec jsou hodnoty rozdílu těchto souřadnic.

E5: Nad přímkou OD jsou první tři body po dvou spojeny svorkami s označením 5 cm a 3 cm.

E6: Graf funkce f je narýsován na dalsím obrázku. Není v něm gumováno, ani tam nejsou žádné zbytečné body navíc, vše je provedeno čistě a ekonomicky.

E7: V pravém horním rohu je komentář: Prodloužily jsme $\rightarrow OB$ a zjistily jsme další body a jejich souřadnice na $\rightarrow OB$. Tak jsme zjistily f.

E9: Nad grafem je napsána rovnice funkce f.

Komentáře:

K1: Grafy funkcí jsou oddělené, dívky zkoumají každou funkci zvlášť, zatím nemají potřebu je porovnávat.

K2: Sestrojení grafu funkce g zřejmě začíná konstrukcí bodu D a sestrojením přímky OD. Postup sestrojování grafu potvrzuje souvislost s grafem přímé úměrnosti – přímka procházející body O a D.

K3: Na přímce jsou kolečky vyznačené body, o kterých se zřejmě dívky domnívaly, že leží na grafu. Tyto body podrobněji zkoumaly.

K4: Souřadnice těchto bodů vyznačily na osách a pak je vypsaly do tabulky. Hledaly souvislosti mezi uvedenými čísly. Nejprve se zaměřily na rozdíly, ale tam žádnou pravidelnost nenašly. Jeden chybný údaj pohled ještě víc komplikoval.

K5: Na čtverečkovaném papíře je zaujala myšlenka „schodů". Dva schody naznačily svorkami. Z obrázku není patrné, že se jedná o schody, ale dívky to upřesnily při ústním vysvětlení. Nejprve se zaměřily na porovnávání šířky a výšky schodů u dvou sousedních mřížových bodů ležících na přímce. Tyto dva vyznačené body ale vedly do slepé uličky, protože ve skutečnosti druhý z nich na přímce neleží, jedná se o nepřesné rýsování.

K6: Graf funkce f již dívky rýsovaly cíleně s myšlenkou zkoumat mřížové body ležící na přímce z pohledu schodů. Graf je proveden velmi přesně a s jistotou.

K7: Legenda v pravém horním rohu papíru popisuje činnost, jak našly vhodné body. Při ústním vysvětlení pak ukázaly, že si všimly, že pro všechny sousední mřížové body na přímce je společné, že mají stejnou základnu (rozdíl x-ových souřadnic) a stejnou výšku schodu (rozdíl y-ových souřadnic). Že sklon přímky se dá vyjádřit zlomkem, kde v čitateli je výška schodu a ve jmenovateli je šířka schodu. Tento objev se jeví jako klíčový. Ukázalo se, že dívky teprve touto činností získaly další zkušenost s grafem přímé úměrnosti na úrovni izolovaného modelu, při této činnosti nastal abstrakční zdvih a dívky se posunuly na úroveň generického modelu. Přes úlohu s úhly se zkvalitnilo poznání o průběhu lineární funkce.

K8: Nad grafem je zapsána rovnice funkce f, což bylo poslední, co se dívkám jevilo jako důležité pro zápis. Vše ostatní pak už bylo zbytečné psát, protože už to bylo jasné. Při rozhovoru pak potvrdily, že o problému spolu diskutovaly, že řešení hledaly a nacházely společně. Rovnici funkce si ověřily dosazením souřadnic vyznačených bodů. Konstatovaly jako jasné, že koeficient v rovnici přímé úměrnosti je roven nalezenému zlomku a že vlastně určuje sklon přímky a tím je jasné, že se tak snadno dají srovnat požadované úhly podle velikosti. Dívky už vůbec nepotřebovaly úlohu dokončit zápisem na papír, vše se jim jevilo evidentní. Při vysvětlování se střídaly v líčení objevu, skákaly si do řeči, vyzařovala z nich velká radost.

Se svým bádáním dívky seznámily celou třídu. Společně jsme porovnávali různé cesty řešení, které vedly ke stejnému výsledku. Anna si prožila pocit úspěšného objevu.

Pro třídu byl objev dívek také užitečný, v následné diskusi jsme společně zhodnotili souvislost koeficientu přímé úměrnosti se sklonem přímky a funkcí tangens směrového úhlu.

Poznámka na závěr

Jak hluboce se uvedený objev zakořenil ve vědomí Anny, potvrzuje i další situace. Asi za měsíc jsme ve fyzice probírali pojem okamžitá rychlost. Již při hodinách žáci o tomto pojmu živě diskutovali, objevily se úvahy související s chováním zlomku, jestliže se čitatel i jmenovatel hodně zmenšují. To Annu zaujalo a porovnávala náš zjednodušený způsob zavedení rychlosti se zavedením ve vysokoškolské učebnici. O přestávce za mnou přišla s dotazem: „Tady mají, že $v = dr/dt$ a my jsme zavedli $v = \Delta v/\Delta t$. Co tam znamená to malé d?" Nad vztahem byl v učebnici uveden graf závislosti dráhy na čase se znázorněním významu okamžité rychlosti, byla tam zakreslena i tečna ke grafu. Docela snadno Anna pochopila souvislost a zjednodušení našeho zavedení okamžité rychlosti s přesnějším vyjádřením pomocí „malého d" a nezdálo se jí ani divné, že sklon tečny souvisí se zvětšováním nebo zmenšováním rychlosti a se sklonem přímky, jak to objevily dívky při matematice. Anna přijala i to, že se jejich zlomek v nové souvislost může označovat jako derivace funkce v daném bodě, a měla radost, že se jí tak zdá pochopitelnější text ve vysokoškolské učebnici.

Z objevování má Anna meta-kognitivní zkušenost. V okamžiku, kdy přichází za učitelem pro radu, stačí ukázat okno, které je nutno otevřít. Po rozmluvě Anna nevidí derivaci, jako něco, co bude nadřazeno (jak to občas vyznívá z diskusí se staršími spolužáky), ale jako něco, co poukáže na souvislost jevů a co je pomůže uchovat ve vědomí. Zatím má derivaci jen na úrovni pojmů, ne technologie (starší spolužáci naopak leckdy mají derivaci pouze na úrovni technologie).

Ještě jedna situace, kdy Anna za mnou o přestávce přišla s dotazem, ukázala spojení fyziky s goniometrií. Ve druhém ročníku učil v této třídě fyziku kolega. Učivo fyziky předběhlo matematiku. Dřív než byly probírány goniometrické funkce v R, byl ve fyzice probírán kmitavý pohyb. Průmět pohybu bodu po kružnici, jako příklad kmitavého pohybu, posloužil pro sestrojení grafu závislosti okamžité výchylky na čase dané rovnicí $y = y_m \cdot \sin \omega t$. Anna za mnou přišla o přestávce po matematice. „ Mám problém. Ten graf chápu, jak se tvoří, ale nedovedu si představit záporný úhel." Zeptala jsem se jí: „ Dovedeš si představit, jaký bude graf, když budeš obíhat po kružnici opačným směrem?" Reakce Anny: „A jó! Já už to vidím".

Podstatné je, že rada byla procesní a vázána na existující zkušenost Anny. V této zkušenosti byl pojem „úhel" málo diferencován a tím nebyla otevřená cesta k porozumění pojmu záporný úhel. Ve vědomí dívky se adjektivum „záporný" vztahuje k statickým jevům, jako je „dluh". Zřejmě ji schází představa „jdu po schodech dolů" tedy dynamická. Stačilo na tuto představu poukázat a dívce bylo vše jasné. Řečeno v jazyce teorie generického modelu: Anna má pojem úhel vázán na statický generický model a to i přes kinetické představy ve fyzice. Izolovaný model „jdi v protipohybu" stačil k změně generického modelu, přesněji k jeho diferenciaci na statický (ten zůstává pouze v kladných úhlech) a dynamický (je v reálných úhlech).

V matematice má Anna zkušenost generického modelu úhlu dynamického zatím pouze z diskuse ve třídě při zavádění pojmu rovinný úhel, kdy jsme hledali definici rovinného úhlu jako část roviny.

Můžeme se domnívat, že uvedený způsob práce Annu posunul nejen z hlediska kognitivního, ale především z hlediska sebehodnocení. Na počátku byl pocit neschopnosti, postupně se postoj mění tak, že se Anna nebojí otevřít náročnou učebnici, nebojí se žádat o radu a diskutovat o tom, čemu nerozumí.

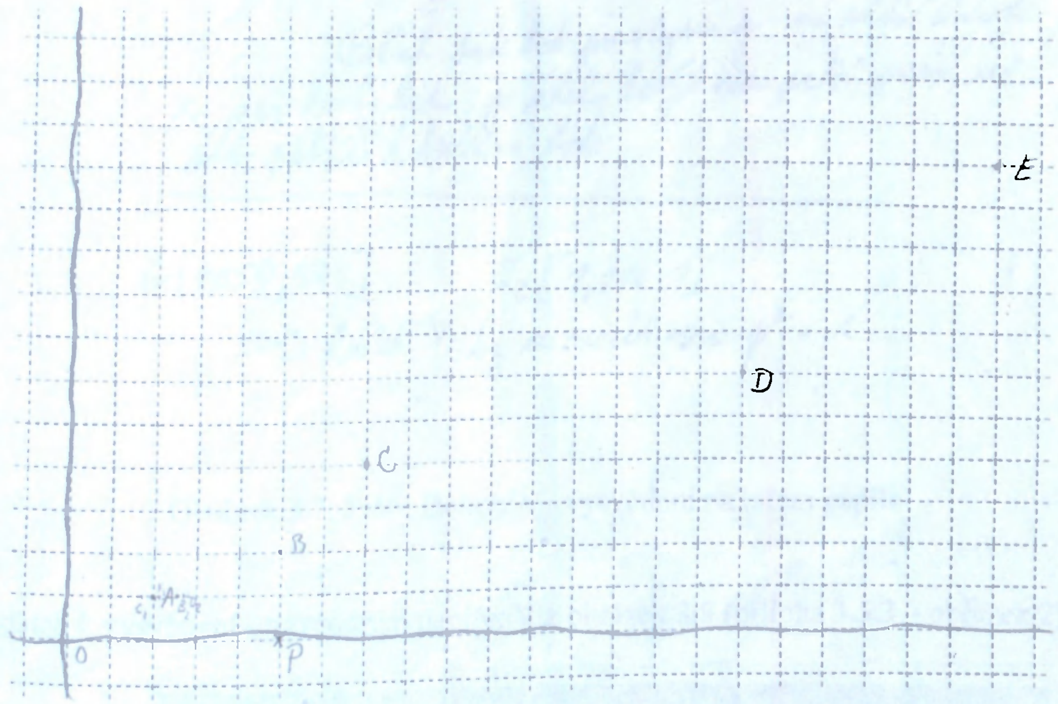
3.4.2 Analýza práce Bohouše

Charakteristika Bohouše

Bohouš má velmi dobré logické myšlení, prostorovou představivost, byl úspěšným řešitelem i okresních kol matematické olympiády. Věnuje se programování a rád by tento obor studoval i na vysoké škole. Je ctižádostivý, záleží mu na tom, aby zadané úlohy vyřešil jako první. (Dodejme, že v roce 2006 byl přijat na MMF UK v Praze a na studium se velice těší).

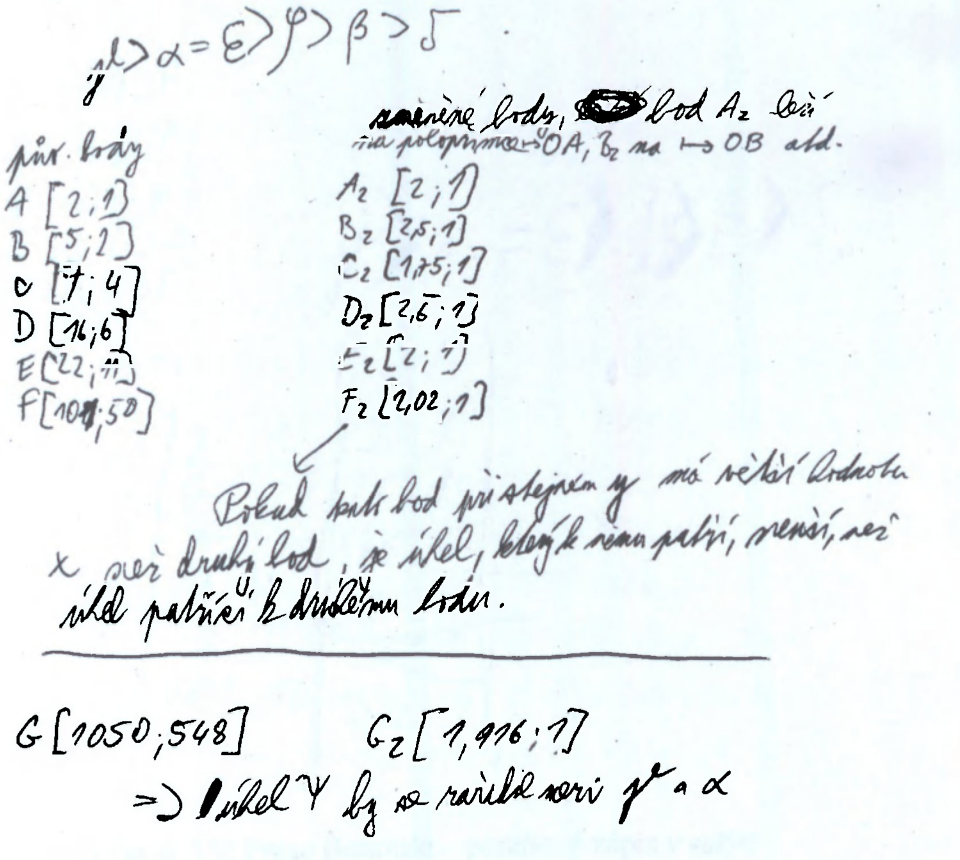
Analýza žákovského řešení Bohouše

<u>Práce na čtverečkovaném papíře</u>: Viz obrázek 3.6 (příloha 3.5.2 - obrázek 2.)



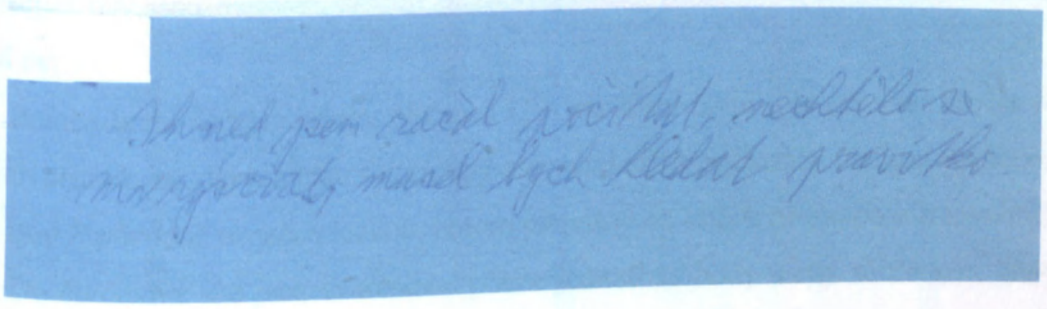
Obrázek 3.6: Práce Bohouše na čtverečkovaném papíře

Popis práce na bílém papíře: Viz obrázek 3.7 (příloha 3.5.3 – obrázek 1)



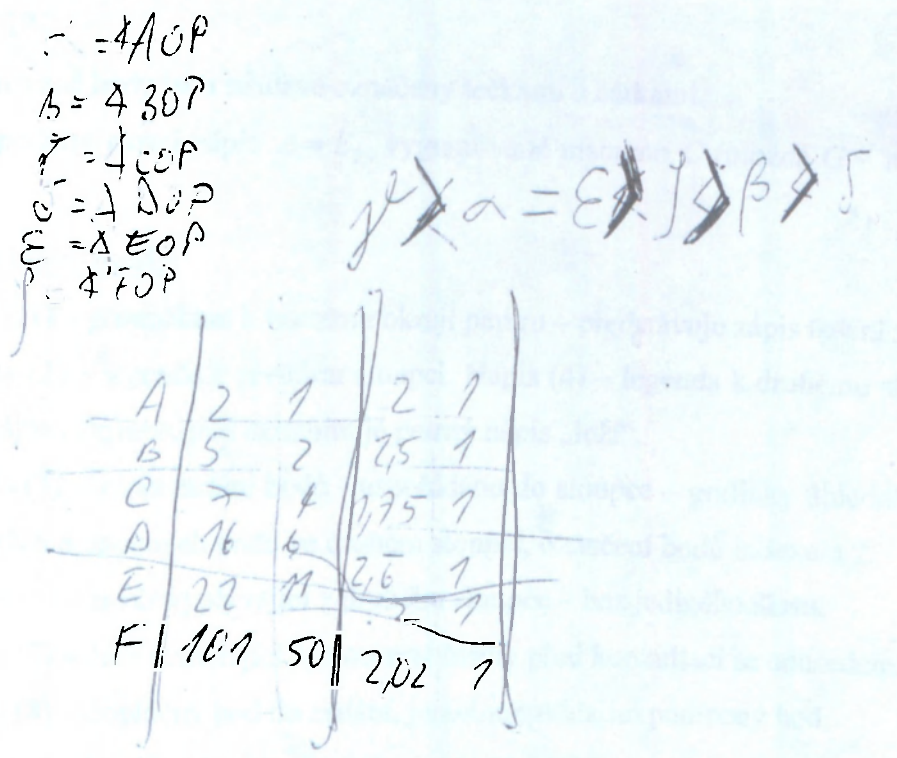
Obrázek 3.7: Práce Bohouše – vysvětlení na bílém papíře

Dodatek k vysvětlení - na modrém papíře: Viz obrázek 3.8 (příloha 3.5.3 – obrázek 2)



Obrázek 3.8: Práce Bohouše – dodatek k vysvětlení na modrém papíře

Pomocný zápis v sešitě: Viz obrázek 3.9 (příloha 3.5.4)



Obrázek 3.9: Práce Bohouše – pomocný zápis v sešitě

Evidence

Obrázek na čtverečkovaném papíře:

E1: Geometrický obrázek je kreslen od ruky neořezanou tužkou, bez použití pravítka.Čáry reprezentující osy jsou nerovné, sledují mřížové přímky (druhou zleva a druhou zdola), chybí označení os.

E2: Poloha bodu O vlevo dole, písmeno O – označení bodu – je zapsáno blízko průsečíku mřížových přímek, na kterých jsou vyznačeny osy, není nijak zvýrazněn (tečkou ani křížkem).

E3: Bod P původně označen tečkou, potom přepsáno na křížek přímo do mřížového bodu.

E4: Do čtvercové sítě jsou zakresleny pouze jednotlivé body a osy souřadnic. Úhly nejsou vyznačeny.

E5: Všechna písmena jsou zapsána stejnou velikostí vpravo vedle značky bodu (tečka), pouze indexované body jsou zapsány menšími písmeny umístěnými vlevo i vpravo dole od značky, bod F_2 nad značkou.

E6: Na přímce $y = 1$ okolo bodu A vyznačeny body A_2, B_2, C_2, D_2, F_2. Pořadí bodů je správné, umístění přibližné – bez měření. Proč zadané body projektuje na přímku $y = 1$? Proč indexy 2 a ne 1?

E7: Indexované body jsou střídavě označeny tečkami a čárkami.

E8: Na spodním okraji zápis $A = E_2$. vygumované písmeno C (možná G – nelze s jistotou určit)

Zápisy na bílém papíře:

E9: Nápis (1) – přimáčknut k hornímu okraji papíru – představuje zápis řešení zadané úlohy.

E10: Nápis (2) – legenda k prvnímu sloupci. Nápis (4) – legenda k druhému sloupci – jasná formulace, v nápisu škrtáno, pod škrtáním je patrný nápis „leží“.

E11: Nápis (3) – zápis zadání bodů - uspořádáno do sloupce – graficky úhledné. Nápis (5) – zápis vypočtených pomocných bodů ve druhém sloupci, označení bodů indexem 2.

E12: Nápis (6) – závěr vyplývající z druhého sloupce – bez jediného škrtu.

E13: Nápis (7) – čára uzavírající samostatné úvahy před konzultací se sousedem.

E14: Nápis (8) – doplněný bod do zadání, jemu odpovídající pomocný bod.

E15: Nápis (9) – Implikací zapsaný závěr – zařazení úhlu ψ

Zápisy ve školním sešitě:

E16: Zápisy ve školním sešitě – ve sloupci zapsány úhly v pořadí podle zadání.

E17: V řádku zapsané pořadí úhlů – původně se znaky nerovnosti <, znaky výrazně přepsány na opačné >.

E18: Tabulka – v prvním sloupci písmena A až F, druhý a třetí sloupec zadané souřadnice bodů, čtvrtý sloupec převedené souřadnice, pátý sloupec pouze jedničky. První tři řádky podtržené rovnými čarami, čtvrtý a pátý řádek podtrženy křivými čarami. Mezi sloupci oddělujícími písmena a souřadnice jsou dvojité čáry; mezi sloupci 2. a 3. , 4. a 5. jednoduché tenké čáry. Vše kresleno od ruky.

Časový postup řešení

1. Přečte úlohu.
2. V hlavě proběhne úvaha „ Jen pravítkem to nepůjde „ - pochybnost u souřadnic bodu E, evidentní u bodu F.
3. Nakreslí osy.
4. Zakreslí body O, P, A, B, C, D, E.

5. Do školního sešitu zapíše ze zadání pojmenování úhlů, do tabulky zadané body se souřadnicemi.
6. Vezme kalkulačku a počítá poměry.
7. Pomocné výpočty zapisuje do školního sešitu do tabulky.
8. Do školního sešitu zapíše výsledek – seřazení úhlů podle velikosti pomocí nerovností – chybně.
9. Sestrojuje body B_2, C_2, D_2, F_2 a připíše $A = E_2$
10. Opravuje nerovnosti ve školním sešitě.
11. Na bílý papír zapisuje postup řešení – Nápis (1) – výsledek.
12. Nápisy (3), (5) – sloupce bodů.
13. Nápisy (2), (4) – legenda ke sloupcům.
14. Nápis (6).
15. Čára (7), nápisy (8), (9).

Komentáře k evidencím

Obrázek na čtverečkovaném papíře:

K1: Malá pečlivost geometrického obrázku potvrzuje Bohoušovu zaměřenost na aritmetický výpočet. V dodatečném rozhovoru[8] to potvrzuje věta: „Kreslení je zbytečný, výpočty jsou důležitější." Navíc obrázek je pro Bohouše soukromou výpovědí. Úkolem není malovat obrázek, ale napsat řešení, obrázek je pouze pomocný nástroj; osy souřadnic nejsou strategicky důležité.

K2: Poloha bodu O vlevo dole – uvědomuje si, že potřebuje co nejvíc místa na umístění zadaných bodů. Již při čtení zadání si Bohouš uvědomuje, že body E a F jsou problematické, vidí, že bude zmenšovat souřadnice bodu F. Při psaní zadám úlohy (bodu F) na tabuli vykřikl: „ To se tam nevejde!"

K3: Zřejmě snaha o zvýraznění polohy bodu P – je důležitý pro orientaci; polopřímka OP je počátečním ramenem všech úhlů.

K4: Přesné rýsování koncových ramen úhlů k vyřešení úkolu Bohouš nepotřebuje. V Bohoušově myšlení probíhá rychlá změna jazyka vizuálního do jazyka aritmetického. Oba jazyky se prolínají. Geometrie dělá koncept, aritmetika proces. V hlavě Bohouše zřejmě proběhla transformace geometrického procesu – sestroj bod, udělej polopřímku ...do aritmetického jazyka:

[8] Při podrobných analýzách písemných dokumentů nebylo možné přesně rekonstruovat myšlenkové procesy Bohouše. Některé myšlenky jsme proto upřesňovali při dodatečném rozhovoru v srpnu – uvedeno v příslušném komentáři.

když přepočítám souřadnice bodů, nemusím porovnávat úhly, ale stačí pořadí bodů na polopřímce – zde však se jedná znovu o geometrickou interpretaci. Nejdůležitější úvahy probíhají pouze v imaginaci. Vztah není dán geometricky (nekreslí polopřímku), ale aritmeticky – přesným výpočtem se vyhne nejasnostem při rýsování blízkých úhlů.

K5: Body A, B, C, D, E jsou ze zadání – zakresleny a označeny jako první. Souřadnice bodů indexovaných jsou nejprve vypočteny, pak teprve jsou body zakresleny. Bohouš si uvědomuje, že jsou to body pomocné a že se musejí vejít na malý prostor v blízkém okolí bodu A, tomu odpovídá i pečlivost zápisu a velikost písmen.

K6: Bohouš projektuje zadané body na přímku $y = 1$ jako pomocné body označené indexem 2. Proč projekce na tuto přímku a ne na přímku $x = 1$? Proč indexy 2 a ne 1? V dodatečném rozhovoru Bohouš potvrdil, že je jedno, jestli projekce bude na přímku $y = 1$ nebo na přímku

$x = 1$. Přímku $y = 1$ zvolil proto, že byl zadán bod $A[2,1]$ a tak už u něj nemusí nic počítat. Volbu indexu 2 vysvětluje Bohouš spontánně:„ A je první, A_2 je druhý. Jsou to prostě ty druhý body."

K7: Střídání značek zvyšuje přehlednost pořadí bodů, které je rozhodující pro porovnání velikosti úhlů. Této části obrázku je věnována největší péče.

K8: Zápis $A = E_2$ ukazuje zvědomění projekce bodu E do bodu A, shodnost úhlů α a ε.

Záznamy na bílém papíře:

K9: Zápis řešení – pořadí úhlů podle velikosti je přesné, bez náznaku zaváhání, v tuto chvíli psané s jistotou.

K10: Legendy ke sloupcům vysvětlují jejich význam. K vysvětlení jsou použity osobní formulace a termíny – „původní body", „ změněné body". Popis významu indexovaných bodů činil potíže. Přepisování ve (4) ukazuje na hledání přesné formulace. K objasnění jsou použity pouze dva body A_2 a B_2 a poznámka atd. Ukáže dva body a další podle návodu pochopí čtenář sám.

K11: Sloupce (3) a (5) jsou opsány podle tabulky v sešitě s jistotou a cíleně, pečlivá úprava potvrzuje uspokojení z objevu. Sloupec (3) zaznamenává uchopení zadání do aritmetického jazyka. Sloupec (5) vyjadřuje projekci na jednu přímku.

K12: Vysvětlení (6) je objektivní, neosobní, nadčasové. Přesně popisuje vlastnost rostoucí funkce. Komplikovaná myšlenka je bez jediného škrtu. Vše svědčí o hotovém poznatku. Šipka od bodu F_2 k závěrečné formulaci potvrzuje schopnost stručného, přesného a výstižného vyjadřování i přehledného grafického uspořádání.

K13: Čára má oddělit vlastní úvahy. Zde má spíš funkci závěrečného podtržení splněného úkolu.

K14: Pod čarou je vysvětlení k bodu G a zařazení úhlu ψ. V obrázku bod G_2 vyznačen není. Toto doplnění svědčí o rychlosti Bohoušových úvah. V okamžiku, kdy byl bod G doplněn, měl Bohouš původní úlohu již vyřešenu. Při dodatečném rozhovoru to komentoval slovy: „Čárou jsem uzavřel řešení. Pak jsme to prodiskutovali se sousedem, zjistili jsme, že to máme řešeno každý trochu jinak, ale výsledek je stejný. Pak jsme už neměli co dělat, tak jsme dostali zadaný bod G, tak jsme ho doplnili pod čáru."

Zápisy ve školním sešitě:

K15: Přehledně podle zadání vypsány úhly, které je třeba seřadit. Ve srovnání se záznamem je grafická úprava pečlivější – Bohouš v tuto chvíli asi přemýšlí o strategii, má čas psát pomaleji. Samotný fakt, že použil pro zápisy pomocný papír (školní sešit) svědčí o tom, že si v tuto chvíli ještě není jistý úspěšností svého nápadu. Jinak by ho pomocné zápisy zdržovaly.

K16: Nad tabulkou je zapsáno uspořádání úhlů podle velikosti. Původně byly znaky nerovnosti zapsány obráceně, později byly správně opraveny výrazným přepsáním. V dodatečném rozhovoru Bohouš potvrdil, že toto řešení zapsal hned po výpočtech zaznamenaných do tabulky, že až při vynášení pomocných bodů do obrázku si uvědomil správné pořadí znaků. Celý postup potvrzuje prolínání geometrie a aritmetiky. Dál dokumentuje Bohoušovu schopnost kritického myšlení. Na bílý papír pak Bohouš opsal výsledek (1).

K17: Zápis do sloupců do tabulky svědčí o připravené strategii a vhledu. Z uspořádání tabulky je vidět, že Bohouš nejprve začal psát pouze body a jejich souřadnice, na kalkulátoru přepočítal souřadnice vzhledem k $y = 1$, ty pak zapsal dál do řádku.

Podle tvaru čar se můžeme domnívat, že první tři řádky byly jasné, další tři řádky nemají přesné uspořádání. Zřejmě byly nejprve zapsány souřadnice bodů podle zadání a potom doplněny dopočítané údaje. Zakřivené podtržení upřesňuje, co k sobě patří.

První tři řádky posledních sloupců jsou ještě uspořádány úhledně, číslo $2,\overline{6}$ je zapsáno pod řádkem, nerespektuje uspořádání do tabulky. Můžeme se domnívat, že právě v tomto okamžiku Bohouš jasně vidí úspěšnost svojí strategie, dochází k objevu. Úprava není podstatná, důležité je číslo, zřejmě velice rychle spojí křivou čarou hodnoty, které k sobě patří.

První dvojité čáry zvýrazňují oddělení legendy tabulky – označení bodů, druhé dvojité čáry oddělují zadané body od pomocných. Tenké jednoduché čáry oddělují souřadnice jednotlivých bodů.

3.5 Závěry analýz

Analýzy žákovských řešení ukázaly, že konstruktivistické pojetí bylo v tomto případě silně motivující. Umožnilo žákům postupovat při řešení problému vlastní cestou. Při řešení úlohy ÚG na čtverečkovaném papíru je třeba porovnávání série úhlů v jediném obrázku generickým modelem a přirozeně vede u některých žáků k objevu.

Žáci využívali různé činnosti – rýsovali s větší či menší přesností, někteří dokonce pouze načrtávali, porovnávali, spekulovali, počítali na kalkulátorech. Vizualizaci napomáhala jak manuální činnost, tak i prostředí čtverečkovaného papíru. Úloha vedla žáky k odhalování principu poměru. Při analýze se ukázalo, že téměř u všech žáků probíhalo řešení v posunu od procesu ke konceptu.

Je zajímavé zmínit jistou paralelu ontogeneze s fylogenezí pojmu goniometrické funkce. Porovnávat velikost úhlů pomocí poměru uměli již staří Egypťané. Řecká matematika, zejména astronomie (např. Ptolemaios Claudius z Alexandrie) používala poměr délek na vyjádření velikosti úhlů propracovaným způsobem, ale goniometrické funkce byly zavedeny až o mnoho století později arabskými matematiky.

3.6 Sumarizace analýz z pohledu dalšího postupu učitele

Získaný materiál je velice bohatý a jeho sumarizace, která by ukázala všechny důležité jevy i jejich vztahy se mi dlouho nedařila. Podobně jako u experimentu V2 s válcem jsem neuspěla s přehledy, ani s tabulkou. Jako nejzdařilejší nakonec vyšel kruhový diagram. Snažím se v něm přehledně zmapovat užité strategie tak, aby bylo možné ukázat roli žáka a roli učitele v průběhu řešitelského procesu.

Při prezentaci v Power Pointu je možné diagram odhalovat postupně, po vrstvách. Písemná prezentace dovoluje takový postup pouze omezeně. Zde předvedu tři stádia tvorby daného diagramu.

Prvním stádiem je **Zadání úlohy** – v diagramu vyznačeno žlutým kruhem uprostřed – viz obrázek 3.10.

Obrázek 3.10: Zhodnocení situace po 40 minutách bádání

Druhým stádiem je **Zhodnocení situace po 40 minutách bádání** (obrázek 3.10) v diagramu znázorněno mezikružím rozděleným barevně na čtyři části, ty jsou pak ještě dál členěny.Tato část diagramu velmi zjednodušeně dává přehled o užitých strategiích. Přesnější členění by bylo značně nepřehledné, zjednodušení považuji za užitečné vzhledem ke snadnější orientaci. Velikost ploch v diagramu odpovídá skutečnému počtu žáků ve skupinách podle užité strategie.

Základní orientační rozdělení žákovských řešení z pohledu další edukační strategie učitele vzniklo při přípravě na další hodinu. Řešení na čtverečkových papírech jsem roztřídila podle

1. fáze řešení do tří skupin:a) objev dokončen;
   b) bod *F* „zviditelněn", ale objev nedokončen;
   c) bod *F* neuveden.
2. způsobu řešení do pěti skupin:a) úhly porovnány pouze graficky
   b) vyjádření velikosti úhlu pomocí souřadnic bodů
   c) vyjádření velikosti úhlu pomocí zlomků
   d) úhly porovnány „převodem na jednotku" na ose x nebo na ose y
   e) využití grafu přímé úměrnosti.

Toto třídění je pouze orientační, podrobnější třídění je zpracované do kruhového diagramu nazvaného Zhodnocení situace po 40 minutách bádání – viz obrázek 3.10.

Neuspěšné strategie jsou v oblastech rýsování – způsob řešení: a) úhly porovnány pouze graficky – v diagramu vyznačeno zelenou a červenou oblastí.

Ty je užitečné dál rozdělit na dvě části

- v první je rýsování pouze ve viditelné oblasti, tam ještě nebyl objeven nástroj na porovnávání velikosti úhlů – odpovídá fázi c) bod F neuveden – oblast označená červeně – například práce Anny (příloha 3.5.1 obr.1)
- ve druhé části jsou uvedeni žáci, kteří již použili podobnost, ale chybí algebraické vyjádření závislosti velikosti úhlu na souřadnicích bodů – chybí propojení geometrie s aritmetikou – odpovídá fázi b) bod F „zviditelněn", ale objev nedokončen – barva zelená – například práce Kláry (příloha 3.5.6) a Veroniky (příloha 3.5.7)

Každá ze skupin bude v další hodině řešit jiné doplňkové úlohy.

Úspěšné strategie jsou ve výsečích označených „kalkulačky" a „přímá úměrnost" – odpovídá fázi a) objev dokončen – dva odstíny modré barvy.

Další podrobnější rozdělení symbolicky naznačuje, jakým konkrétním způsobem žáci pracovali :

Kalkulačky – označení oblasti, kam jsou zařazeni žáci, kteří při porovnávání úhlů použili výpočty na kalkulátorech. Tato oblast je ještě dál členěna podle konkrétního použitého způsobu výpočtu.

- Symbol $[1; y]$ zastupuje strategii porovnávání velikostí úhlů přepočtem y-ové souřadnice bodu na jednotku x, symbol $[x;1]$ – přepočet na jednotku y – například práce Bohouše
- (příloha 3.5.2 obr.2) a Borise (příloha 3.5.8)
- symboly $\frac{x}{y}$ a $\frac{y}{x}$ charakterizují strategii porovnávání užitím poměrů souřadnic – například práce Aleše (příloha 3.5.9) a práce Havla (příloha 3.5.10)
- slovo zlomky – odpovídá užití pouze konkrétních číselných vyjádření poměrů zlomkem – například práce Karla (příloha 3.5.11)

Přímá úměrnost – označení oblasti, kam patří strategie využívající vlastností přímé úměrnosti.

- graf – využití grafu přímé úměrnosti – například práce Mirka (příloha 3.5.12)
- koef – symbolizuje početní využití koeficientu přímé úměrnosti – například práce Hany (příloha 3.5.13).

Poznámka: Aleš ve svých úvahách přesáhl rámec učiva ZŠ (příloha 3.5.9) – zvolil bod *N* ve druhém kvadrantu a zapsal následující úvahu – viz obrázek 3.11 (příloha 3.5.9).

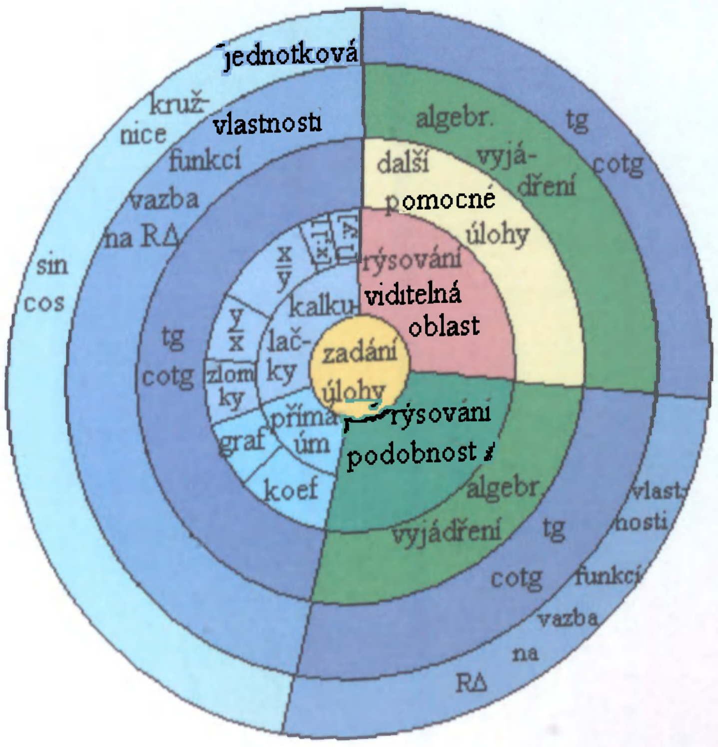
výšku y dělím délkou x čím vyjde vyšší číslo tím je úhel větší
nevychází to pro bod N [−2; 3]
K
−1,5 je ze všech čísel nejmenší ale ∢ NOP je největší

Obrázek 3.11: Úvaha Aleše

K Alešově řešení a k této úvaze jsme se vrátili s celou třídou za dva roky, kdy jsme rozšířili obor hodnot goniometrických funkcí na celé **R.** S Alešem a několika ostatními zájemci jsme o problému diskutovali

Všichni tito žáci další hodinu pokračovali zavedením funkcí tangens a kotangens, hledáním jejich vlastností.

Třetím stádiem je **Postup práce v dalších hodinách** – diagram je doplněn o další tři mezikruží – obrázek 3.12.



Obrázek 3.12: Postup práce v dalších hodinách

Zde je ukázáno, jak se dá zorganizovat rozdílná rychlost jednotlivých žáků při objevování. Tmavé modré oblasti s nápisem tg a cotg označují chvíli, kdy bylo možné nalezený vztah nazvat goniometrickou funkcí – naplnění vytyčeného cíle. Žáci, kteří úlohu úspěšně vyřešili, mohli hned v následující hodině hledat vlastnosti objevených funkcí, v grafu dál nalézali pravoúhlé trojúhelníky (vztahy mezi velikostí úhlů a poměry stran), nejrychlejší pak hledali takové body, z jejichž souřadnic se dají přímo odečítat hodnoty goniometrických funkcí.

Zelené oblasti označují fázi, kdy bylo nutné přejít od rýsování k výpočtům. Žáci, kteří již „zviditelnili" bod *F*, mohli přímo pokračovat, ti kteří ještě nenašli nástroj, jak tento bod přiblížit, – řešili pomocné úlohy (žlutá část).

Na konci objevování, kdy je bádání uzavřeno, se dá říci, že se všichni žáci seznámili s funkcemi tg a cotg.

Konstruktivistické pojetí se i v tomto případě ukázalo jako silně motivující. Umožnilo žákům postupovat při řešení problému vlastní cestou. Žáci využívali různé činnosti – rýsovali s větší či menší přesností, někteří dokonce pouze načrtávali, porovnávali, spekulovali, počítali na kalkulátorech. Vizualizaci napomáhala jak manuální činnost, tak i prostředí čtverečkovaného papíru. Úloha vedla žáky k odhalování principu poměru.

Čtvrtá kapitola

Γνωθι σεαυτόν

Poznej sebe sama

Nápis na Apollónově chrámu v Delfách [9]

4. SEBEREFLEXE

Kapitola je věnována sebereflexi.V první části kapitoly popisuji, jak se postupně vyvíjelo a přetvářelo moje učitelské přesvědčení od mateřské školy až do současnosti. Připomínám podněty a souvislosti, které se výrazněji projevily ve vývoji mého učitelského pojetí.

Druhá a třetí část se vztahují k experimentům V2 a G2 popsaným ve druhé a třetí kapitole. V sebereflexi se zamýšlím nad důsledky průběhu experimentů a jejich analýz na další vyučování.

4.1 Vývoj mého učitelského přesvědčení

4.1.1 Přesvědčení – budu učitelkou

Moje přesvědčení, že budu učitelkou, vzniklo už v mateřské školce. Říkávala jsem: „Až vyrostu, tak se sem vrátím jako paní učitelka“.

Toto přesvědčení přetrvávalo i na základní škole. Ve volném čase jsem se věnovala dětem – vedla jsem kroužky, jezdila na letní tábory (nejdřív jako praktikantka, později jako vedoucí). Po ukončení základní školy jsem nastoupila na SVVŠ s cílem: „Vrátím se na základní školu a budu učit“. Tehdy jsem vůbec neuvažovala zda první nebo druhý stupeň, nepřemýšlela jsem o předmětech – jednoduše jsem chtěla učit.

Na střední škole neopouštím svůj cíl – učit – profilují se předměty – francouzština, čeština, matematika, fyzika. Jiné předměty mne neoslovují (zřejmá souvislost s osobností vyučujících). Když nad tím přemýšlím zpětně, domnívám se, že zajímavým se pro mne stal ten předmět, kde jsem mohla tvořit a nepřejímala jsem hotové poznatky – nemusela jsem se nic „biflovat“ zpaměti.

[9] „…zachovej ve všem míru; pečuj o celek; užívej starých zákonů, ale čerstvých pokrmů; mnoho poslouchej a mluv jen včas“. Tyto výroky zvěčňuje delfská věštírna. Šíří je a nechává je vyhotovit ve zlatě na stěnách Apollónova chrámu. Vévodí jim jakási ústřední zásada delfské věštírny: „Poznej sebe sama!“, která se později stane východiskem Sokratovým. (Kratochvíl, 1993, s. 21)

Před maturitou jsem měla sen studovat učitelství – obor francouzština a český jazyk na filosofické fakultě UK v Praze. Nastalo první zklamání – psal se školní rok 1969/70 a obor FRJ – CJ nebyl otevřen, zvolila jsem proto druhou variantu mých oblíbených předmětů, a to učitelství MAT – FYZ na MFF UK v Praze. Jako záložní variantu jsem tehdy napsala učitelství ekonomických předmětů na VŠE.

4.1.2 Začátky učitelské praxe – střední ekonomická škola

Po absolvování MFF UK (v roce 1976) jsem začala učit na střední ekonomické škole. Učitelskou dráhu jsem nastupovala s přesvědčením že „dobrý kantor i kozu naučí počítat" (možná v podtextu a v podvědomí je moje přesvědčení, že různí žáci potřebují různý přístup) – nyní bych to poopravila – možná naučí, ale ta „koza" musí chtít. Pomáhal mi pocit kvalitního teoretického matematického základu – „stavovská čest mat-fyzáka".

Mojí první snahou bylo, aby se moji žáci matematiky nebáli. Vysvětluji, ptám se, zda žáci pochopili látku, kdykoliv se mohli zeptat na nejasnosti. Způsob vyučování byl ale instruktivní (do té doby, kromě vlastního způsobu učení se, jsem nic jiného nepoznala). V této etapě lze mé pedagogické působení charakterizovat v oblasti interakce se žáky jako vstřícné a v oblasti vyučování jako instruktivní. Při přípravách na vyučování jsem se výrazně soustředila na obsah.

Přišly první radosti a první zklamání.

v denním studiu

- radost – žáci se matematiky nebojí, nedostavují se katastrofické výsledky v podobě nedostatečných jako v jiných třídách; třídy byly převážně dívčí a instruktivní výklad dívkám vyhovoval; jasná strukturace učiva a přesné vymezení standardních úloh pomáhaly žákům nabýt jistoty, že učivo jsou schopni zvládnout – mezi učitelem a žáky byl soulad ve smyslu Mareš (1998, s. 164)
- zklamání v denním studiu – čtvrtletní písemné práce dopadaly hůř než průběžné kontrolky.

v dálkovém studiu

- radost – dobře zvolený systém práce na konzultacích, který vyhovoval těm studentům, kteří měli možnost se doma na konzultaci připravit podle úloh, které v předstihu dostali,
- zklamání – při prvním odhalení „nepohody" při zkoušení dálkařek, kdy mi jedna dálkařka ještě před položením otázky oznámila, že se mě tak bojí, že ji i v noci pronásleduji ve snech..

Neúspěchy v denním studiu jsem již tenkrát dokázala do jisté míry analyzovat. Uvědomovala jsem si, že získané poznatky nejsou trvalé. Přemýšlela jsem, jak to napravit a začala jsem se zajímat právě o ty žáky, kteří nebyli úspěšní. Zjistila jsem, že při hodinách nejsou všichni žáci aktivní. Všimla jsem si, že i žáci, kteří nevyrušovali, měli dostatek času k „únikům" do světa svých myšlenek zcela nematematických. Umožňoval to vysoký počet žáků ve třídě (běžně 40 žáků ve třídě) i způsob instruktivního vyučování – zcela klasická struktura hodiny (zkoušení a opakování; výklad; shrnutí).

Pochopila jsem, že moje výzva, kterou jsem kladla po každé části výkladu – „Rozumíte všichni? Kdo se chce na něco zeptat?", nebyla žáky vnímána tak, jak jsem se domnívala. Uvědomila jsem si, že se většinou ptají ti, kteří problému částečně rozumí a vědí na co se ptát. Žák, který látku nechápe, se nezeptá z obavy, aby se neprojevilo, že něco neumí.

Když jsem pochopila, že moje výzvy nejsou účinné, snažila jsem se žáky víc aktivovat. Výklad jsem prokládala otázkami, tak aby odpovědi na tyto otázky dovedly žáky k novému poznatku. Pro mne odpovědi žáků měly diagnostický účinek.

Snažila jsem se zpříjemňovat hodiny zajímavými úlohami, ale to se mi dařilo jen nárazově.

Nicméně již zde se začaly utvářet moje názory, které posléze vedly k změně mého edukačního stylu od instruktivizmu ke konstruktivizmu.

Složitější pro mne bylo řešit problémy v dálkovém studiu. Byla jsem přesvědčena, že zde je nutné, aby ti studenti, kteří učivu vůbec nerozumí, zvýšili svoji aktivitu v domácí přípravě. Dnes již vím, že řešení uvedeného problému tkví v tom, aby student, který se hlásí do dálkového studia měl možnost před začátkem vyučování v několika testech samostatně zvážit vlastní připravenost a případně odložit studium až po absolvování přípravky.

4.1.3 Přestup na víceleté gymnázium

V roce 1990 jsem začala učit na víceletém gymnáziu jedenáctileté nadané děti. Stala jsem se třídní učitelkou v primě, kde jsem učila i matematiku. Uvědomovala jsem si zodpovědnost za nadání žáků a chuť učit se, chtěla jsem je rozvíjet a pokazit při tom, co nejméně. Byla jsem nucena změnit způsob příprav, větší důraz jsem kladla na to „jak" učit než na obsah.

Tato etapa mého učitelského vývoje by se dala označit jako **hledání**. Nejprve jsem čerpala náměty v literatuře, pak jsem se účastnila didaktických seminářů a konferencí didaktiky matematiky.

Výrazným mezníkem byla první konference o výuce matematiky na víceletých gymnáziích (pravděpodobně v roce 1992) v Hradci Králové. Tam jsem se setkala s M. Kubínovou a M. Tichou, které prezentovaly své experimentální texty učebnic pro druhý stupeň ZŠ. V té době jsem se potýkala s problémem vhodných učebnic, předváděné experimentální texty se mi staly velkou inspirací a usnadnily mi přípravy na další hodiny. V té době jsem hledala způsob, jak zaujmout bystré žáky, jak zvládnout jejich živelnost na jedné straně, jak přitom neodradit a nezanedbat žáky pomalejší na straně druhé. Nechtěla jsem, aby žáci poznatky pouze reprodukovali, snažila jsem vést je k přemýšlení, rozvíjet jejich tvořivost. Setkání s autorkami experimentálních textů posílilo moji víru ve správnost nastoupené cesty a povzbudilo moje sebevědomí.

V dalším roce jsem byla požádána, abych pomohla založit metodický kabinet matematiky při Službě škole v Mladé Boleslavi. Od té doby až do dneška pracuji jako metodik a garant vzdělávacích akcí pro učitele matematiky pro okres Mladá Boleslav. První organizované semináře byly zaměřené na aktivizační metody, na motivaci. Zvala jsem ty lektory, které jsem poznala na konferencích.

Druhým výrazným mezníkem v mém hledání (nejen pro mne, ale i pro další učitele na Boleslavsku) se stal v roce 1995 vzdělávací **program Iniciativa.** Ten nabídl ucelený systém seminářů, psaní seminárních prací a jejich obhajoby, přinesl pracovní setkání s odborníky, atmosféru stejného pedagogického přesvědčení. Prožili jsme první analýzy žákovských prací, první zamýšlení se nad poznávacím procesem. Zkusili jsme ve svých třídách realizovat experimenty, byli jsme vyzváni k prezentaci výsledků na konferencích. Podobně jako ostatní účastníci Iniciativy i já jsem své zkušenosti prezentovala na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky v Praze (1996) a na konferenci Jak učit matematice žáky ve věku 10 – 15 let ve Frýdku-Místku (1997). Od prvotních sdílení značně emotivně zabarvených zkušeností z hodin nebo z matematického tábora jsem postupně přecházela k analýzám činností žáků, průběhu hodin, k hledání způsobu, jak ukázat účinnost konstruktivistických přístupů.

Třetím mezníkem je v roce 1999 zahájení doktorandského studia na KDM PF UK. Možnost spolupracovat s odborníky na katedře didaktiky matematiky byla pro mne hlavní motivací ke studiu. Každé setkání s nimi přineslo mnoho cenných podnětů pro moji práci ve škole.

Na konzultacích jsem se postupně seznamovala s metodou atomární analýzy. Specifikum analýz bylo v tom, že moje poznání žáků bylo přímé a bohaté a poznání vedoucího pouze mnou zprostředkované. Jeho rozbory byly tedy spíše obecné a alternativní a moje práce spočívala v tom, abych nabízené možnosti výkladu kriticky zhodnotila a ukázala na ta řešení, která mi organicky harmonizovala s osobností žáka. V případě, že se takové řešení neobjevovalo, snažila jsem se popsat detailně jiné mé zkušenosti s daným žákem, které pomohly osvětlit jeho osobnost.

Postupně jsem se takto při konkrétní práci učila metodě atomární analýzy, tj. metodě kladení velice detailních otázek a trpělivého sestavování mozaiky řešitelského procesu žáka. Domnívám se, že naučit se této metodě z knih je téměř nemožné. K tomu je nutný bezprostřední dialog lidí, kteří s dostatečnou trpělivostí hledají mezi mnoha možnostmi tu, která nejlépe koresponduje celkovému myšlenkovému projevu daného žáka.

Při analýzách prováděných ve skupině učitelů, práce skupiny postupuje rychleji, jestliže v ní je aspoň jeden člověk, který z danou metodou má bohaté zkušenosti (odstavec 4...).

Zvládnout atomární analýzu neznamená jen naučit se pečlivě vnímat detaily. Znamená to i schopnost umět tyto jednotliviny správně hodnotit, řadit, porovnávat, klasifikovat apod. To vše vyžaduje pojmový aparát, který se člověk učí „za pochodu". Je to učení „plíživé" a člověk si jej mnohdy vůbec neuvědomuje. Až v okamžiku, kdy se analýzy dělají ve společnosti někoho nového, který co chvíli žádá vysvětlování a často oponuje zcela irelevantně, si člověk uvědomí, jak daleko se v popsané pracovní metodě dostal.

Metodiku kognitivní analýzy jsem používala při rozborech obou experimentů (V2 i G2) prezentovaných v této práci. První činností bylo „čtení" obrázku. Evidence jsem se učila přesně zaznamenávat. Tímto způsobem se zviditelní každý jednotlivý krok postupu žákovského řešení, který by jinak mohl uniknout pozornosti. Pak jsem se učila evidence komentovat a hledat, jak mohou ukázat na myšlenkové pochody žáka. Již při prvních analýzách mě překvapilo, jak je možné přemýšlet o každém detailu v písemném projevu žáka a kolik informací je zde ukryto.

U prvních analýz byla pomoc vedoucího práce výrazná, postupně jsem se pak pokoušela samostatně používat metodu atomární analýzy, myšlenky proceptu nebo generických a izolovaných modelů. První analýzy byly uskutečněny u experimentu s válcem. Výhodou bylo, že jsem měla k dispozici osm skupin a jestliže při analýze prvních jsem byla spíše v roli „žáka", tak analýzy posledních jsem dělala již samostatně. Pomáhala mi u toho tvorba vývojových diagramů (popsáno v odstavci 2.8).

Protože se výzkum s válcem prolínal s výzkumem goniometrického tématu popsaného v kapitole třetí, byla většina zkušeností, které jsem nabyla v jednom z těchto prostředí, aplikovatelná i v prostředí druhém. Právě v goniometrickém tématu se mi povedlo vypracovat velice účinný nástroj, aplikovatelný jak na kognici, tak na edukaci (popsáno v odstavci 3.6).

Podrobné analýzy mi postupně odhalovaly hlubší pohledy do poznávacího procesu žáků, otevíraly mi nové oblasti, které jsem dříve nevnímala. Takové učitelské „procitání" přinášelo nejenom radost, ale zároveň i chvíle depresí. Začala jsem si víc uvědomovat nedostatky při výuce, co všechno ještě mohu dělat jinak.

Setkání na fakultě i hodiny konzultací pro mne mají význam nejen po stránce didaktiky matematiky, ale především po stránce lidské. Myšlenky z diskusí se vynořují s odstupem času, třeba i po několika letech, jsou „pod kůží" – člověk se změní, mění se způsob myšlení.

4.2 Poučení z experimentu V2

Analýzy žákovských řešení spolu s hledáním co nejpřesnější rekonstrukce procesu řešení, přinášejí učiteli poznání způsobu myšlení a učení se žáků. V následujících odstavcích shrnu zkušenosti, které jsem si odnesla z experimentů V2 a G2.

4.2.1 Tři alternativní scénáře

Při analýzách písemných žákovských dokumentů jsme zkoumali, jaký vliv na řešitelský proces má použitá formulace výzvy (odstavec 2.3). Zvažovali jsme i jiné možnosti formulace výzvy, která by mohla být žákům předložena pro „nastartování" a usměrňování jejich práce, a porovnali jsme je. Vybírali jsme z těchto tří alternativ:

<u>První alternativa</u>:

1. každá skupina dostane fyzický model válce, který pomůže žákům vyvodit hledaný vzorec
2. pak podle vytvořeného vzorce vypočítají numericky povrch „svého" válce.

Výhodou uvedeného postupu je garance dobré představy základního objektu – válce i manipulativní činnost. Jeho slabinou je skutečnost, že konkrétní výpočet (izolovaný model vzorce) přichází až po abstraktním poznání. To neodpovídá postupu podle teorie generických modelů (viz 1.kapitola), který byl impulsem pro vytvoření druhé alternativy.

<u>Druhá alternativa</u>:

1. každá skupina dostane fyzický model válce a zjistí, kolik barvy je zapotřebí na jeho natření
2. konkrétní výpočet se žáci pokusí zobecnit – najít obecný vzorec

Pro žáky, kterým je válec jako geometrické těleso dobře znám, je to vyhovující postup, ale pro žáky, kteří zatím důvěrné poznání válce nemají, to může být náročné, neboť pracují s ne zcela jasným objektem. Zejména může být pro ně těžké objevit, že plášť válce je vlastně obdélník a jedna jeho strana má délku obvodu kruhů podstavy. Obě tyto myšlenky jsou přítomny v procesu lepení válce z jeho sítě, což je přítomno v použité alternativě – označme ji jako třetí. Připomeňme:

Třetí alternativa:

1. Navrhněte síť válce, tuto síť narýsujte na barevný papír.
2. Síť válce vystřihněte a modelováním válce ověřte správnost.
3. Změřte potřebné údaje a vypočtěte povrch vymodelovaného válce.
4. Nalezněte vzorec pro výpočet povrchu válce.

K realizaci této alternativy budou žáci potřebovat barevné papíry, nůžky a rýsovací potřeby. Učitel přinese barevné papíry, ostatní pomůcky mají žáci u sebe.

U první a druhé alternativy žák pracuje s fyzicky přítomným tělesem, ale pojem sítě je zde jen imaginativní. U třetí alternativy žák vychází z imaginativního pojmu válec (případně jej kreslí), z něj manipulací tvoří fyzický model sítě a z ní pak fyzický model válce. Je zřejmé, že u třetí alternativy je bohatší manipulativní zkušenost a tedy i větší pravděpodobnost správného řešení úlohy. Očekávala jsem, že dobrou představu válce bude mít každý žák. Nicméně, kdyby tomu tak nebylo, mohl na požádání dostat fyzikální model válce. K tomu nedošlo.

Poslední úvahy jsou již výsledkem analýzy, ve které se na celý experiment díváme očima výzkumníka. Původně jsem byla spíše v roli učitele a zvažovala jsem kromě uvedených alternativ i alternativu tradiční (od obecného vzorce ke konkrétnímu výpočtu). Příčinou takové úvahy je možná otázka/námitka kolegy nebo rodiče, proč se „má objevovat již objevené", proč se prostě nevezme poznatek uvedený jasně v učebnici.

Formulace výzvy

Při analýze posloupnosti úkolů ve třetí alternativě se ukázalo, že úlohy ve výzvě mohly být formulovány vhodněji:

1* Navrhněte síť válce.

2* Síť válce narýsujte na barevný papír.

3* Síť válce vystřihněte a vymodelujte z ní válec.

4* Vypočtěte povrch vymodelovaného válce.

5* Nalezněte vzorec pro výpočet povrchu válce.

V takto upravených úlohách jsou některá upřesnění záměrně zamlčena:

V úloze 2* schází informace, že rozměry si mohou volit žáci sami (tato informace nebyla ani v původní textaci); nejde o zamlčení toho, že vůle je dána žákům, ale o termín „rozměry"; ten totiž může navádět na hledání číselných rozměrů, poloměru a výšky.

V úloze 3*, schází informace, která v původní textaci uvedena byla, že modelování válce je vlastně procesem kontroly vytvořené sítě.

V úloze 4*, opět schází zmínka o rozměrech z nichž se výpočet odvíjí.

4.2.2 Poučení z průběhu hodiny V2

Konstatovala jsem, že modelování vedlo přirozenou cestou žáky k diskusi a spolupráci.

Při pohledu na třídu se zdálo, že všichni žáci hned od začátku pracovali, byli aktivní. To, kromě jedné skupiny, potvrdilo i zběžné pozorování během hodiny a fotografování práce skupin. Pracovní atmosféru dokumentuje například fotografie č. 1 v příloze 2.7.1. Při pozornějším pozorování vybraných skupin jsem si ale uvědomila, že například ve skupinách 5, 6, 7 a 8 nebyli všichni stejně aktivní. Při přípravě dalších hodin jsem pak víc zvažovala počet lidí ve skupině, dávala jsem přednost práci ve dvojicích. Při hodinách jsem pak víc vnímala signály, které naznačovaly míru zapojení jednotlivců do činností.

Již v průběhu hodiny bylo evidentní, že jednotlivé skupiny volily rozdílnou strategii řešení.

V práci skupin v hodině se objevily chyby: záměna pojmů i znaků poloměru a průměru, vystřižení nerealizovatelné sítě,....

Potvrdilo se, že při „objevitelských" hodinách je učitel nucen reagovat na vzniklou situaci a improvizovat – například chlapci v první skupině byli příliš brzy s úkolem hotovi, v dané chvíli jsem si neuvědomila, že jsem měla mít připraveny další náročnější úlohy.

Potvrdilo se, že žáci této třídy jsou zvyklí pracovat ve skupinách. Rozdělení do skupin proběhlo rychle, spontánně. Běžné bylo i složení skupin, odpovídalo zasedacímu pořádku, nikdo se nemusel přemístit, pouze se některé dvojice otočily k zadní lavici.

<u>Co jsem se při hodině naučila:</u>

- modelování je činnost didakticky účinná, snažím se modelování zařazovat do výuky co nejčastěji
- zvažovat počet lidí ve skupině podle zadané činnosti, pečlivěji promýšlet organizaci skupinové práce
- víc hlídat míru zapojení žáků do činností

- mít připraveny nejen pomocné úlohy pro slabé žáky, ale především mít promyšlenu a připravenu náročnější variantu pro nadané žáky, kteří při hodině rychle a úspěšně zadanou úlohu vyřeší

4.2.3 Poučení z podrobných kognitivních analýz V2

Podrobné kognitivní analýzy odhalily, jak rozdílný postup řešení souvisí s učebním stylem žáka, jak činnost skupiny může ovlivnit vhled jednoho žáka – například skupiny 2, 5, 6, 7 i 8.

Analýza práce první skupiny potvrdila, že chlapci hned na začátku viděli řešení, že při hodině nebyli vytíženi, že by pro ně byl jiný úkol vhodnější.

Práce šesté skupiny ukázala formální znalost vzorce pro délku kružnice, malou zkušenost s konkrétními modely kružnice, špatný odhad velikosti obvodu kruhu v závislosti na poloměru. Potvrdilo se pozorování z hodiny, že jeden z chlapců řešil a ostatní pouze přihlíželi, že by pro ně byla vhodnější jiná alternativa zadání úkolu.

Analýzy prací sedmé a osmé skupiny odhalily, že objev nebyl dokončen. Závěrečným shrnutím a zopakováním na konci hodiny jsem zarazila objevitelský proces. Především dívkám z osmé skupiny jsem tak zabránila vlastnímu objevení chyby a tím jsem je ochudila o další napětí a hlavně o radost z objevu a posílila v nich vědomí, že samostatně nejsou schopné objevovat. Ověření výpočtem mělo být až další hodinu, tím by se prodloužilo napětí, diskuse by mohla pokračovat o přestávce, o problému by žáci přemýšleli i doma. Sdělením výsledku se vše zastaví. Naučila jsem se tedy hlídat se, abych nepodlehla pokušení urychlit probrání látky instrukcí a sdělením hotových poznatků. Posílila se tak moje víra, že je pro žáky lépe probrat méně látky s vnitřním pochopením, než řešit kvanta typových procvičovacích úloh.

V tabulkách a učebnicích bývá vzorec pro výpočet povrchu válce upraven do tvaru: $S = 2\pi r(r + v)$. Žádná z osmi skupin k tomuto zápisu nedospěla, ale ve všech (kromě jedné) byl vzoreček napsán jako součet obsahů dvou objektů. Tak jej děti konstruovaly a tak je jim srozumitelný. Vzoreček uvedený nahoře zdokonaluje výsledný poznatek po formální stránce ale současně „umrtvuje" význam jednotlivých znaků ve vzorci vystupujících.

Když jsem nad tímto jevem uvažovala, napadlo mě zadat žákům následující úlohu: Nalezněte geometrický útvar, který je modelem vzorce ve tvaru $S = 2\pi r(r + v)$. Modelováním ukažte, že obsah tohoto útvaru je shodný s obsahem povrchu válce vyjádřeného vzorcem $S = 2\pi r^2 + 2\pi rv$.

Metodologický pohled na to, co bylo řečeno, ukazuje, jak mohou algebra s geometrií spolupracovat. Vzoreček $S = 2\pi r(r + v)$, ke kterému jsme dospěli algebraickou úpravou, nás vedl k hledání takového stříhání daného geometrického objektu, aby bylo možné přeskupit jeho části do nového objektu odpovídajícího tomuto vzorečku.

Co jsem se naučila při kognitivních analýzách:

- z projevů žáků během hodiny i z písemných záznamů pozorovat jevy, které ukazují na učební styl žáka, tím jsem pak schopna účinnější pomoci
- na aplikacích ověřovat míru porozumění vztahům a vzorcům; ověřovat, zda znalosti nejsou pouze formální, zda jsou podloženy dostatečným počtem izolovaných modelů
- před sdělením výsledku a před závěrečným shrnutím se přesvědčím, zda všechny skupiny ukončily objevování
- víc vyhledávám příležitosti ke „zviditelnění" algebry pomocí geometrie

4.2.4 Poučení z dodatečných rozhovorů V2

Chlapci z první skupiny potvrzují, že pro ně objev nebyl zajímavý.

Výpovědi žáků třetí, šesté a osmé skupiny odhalily, že občas „zdání klame". Při vnějším pozorování během hodiny se jevilo, že ve třetí a osmé skupině vládla během hodiny velmi pracovní atmosféra, naopak v šesté skupině zdánlivě jeden chlapec nic nedělal, jen se díval.

Po půl roce z dodatečných rozhovorů však můžeme usoudit, že pracovitost dívek byla jen zdánlivá, protože si na činnost v hodině příliš nevzpomínaly. Jedna z nich se přiznala, že se vždycky snaží mít v ruce kalkulačku, aby mohla dělat numerické výpočty, nebo rýsuje – dělá pouze „pomocné práce", snaží se vypadat zaměstnaně. Naopak chlapec „pozorovatel" si přesně průběh hodiny vybavoval, znal i vzorce. Tato zjištění mě naučila lépe si všímat činností žáků při skupinové práci. Zjistila jsem, že je možné rozlišit skutečné pracovní nasazení od náhradní činnosti.

Co jsem se naučila z dodatečných rozhovorů:

- lépe si všímat vytíženosti žáků během hodiny
- pozorovat pozorně činnost žáků, uvědomovat si rozdělení úkolů mezi jednotlivce

4.3 Poučení z experimentu G2

4.3.1 Poučení z průběhu hodiny G2

První pozorování jsem dělala již v průběhu experimentální hodiny. Nebylo to poprvé, ale tentokrát, zřejmě pod vlivem pečlivé přípravy scénáře hodiny a mé zvědavosti, jsem svoji roli experimentátora vnímala hodně intenzivně. Poprvé jsem totiž opustila pro mne běžnou organizaci hodiny založenou na skupinové práci žáků a předřadila jsem před ni etapu samostatné práce žáků. Nevěděla jsem, jak bude třída na tuto změnu reagovat. Snažila jsem se postřehnout a evidovat vše, co by mohlo obohatit následnou analýzu experimentu.

Od prvních minut samostatné práce žáků jsem evidovala neobvyklou atmosféru třídy. Místo běžných diskusí a přirozeného šumu třídy, byl tentokráte ve třídě klid připomínající psaní pololetní práce. Všichni žáci pracovali zaujatě. Žádné náznaky komunikace mezi žáky, ani žádné předstírání práce jsem neregistrovala. Překvapilo mne to. Nečekala jsem, že moji výzvu ke zcela samostatné práci budou žáci brát tak vážně.

Sama sebe jsem se ptala, proč k tomu došlo. Viděla jsem dvě příčiny uvedeného jevu: první, zjevná, byla výzva učitele k samostatné práci; druhá, méně viditelná, spočívala ve struktuře úlohy, která i slabším žákům dává možnost samostatné práce. Třetí pravděpodobnou příčinu překvapivé atmosféry v úvodu hodiny jsem odhalila až později. Bylo jí moje silné citové zaujetí nastřádané v průběhu pečlivé přípravy scénáře a umocněné mojí zvědavostí a očekáváním. Je velice pravděpodobné, že žáci citlivě vnímali moje zaujetí, a to podněcovalo i jejich zájem. Uvědomila jsem si, že tento jev zažívám opakovaně téměř pokaždé, když přípravě hodiny věnuji nadměrnou energii a čas.

Úloha žáky oslovila nikoli jen jako školní zadání, kde jde o nalezení konkrétního výsledku, ale jako intelektuální výzva k odhalení jisté zákonitosti. To se projevilo ihned, jak začali ve druhé etapě práce žáci mezi sebou diskutovat. Dokumentují to poznámky z mých záznamů, v nichž je opakovaně žáky formulována otázka: „Jak to tedy bude?“ Někdy jen jako otázka, kterou si klade žák pro sebe.

Dále jsem si uvědomila, že u mých běžných hodin je žákům dán menší prostor pro individuální práci, protože již od začátku mohou mezi sebou diskutovat a úloha nenabízí tak širokou paletu výzev od jednoduchých až k složitým. Navíc probíhající experimentální hodina vede k vyšší motivaci žáků a tím i k bohatší paletě jejich nápadů, zejména u slabších žáků, kteří při organizaci „diskuse od začátku“ mají tendenci spíše přebírat myšlenky spolužáků.

Mé záznamy vztahující se ke druhé etapě hodiny – skupinové práci – obsahují ještě dvě důležité poznámky. První se týká mé reakce na strategii nastavování čtverečkovaného papíru (dvojice dívek při diskusi navrhovala řešit nedostupnost bodu *F* přilepením dalších čtverečkovaných papírů, aby bod mohly narýsovat). Ihned, jak jsem tento postup dívek viděla, jsem byla schopna formulovat náročnější úkol (totiž soubor vyšetřovaných bodů doplnit o vzdálený bod *G*), který orientoval práci dívek k dalšímu, hlubšímu cíli.

Druhá poznámka se týká nedostatečné vytíženosti dvou velice dobrých žáků třídy (viz případ Bohouš a jeho podrobná analýza v kapitole 3.4.2 – komentář K14). Při hodině jsem si včas nevšimla, že chlapci mají úlohu dořešenou. Až podrobné kognitivní analýzy ukázaly, že bod *G* byl zařazen do hotového systému. Potvrzuje to i konstatování v dodatečných rozhovorech: „Pak jsme už neměli co dělat, tak jsme dostali zadaný bod *G*, tak jsme ho doplnili pod čáru."

Již zkušenosti z experimentu s válcem ukázaly, že tito chlapci nebyli dostatečně vytíženi. Tentokrát jsem pro ně měla připravený náročnější úkol (hledat, jestli nalezené přiřazení je funkcí, zjistit její vlastnosti), bohužel jsem neuhlídala okamžik, kdy mám úkol zadat. Tento neúspěch byl pravděpodobně tím nejcennějším, co jsem se na hodině naučila.

S odstupem času mohu konstatovat, že je to jedna z věcí, které si od té chvíle hlídám velmi pečlivě. Uvědomuji si, že odpovídající obtížnost zadaných úloh je jednou z hlavních podmínek podnětného prostředí jak z hlediska poznávání, tak především z hlediska osobnostního rozvoje.

<u>Co jsem se naučila při hodině:</u>

- nová varianta organizace práce (v první etapě pracují žáci individuálně a až ve druhé pak vzájemně konzultují) je didakticky účinná. O podobné formě organizace práce se dočteme i v (Sekiguchi, Y., 2006), kde se uvádí, že v Japonských hodinách matematiky je běžný tento způsob výuky:

  1. fáze: Studenti nejdříve zkouší řešit úlohu individuálně. Potom pracují se sousedem nebo v malých skupinách.

  2. fáze: Někteří studenti prezentují svá řešení na tabuli a třída o nich diskutuje.

  3. fáze: Učitel předloží problém (úlohu).

  4. fáze: Učitel shrne hlavní poznatky.
- intenzita práce žáků je závislá na kvalitě předložené úlohy, zejména na tom, že úloha umožňuje každému žákovi smysluplnou aktivitu,
- vzájemné diskuse žáků jsou motivačně a asi i edukačně účinnější než učitelovo poučování a kontrolování práce žáků,

- má-li učitel zadávanou úlohu dobře promyšlenu, je schopen bezprostředně reagovat na případné nečekané situace v žákovských řešeních
- učitel, který chce motivovat i nejschopnější žáky třídy, musí mít připraveno a promyšleno pokračování dané úlohy do dalších, nebo hlubších oblastí matematiky; taková příprava vyžaduje nejen to, aby učitel matematiku znal komplexně a hluboko, ale aby se sám matematickými problémy permanentně zabýval a udržoval si tak odbornou „kondici".

4.3.2 Poučení z přípravy na další hodinu při experimentu G2

Přípravu na další hodinu jsem začala zkoumáním odevzdaných žákovských prací. První mě zarazilo to, že přesto, že jsem žáky žádala o zapisování postupů řešení a příslušných úvah na bílý papír, většina z nich zapsala pouze výsledek úvah a ne úvahy, které k výsledku vedly. Řešení na čtverečkových papírech mi napověděla o žákových úvahách víc. Ta jsem roztřídila podle fáze dokončení objevu a podle způsobu řešení – podrobně uvedeno v odstavci 3.6.

Toto třídění je pouze orientační, podrobnější třídění zpracované do diagramu je znázorněno na obrázku 3.10 na straně 111. Z uvedeného výčtu vyplynula potřeba přípravy rozdílného zadání úkolů jednotlivým skupinám pro další hodiny.

Co jsem se naučila při přípravě na další hodinu:

- práce jednotlivých skupin bude intenzivnější, jestliže jim pokračování úlohy budu připravovat podle způsobu práce, kterým žáci sami začali úlohu řešit
- musím též předjímat možné překážky, na které žáci při práci narazí; přitom nutno brát v potaz to, že stejná překážka u různých žáků může vyžadovat různé způsoby pomoci (u jednoho spíše ve vizuální, u jiného v kalkulativní oblasti)
- připravit se na situaci, že některý žák zvládne úkol velice rychle, a nabídnout mu smysluplnou a náročnou úlohu.

4.3.3 Poučení z podrobných kognitivních analýz G2

Podrobnou kognitivní analýzu řešení Anny a Bohouše jsem dělala společně s vedoucím práce. Očekávala jsem, že analýza Bohoušova řešení bude rychlá a stručná, protože chlapec měl vše dobře, a že nalezl nástroj k porovnávání velikosti úhlů, dokonce bez rýsování. Na základě předchozích zkušeností s analýzou žákovských řešení úlohy o válci jsem však tušila, že v Bohoušově řešení je možné najít skutečnosti, které já nevidím. Tak tomu i bylo. Ještě bohatší pak byla analýza práce Anny.

Podobně jako u experimentu s válcem se opět ukázalo, že se dá vysledovat prolínání geometrie a aritmetiky v určitých fázích řešení, že geometrie zviditelňuje a jinde zase aritmetika upřesňuje a urychluje.

Přemýšlení nad časovým sledem činností žáka přináší informaci o způsobu uchopování problému, což pak následně pomáhá při formulaci dalších úloh a úkolů.

Podrobné kognitivní analýzy prokázaly, že většina žáků při řešení postupovala cestou procesu, malá část cestou konceptu.

Ukázala se také vazba způsobu řešení na předchozí zkušenosti – někteří žáci využívali znalostí zlomků, jiní funkcí, další podobnosti. Několik žáků šlo poměrně rychlou cestou experimentování s kalkulačkou.

Co jsem se naučila při podrobných kognitivních analýzách:

- především všímat si věcí, které jsem dříve nevnímala – např.: jakým způsobem žák začíná řešit úlohu, které nástroje využívá
- víc při přípravě úkolů zvažovat předchozí zkušenosti žáků
- úlohy důsledně formulovat tak, aby při jejich řešení byla možná i cesta procesu
- při zadávání úkolů „nasadit" začátek tak, aby každý žák byl schopen udělat první kroky
- při činnosti žáků víc pozorovat projevy žáků, které svědčí buď o bezradnosti nebo naopak o tom, že úloha nepřináší nic nového

4.3.4 Analýzy prováděné ve skupině učitelů

Jako ilustraci uvedu jednu z mnoha ukázek diskuse při skupinové analýze. Nejprve jsem se o zkušenosti dělila se studenty doktorandského studia na seminářích pro doktorandy, kde jsme společně hledali nejprve evidence, pak jsme hledali jejich komentáře.

Analýzy řešení uvedené úlohy jsme diskutovali na Škole doktorandských studií v Kralupech a ve Vrabcově, dále pak při EMTISM v srpnu 2002 v Derby.

Na mezinárodním kurzu 3. – 10. srpna 2002 v Derby jsme diskutovali řešení úlohy o úhlech žákyně Anny. Diskusi vedli Milan Hejný (MH) a Darina Jirotková (D). Účastníci se seznamovali s metodou kognitivní analýzy.

Nejprve účastníci hodnotili obrázek na čtverečkovaném papíře. Hledali evidence. Našli jich celkem třináct. Pak se zamýšleli nad tím, co z evidencí vyplývá pro myšlenkové pochody žáka. Na ukázku uvádím zkrácené záznamy útržků diskuse:

Evidence E1:

Vygumování zadání a volba souřadného systému na výšku. Změna polohy papíru z polohy na výšku na polohu na šířku.

Diskuse k E1:

Ina: ...Začala rýsovat a uviděla, že se jí to tam nevejde, tak to vygumovala a pak otočila papír.

D: Kdy na to přišla?

Ina: Když si narýsovala nějaké body.

D: Ne – nejsou žádné stopy po gumování bodů.

MH: Co z toho plyne pro myšlení Anny?

Evidence E2:

Kreslí tužkou; osy x, y – perem.

Diskuse k E2:

Ina: Perem osy – potvrzení myšlení – teď jsem si jistá osami, ostatním ne, kreslím dál tužkou.

Romana: Důvod – lepší překrytí předchozího gumování – nakonec.

MH: Co plyne z úvahy Iny a co z úvahy Romany?

R: Myslím, kdyby začala perem, označila by i souřadnice bodů.

Lucka: Perem, protože si je jistá polohou os, umístěním bodů ne.

Juan: (vzal Annino řešení a papír dal na okno a díval se proti světlu) OP je tužkou, dál perem.

MH: Typický příklad, kdy podrobná analýza opraví původní evidenci. Důležité však není, která alternativa platí, ale co z toho plyne dál pro myšlení žáka.

Skupinová práce v analýze přináší rychlé postupování, protože jednotliví účastníci přispívají vlastní introspekční zkušeností a kolektiv z alternativních nabídek dosti rychle volí ty, které jsou nejpravděpodobnější.

Závěr

Výsledky a přínos práce

Práce je věnována didaktickému problému formulovanému úvodní otázkou:

Jak účinně bojovat proti formálním znalostem žáků v matematice?

Na počátku výzkumu bylo autorčino přesvědčení, že objevitelská činnost žáků při hodinách matematiky přináší žákům kvalitnější poznání, proto se nabízí jako nástroj v boji proti formálním znalostem. Toto přesvědčení posilují myšlenky konstruktivistického přístupu, který se stal ústředním tématem práce.

Těžištěm akčního výzkumu byly dva experimenty: Objevování vzorce pro povrch válce (experiment V2) a Otevírání světa goniometrie (experiment G2).

U obou byla naše pozornost zaměřena zejména na čtyři otázky:

1. Jaké jsou klady, jaké zápory a jaká jsou úskalí konstruktivistického přístupu ve vyučování matematice?
2. Jak organizovat práci třídy, aby každý žák, bez ohledu na jeho kognitivní styl, matematickou vyspělost a pracovní rytmus, měl možnost optimálního rozvoje?
3. Jak reagovat na chybu žáka, aby se tato nestala pro žáka hrozbou, ale poučením?
4. Jakými prostředky lze motivovat kolegy učitele, aby měli pocit, že je užitečné zvýšit konstruktivistické prvky ve své pedagogické práci?

Účinnost konstruktivistického přístupu

Hlavním cílem konstruktivisticky orientovaného vyučování je aktivace žáků. Proto nástrojem k „měření“ účinnosti výuky je míra autonomie práce jednotlivých žáků potažmo autonomie skupin, při vyučování organizovaném skupinově. Domníváme se, že analýzy obou vyučovacích hodin, ve kterých se uskutečnily experimenty V2 a G2 ukazují, že míra autonomie práce všech žáků třídy byla vysoká. Žáci pracovali se zájmem, experimentovali, hledali souvislosti, tvořili pojmy, zobecňovali tvrzení, o problémech diskutovali.

U experimentu V2, kde žáci pracovali v osmi skupinách, bylo evidováno sedm různých vstupů, pět různých výstupů a osm různých řešitelských postupů. Tedy jádro řešitelského procesu – tvorba a realizace strategie řešení – měla každá ze skupin jiné (viz. 2.8).

Experiment V2 s válcem byl na konci hodiny uzavřen, kromě jedné skupiny všichni žáci objevili hledaný vzorec a mohli další hodinu pokračovat společně.

U experimentu G2, kde žáci pracovali nejprve individuálně a až pak skupinově, bylo evidováno devět typů strategií, ale i ty by bylo možné dál upřesňovat. Téměř každé žákovské řešení má částečně svou vlastní strategii. Přesné členění by se stalo nepřehledným pro další postup, proto jsou podobná řešení sdružena do uvedených devíti skupin (viz 3.6). Různorodost strategií u experimentu G2 je přehledně znázorněna v kruhovém diagramu nazvaném Zhodnocení situace po 40 minutách bádání na obrázku 3.10 na straně 111.

Po první hodině bádání při experimentu G2 téměř polovina žáků objev dokončila, zbývající žáci dospěli k objevu jen částečně. Tyto skutečnosti byly zohledněny při přípravě na další hodiny – podrobně popisuje odstavec 3.6.

Postup práce učitele v dalších hodinách

U experimentu G2 byla zaznamenána větší pestrost použitých strategií než u experimentu V2. Zřejmě je to důsledek jiné organizace hodiny.

Různorodost řešitelských strategií svědčí o autonomii práce jednotlivých žáků, ale pro učitele zde vyvstává náročný úkol – zorganizovat další postup výuky pro celou třídu a přitom zohledňovat různé pracovní tempo a rozdílné učební styly jednotlivých žáků. Připravit rozdílné úkoly podle stupně zvládnutí činnosti v úvodní hodině je jednou z možností. Přehledně celou situaci znázorňuje kruhový diagram nazvaný Postup práce v dalších hodinách na obrázku 3.12 na straně 113. Podrobněji se k práci učitele vrátíme v dalším odstavci.

Jak pomáhat chybujícím žákům

U tradičního vyučování je reakce učitele na chybu žáka přímá. Učitel řekne žákovi, že v jeho práci je chyba, popřípadě mu ukáže i její lokalitu, nebo mu ukáže i to, jak to má být správně. Konstruktivisticky orientovaná výuka se snaží vést žáka tak, aby sám odhalil přítomnost chyby ve svých úvahách, aby ji sám dokázal lokalizovat i odstranit. Učitel mu může sloužit jako

a) zdroj motivace, která pomůže žákovi překonat případný negativní citový dopad chyby,

b) zadavatel nové úlohy, která žákovi pomůže lépe se orientovat v situaci,

c) diskusní partner, který pozorně poslouchá a spíše se ptá, než vyslovuje své názory.

Uvedený přístup učitele je výrazně náročnější než tradiční přístup. U tradičního postupu stačí učiteli znát matematiku. U konstruktivistického přístupu musí učitel po odhalení žákovy chyby hledat její příčinu (tou může být například deformovaná představa nějakého pojmu) a pak hledat koncepci svého reedukačního zásahu (povzbudit žáka, nebo mu položit otázku, nebo mu doporučit promluvit se sousedem,...).

To vše vyžaduje od učitele nejen znalost matematiky, ale i znalost aspoň základních kognitivních zákonitostí. V mé práci jsem jako nejčastější nástroj na poznávání příčin žákových chyb používala teorii generického modelu, zejména vazby izolovaných modelů a modelu generického. Častou příčinou chyb žáků je nedostatečný počet izolovaných modelů daného jevu v jejich vědomí. Pak stačí, aby učitel usměrnil žáka k získání dalších izolovaných modelů. Někdy dokonce toto poznání udělá žák sám. Při experimentu V2 v několika skupinách vystřihli žáci plášť válce poloviční. Neměli dostatečnou geometrickou představu obvodu kruhu. Modelováním válce ze sítě doplnili další zkušenost izolovaného modelu nejen válce ale i obvodu kruhu.

Klady a úskalí konstruktivistických přístupů

Následující shrnutí kladů a úskalí konstruktivistických přístupů zahrnuje zkušenosti autorky nejen z uvedených experimentů ale i z jiných hodin a jiných tříd.

Klady pro žáky:

- poznání založené na vlastních matematických i životních zkušenostech
- přesvědčení o smysluplnosti poznávání, které se u některých žáků mění na potřebu
- provázanost dílčích poznatků na další poznatky a zařazení poznatku do existující poznatkové struktury žáka
- osobnostní rozvoj, zejména rozvíjení sebedůvěry,
- podpora osobnostních rysů jako zodpovědnosti za sebe sama, vytrvalosti, důslednosti, tvořivosti, sebekontroly
- rozvíjení komunikace, schopnosti argumentovat, naslouchat a snaha porozumět názoru spolužáků

Úskalí pro žáky:

- pocit ohrožení u těch žáků, kteří jsou zvyklí získávat z matematiky dobré známky za znalosti reproduktivního a imitativního charakteru; o tomto úskalí jsem v práci nepsala, protože se v mé třídě neobjevil; vím o něm z jiných mých zkušeností, z vyprávění některých kolegů a zejména z výzkumu N. Stehlíkové (2004, s. 201)[10], který byl realizován v rámci výuky na VŠ.

Klady pro učitele:

- radost z žákovských úspěchů, zejména v případech, kdy žák osudově zatížený předsudkem „já nemám buňky na matematiku" najednou sám něco vyřeší, pochopí, sestrojí.
- radost, kterou učitel zažije, když mu jeho bývalý žák po mnoha letech vypráví o tom, jak mu v životě (například i při výchově vlastních dětí) pomohly zkušenosti, získané na hodinách matematiky

Úskalí:

- soustavná práce učitele na sobě (pro ty, pro něž toto není životní potřeba)
- náročná příprava – hledání vhodných úloh a úkolů
- energeticky náročné vedení hodiny (učitel musí pohotově reagovat na rozdílné reakce žáků, z nichž mnohé jsou nepředvídatelné) z toho plynoucí
- schopnost improvizace během hodiny
- potřebný cit a odhad učitele, kdy a jak žákovi pomoci (příliš včasná pomoc může přerušit probíhající poznávací proces žáka)
- obtížné hodnocení práce žáků (běžně používané bodové systémy lze použít pouze omezeně a nápady žáků nutno hodnotit z hlediska intelektuálního výkonu – to, co vyspělý žák vidí ihned a nebude tedy u učitele oceněno, to je u slabšího žáka velký objev a hodnoceno by mělo být)
- organizačně náročné vzhledem k různorodosti žákovských řešení, vzhledem k rozdílnému tempu
- problematické dodržování časových plánů, protože se nedá přesně naplánovat, kterým směrem se v danou chvíli bude žákovský zájem ubírat a co právě se při řešení odhalí, co je třeba doplnit

---

[10] Some students in our research found it particularly hard to accept that they would not be given ready-made knowledge...

- existují žáci, kteří upřednostňují paměťové učení se matematiky a tito pak nejsou s konstruktivistickými přístupy učitele spokojeni; nezřídka k tomuto postoji přispívají i rodiče těchto žáků, jak je uvedeno níže
- negativní postoj některých žáků ke konstruktivistickému vyučování učitele někdy nemotivuje; i o tom píše N. Stehlíková (2004, s. 201)[11] v zmíněné monografii

Zdá se, že výčet výhod je proti výčtu úskalí příliš skromný. Domnívám se však, že získané výhody vyjadřují samu podstatu matematiky a smysl toho, proč se vlastně matematika učí. Jsem přesvědčena, že „trnitější cesta“ stojí za to.

Jak objevování přijímají žáci, rodiče, kolegové?

Žáci:

Moje zkušenosti s konstruktivistickým přístupem ukazují, že postoj žáků k tomuto způsobu vyučování je velmi ovlivněn

- jejich vlastním způsobem učení se
- jejich předchozími zkušenostmi s matematikou
- důvěrou k vyučujícímu.

Velmi pozitivně přijímají objevování žáci s dobrým logickým myšlením, ti co se neradi učí něco zpaměti, co rádi přemýšlejí a vymýšlejí, tvořiví, hodně nadaní, kteří při tradiční frontální výuce nemohou svůj talent uplatnit, natož rozvíjet.

Překvapivě dobře přijímají výuku i „zlobiví“ žáci, kterým činí potíže v klidu sedět a sledovat výklad. Pro ilustraci jedna situace z problémové třídy[12]. Při jedné z „objevovacích“ hodin jsem zaregistrovala, že jedna dívka opět píše psaníčko (dříve činnost hodně rozšířená). Moc mě překvapilo, že mi dívka psaníčko věnovala. Stálo v něm: „*Hurá! Další hodina bádání, ta mou nudu zaručeně zahání. A nahání mě k lepším výkonům.*“

---

[11] Do students have to be prepared for this way of teaching, too, and how? In our opinion, teachers often expect that their students will accept taking more responsibility for their learning immediately when all their previous learning has been through transitive teaching strategies. When this does not happen, the teachers tend to revert to the transmissive teaching again.

[12] Třída na gymnáziu, kde je třetina žáků s poruchami učení, několik z nich hyperaktivních, dlouhodobě špatné vztahy mezi spolužáky, řešeno ve spolupráci s psycholožkou. Konstruktivistický způsob začali pozitivně přijímat velmi brzy. Poměrně silný vliv na třídu mají dva chlapci s výrazným nadáním na matematiku. Ty objevování přímo nadchlo, komunikace s nimi, a tím i se třídou, je teď mnohem lepší než dříve. Stav ve třídě se v žádném případě nedá nazvat ideální, ale většina hodin matematiky má dobrou pracovní atmosféru.

Spokojení jsou i žáci méně nadaní, ale jen v případě, že už mají s objevováním nějakou dobrou zkušenost a vědí, že je učitel nenechá dlouho v nejistotě a že v případě bezradnosti pomůže buď on návodnou úlohou, nebo spolužáci radou. Musí mít také zkušenost s tím, že chyba není trestána ani zesměšňována.

Problematicky přijímají konstruktivismus žáci „učiví", kteří jsou zvyklí být vždy vzorně připraveni na hodiny, ve všem mají rádi systém a řád. Vyhovuje jim jistota, že když se naučí předepsanou látku, budou úspěšní. Ti jsou při bádání velmi nespokojení, mnohdy se i důrazně dožadují změny způsobu výuky. Nejčastěji požadují vzorové příklady, podle kterých se naučí úlohy řešit. Domnívám se, že jednou z hlavních příčin jejich odmítání je, že jsou zvyklí být úspěšní, mít jedničky, proto jsou přesvědčeni, že matematiku umí. Při konstruktivistickém pojetí výuky se však velmi brzy odhalí, že některé poznatky jsou pouze formální, nepodložené pochopením. To může být pro mnohé žáky velmi bolestné a zraňující, proto se brání.

Další problémovou skupinou jsou žáci, kterým se nechce při hodinách nic dělat, ti se snaží práci jen předstírat. Ve skutečnosti sami nic neobjeví, jen čekají na výsledky od ostatních. Pro ně pak je takováto výuka značně neefektivní. Pro ně je nepříjemné, že jsou většinou okolnostmi nuceni i přes jejich nechuť se do činnosti zapojit.

Důvěra k vyučujícímu zde není na okraji poznávacího procesu, ale podle mého názoru je přímo klíčová. Při objevování, hlavně z počátku, se žáci poměrně často dostávají do nezvyklé situace, do nejistoty, nevyhnou se chybám. Pokud nemají jistotu v postoji učitele, právě ve vztahu k chybě, nemohou objevování přijímat pozitivně.

- <u>Rodiče:</u>

Ve třídách vedených od začátku konstruktivisticky jsou rodiče spokojeni, nikdy jsem se nesetkala s kritikou, spíš naopak – chválili vztah jejich dětí k matematice a s radostí později oznamovali, jak si jejich děti dobře vedou na vysokých školách. Velmi problematická je reakce rodičů ve třídách vedených několik let transmisivním způsobem. Samozřejmě to souvisí s adaptací dítěte na jiný způsob výuky, hlavně se spokojeností dítěte. Někteří rodiče jsou velmi spokojeni, jiní zase velmi důrazně žádají změnu způsobu výuky. Argumentují převážně svými vlastními zkušenostmi ze školy, opět se ozývá volání po vzorových příkladech.

Maminka dívky zvyklé se učit látku dopředu, šla ve své nespokojenosti tak daleko, že žádala vedení školy o změnu vyučující. Vyučující byla mladá kolegyně, která se touto žádostí dostala do svízelné situace na škole. Bohužel v té chvíli ještě neměla vybudovanou důvěru ani u vedení školy, ani u kolegů, ani u žáků, kterým konstruktivizmus nevyhovuje (uvedeno výše).

Spokojenost jednoho tatínka (technika), který se přišel podívat na hodinu matematiky, byla jen slabou náplastí.

Kolegové:

Podobně různorodě, jako rodiče a žáci, přijímají konstruktivizmus i kolegové. Velmi pozitivně reagují kolegové, kteří nad svými žáky a účinností své výuky často přemýšlejí. Ti často potvrzují podobné zkušenosti a inspirují se dalšími náměty pro zkvalitnění výuky. Naopak ne příliš příjemně reagují kolegové, kteří se cítí ohroženi například tím, že se žáci vedení konstruktivisticky většinou matematiky nebojí, dokonce je matematika baví, mají v ní lepší výsledky. Vedení školy důrazněji hlídá soulad s osnovami a učebními plány. Stává se i to, že někteří kolegové „pomáhají" vedení školy soulad s učebními plány hlídat.

Byla jsem mile překvapena, když velmi pozitivně tuto výuku hodnotila inspekce. Především vysoce hodnotila aktivitu žáků, komunikaci jak žáků mezi sebou, tak s učitelem, tvoření otázek, vhled žáků do problematiky.

Co jsem ve výuce změnila

Zkušenosti nezískáváme skokem, ale postupně. I analýzy zkušeností a důsledky z nich plynoucí, vstupují do vědomí člověka postupně. Chceme-li tedy mluvit o změně, musíme vzít dva časově vzdálenější úseky a tyto vzájemně porovnat. V následujících řádcích se o to částečně pokusím.

Zjistila jsem, že při přípravě výuky i při hodinách využívám své zkušenosti popsané v předchozích odstavcích, a to zcela podvědomě a bez jakéhokoliv úsilí.

Při přípravě úlohy pro objevování pečlivě zvažuji předchozí zkušenosti žáků, abych zajistila možnost úspěšného startu pokud možno pro každého žáka. Při formulování úkolů se snažím respektovat cestu od izolovaných modelů přes generický model k abstraktnímu poznatku. Pro nadané žáky se snažím vytvořit situace, které vedou ke zobecnění.

Jako konkrétní příklad změny mohu uvést výuku zlomků ve třídě sekunda v listopadu 2005. Zlomky jsem dříve učila v letech 1992, 1999 a 2000.

V roce 1992 jsem postupovala téměř klasickou cestou s tím, že výklad nebyl pouhým sdělením a vysvětlením pojmů, ale snažila jsem se aktivizovat žáky otázkami, oživovat hodiny různými činnostmi, intuitivně jsem usilovala o to, aby si každý žák došel k pojmům vlastní cestou.

V roce 1999 jsem posílila činnostní pojetí, žáci hodně modelovali, každý pracoval s vlastními modely podle vlastního výběru. Změnila jsem pojetí výuky v tom smyslu, že jsem přešla od modelu:

žáky dovést k pojmu → pojem procvičit,

k modelu:

zadat problém → jeho vyřešením dojít k pojmu.

Bylo to ve třídě, kde jsem učila druhým rokem a žáci byli na tento způsob výuky zvyklí, práce se nám dařila. Možná, že by se tento způsob výuky mohl nazvat pre-konstruktivistický.

V roce 2000 jsem se snažila učit zlomky stejným, pro mne osvědčeným způsobem, i v další třídě, ale tam se práce tak pěkně nedařila. Příčinu jsem neviděla ve způsobu výuky daného tématu, ale v atmosféře třídy, podle Brousseau v didaktickém kontraktu[13]. V této třídě jsem dříve neučila, žáci byli navyklí na instruktivní vedení, na frontální práci. Při výuce zlomků se teprve seznamovali s „objevováním" a s formou skupinové práce, tím byla situace složitější. Žáci nadaní na matematiku i tvořiví žáci byli nadšeni. Ne všichni žáci však přijímali změnu pozitivně. Někteří si zprvu v nové situaci nevěděli rady, obávali se, že sami nic nemohou vymyslet. Musela jsem se víc zaměřovat na zvládnutí „pracovní kázně". Nejistí žáci se často snažili jen simulovat činnost, ale v podstatě jen čekali, až někdo něco objeví, aby pak poznatek mohli reprodukovat.

Další faktor, který ovlivňoval práci, byl ve špatných vztazích mezi spolužáky ve třídě. Ve třídě vládli silní jednotlivci, kteří dávali najevo nadřazenost a slabší žáci měli obavu z chyby, aby se nezesměšnili. Domnívala jsem se, že právě tyto projevy jsou důsledkem instruktivního způsobu vyučování obecně. Až s časovým odstupem a s dalšími zkušenostmi jsem pochopila, že konstruktivistické pojetí je třeba budovat postupně a že je třeba vytvořit pozitivní prostředí ve skupině nejen z hlediska matematiky.

Teprve po podrobných analýzách při uvedených experimentech jsem si uvědomila, že by situaci pomohlo, kdybych úkoly formulovala lépe i v úlohách na objevování ohledně zlomků, hlavně z pohledu uchopitelnosti úlohy pro každého žáka. Ne vždy se mi podařilo dát dostatečný prostor izolovaným modelům. Někdy jsem příliš brzy nechala ukázat správné řešení, důsledně jsem nevedla žáky k sebekontrole. Také si uvědomuji, že teď víc pozoruji projevy žáků a jsem schopna na ně reagovat.

[13] Didaktický kontrakt jsou psaná i nepsaná pravidla pro vztahy mezi učitelem a žákem, určují jejich roli a jejich očekávání. Žák předpokládá, že učitel vše správně vysvětluje. Učitel učí a očekává, že žák bude schopen nové situaci naučené vědomost použít k řešení problému.(Brousseau, 1998)

V roce 2005 jsem se snažila využít zkušenosti z analýz jak kognitivních, tak i sociálních. Opět se jednalo o třídu, ve které jsem teprve v sekundě začala vyučovat matematiku, odmítavé postoje se tam už nevyskytly.

Z hlediska kognitivního jsem výuku připravila v konstruktivistickém pojetí. Začali jsme modelováním zlomků, z modelů žáci sami odvodili pojem smíšeného čísla, krácení zlomků, převedení zlomků na desetinné číslo. To vše postupně vyplynulo z pozorování žáků a z jejich vlastních objevů. Společně jsme jen pojmy pojmenovali.

Při zadávání činností jsem se snažila sledovat historickou paralelu, proto jsme výpočty se zlomky začali přes kmenové zlomky staroegyptským počítáním s využitím zlomkové zdi. Žáci tak sami objevili mechanismus převodu na společného jmenovatele. Při tomto způsobu práce zcela přirozeně žáci postupovali podle svého tempa, podle své úrovně schopností a znalostí. Domnívám se, že se tak zároveň řeší i problém diferencované výuky pro žáky s rozdílnou úrovní znalostí. V současné době jsou stále častěji vedle sebe žáci, kteří učivo slyší poprvé ve škole, se žáky kteří látku už znají odjinud.

Změny v pojetí výuky přicházely postupně v důsledku:

- Zkušeností s dětmi ve třídě
- Zkušeností ze setkání s odborníky na konferencích a seminářích
- Zkušeností z pracovních dílen pro učitele, z diskusí s učiteli
- Zkušeností z analýz žákovských řešení
- Zkušeností při psaní této práce, především z konzultací se školitelem a ze sebereflexí

Věřím, že zkušenosti, které jsem na cestě ke konstruktivistickým přístupům získala, přinesou užitek především mým žákům při hodinách matematiky. Domnívám se, že by se mohly stát i dobrou inspirací při hledání cest dalšího vzdělávání učitelů.

Literatura

Bachelová, Z. (1992): Sbírka úloh a námětů pro práci s matematickými talenty na ZŠ, nakladatelství neuvedeno

Brousseau, G. (1998): La théorie des situations didactiques et ses aplications, Cours donné à Montréal pour l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal.

Brousseau, G. (1998): *Théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage, Grenoble

Bušek, I. a kol. (1992): Sbírka úloh z matematiky pro 8. ročník ZŠ, SPN, Praha

Bušek, I. a kol. (1995): Matematika 9 – 2. díl, SPN, Praha

Devlin, K. (2002): Jazyk matematiky, Argo a Dokořán, Praha

Dienes, Z. P. (1960): Building up mathematics, Hutchinson Edcational, London

Dubinsky, E. (1991): Reflective abstraction in mathematical thinking. In D.O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95--123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Elliott, J. (1981): Action-research. A framework for self-evaluation in schools. TIQL-Working Paper No. 1., Institute of Education, Cambrige

Gray, E.M., Tall, D.O. (1994): Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 115-141

Hanušová, J. (2002): Objevování vzorce pro povrch válce. In: Dva dny s didaktikou matematiky, s.24 – 28, Praha

Hanušová, J. (2004): Objevování vzorce pro povrch válce. In. Učitel matematiky, s. 90 – 100, JČMF, Praha

Hanušová, J. (2005): De l'autorité magistrale au développement de l'individualité et interaction sociale/ étude de l'enseignement/apprentisage d'un calcul d'aire au college en République Tchèque. In : CIEAEM 57 PROCEEDINGS, s. 103 – 108, Italy

Hanušová, J. (2005): Zkušenosti s konstruktivistickými přístupy k vyučování goniometrických funkcí. In: Jak učit matematice žáky ve věku 11 – 15 let, s. 63 – 73, Vydavatelský servis, Plzeň

Hanušová, J. (2006). L'étude de l'enseignement/apprentisage des fonctions trigonometriques au college en republique Tchèque. In : CIEAEM 58 PROCEEDINGS, s.114 – 119, Fraus, Plzeň

Hejný, M. – Stehlíková, N. (1999): Číselné představy dětí, PedF UK, Praha

Hejný, M. a kol. (1990): Teória vyučovania matematiky 2, SPN, Bratislava

Hejný, M. – Jirotková, D (1999): Čtverečkovaný papír jako most mezi geometrií a aritmetikou, UK PF, Praha

Hejný, M. (1999): Procept, In: Zborník bratislavského seminára z teórie vyučovnia matematiky s.40-61, KZaDM, Bratislava

Hejný, M. – Kuřina, F. (2001): Dítě, škola a matematika, Portál, Praha

Hejný, M. – Michalcová, A. (2001): Skúmanie matematického riešiteľského postupu, Metodické centrum, Bratislava

Hejný, M.; Jirotková D. (2004): Svět aritmetiky a svět geometrie. In: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, s. 125, PedF UK, Praha

Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (2004): Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, PedF UK, Praha

Hejný, M. (2005): Rozmanitost řešení žáků jako diagnostický nástroj edukačního stylu, In: Zborník príspevkov z letnej školy z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2005, P-MAT, n.o., Bratislava

Herman, J. a kol. (1996): Kruhy a válce, Prometheus, Praha

Herman, J. a kol. (2000): Podobnost a funkce úhlu, Prometheus, Praha

Hershkowitz, R., Schwarz, B., Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, **32**(2), 195--222.

Hiebert, J., Lefevre, P. (1986): Conceptual and procedural knowledge in mathematics. An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1--27). Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

Janík, T. (2004): Akční výzkum jako cesta ke zkvalitňování pedagogické praxe. In: Maňák, J.; Švec, V: Cesty pedagogického výzkumu, Paido, Brno

Kaput, J. (1982): Differential effects on the symbol system of arithmetic and geometry on the inerpretation of algebric symbols. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York, April 1982

Kratochvíl, Z. (1993): Mýtus, filosofie, věda I a II, Hrnčířství a nakladatelství Michal Jůza & Eva Jůzová, Praha

Kuřina, F. – Hávová, J.(1991). Matematika pro 9. ročník základní školy

Kuřina, F.(2002): O matematice a jejím vyučování. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, 2002, roč. 31, č. 1, s. 1-8.

Mareš, J. (1998): Styly učení žáků a studentů, Portál, Praha

Mönks, F., J., Ypenburg, I., H. (2002): Nadané dítě, GRADA Publishing, Praha

Nezvalová, D. (2002): Akčním výzkumem k zlepšení kvality školy http://epedagog.upol.cz/eped4.2002/index.htm,19.2.2007

Nezvalová, D. (2003): Akční výzkum ve škole, Pedagogika, roč. 53, č. 3, s. 300 – 308

Průcha, J.; Walterová, E.; Mareš, J. (2003): Pedagogický slovník, Portál, Praha

Sfard, A. (1989): Transition from operational to structural conception: The notion of funktion revisited. In: G. Vergnoud, J. Rogalski, and M. artigue (Eds.): Proceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, s. 151 – 158, Paris, France

Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. **22**, 1--36.

Spilková, V., a kol. (2004). Současné proměny vzdělávání učitelů, Paido, Brno

Stehlíková, N. (2000): Analýza písemného řešení žáka, jedna z možných technologií. In: J. Novotná, *Analýza řešení slovních úloh* (s. 98--117). Praha: PedF UK.

Stehlíková, N. (2004): *Structural understanding in advanced mathematical thinking*, PedF UK, Praha

Stehlíková, N. (2006). Constructivist approaches to the teaching of mathematics open ways to creative education (If used properly!). *Department of Mathematics Report Series.* 2006, vol. 14, s. 14-23.

Stehlíková, N. (2007): What constitutes a good practice in teaching mathematics, a personal perspective. Plenární přednáška na konferenci *CERME 5*, 22.-26.2.2007, Kypr.

Šarounová, A: a kol. (2000). Matematika 9 – 2. díl, Prometheus, Praha

Šedivý, O. a kol. (1991): Matematika 8 – 2.díl, SPN, Praha

P ř í l o h y

Příloha 2.1.1a

Experiment Kostková tělesa – testovací list

Testovací list

Kostky

Pohlaví : .... *Třída :* .... *Datum :* ....

Známky z matematiky : .... *(poslední 2 známky na vysvědčení)*

1. *Nakreslete pohled zepředu, shora a zleva na "kostkové" těleso, které uvidíte.*

2. *Na obrázku jsou tři pohledy na stejnou krychli. Na stěnách jsou písmena A, B, C, D, E a F. Které písmeno je na protější stěně ke stěně označené písmenem E ?*

3. *Máš krychli sestavenou z 27 stejných kostek. Přidám ti jednu takovou kostku. Kolik kostek ještě potřebuješ, abys mohl těleso doplnit opět do tvaru krychle ?*

Příloha 2.1.1b

Experiment Kostková tělesa – pokyny pro zadávající učitele

Pokyny pro zadávající učitele

1. *Sestavte kostkové těleso podle schematu (čísla ve čtvercích znamenají umístění kostek v "poschodí")*

1	1,2	1,2	1, 2,3
			1,2
			1

2. *Žákům rozdejte testovací listy a nechte vyplnit záhlaví.*

3. *Ukažte žákům sestavené kostkové těleso tak, aby si je mohli všichni žáci dobře prohlédnout, potom těleso zbořte a nechte žáky pracovat.*

   Čas na řešení první úlohy je asi 5 minut.

4. *Druhá úloha je bez komentáře - čas řešení 2 - 3 minuty.*

5. *Během řešení prvních dvou úloh sestavte krychli z 27 kostek a přidejte 1 kostku. Po uplynutí doby řešení prvních dvou úloh upozorněte žáky na sestavené těleso, které budou mít po celou dobu řešení třetí úlohy před očima.*

   Čas řešení 5 - 7 minut.

6. *Po odevzdání vypracovaných testů si mohou žáci vyzkoušet dostavět krychli z kostek.*

Příloha 2.2.1

Text úlohy Žravá koza Serafína

Žravá koza Serafina

Každý rok, hned jak začaly prázdniny, přijel Míša s rodiči na vesnici k babičce. Jezdil sem strašně rád, neboť tu bylo všechno jiné, než u nich v Praze. Babička bydlela v dřevěné chaloupce na horním konci vesnice a hned za domem začínaly louky a pole. Babička měla za domem velkou zahradu a kromě toho chovala králíky, slepice a prasátko i kozu Serafínu. Míša rád pomáhal babičce krmit a opatrovat celý ten zvěřinec, ale ze všeho nejraději chodíval pást Serafínu na louky za dědinou. Věděl, že se tam potká s ostatními kamarády a že zas budou vyvádět rošťárny. Posledně se jeden z nich převlékl za strašáka a postavil se do pole. Když tudy šly ženy z malin, vyřítil se na ně a tak je polekal, že všechny pustily konve s malinami a s pískotem utekly do vesnice. Kluci se dlouho váleli smíchem po zemi a všechny maliny samozřejmě snědli. I Míša se jich tenkrát přejedl, ale když se vrátil na louku, zjistil, že Serafína zmizela. Trvalo mu velmi dlouho, než ji našel v hustém křoví u potoka. Tehdy se rozhodl, že ji bude muset přivazovat.

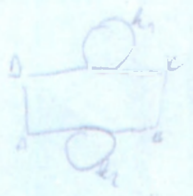
Nazítří ráno si vzal kus provazu a na konec vyřezal z větve kolík. Ten zabodl do země a k němu Serafínu přivázal. Pak mu už nic nebránilo utéci za chlapci, kteří už zase kuli nějaké pikle. Když se před obědem vrátil pro Serafínu, našel ji bezradně stát u kolíku. Ve vysoké trávě bylo přesně vidět, kde si Serafína pochutnávala. Vykousala trávu všude tam, kam dosáhla. Nakreslete tento útvar.

Míša kozu rychle odvázal a utíkal s ní domů, kde je babička čekala s obědem. Míša byl rád, že vymyslel způsob, jak kozu pást a zároveň s ostatními chlapci běhat po kopcích a loukách.

Jenže radost netrvala dlouho. Louku brzy pokosili a Serafínu bylo třeba pást na úzkém pásu louky, ohraničeném z obou stran kukuřicí. Tady Míša nemohl použít osvědčenou metodu přivazování Serafíny ke kolíku, když nechtěl, aby Serafína dosáhla na kukuřici, musel by jí dát malý provaz, ale tím by za chvíli sežrala všechno, kam by dosáhla a pak by se velmi hlučně začala dožadovat další stravy. Míša by musel každou chvilku kolík posunovat a vůbec by se namohl od kozy vzdálit. To mu však nebylo vůbec po chuti a tak začal spekulovat, zda by se to s tím kolíkem a provazem nedalo udělat nějak jinak. A protože chodil do matematického kroužku, skutečně vymyslel způsob, jak dopřát Serafíně travičku,(ne však kukuřici) a sobě volnost. Víte, jak to vymyslel? Pomůcka: udělal si ještě jeden kolík a přinesl si ještě jeden kus provazu. Víte jak přesně vypadala plocha, ze které Serafína vyžrala trávu?

Příloha 2.6.1

Experiment V2 – řešení 1.skupiny



$k_1 = k_2$

$r = 3\,cm$

$l = 18{,}85\,cm$

$|AB| = 18{,}85\,cm$

$|BC| = v = 6\,cm$

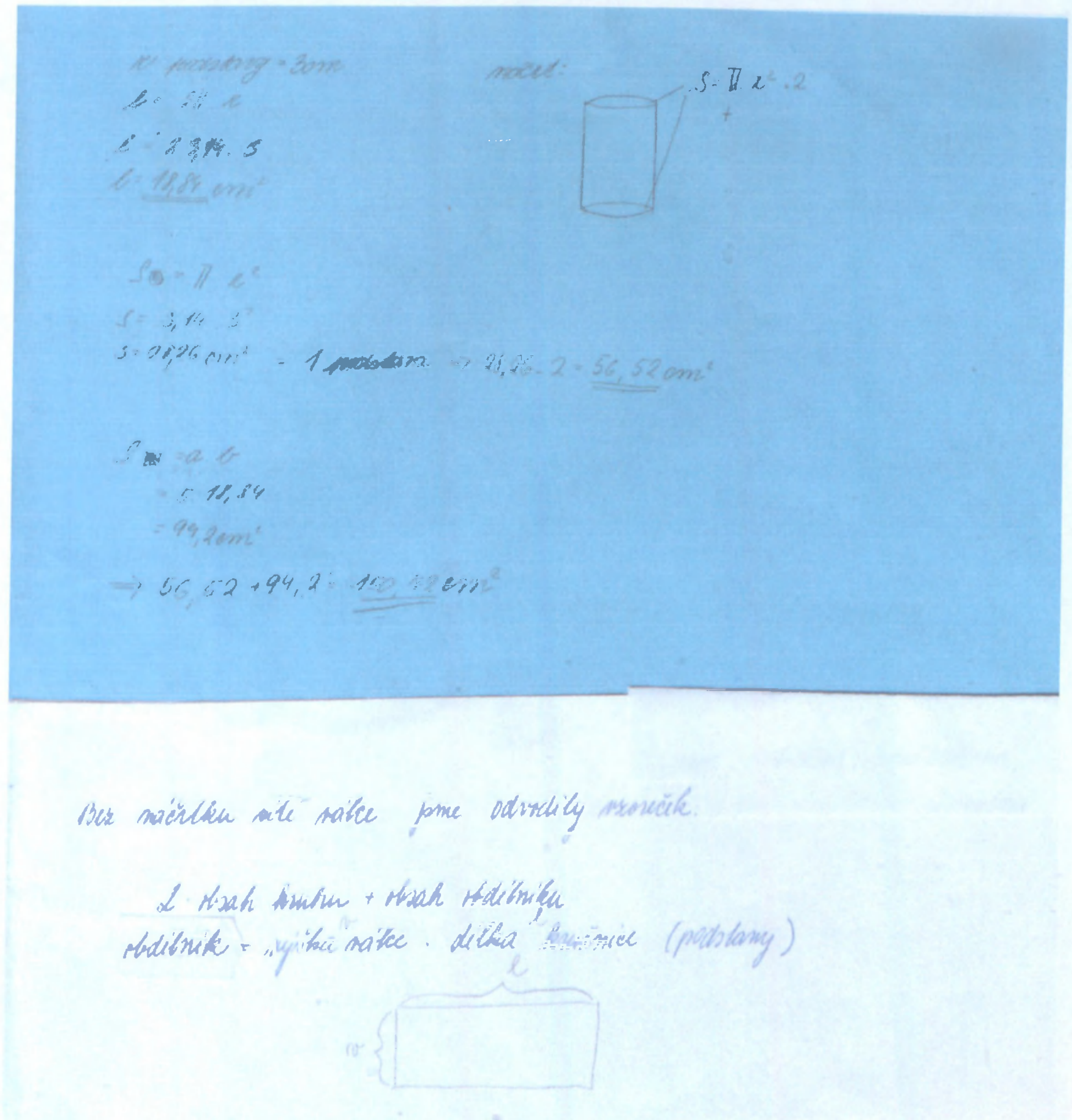
$S = 2$ (obsah kruhu) + obsah obdélníku ABCD

$$S = 2 \cdot (\pi r^2) + \underset{\underset{2\pi r}{\parallel}}{l}\, v = 2\pi r^2 + 2\pi r v$$

$$S = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 6 = 56{,}54867 + 113{,}097 = \underline{\underline{169{,}646\,cm^2}}$$

Příloha 2.6.2

Experiment V2 – řešení 2.skupiny

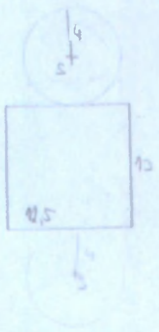


Příloha 2.6.3

Experiment V2 – řešení 6.skupiny

Jiří Pavel vymyslel :

kruh $r = 4cm$



$l = \cancel{\pi} . r$

$l = 12,6 cm$

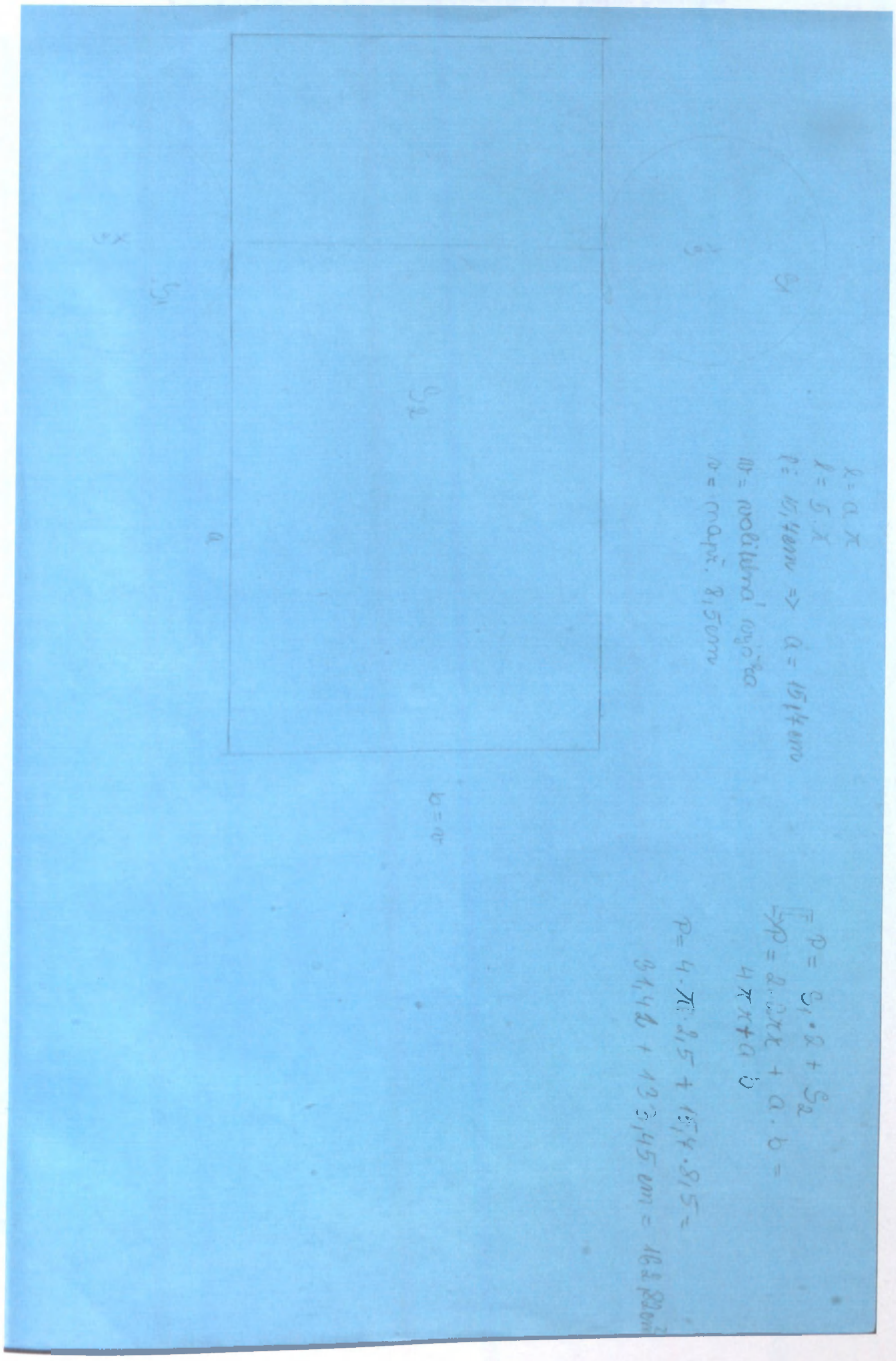
$l = 4 . \pi$

Špatně jsem spočítal obvod, protože mi lidi nekontrolovali. (Vojta a Franta počítali a Vlachovský se jen díval.)

vzorec povrchu $\cancel{[(\pi . d) \times 2] + (\pi . d) . v}$

$[(\pi r^2) . 2] + (\pi . d) . v$

Příloha 2.6.4
Experiment V2 – řešení 8.skupiny – modrý papír



Příloha 2.6.5

Experiment V2 – řešení 8.skupiny – popis postupu

Povrch válce vypočítáme tak, že spočítáme obsah dvou kruhů a sečteme to s obsahem obdélníku.

náš vzoreček

$P = S_1 \cdot 2 + S_2$

$P = 2 \cdot 2\pi r + a \cdot b$

$4\pi r + a \cdot b$

Průměr kruhu za kterého jsem si vzala poloměr. S tím jsem vypočítala délku kružnice a podle toho jsem narýsovala jednu stranu obdélníku. Výška je libovolná.

Příloha 2.7.1

Experiment V2 – fotografie 1 – 6

Fotografie č 1

Fotografie č 2

Fotografie č 3

Fotografie č 4

Fotografie č 5

Fotografie č 6

Příloha 2.7.2

Experiment V2 – fotografie 7 – 9

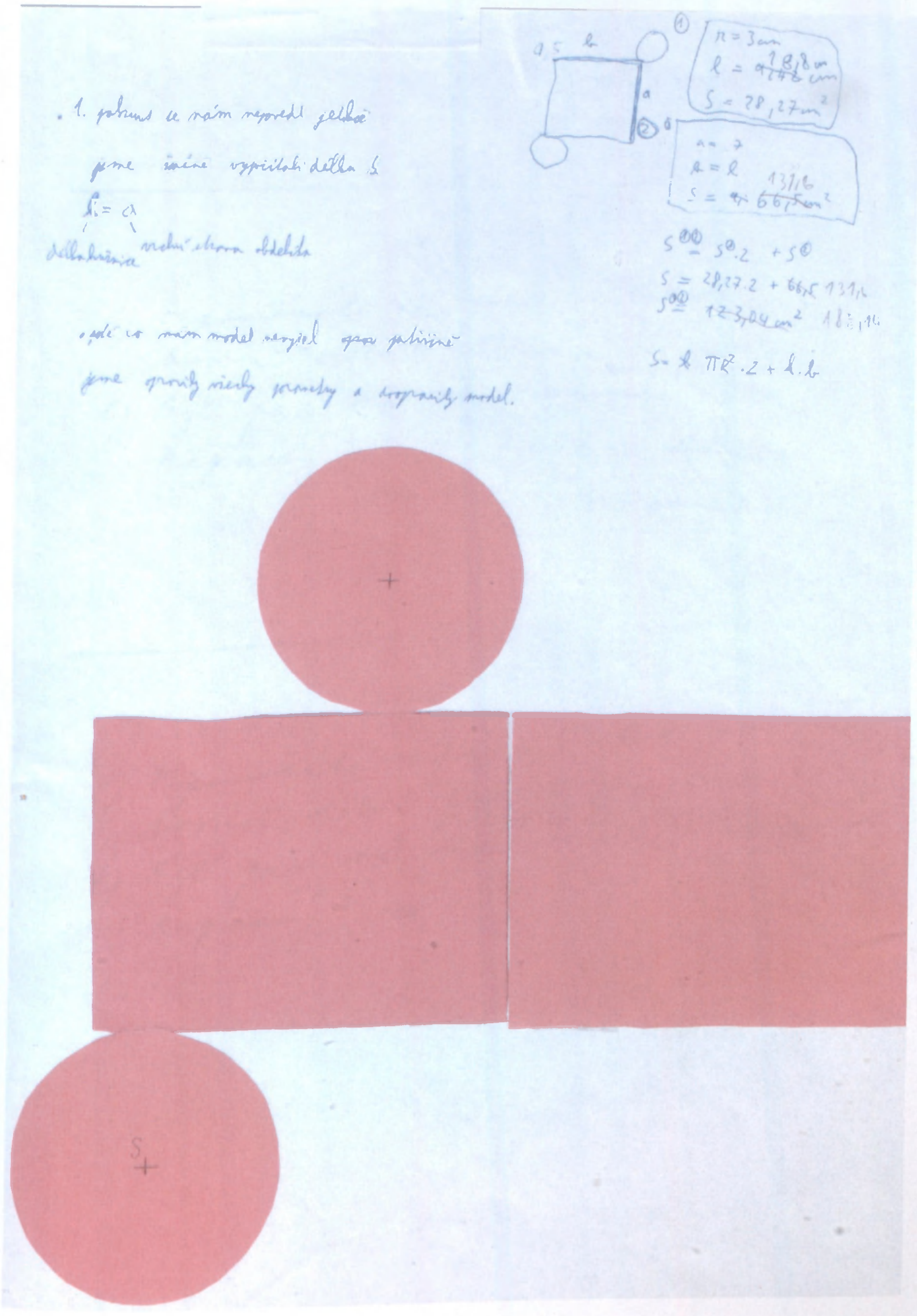
Fotografie č 7

Fotografie č 8

Fotografie č 9

Příloha 2.7.3

Experiment V2 – řešení 4.skupiny



Příloha 2.7.4

Experiment V2 – dodatečné rozhovory 4.skupina

1) Vzpomínáte si, co se v šesté hodině dělo? [illegible]

2) Byl pro vás objev vzorce zajímavý? [illegible]

---

1) Vzpomínáte si, co se v šesté hodině dělo? Objevovali jsme vzorec pro výpočet povrchu válce $\rightarrow 2\cdot\pi r^2 + 2\pi r\cdot v$

2) Byl pro vás objev vzorce zajímavý? Ano

Příloha 2.7.5a

Experiment V2 – dodatečné rozhovory 6.skupina (Ota a Havel)

6

1) Vzpomínáte si, jak probíhalo objevování vzorce ve vaší skupině?

2) Jakou činnost byste volili raději, abyste se zapojili aktivně do práce?

3) Vzpomínáte si na nějaký váš osobní „objev" v matematice, při kterém jste prožili pocit radosti?

1) nejdříve jsme si vyzkoušeli příklady

2) počítání v příkladech

3) na to jak jsme vypočítali [illegible], ale jak dlouho čerpadla vyčerpají a za kolik [illegible] do nádrže 4 [illegible]

1) Věděli jsme vzorec na výpočet obsahu kruhu (odhadem) (až podstavy) a poté spočítali obsah čtverce, výsledek . délka strany kruhu. Podstava musí být 2x

3) Když v matematice na rozložení na součin

2) Počítání příkladů

Příloha 2.7.5b

Experiment V2 – dodatečné rozhovory 6.skupina (Tonda a Olda)

1) Věděli jsme vzorec na vypočítání kruhu, a protože jsou tři základy vynásobili jsme to třema a pak jsme ~~stranu~~ násobili počítali prostředek pak to vyšlo správně, protože nejdříve jsme to počítali nejdříve podle sítě

2) ano, ale raději bych to chodil na přednášce

3) ~~ano~~ ano, matematika - koza Serafína

1, Nejdříve jsme si vypočítali základny, protože jsme věděli vzorec. A pak si spočítali čtverec => (byl zvolen) celá výška

3, koza Serafína

~~2~~ 2)

Příloha 2.7.6

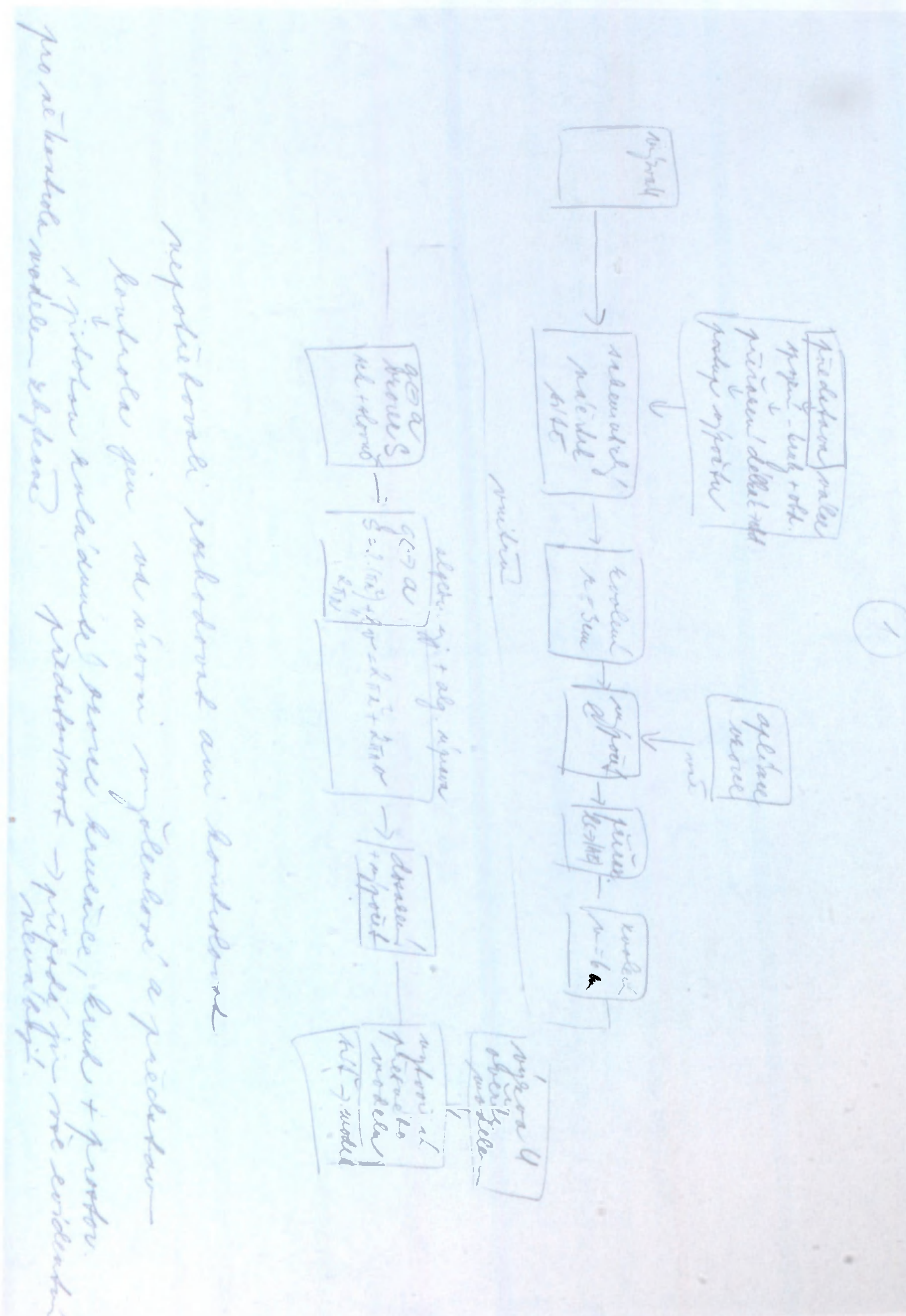
Případ Ester

Ester je jediné dítě ambiciózních rodičů, ekonomicky úspěšných, ale pouze se základním vzděláním. Rodiče se v dívce vidí a snaží se, aby byla ve všech směrech i ona úspěšná. Ve škole jim jde o známky, nikoli o vzdělání dívky. Do pátého ročníku byla Ester úspěšná žákyně, ale od primy osmiletého gymnázia se její prospěch zhoršoval. V tercii již patřila k nejslabším žákům třídy. Stupňující se tlak rodičů, kteří byli přesvědčeni, že známka je výsledkem píle, vháněl dívku do psychicky složité situace. Svoje nedostatky v oblasti intelektuální se snažila kompenzovat v oblasti sociální projevováním nadřazenosti nad dívkami třídy jak v oblasti materiální (rodiče ji všechno dopřáli), tak v oblasti dívčí konkurence (Ester je velice pěkná dívka). To pochopitelně vyvolalo značný odpor u spolužákyň, které ji vyloučily ze svého kolektivu. Navíc se u dívky objevila bulimie, což pravděpodobně souviselo i s nestabilitou rodinného zázemí. Přes to se v osudu dívky objevil velice pozitivní prvek. Zamilovala se do staršího chlapce, který byť neodpovídal představám dívek tohoto věku pokud jde o vnější ukazatele, měl jasné životní perspektivy a pevný hodnotový systém a dokázal vnést řád do destabilizované psychiky Ester. Studoval ekonomii a snažil se pomoci Ester překonat její špatné školní výsledky.

V septimě v prvním týdnu školního roku, aniž bych si toho v daném okamžiku byla plně vědoma, jsem vstoupila významným způsobem do intelektuálního vývoje dívky. Její třída odjela na sportovní kurz, ale Ester zůstala ve škole. Byla jsem pověřena, abych po tuto dobu dívku ve škole zaměstnala. Rozhodla jsem se dát jí vypracovat projekt orientovaný na statistiku. Práce ji plně zaujala. Její hoch jí zapůjčil skripta z VŠE o statistice. Z těchto skript byla schopna sama si nějaké části nastudovat, a to ji velice překvapilo. Vytvořila velmi pěkný projekt, který jsem pak mohla po právu ve třídě vysoko ohodnotit. Ester najednou pochopila, že to, co jsem jí již dlouho opakovala – že totiž její neúspěch není dán „hloupostí“ – ale špatným způsobem učení se, je skutečnost. Zlom v jejím chování a v sebedůvěře byl skoro neuvěřitelný. Zřejmě pod vlivem svého hocha se z jejího chování vytratila pozice nadřazenosti, stala se pokornější a tvrdě na sobě pracovala. Její změnu ale okolí neakceptovalo ihned. Věřila mi, když jsem ji povzbuzovala, aby se nenechala odradit setrvačností chování některých učitelů a spolužáků, a aby dále na sobě systematicky pracovala a zůstala v poloze pokory. Postupně se zlepšila téměř ve všech předmětech. Zásadně se změnil její postoj k matematice. Ochotně řešila úlohy, které jsem jí dávala pro zaplnění mezer z minula. S velikou radostí jsem evidovala, že dřívější otázky dívky „jak to mám počítat?“ byly najednou vystřídány otázkami „proč je to tak?“ Pomoc jejího hocha zde sehrála jistě zásadní roli. Začala si věřit, její porozumění pojmům i vztahům postupně narůstalo. Maturovala s vyznamenáním a šla studovat na VŠ s ekonomickým zaměřením.

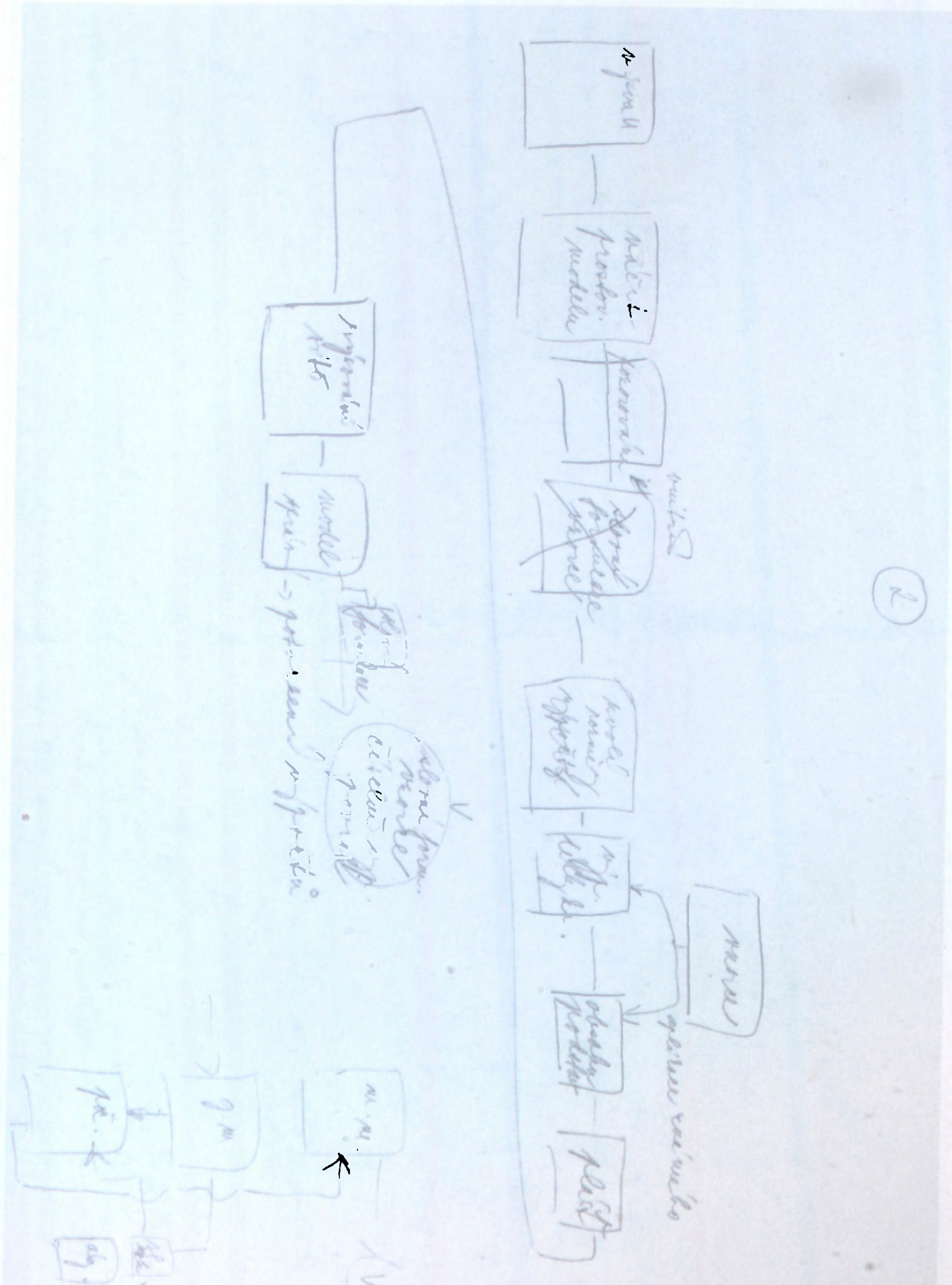
Příloha 2.8.1a

Experiment V2 – diagram 1.skupiny



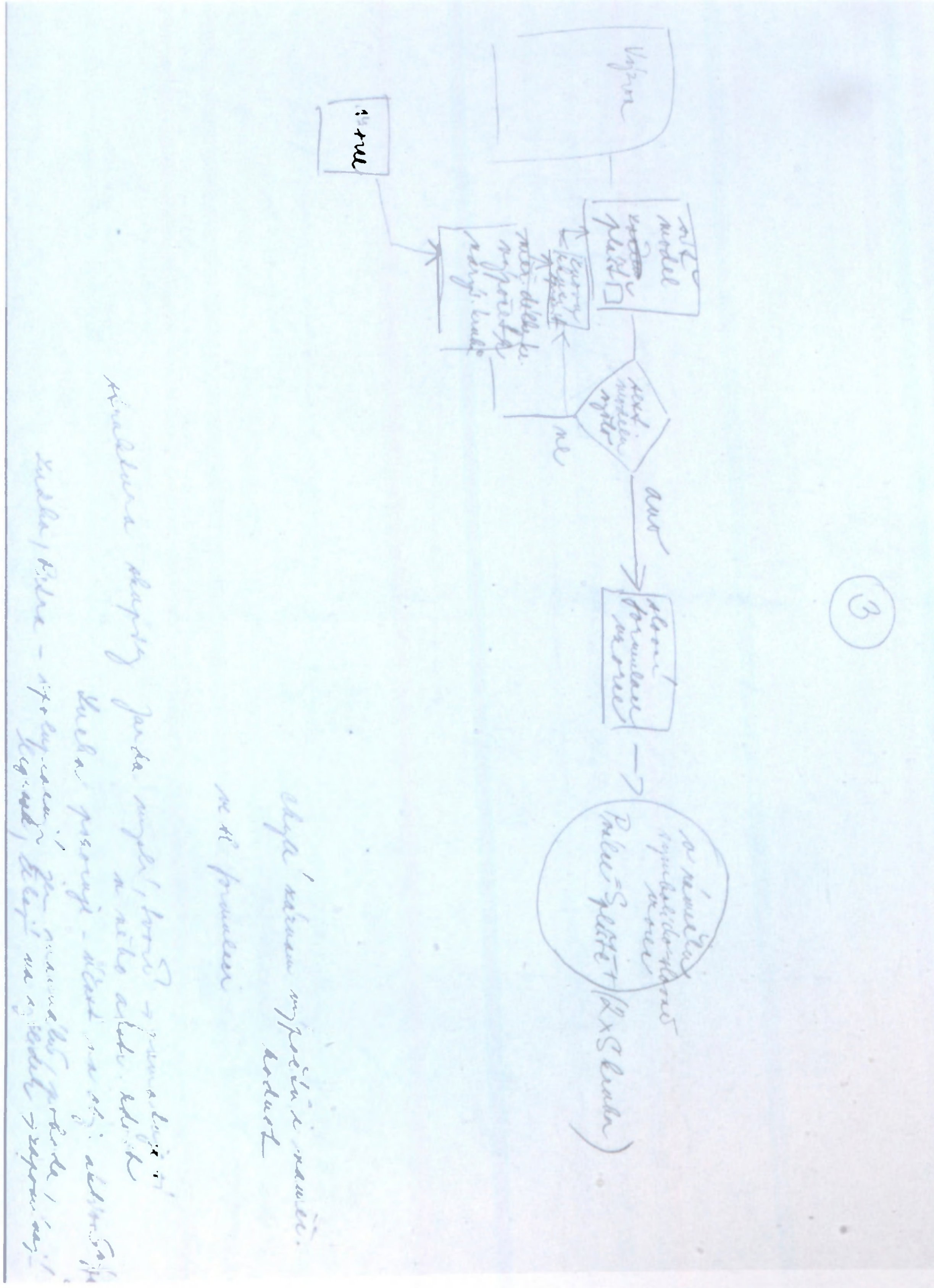
Příloha 2.8.1b

Experiment V2 – diagram 2.skupiny



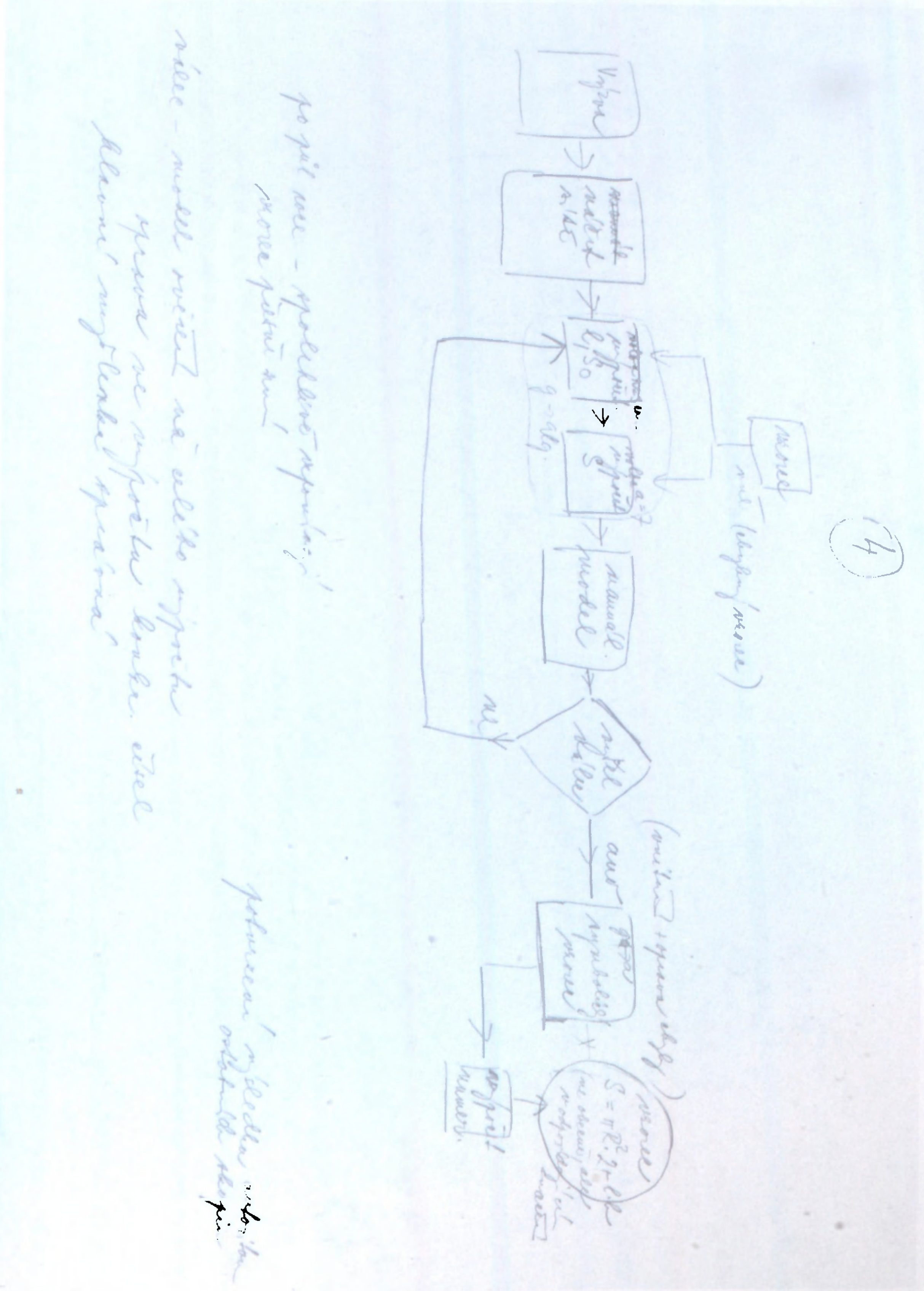
Příloha 2.8.1c

Experiment V2 – diagram 3.skupiny



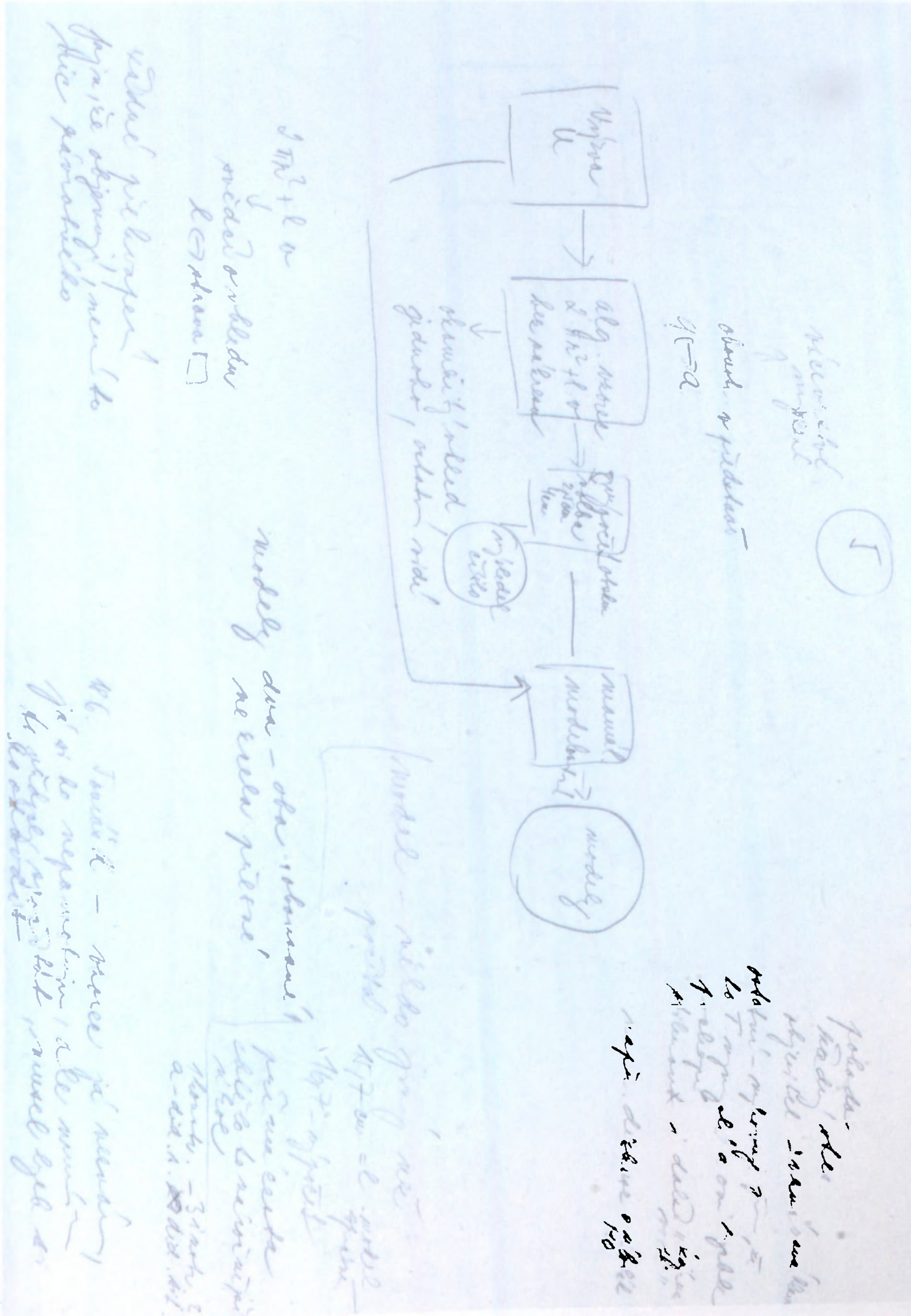
Příloha 2.8.1d

Experiment V2 – diagram 4.skupiny



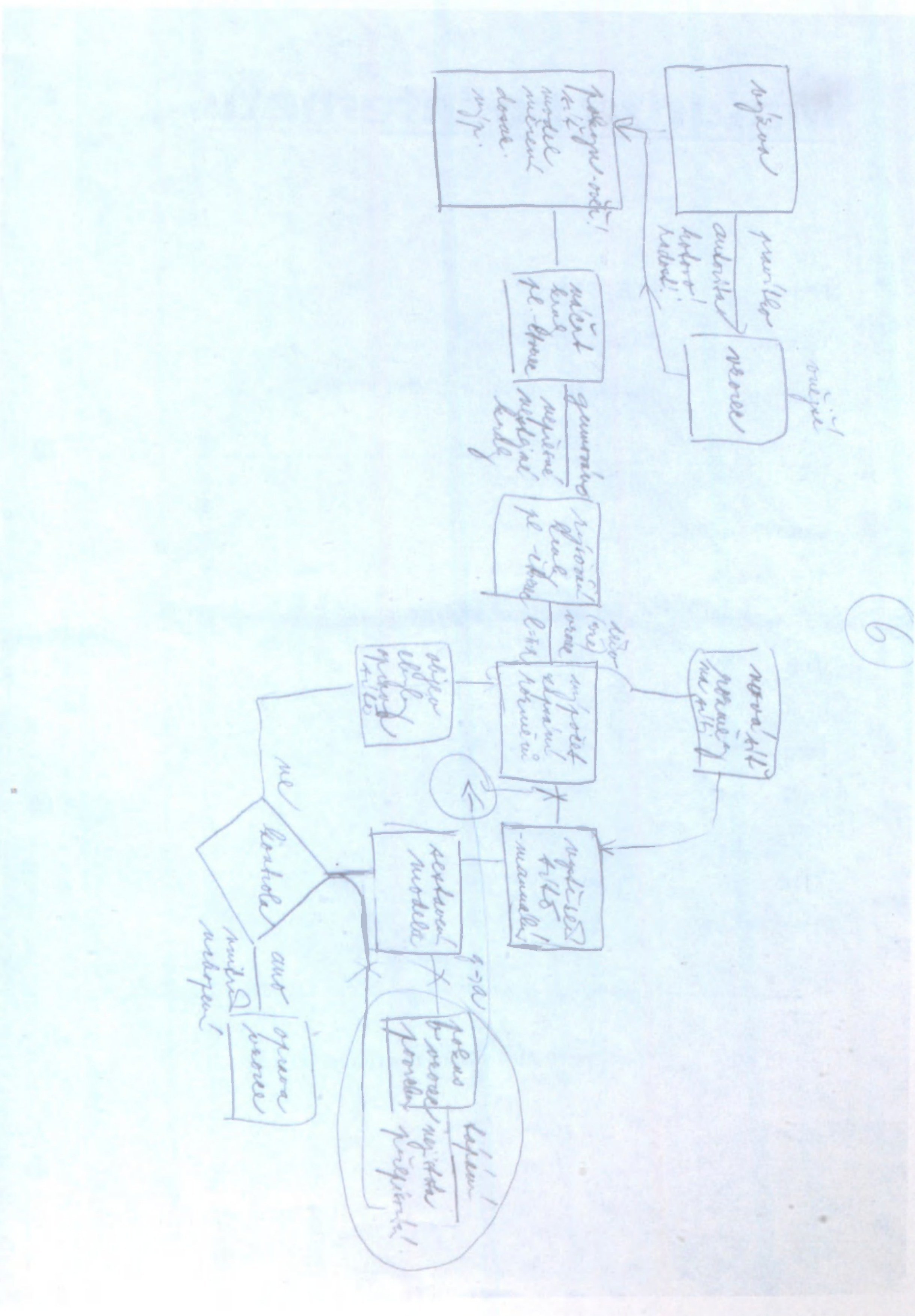
Příloha 2.8.1e

Experiment V2 – diagram 5.skupiny



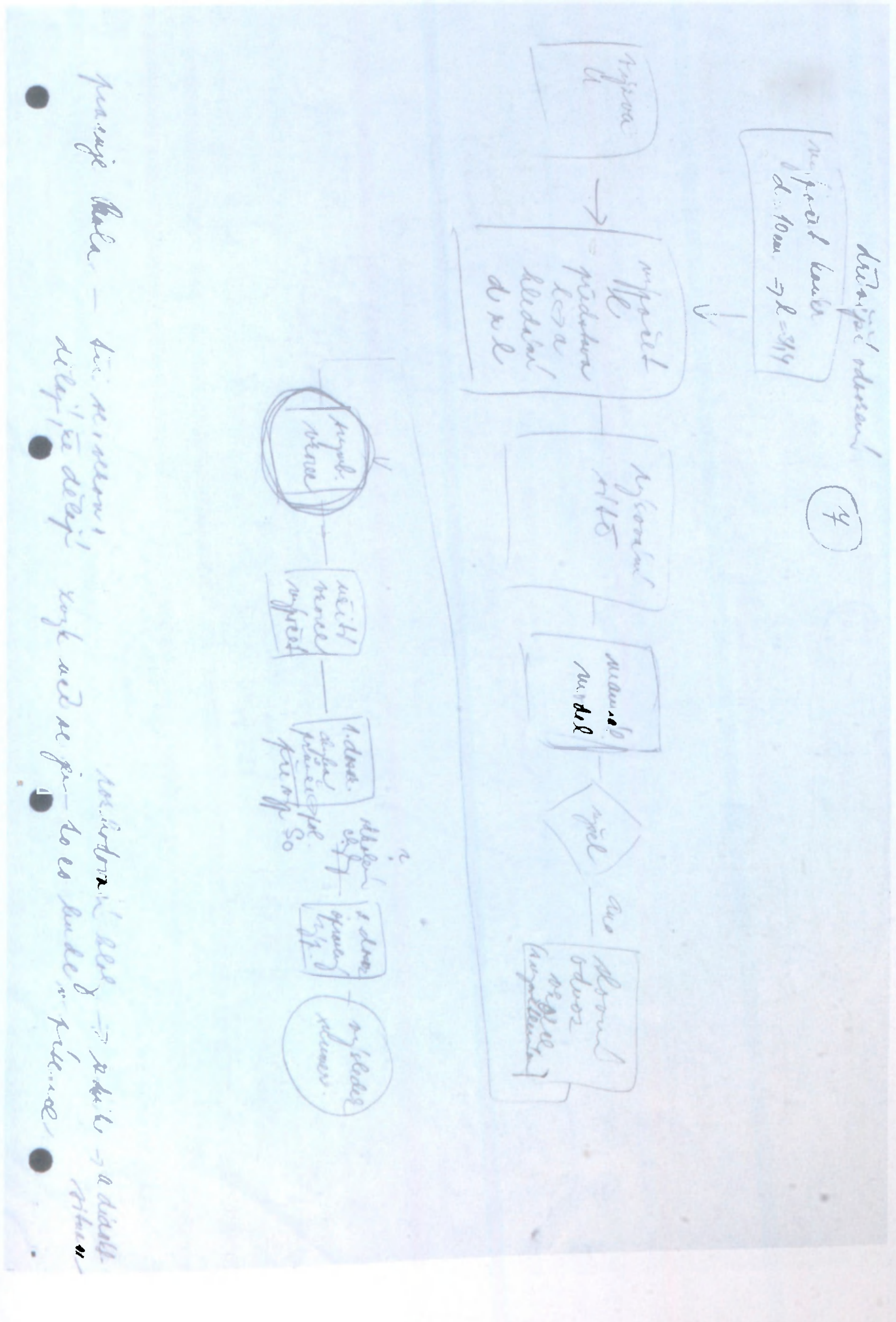
Příloha 2.8.1f

Experiment V2 – diagram 6.skupiny



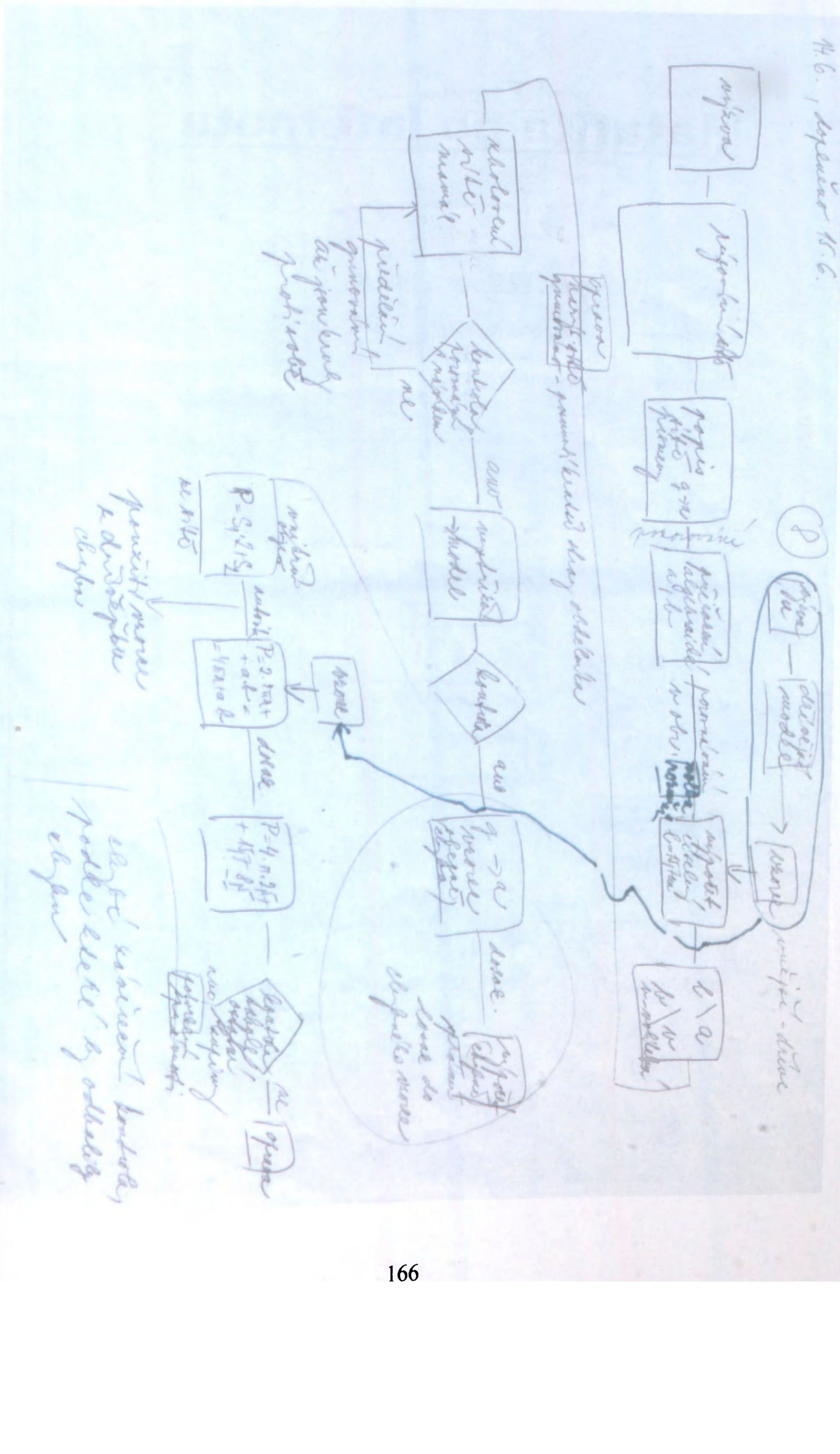
Příloha 2.8.1g

Experiment V2 – diagram 7.skupiny



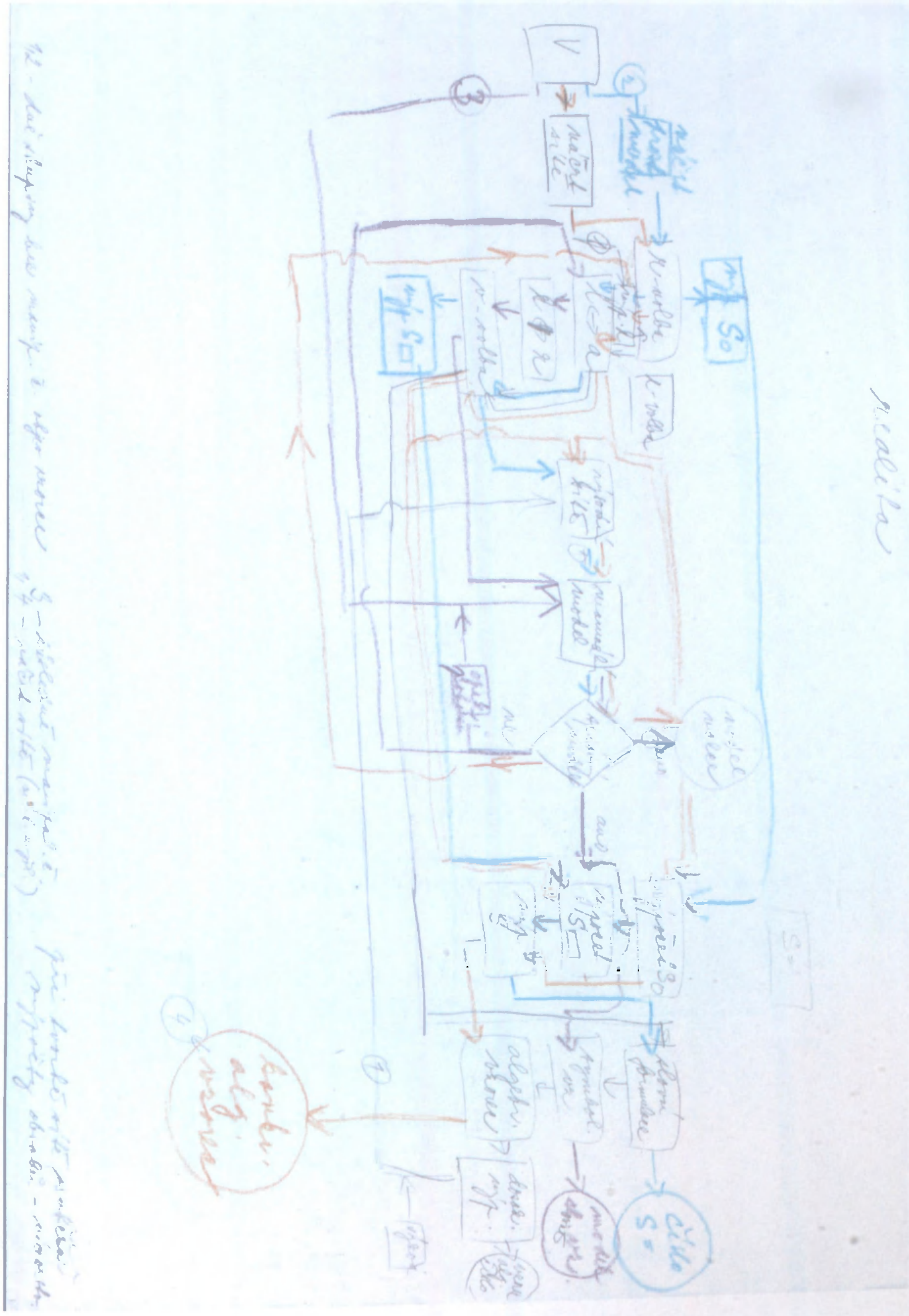
Příloha 2.8.1h

Experiment V2 – diagram 8.skupiny



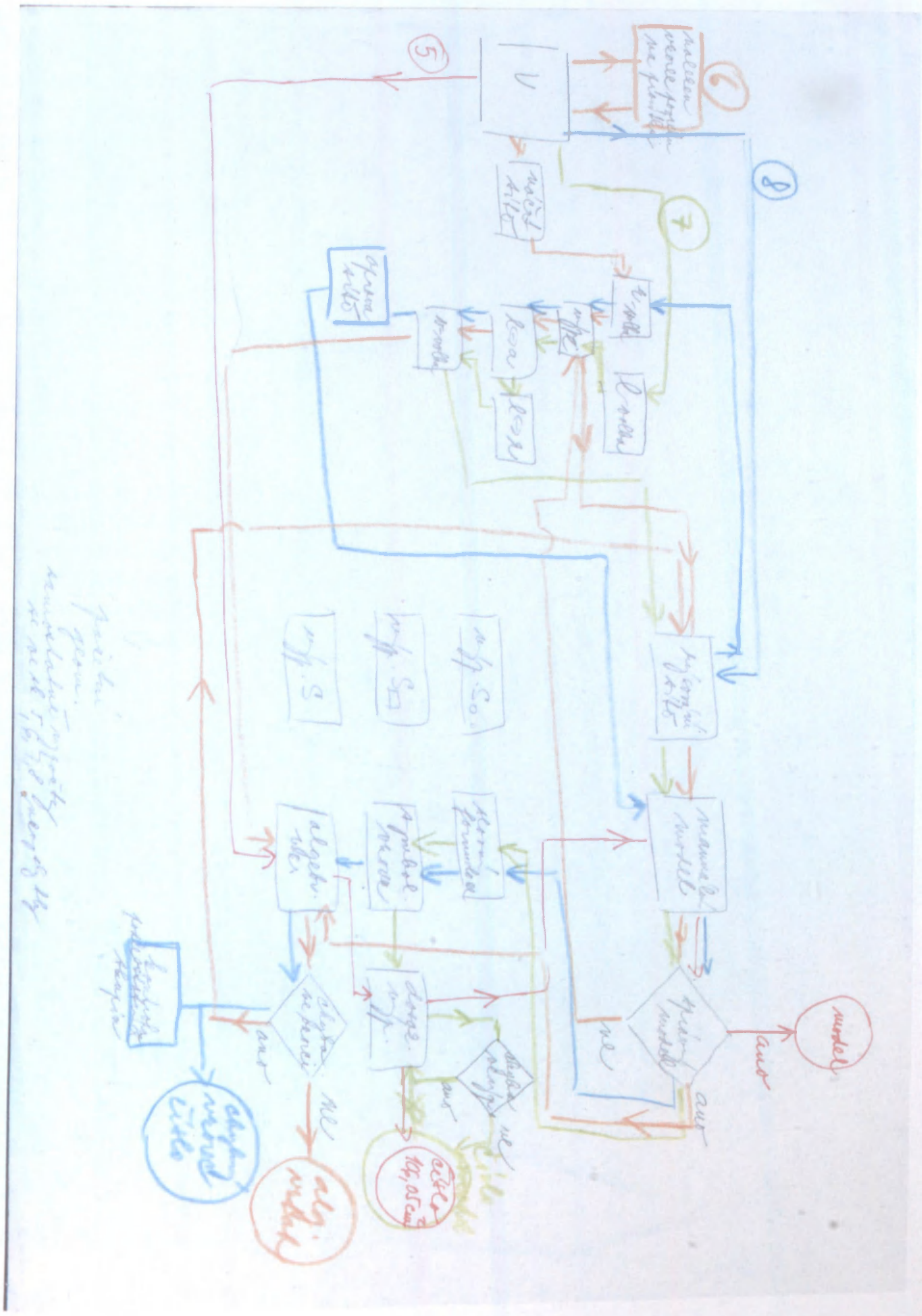
Příloha 2.8.2a

Experiment V2 – polo-globální diagram pro 1. – 4.skupinu



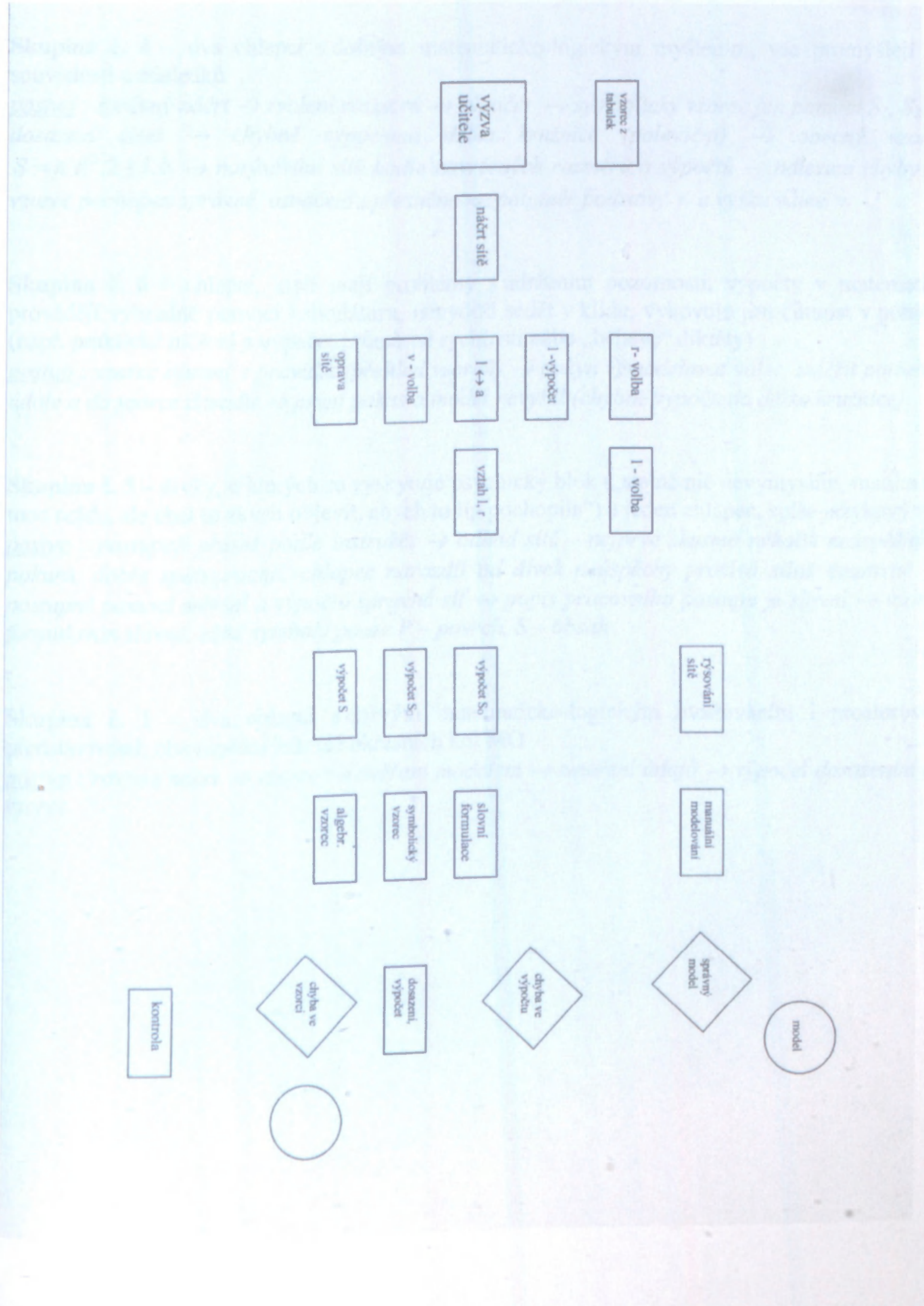
Příloha 2.8.2b

Experiment V2 – polo-globální diagram pro 5. – 8.skupinu



Příloha 2.8.3

Experiment V2 – diagram Základ



Příloha 2.8.4

Experiment V2 – popis postupů k fotografiím

Skupina č. 4 – dva chlapci s dobrým matematicko-logickým myšlením, vše promýšlejí do souvislostí a důsledků
postup : správný náčrt → zvolení rozměrů → výpočet → symbolický vzorec jen pomocí S_1, S_2 → dosazení čísel → chybně vypočtená délka kružnice (poloviční) → obecný vzorec $S = \pi R^2.2 + l.b$ *→ narýsování sítě podle navržených rozměrů a výpočtů → nalezení chyby → vzorec pochopen správně, označení upřesněno na poloměr podstavy r a výšku válce v*

Skupina č. 6 – chlapci, kteří mají problémy s udržením pozornosti, výpočty v matematice provádějí výhradně pomocí kalkulátoru, nevydrží sedět v klidu, vyhovuje jim činnost v pohybu (např. praktické měření a výpočet průměrné rychlosti nebo „běhavé" diktáty)
postup : vzorec opsaný z pravítka (přehled vzorců) → pokyn vymodelovat válec, změřit potřebné údaje a do vzorce dosadit → první pokus o model nevyšel (chybně vypočtená délka kružnice)

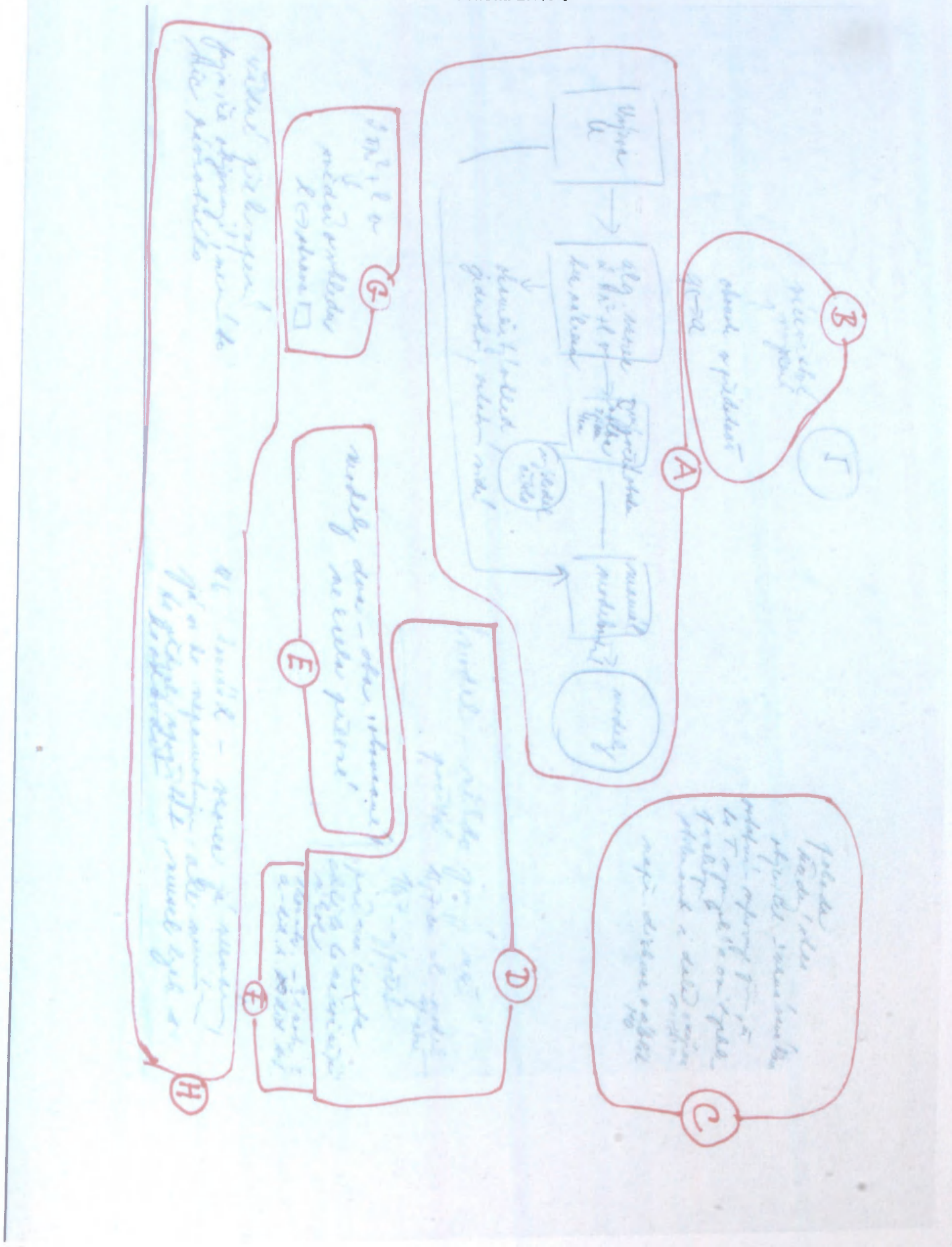
Skupina č. 3 – dívky, u kterých se vyskytuje psychický blok („stejně nic nevymyslím, matika mi moc nejde, ale chci to zkusit objevit, abych to líp pochopila") a jeden chlapec, spíše jazykový typ
postup : postupují přesně podle instrukcí → odhad sítě – nejprve zkusmo několik neúspěšných pokusů, dobře spolupracují, chlapec narozdíl od dívek neúspěchy prožívá silně emotivně → postupně pomocí měření a výpočtů správná síť → popis pracovního postupu je slovní → vzorec formulován slovně, užité symboly pouze P – povrch, S – obsah

Skupina č. 1 – dva chlapci s dobrým matematicko-logickým uvažováním i prostorovou představivostí, oba úspěšní řešitelé okresních kol MO
postup : rovnou náčrt → vzorec → ověření modelem → změření údajů → výpočet dosazením do vzorce

Příloha 2.8.5

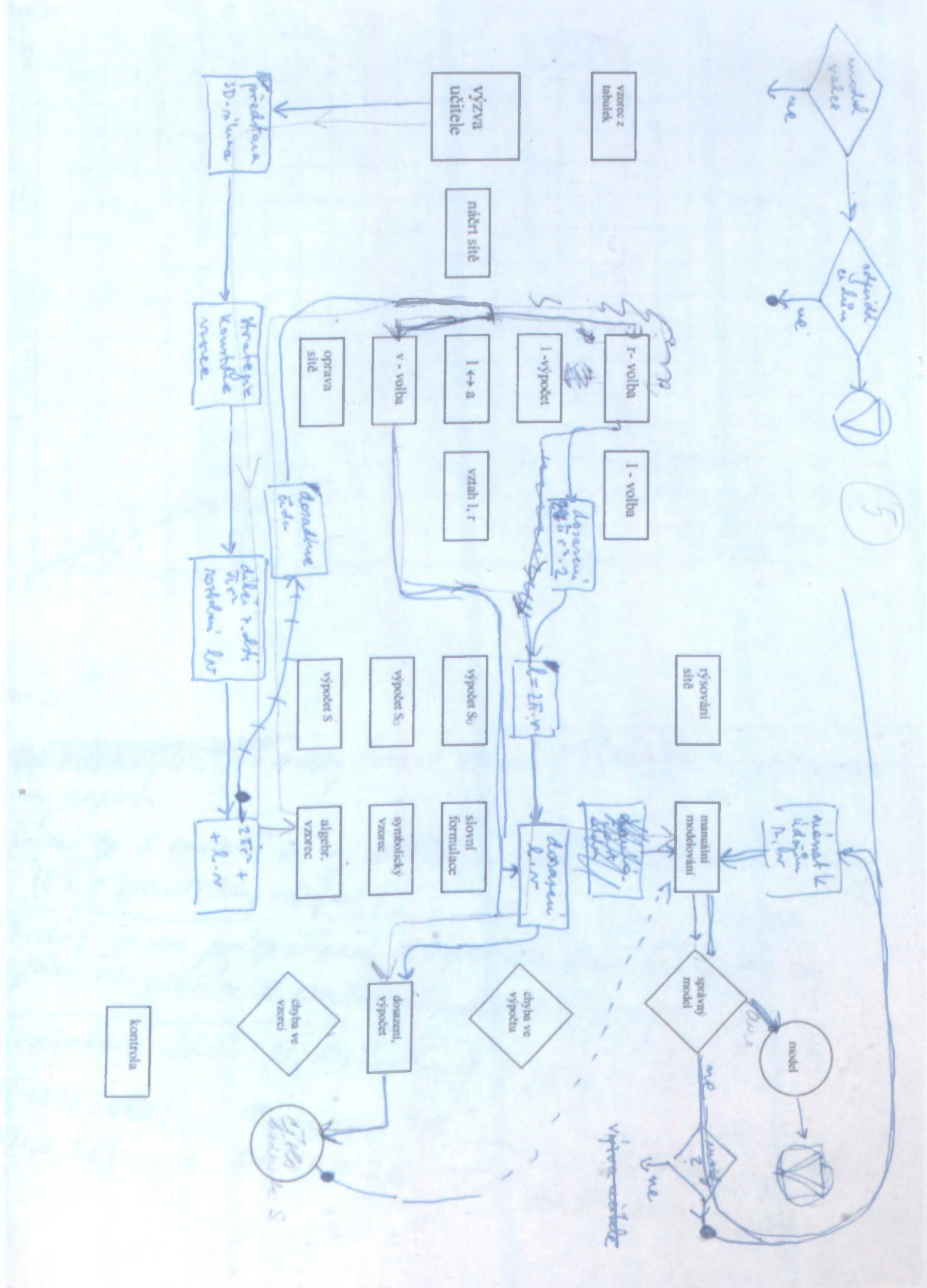
Experiment V2 – fáze tvorby diagramu

Příloha 2.7.1 e



Příloha 2.8.6

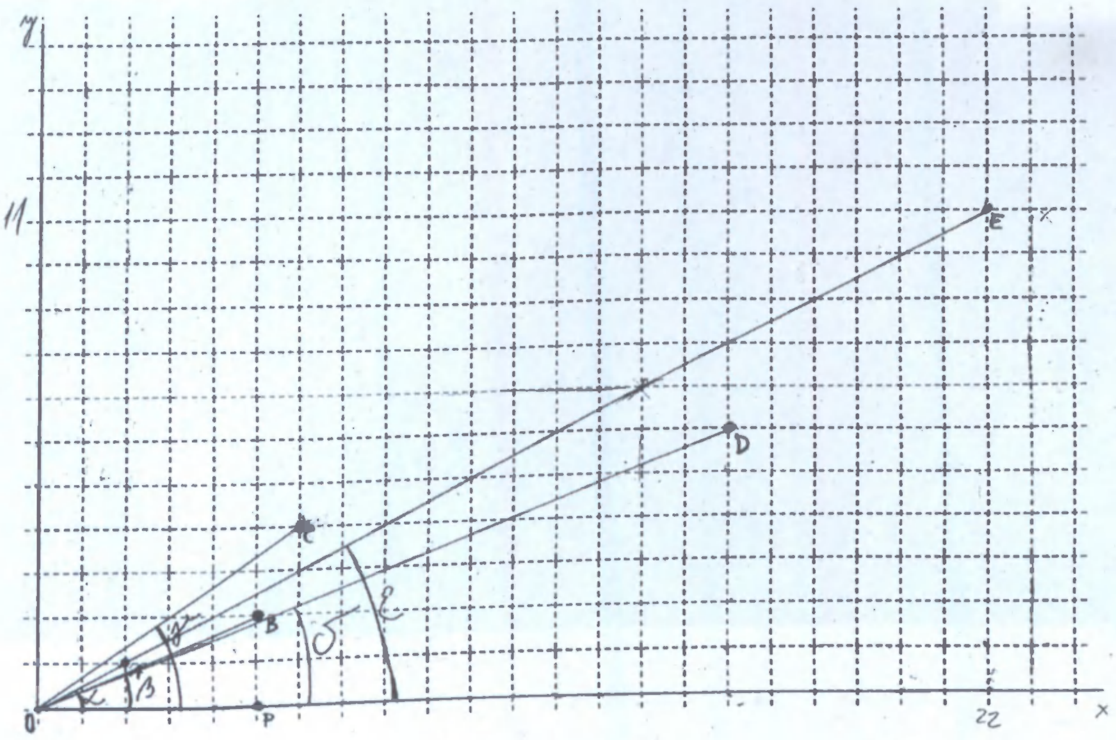
Experiment V2 – pracovní verze diagramu pro 5.skupinu



Příloha 3.5.1

Práce Anny na čtverečkovaném (obr.1) a bílém papíře (obr.2)

Obr.1:



Obr.2:

Vyznačila jsem si body kromě bodu F, protože se mi nevešel na papír.

Čím je x menší a y větší → tím větší úhel (O a P jsou vždy stejné).

Bod E je na polopřímce AO, protože jeho souřadnice jsou 11x větší než souřadnice bodu A [2; 1].

seřazení úhlů: α; β; ε; δ; γ; δ = 2

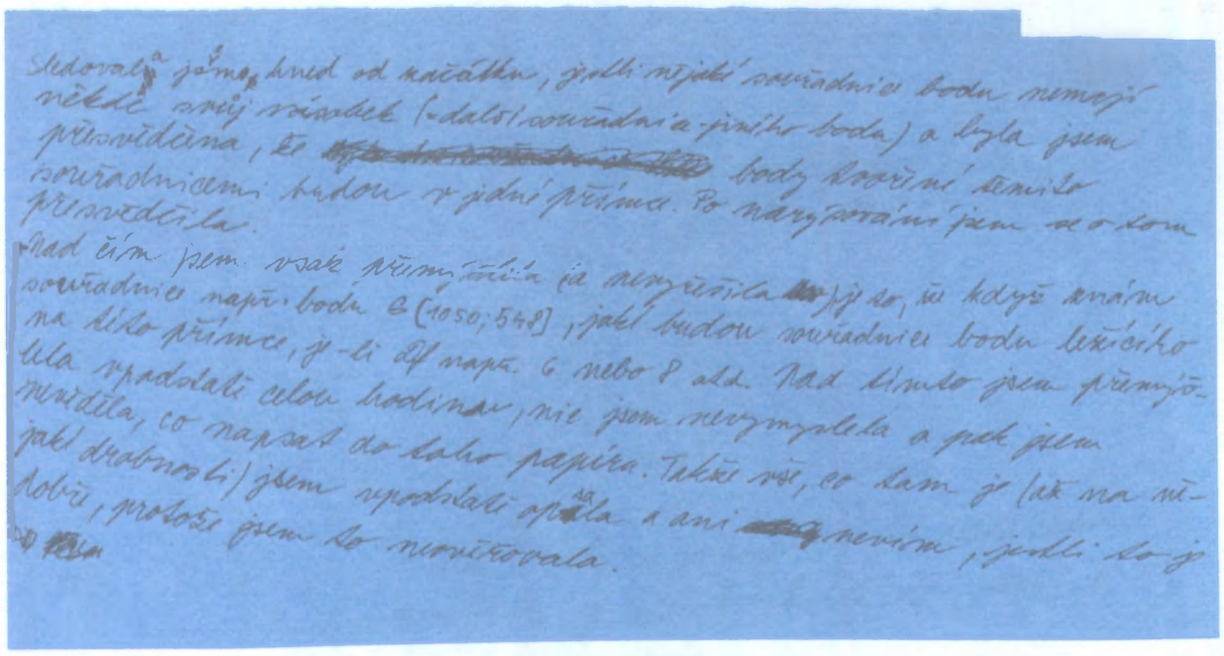
G[1050; 548] 1050 : 548 = 1,9

F[101; 50] 101 : 50 = 2,02 ⟹ myslíme si, že úhel FOP > GOP

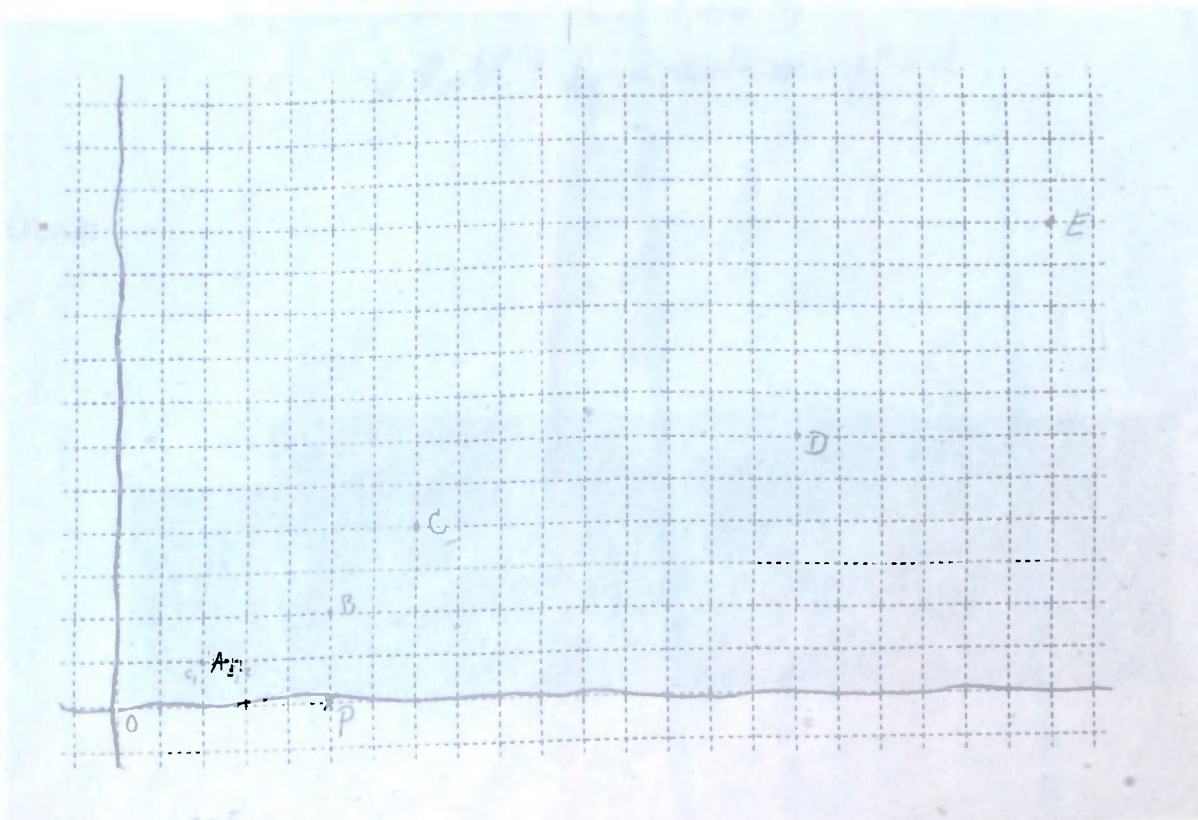
Příloha 3.5.2

Práce Anny na modrém papíře (obr.1), práce Bohouše na čtverečkovaném papíře (obr.2)

Obr.1:


Sledovaly jsme, hned od začátku, jestli nějaké souřadnice bodu nemají někde svůj vzorec (=další souřadnice jiného bodu) a byla jsem přesvědčena, že body tvořené těmito souřadnicemi budou v jedné přímce. Po narýsování jsem se o tom přesvědčila.
Nad čím jsem však přemýšlela (a nevyřešila) je to, že když znám souřadnice např. bodu G [1050; 548], jaké budou souřadnice bodu ležícího na této přímce, je-li dif např. 6 nebo 8 atd. Nad tímto jsem přemýšlela, chtěla vypočítat celou hodinu, nic jsem nevymyslela a pak jsem nevěděla, co napsat do toho papíru. Takže vše, co tam je (až na nějaké drobnosti) jsem vypočítala a ani nevím, jestli to je dobře, protože jsem to neověřovala.

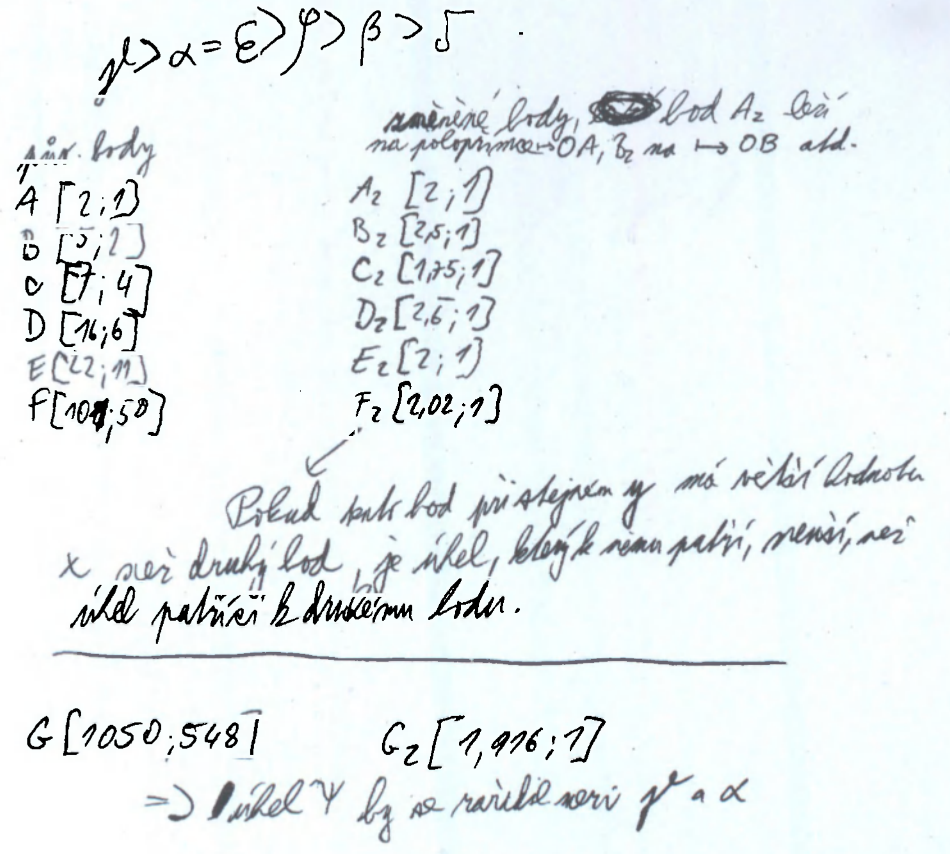
Obr.2:



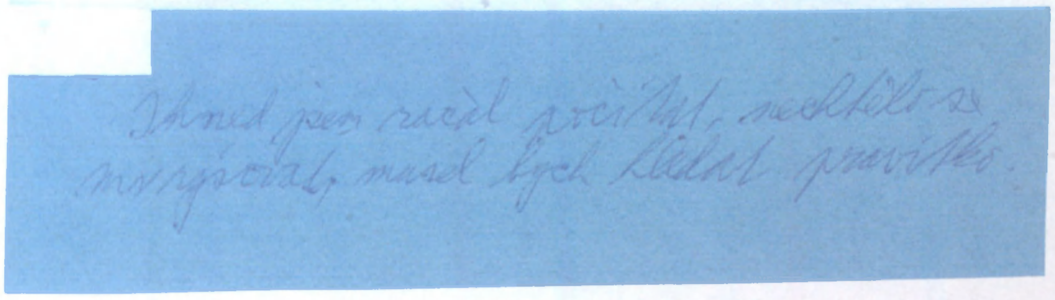
Příloha 3.5.3

Práce Bohouše na bílém (obr.1) a modrém (obr.2) papíře

Obr.1:

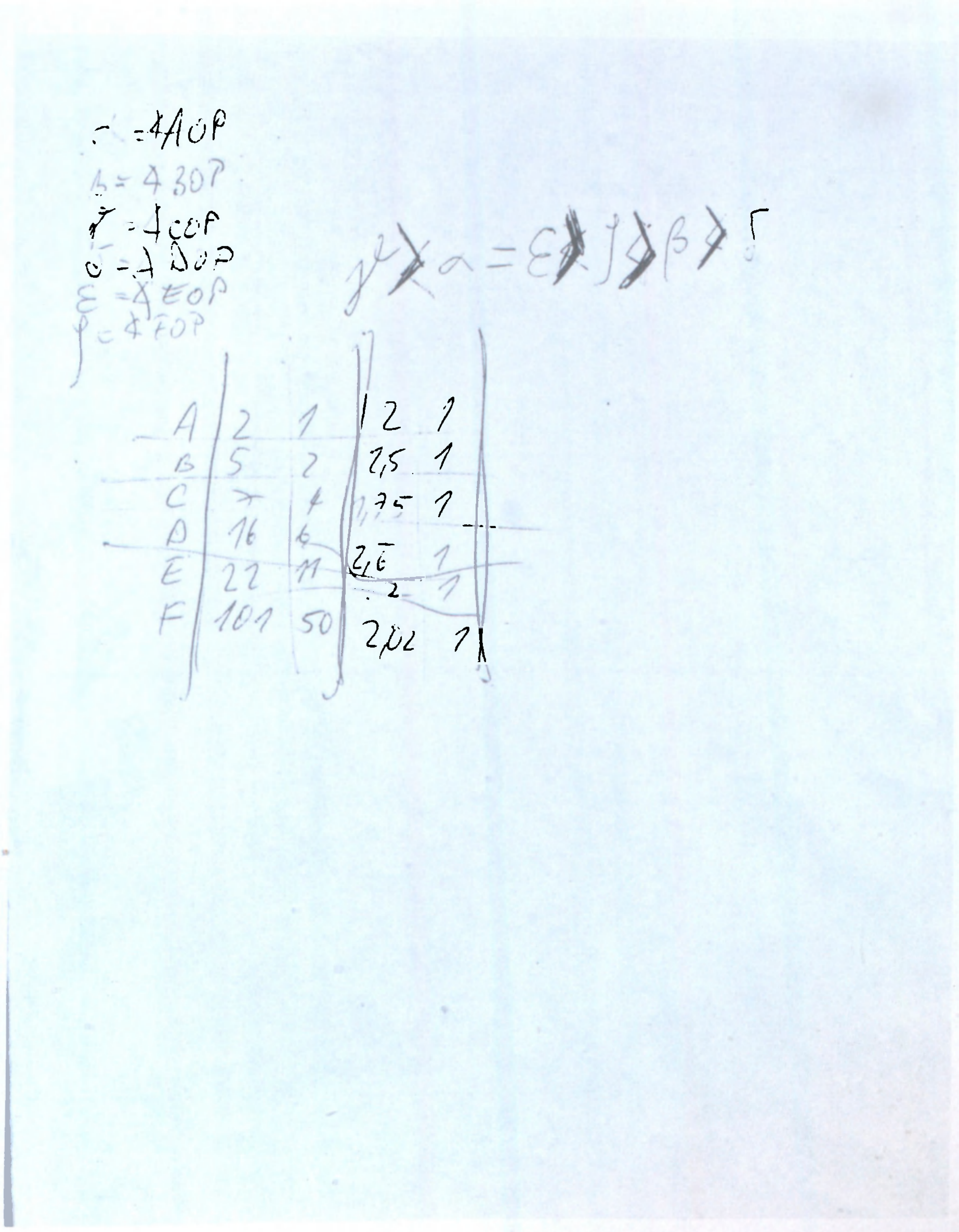


Obr.2:



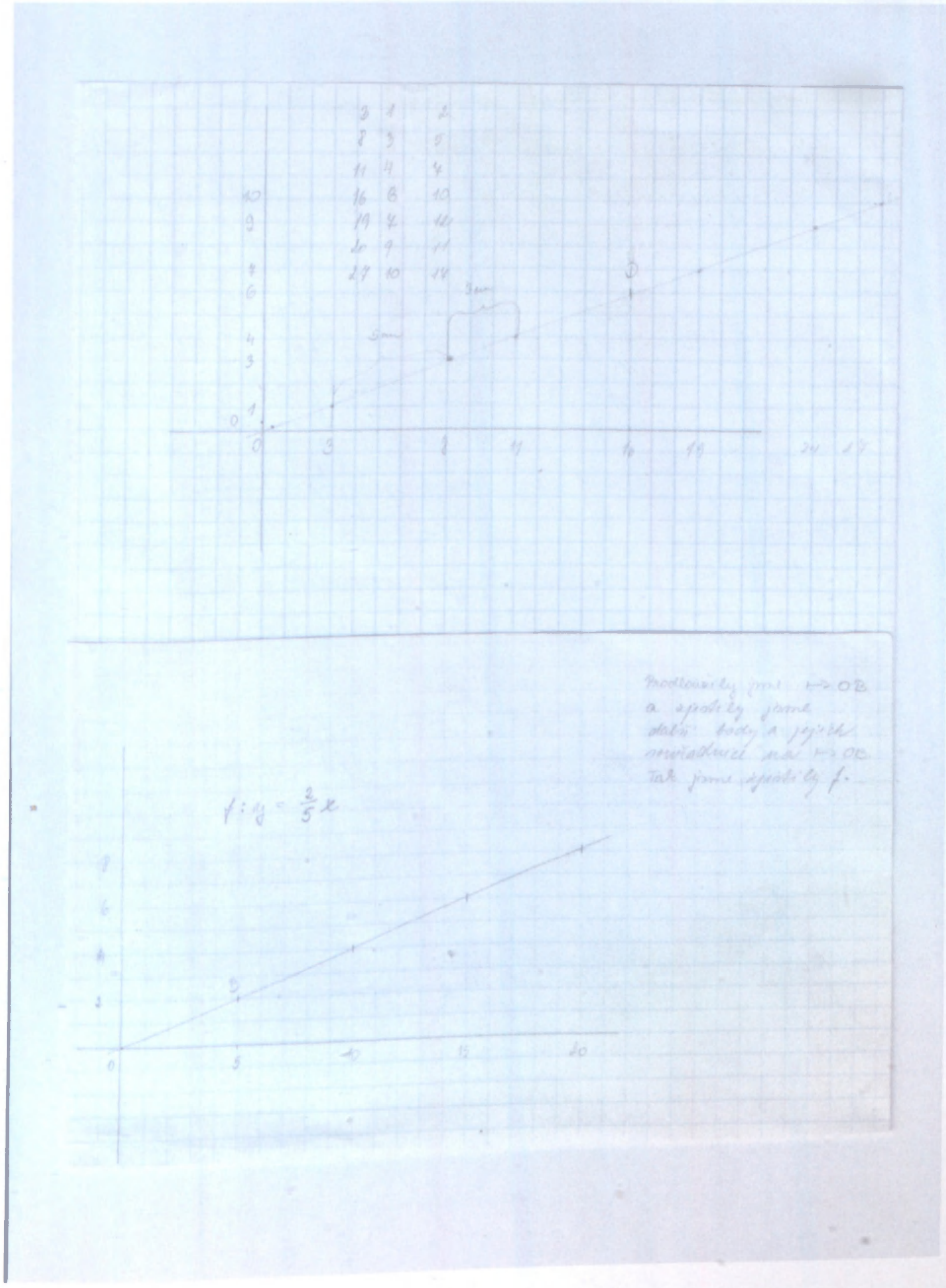
Příloha 3.5.4

Práce Bohouše – pomocný zápis



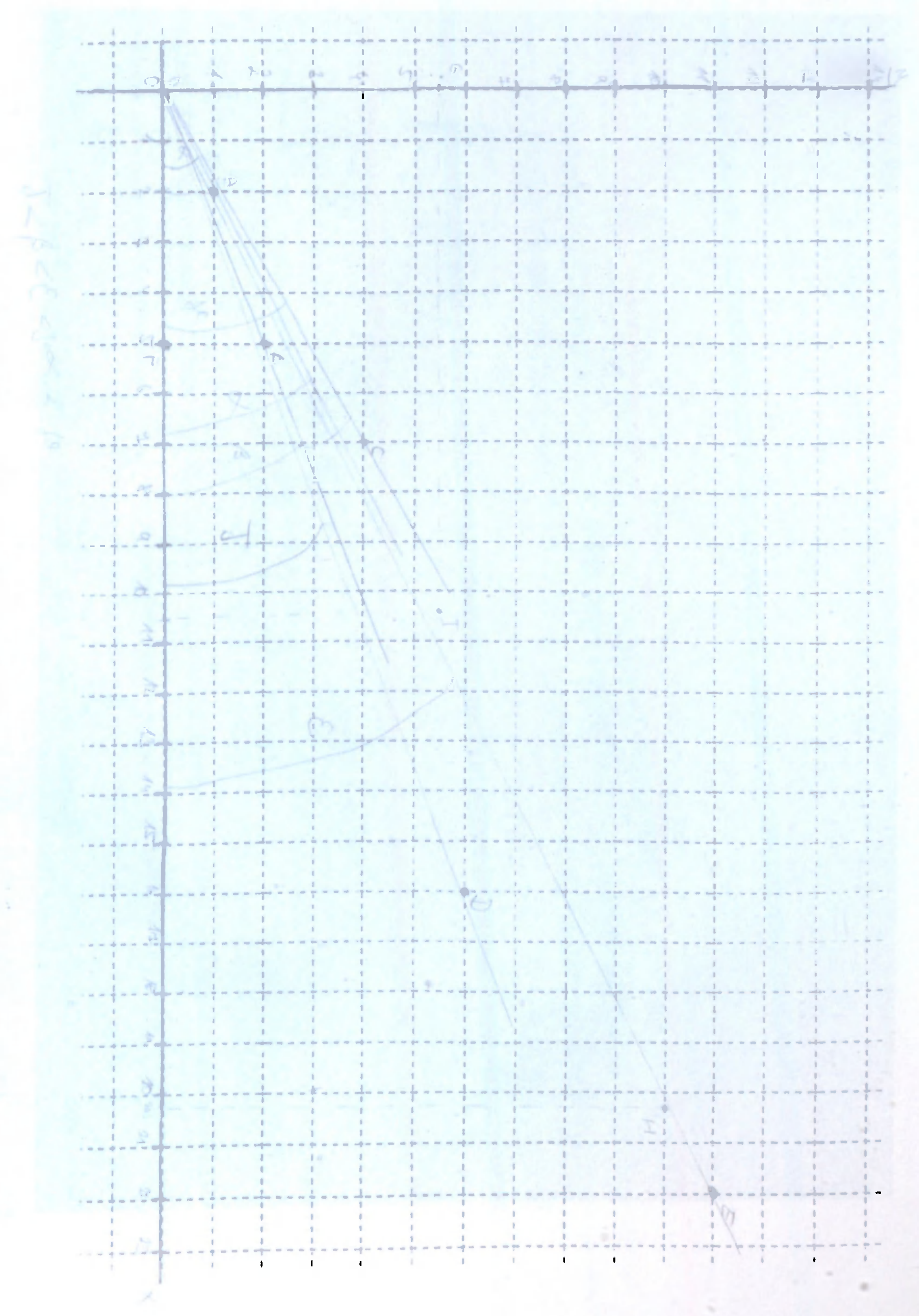
Příloha 3.5.5

Práce Anny – řešení 6. návodné úlohy



Příloha 3.5.6

Práce Kláry – čtverečkovaný papír



Příloha 3.5.7

Práce Veroniky – modrý papír

Podle mě se dá určit velikost úhlu podle údajů, z kterých se určují body. Čím větší jsou údaje, tím větší je úhel (ne „větší rozpětí"). Takhle se dají porovnat všechny úhly bez rýsování.

Bod F by narýsovat šel, ale muselo by se zmenšit měřítko (vzdálenost je moc velká). Je to stejné jako když jsme mluvili o zmenšování a zvětšování obrazu v mikroskopu, nebo v mapy. Další je mapa zmenšený obraz skutečnosti, tak je to i s bodem F, či s ~~=~~ ∢ FOP. Ovšem nevím jestli by to bylo přesné, kdybych to chtěla narýsovat. S těmi zmenšenými měřítky asi ne.

Taky mě napadlo, že to bude něco s úhlopříčkou. Když to vše narýsujeme (i úhly), vše spojíme a vznikne Δ, který pak porovnáme s ostatními. (To je jenom takový nápad)

Příloha 3.5.8

Práce Borise – bílý papír

body A, B, C, D jsem zvýraznil v zadání. Vyznačil jsem polopřímky OA, OB, OC, OD. Bod E jsem označil stejně jako v zadání, ale polopřímku OE jsem nevyznačil, protože jsem měl krátké pravítko. Proto jsem bod E musel opravit. Vyznačil jsem bod E' který měl oproti bodu E 2× delší vzdálenost (souřadnice jsem x a y „vynásobil" 2). Při vyznačení polopřímky OE' jsem zjistil, že nepřesně splývají (protíná ↦ OA). Následně se zjistilo, že bych měl více „přesně" změřit body.

~~U bodů~~ mi vyšlo

$A_1 [2; 1]$
$B_1 [2{,}5; 1]$
$C_1 [1{,}75; 1]$
$D_1 [2{,}\bar{6}; 1]$
$E_1 [2; 1]$
$F_1 [2{,}02; 1]$

$\Rightarrow \gamma > \alpha = \varepsilon > \varphi > \beta > \delta$

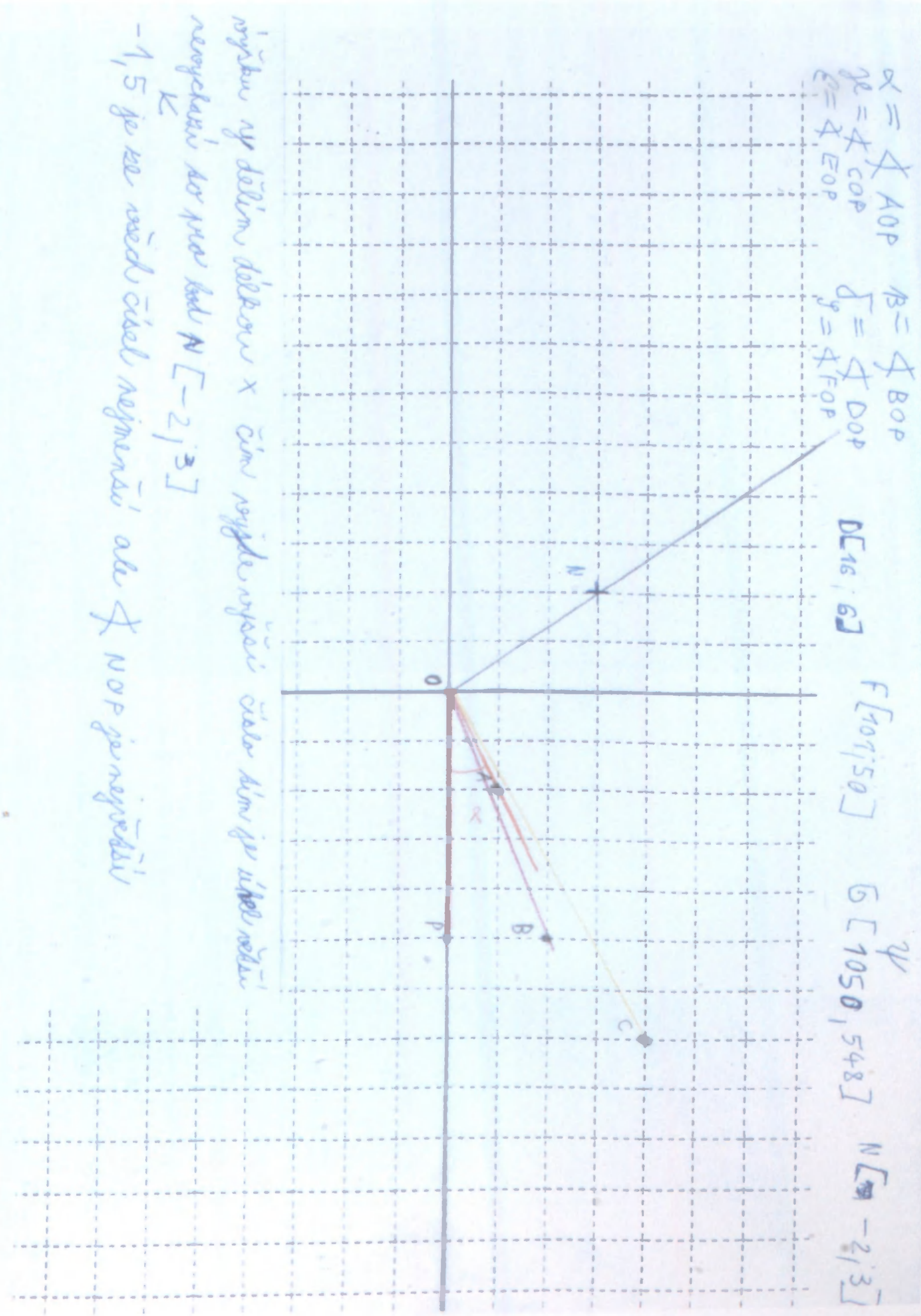
s Ivánkem jsme porovnávali jinou cestou, ale ~~do~~došli jsme k stejnému výsledku

$G [1050; 548]$ $\quad G_1 [1{,}916; 1] \Rightarrow$

$\gamma > \psi > \alpha$

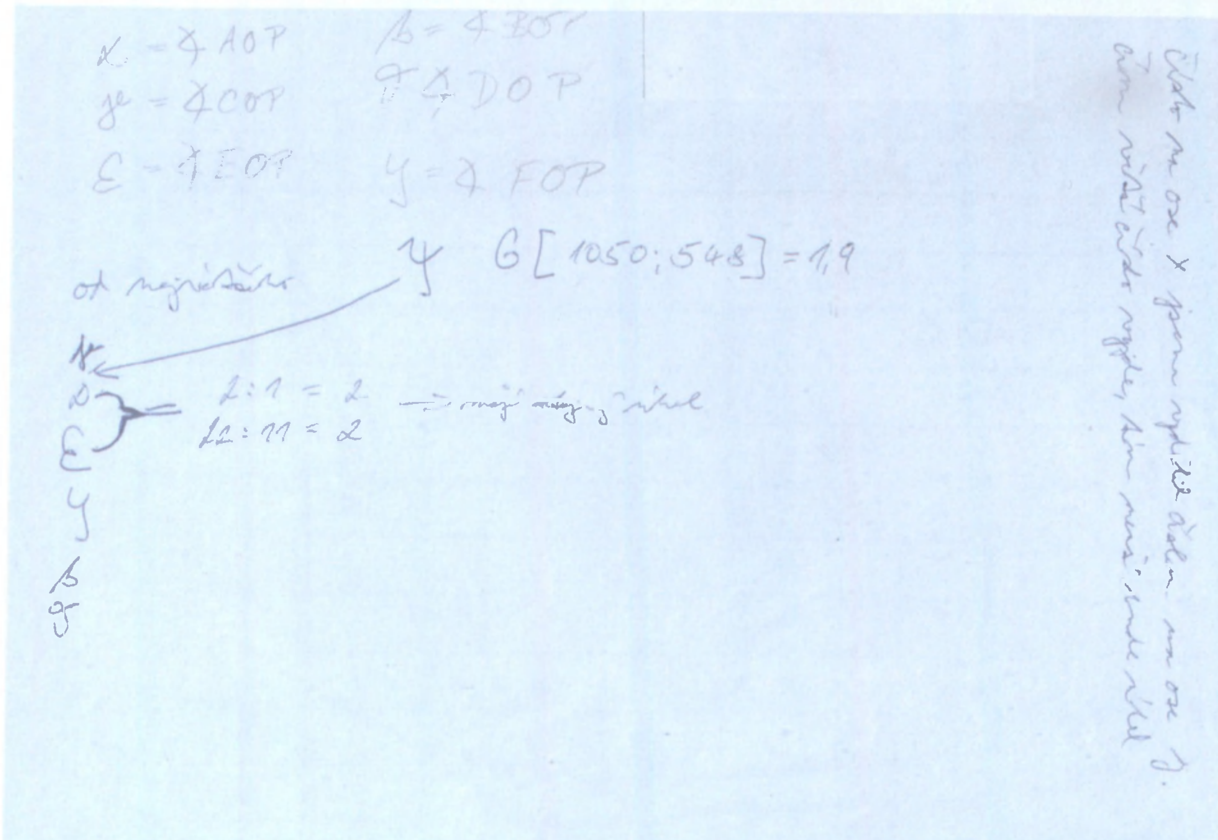
Příloha 3.5.9

Práce Aleše – čtverečkovaný papír



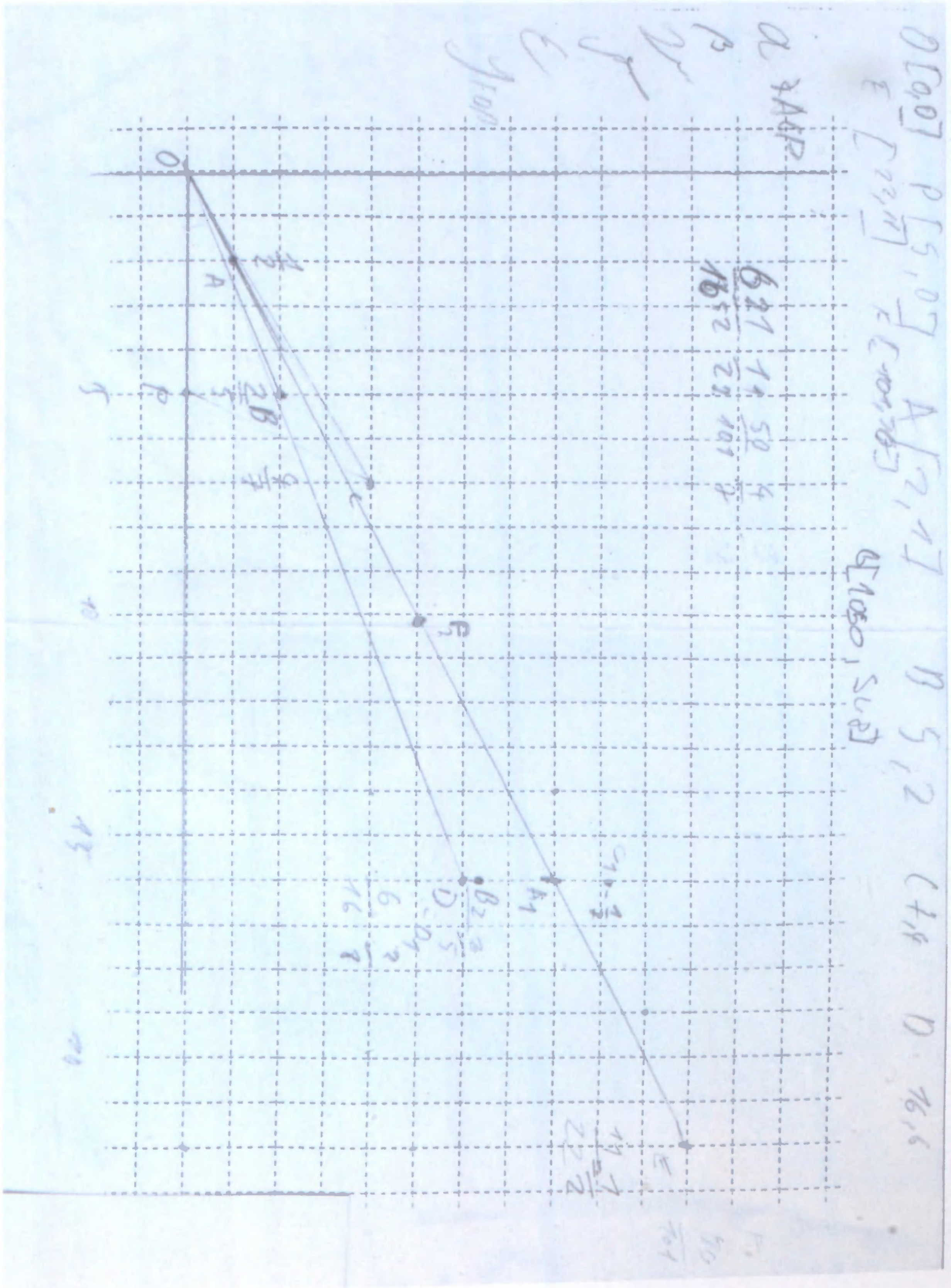
Příloha 3.5.10

Práce Havla – bílý papír



Příloha 3.5.11

Práce Karla – čtverečkovaný papír



Příloha 3.5.12

Práce Mirka – bílý papír

V grafu jsem vyznačil body 0, P, A, B, C, D, E až na F.

myslím, že když souřadnice bodu F [101; 50] zmenším, aby se vešel bod do grafu, tak stále bude svírat stejný úhel.

101 : 10 = <u>10,1</u> – X

50 : 10 = <u>5</u> – Y

Zakreslím do grafu a zjistím:

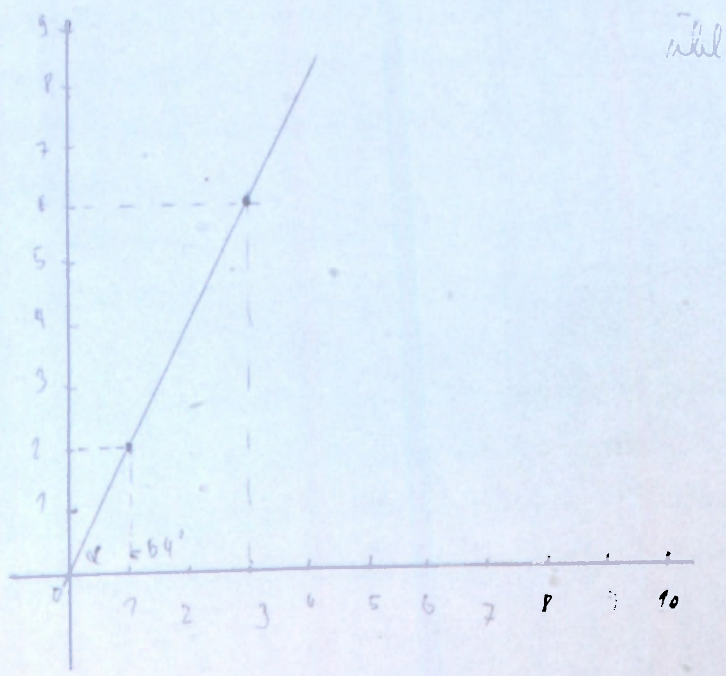
C > G > A ~~[illegible]~~ E > F   > B > D

– nepřesný graf

např. dílkem: α [3; 6]   a pak zmenším ⇒ [1, 2]

↓

úhel se nezmění



Příloha 3.5.13

Práce Hany – bílý papír

1) Vytvořila jsem si soustavu souřadnic a zapsala jsem na ni body

O [0,0] P [5,0]
A [2,1] B [5,2]
C [7,4] D [16,6]
E [22,11] F [101,50]
G [1050, 540]

Zjistila jsem, že čím je x menší a y větší, tím je větší úhel který svírají a naopak. (O a P jsou vždy stejné)

Bod E je na polopřímce OA protože jeho souřadnice jsou 11x větší než souřadnice bodu A [2,1]

2) $y = \frac{1}{2}x$ je rostoucí

Příloha Experiment G3

Experiment G3

Příloha je věnována experimentu G3, který byl zaměřen na zkoumání poznávacího procesu skupiny. Nejprve stručně představím prostředí matematického tábora, kde se experiment uskutečnil. Dál uvedu ilustraci práce tří skupin – protokoly úryvků rozhovorů žáků zachycených z videozáznamu, stručné komentáře z oblasti kognitivní a částečně i sociální. K práci je přiloženo DVD se záznamem práce těchto tří skupin.

Matematické tábory

Matematické tábory organizuji pod hlavičkou okresního metodického kabinetu matematiky pravidelně každý rok již od roku 1993. Na jeden týden v prostředí rekreačního střediska (nejčastěji Borovice) se scházejí zájemci o matematiku z okresu Mladá Boleslav. Na první tábory jezdili žáci od 6.třídy do 9. třídy v počtu 40 účastníků. Tábory se staly u dětí natolik oblíbené, že se pravidelně vracejí a nechtějí se s účastí na táboře rozloučit. Dnes se rozšířila věková hranice až po středoškoláky. Instruktory jsou dnes již dospělí absolventi dřívějších táborů.

Program tábora je zaměřen na matematiku. Dopolední zaměstnání jsou výhradně matematická – řešení úloh a problémů obohacujících školní matematiku, nejčastěji formou objevitelskou. Odpoledne jsou vyhrazena hrám a sportu (v mnohých jsou činnosti vyžadující kombinační schopnosti a logické úvahy). Večery jsou věnovány praktickým činnostem v souvislosti s dopoledním programem nebo strategickým hrám. Vše je zarámováno a propojeno celotýdenní táborovou hrou.

Na jaře 2005 jsem úlohu ÚG, diskutovanou ve třetí kapitole, zadala účastníkům matematického tábora – označeno jako experiment G3. Úlohu řešili žáci 9. ročníků a středoškoláci.

Úlohu jsem zadala jako skupinovou práci. Tři skupiny jsou při jejich práci natočeny na videozáznamu. Z tohoto záznamu se kromě řešitelské strategie dá vypozorovat řada dalších fenoménů ovlivňujících poznávací proces. V následující ilustraci jsem se zaměřila na atmosféru ve skupině, na sociální interakce, na užívaný jazyk, na spolupráci členů skupiny.

Poznámka: Z hlediska strategií řešení bylo zajímavé, že většina středoškoláků v úloze neviděla možnost využití goniometrických funkcí, při řešení postupovali podobně jako žáci kvarty. Pouze jeden účastník využil k řešení analytickou geometrii – směrnici přímky.

Ilustrace práce tří skupin

U každé skupiny uvedu nejprve její složení, stručnou charakteristiku, protokol záznamu rozhovorů a komentáře.

1.skupina

Složení: Dvě dívky – Eva a Šárka, kamarádky z jedné školy

Charakteristika: Atmosféra – přátelská, spolupráce, obě aktivní. Dívky nejprve společně zkoumají zadání úlohy, ujasňují si, co je po nich žádáno. Každá si připravuje vlastní papír, dělá vlastní poznámky. Eva z počátku spíš sleduje. Šárka má sklon k vysvětlování. Reagovaly spontánně, pracovaly se zaujetím, skákaly si do řeči. Začínaly úvahy společně, pak se každá věnovala své myšlence. V závěru se opět vrátily ke společné práci. Používaný „slovník" jen potvrzuje, že dívky mluví spontánně, bez pocitu kontroly nebo ohrožení.

Po celou dobu dívky pracovaly samostatně bez zásahu učitele.

Protokol G3 – 1. skupina

Po třech minutách práce:

(Šárka od ruky načrtává situaci do bloku na čtverečkovaný papír)

Š1 - Podívej se, čím větší je tady ten, ten,..., čím větší je ta na tý ose x, tím (vše ukazuje Evě, která samostatně pracuje na svém papíře, ale projevuje zájem i o práci Šárky na náčrtu, Eva skáče do řeči)

E 1 – Tím je větší úhel

Š 2 – Tím ten úhel je menší, právě. Menší, protože to de víc sem (ukazuje na náčrtu) *Víš co, když dám třeba to céčko sem, tak*

E 2 – No jasně, no jasně

Š 3 – To máš 7, a no to je zas úplně jinej úhel

E 3 – No,..

Š 4 – Počkej, to půjde úplně blbě kreslit, to bysme měli to... Můžeme ty body zkusit nacpat, co to udělá. (kreslí další body) *Tady je déčko 16, áčko...*

E 4 – Když máš x nula

Š 5 – Tak máš ale 5,2 ne? Tak máš 5 a 2 (ukazuje na svém náčrtu souřadnice) *Tak já nevím, áčko se mně zdá ale větší, no ačkoliv to už je*

E 5 – No je větší, protože

Š 6 – No jasně než to béčko, protože máš ten, máš víc protáhlej, máš 2,1

E 6 – No jasně

Š 7 – Teda to je můj názor, já nevím. To céčko je [...] *šestnáct...* (ruka ukazuje x-ovou souřadnici bodu D) *šestnáct*

E 7 – Možná by bylo lepší to znovu narýsovat. Tak já to tedy narýsuju.

Š 8 – (pořád bádá nad svým papírem) *No ale, stejně si nemyslím, že to pude takhle to udělat.*

E 8 – No puč mi ten.., ty máš větší papír. Že když to narýsujem, tak to bude líp vidět.

Š 9 – Jo, ale přesto si myslím, že v tom bude ještě něco jinýho než to tvoje rýsování.

E 9 – No jasně, ale prostě, takhle to bude přesnější, než to máme ten náčrtek, bude to líp vidět.

Š10 – (podává papír)

E10 – Dík

Š11 – Tam to bude totiž nějak s těma bodama souviset

E11 – (poněkud nesrozumitelně hudrá do dlaně) *No tohle tam jen vložíme a je to v pořádku.*

Š12 – Víš co? Tam budeš mít mezi tím poměr. Podle mě to bude – jakej mezi nima máš poměr nebo něco v tom smyslu.

Každá dívka si v tuto chvíli jde za svou myšlenkou, věnují se každá svému papíru, začíná být znatelné mírné napětí.

Šárka počítá zřejmě poměry, bere kalkulačku.

Š13 – Sakra, to nevychází!

....

Eva rýsuje – papír má otočený na výšku.

E12 – Jenže 101 je na ose x, že jo?

Š14 – No právě.

E13 - No, tak to je debilní.

Š15 – No tak to udělej na druhou stranu.

E14 – No jo. (úsměv)

Š16 – Ježišmarjá, ta logika!

Eva pokračuje v rýsování, Šárka v bádání nad čísly.

Š17 – Hele, A,E budou stejný!

E15 – No jasně, to je logický! Takže to rýsovat nemusím.

Š18 – Budem to spíš psát.

Dívky dál pokračují společně v hledání.

……………………………

Š19 – Když to vydělíš, tak čím to číslo bude větší, tak menší bude úhel.

E16 – No jo.

Š20 – Nebo zkus narýsovat, jak to vychází s tím áčkem a béčkem, ať víme, jak to funguje.

……………………………

Po 18 minutách dívky hlásily, že mají vyřešeno.

Komentáře k jednotlivým vstupům:

Vstup Š1 – Zde i v dalším je časté skákání do řeči kolaborativní, nikoli konfrontační. V čase 2:00 až 2:17 Š s přesvědčením tvrdí svoji myšlenku a E ji převezme.

Vstup E2 – Chyba, které se Eva dopouští, není způsobena špatnou úvahou, ale je důsledkem bezprostřední sociální komunikace. Eva pouze doplní větu Šárky běžným způsobem „čím více, tím více“. Říká to jen „aby řeč nestála“. Obsah slov si neuvědomuje. Jakmile ji Šárka opraví, ihned pozná svoji chybu a opraví se.

Vstup Š7 – Šárka hledá strategii řešení. Dochází k rozhodnutí, že dva izolované modely dané body A a B nestačí, a proto přidává další body C a D.

Eva nemá ještě jasný vhled do daných dvou izolovaných modelů a pociťuje potřebu přesným rýsováním poznatek získat.

Šárka eviduje Evinu strategii a nevěří, že přesné rýsování něco osvětlí. Její poznámka ale není pro Evu nemotivující. Tento moment je velice významný pro charakteristiku kvality „vedení žáka“. Učitel v pozici Šárky by asi žádal, aby Eva převzala jeho strategii. Tím by ale přerušil přirozené uvažování dívky. Eva ještě nemá jasno v prvním izolovaném modelu a nepociťuje smysl jít dál; možná to dokonce intuitivně považuje za metodickou chybu

Vstup E10 – Dochází k zajímavé situaci. Eva se nenechala ovlivnit názorem Šárky a žádá ji o papír. Kdyby zde na místě Š, byla instruktivní učitelka, asi by takové chování Evy považovala za drzost. Eva by se k takové žádosti asi ani neodhodlala.

Zde vidíme, jak sociální vrstva může výrazně ovlivnit vrstvu kognitivní – Evě by bylo znemožněno přirozené pokračování v myšlenkovém procesu a byla by nucena nakonec přejít na učení se zpaměti.

Šárka Evě papír poskytne, ale skoro jako sebeobrannou hlášku na vlastní strategii, zpochybňuje strategii Evy. Jasně se zde projevuje různost kognitivních stylů obou děvčat. Evin postup trochu nahlodává Šárčinu intuici řešitelské strategie. Kdyby na místě Šárky byl konstruktivistický učitel, věděl by, že Eva potřebuje izolované modely dotáhnout do vizuálního finále a neměl by potřebu ji tuto činnost zpochybňovat. Stejnost nebo různost kognitivních stylů učitele a Evy by zde vůbec nevstupovala do hry, protože učitel ji zcela utlumí didaktickými znalostmi.

2.skupina

Složení: Dva chlapci a jedna dívka (Lenka, Jirka a Petr), každý z jiné školy

Charakteristika: Žáci zpočátku pracují každý sám, Petr se pokouší o komunikaci. Po zadání úlohy Lenka okamžitě začíná samostatně přemýšlet, Jirka uvažuje samostatně, ale úvahy říká nahlas, Petr se snaží zachytit myšlenky spolužáků.

Atmosféra skupiny je zřejmě částečně ovlivněna přítomností kamery. Zdá se, že Jirka jedná nadřazeně a Petrovi ubližuje. V širších souvislostech však toto chování vyzní poněkud odlišně. Během pobytu na táboře měl Petr tendence se předvádět a „frajeřit“. Z tohoto pohledu pak při práci ve skupině došlo k částečnému rovnání účtů. Lenka se snaží chlapce zklidnit.

Protokol G3 – 2. skupina:

P 1: *No tak, asi to nejdřív chce nějaký bod nula, ne?*

J 1: *Uspořádejte body od největšího po nejmenší nebo od nejmenšího po největší?*

P 2: *To je celkem jedno, ne?*

J 2: *No prakticky to jedno je. Takže od největšího po nejmenší. A už to mám.*

(skloní se nad svůj papír a tužkou ve vzduchu jezdí nad údaji ze zadání a pak nad prázdným papírem, kde naznačuje polohu bodů, které pomyslně spojuje)

J 3: *Tak mi hoď papír.* (Petr podává čtverečkovaný papír, který Jirka odstrčí, aniž by zvedl hlavu od svého papíru.) *Už ho nepotřebuju.*

P 3: *No, dobrý, no...*

J 4: *Počkej, ještě tu vzdálenost, já du kontrolovat tu vzdálenost ...nebo tady...*

L 1: (minutu po zadání úkolu) *Já bych to spočítala na jeden čtvereček po ose x o kolik se to zvedne po ose y.* (Chlapci ji neposlouchají)

J 5: *No já jsem tady udělal chybnej předpoklad, no dobrý.*

(Lenka dál počítá poměry na kalkulačce, Jirka zapisuje čísla do sloupce a porovnává, Petr se dívá střídavě do papíru k Lence a k Jirkovi.)

....

(Po chvíli, kdy Lenka s Jirkou beze slova pracovali každý na své myšlence, se ozval Petr.)

P 4: Takže jak to mám počítat?(směrem k Jirkovi) *Co to je za čísla?*

J 6: To je..., jak se to posouvá... (ukazuje ve svém papíru své výpočty) *No ale je to dobrý ne?*

L 2: (po 2:30 minutách bádání) *To nejvyšší číslo, co nám vyšlo, to bude největší úhel.*

J 7: Počkej, jak se posouvaj mezi sebou nebo to sčítaj? (obrací se jen na Lenku) *Mě napadlo, že kdybychom vlastně vypustili ty první čísla, takže tady máme velikost úhlu, když by teda byly všechny stejný jenže voni nejsou.* (Teprve nyní Jirka zveřejnil svůj prvotní nápad)

L 3: No dyť, proto to dělám vo jeden.

J 8: Jak jako vo jeden?

L 4: Že to převádím vo jeden všechno, že jako kdyby tady byla jednička, tak bude tady půl (ukazuje na zadání souřadnic a své výpočty) . *Tady to mám převedený, a co bude největší číslo, tak to bude největší úhel.*

J 9: Jo, aha! To je dobrej nápad

(Lenka se usmívá, rovná úhly, označuje je pořadovými čísly, pracuje na svém papíře na zápisu výsledku)

J 10: Jo, jo, tak jsem to pochopil..

P 5: To je hezký, no! (řečeno ironicky)

L 5: Nechápeš?

P 6: Jako, chápu to, no myslím, že vím, jak ste na to přišli, ale...přijde mě to takový nelogický.

L 6: Proč?

J 11: Vlastně je vydělíš mezi sebou dva děleno pěti...

P 7: No tak, to já chápu, jak se přišlo na ty čísla, že jo. Ale nevím, proč to největší číslo bude největší úhel.

(Jirka, přestože Lence skočil do řeči a začal vysvětlovat sám, teď už zase Petra neposlouchá, počítá a píše)

J 12: Ale v tom případě nám tady vyjdou dva stejný.

L 7: (směrem k Petrovi, chce mu to vysvětlit) *Když se to zvedá po jedničce na y, protože na x seš na jedničce*

J 13: (skáče Lence do řeči, bere čtverečkovaný papír a kreslí) *Podívej. Když mám tady jeden bod a mám furt jedničku, takže vlastně jeden bod sem, jeden bod sem, a další bod sem, kterej tady z těch úhlů bude největší? Už si to pochopil?*

P 8: Hm.

J 14: Dobrý, můžem pokračovat.

P 9: Nedělej ze mě debila, ty vole! To nemám rád.

J 15: Já z tebe nedělám debila, ty si stačiš sám!

L 8: Ježišmarjá, tak se nechte!

J 16: No tak jo.

(Lenka krasopisně píše závěr – úhly srovnané ve správném pořadí)

P 10: Půjč mi kalkulačku..

L 9: Nebo si to opiš ode mě.

P 11: To nepřečtu (usmívá se)

L 10: Píšu čitelně.

J 17: Já taky. Ale vyšlo mně tam dvakrát nula celá pět.

L 11: Mně taky.

J 18: Takže to můžem seřadit.

(Lenka čeká, Jirka systematicky řadí úhly ve svém papíře)

J 19: Máš pravdu.

P 12: Jsem rád, že jsem se zapojil.

J 20: Já jsem taky rád, že jsem se zapojil. Mě stačí jen trochu pošťouchnout a už mi to de.

P 13: Já bych tě nejradš pošťouch holí.

<u>Komentáře k jednotlivým vstupům:</u>

<u>Vstup J4</u> – Chlapci zatím nemají strategii postupu.

<u>Vstup L1</u> – Lenka má jasný klíč k řešení: průsečík ramene sledovaného úhlu s přímkou x = 1. Protože nemáme videozáznam práce Lenky v tomto počátečním a rozhodujícím stadiu, můžeme pouze na základě písemného projevu soudit, jak dívka uvažovala. Nejprve si systematicky a přehledně zapsala body se souřadnicemi a úhly, přesně podle zadání. (toto vidíme ze záznamu 12:16). Pak ji napadla myšlenka poměru, ale první realizace byla ve smyslu cotg. Našla čísla 2 a 2,5. Pak se v její mysli něco odehrálo a změnila strategii: místo poměru cotg vzala tg. Zřejmě zde byl nějak přítomen i obrázek. Je možné, že si uvědomila, že cotg je nepřímou úměrností a to ji vedlo ke změně strategie. Z přiloženého čtverečkového papíru lze soudit způsob, jak Lenka k řešení došla. Nakreslila body O a P, pak v duchu uviděla trojúhelník OAX, kde X[2;0], uvědomí si že jednotlivé trojúhelníky, které by takto nakreslila, nebude možné porovnávat a proto stejnolehlostí převádí tento trojúhelník do trojúhelníku OA'X', (kde A'[1; ½], a X',[1;0]), ten nakreslí, vyznačí úhel alfa a nakreslené vygumuje. PROČ? Tento izolovaný

model se stává pro ni modelem generickým na základě kterého formuluje návod na řešení celé úlohy. Pak pokračuje pomocí kalkulačky.

Vstup J6 – Na přiloženém papíře je vidět, že Jirka počítá souřadnice vektorů B-A, C-B, D-C. Není jasné, odkud se tato myšlenka vzala. Na první pohled vypadá velice mysteriózně. Nicméně na základě jedné chlapcovy poznámky po experimentu (mluvil o zelené 3D síti) a na základě toho, že chlapec hraje mnoho počítačových her, můžeme předpokládat, že některá z her se pro něj stala schématem k řešení této úlohy. Například „automobilové závody" na čtverečkovaném papíře.

Vstup J7 – První věta je ještě v duchu původní mylné strategie, druhá již je zárodkem dobré strategie. Zároveň je informací o tom, proč druhá strategie není uskutečnitelná.

Vstup L3 – Rozumí Jirkovi a dává mu radu.

Vstup J8 – Jirka radu nepochopí.

Vstup L4 – Lenka radu rozvine. Slova „jako kdyby", doplněná jedním modelem (již generickým) osvětlí řešitelskou strategii.

Vstup J9 – Jirka převezme nápad od Lenky.

Vstup J11 – Jirka posouvá myšlenku řešení z polohy objevu „projekce" do polohy instrukce.

Vstup P7 – Petr přesně ukazuje na slabé místo Jirkovy rady: ukazuješ mi návod, ale nedáváš jeho zdůvodnění. Tento postoj Petra je vysoce pozitivní – neberu hotové fakta.

Kognitivní styl Lenky: Systematičnost, přehlednost zápisu, dobré předchozí znalosti jevu podobnosti, vazby geometrie na aritmetiku. Schopnost analyzovat situaci.

Kognitivní styl Jirky: Novou situaci neanalyzuje, ale hledá k ní ve své zkušenosti paralelu a tu pak použije. Nevíme, jak svoji myšlenku prověřil, ale víme, že zjistil její nefunkčnost. V J7 totiž přechází k jiné strategii slovy *„Mne napadlo..."* Zde mu právě schází buď schopnost přesné analýzy situace, nebo předchozí znalost podobnosti, případně z obojího kousek. Předchozí mysteriózní výpočty i následné hledání strategie jej však připraví k tomu, aby radu Lenky ihned uchopil a porozuměl.

Dodejme, že Petr, který vše slyšel, nepochopil řešení a Jirka mu jej musel opakovat.

Komentář z pohledu interakcí:

Atmosféra skupiny je naprosto odlišná od předchozí skupiny. Zde se vytvořilo určité napětí, je znát snaha o prvenství a „ukázání se" před ostatními z jiné školy a možná i před kamerou. Lenka a Jirka hledají každý svou vlastní cestu, nemají chuť komunikovat, chtějí co nejrychleji úspěšně úlohu vyřešit a předvést svůj postup. Petr by rád spolupracoval, radil by se na strategii, situací je zjevně zaskočen, po Jirkově výroku J1, v odpovědi Petra P1 je znát rozmrzelost. V této chvíli Petr ztrácí chuť nad něčím bádat.

V Lenčině výroku L1 je již obsaženo správné řešení. Lenka sama si uvědomuje, že je to zatím jenom hypotéza, kterou jde hned sama ověřovat, protože chlapci na její myšlenku v danou chvíli vůbec nereagují. Jirka, na rozdíl od Lenky, svoje myšlenky neodhalil, jen nahlas oznámil, že už ví, jak to bude, ale řešení nenaznačil. Později se ukázalo, že si zatím jen uvědomil, že se úhly nějak dají srovnat pomocí souřadnic bodů. Lenka i Jirka řešili oba v oblasti aritmetiky. Petr byl zatlačen do oblasti, která mu nevyhovovala, necítil se dobře, možná by byl úspěšnější při řešení cestou geometrie a v pomalejším tempu.

Tady jsem do řešení úmyslně vůbec nezasahovala. Domnívám se ale, že se dá ukázat na této situaci, že kognitivní analýza může učiteli pomoci bezprostředně zareagovat. Pokud by učitel chtěl, aby i Petr sám tvořil a nebyl jen v roli pozorovatele, stačilo mu jen připomenout možnost rýsování.

3.skupina

Složení: Dvě dívky – Katka a Lída, kamarádky z jedné školy.

Charakteristika: Atmosféra při práci ve dvojici byla po celou dobu velmi přátelská, dívky opravdu vše tvořily společně ,o všem se radily. Jejich objevování trvalo 90 minut. Z jejich rozhovoru vybírám jen velmi krátké ukázky.

Protokol G3 – 3. skupina:

K 1: Já bych to možná kreslila, ne?

L 1: Kolik máš čtverečků? 101?

K 2: Ne, právě že málo, aby tam byla souřadnice 101.

(Dívky vzniklý problém řeší nastavováním papírů, stříhají, podlepují, obě jsou pořád v činnosti. Usmívají se, jsou spokojené. Téměř pět minut nemluví – chystají dlouhý pruh čtverečkovaného papíru. Poctivě označují souřadnice od 0 do 120 - každá z jednoho konce)

K 3: Sešly jsme se! (radost z dílčího úspěchu)

(Činnost pokračuje pečlivým zakreslováním bodů do vzniklé soustavy souřadnic.)

K 4: První je x - čili ta spodní, druhý je y čili ta horní.

(Dívky pečlivě rýsují, opravují, gumují. Společně kontrolují, postupně zakreslují body, odškrtávají hotové. Asi po jedenácti minutách – překvapení)

K 5: To efko bude docela složitý.

(L –naznačuje ve vzduchu nad papírem, jak bude vypadat úhel FOP. K – drží papír ohnutý do oblouku do vzduchu – na lavici se papír nevejde. K bezradně krčí nos.)

L 2: No tak uvidíme.

K 6: Zkusíme. Nešel by ten směr udělat z těch papírků? Ty jsou z jedný strany vždycky rovný. Co si o tom myslíš?

(realizace – slepené proužky papíru používají dívky jako pravítko)

K 7: Počkej, já bych to neprotahovala, já bych jen zkusila, jestli se to neshoduje s nějakým úhlem tam

(přikládají znovu papír)

L 3: Je to křivý!

(hledání, nové přikládání nastavených pruhů, propojení začíná jednou z počátku, podruhé z bodu F)

L 4: Shoduje se to s ňákým? Takže tu počáteční čáru jsme měly dobře?

K 8: Zkus to protáhnout a zkusíme to protáhnout až do toho F, uvidíme, jak to vyjde.

L 5: Je to mimo?

K 9: Je to vejš. Zkus protáhnout tamtu.

(Začíná se projevovat únava, zklamání. Opět neúspěch – nervozita, ťukání tužkou. Nechají nedostupný bod stranou, vyhodnotí viditelnou oblast, přicházejí na změnu měřítka, rýsují další grafy.)

K 10: Teď máme B menší než D, předtím jsme ho měly větší.

L 6: teď máme B menší než déčko a předtím jsme ho měly větší? Ne, neměly.

K 11: Béčko jsme měly větší. Protože tady je větší. Tak to zkontroluj.

(systematická kontrola)

L 7: Tenhle graf bude asi přesnější.

K 12: Jdeme počítat! Tohle číslo kazí úplně celej dojem, já bych ho zrušila!

(bezradnost)

K 13: Počkej, můžem něco zkusit?

L 8: Zkoušej!

(uplynulo 35 minut – mám pocit, že bych začala pomáhat)

K 14: To mělo být dva, šest.

L 9: Šest, dva.

K 15: Skoro.

L 10: To nám nevyšlo. Zkus to s víc – 21, 8.

K 16: To taky. Jsou dvě možnosti – první, že to u toho nefunguje, a druhá, že to máme blbě narýsovaný. Kterou volíš?

L 11: To nevím.

K 17: Já bych sázela na blbý rýsování.

L 12: Ale vypadá to dobře. No tak další.

K 18: Já sem fakt z toho úplně hotová!

(zasahuji, dávám otázky, další pomocné úkoly, po hodině a půl máme vyřešeno, dívky jsou unavené, ale spokojené)

Komentáře k jednotlivým vstupům:

Vstup K1 – návrh postupu činnosti.

Vstup L1 – vlastní otázka, ve které už je obsaženo i hodnocení situace, stejně jako ve výpovědi K2.

Je vygenerován dílčí problém k řešení. Dívky jsou spokojené, pořád mají co dělat, doufají, že přijde nápad.

Zajímavé je to, že na svislé ose mají jiné měřítko než na vodorovné ose (jeden čtvereček na vodorovné odpovídá jedné jednotce, jeden čtvereček na svislé – pěti jednotkám). Možná, že by to mohlo souviset se zkušeností dívek s kreslením grafů například ve fyzice. Zatím nevidí možnost změny měřítka na obou osách, ani ovlivnění velikosti úhlu nestejným měřítkem na osách. Vyvstává otázka: „Má v této chvíli zasáhnout učitel, nebo je lépe nechat dívky dojít vlastní dlouhou cestou k poznání?“ Na táboře nás nic netlačilo, mohli jsme si dovolit cestu dlouhou. Ve škole je situace daleko složitější – jak z hlediska časového, tak z hlediska počtu žáků ve třídě.

Vstup K4 – Katka se nahlas ujišťuje, že rýsuje správně, žádá tím zároveň kontrolu.

Vstup K12 – posun od geometrie k aritmetice – zkušenost přivedla dívky na myšlenku vyjádření velkosti úhlu pomocí číselných údajů.

Vstup K16 – odhalení chyby – dívky se nesnaží chybu zakrývat, hledají v ní poučení.

Shrnutí

- každá skupina si vytváří své vlastní vnitřní mikroklima
- žáci byli při práci aktivní, všichni byli problémem zaujati, zkoumali samostatně bez vedení učitele

- žáci vzájemně komunikují – kladou vlastní otázky, posuzují názory a výsledky druhých, poslouchají se, argumentují
- chybu nevnímají jako prohřešek, ale pouze jako odbočku z přímé cesty k poznání – tudy cesta nevede, musíme jinudy – poučení a následná korekce

Závěr

Příloha 3.1.1 slouží pouze jako ilustrace skupinové práce především z pohledu spolupráce členů skupiny. V protokolech záznamů rozhovorů žáků jsou uvedeny pouze výňatky, které se jevily jako nejzajímavější z tohoto pohledu. Na přiloženém DVD jsou záznamy celé. Písemné žákovské dokumenty nejsou analyzovány.

Domnívám se, že nastíněná problematika je z pohledu učitele zajímavá a že naznačuje směr případného dalšího výzkumu. Například by mohla být udělána paralela mezi poznávacím procesem skupiny, který reálně proběhl, a hypotetickým procesem, v němž roli jednoho ze žáků převezme učitel, a to a) instruktivní b) konstruktivní. Naše uvedené záznamy práce skupin naznačují, že pomoc studenta je účinnější než pomoc instruktivního učitele, ale pomoc konstruktivního učitele je ještě účinnější. Ověření této myšlenky by mohlo být předmětem dalšího výzkumu.