



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matúš Papajčík

**Regulární zdroje prostoročasů se
singularitami**

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka Ph.D.

Studijní program: Fyzika (B1701)

Studijní obor: FOF (1701R026)

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Týmto by som chcel vyjadriť svoju vďaku Mgr. Tomášovi Ledvinkovi Ph.D. za nesmiernu ochotu a odbornú pomoc pri tvorbe tejto bakalárskej práce. Ďalej by som sa chcel poďakovať svojej rodine a priateľom za stálu podporu môjho vzdelávania v obore fyziky.

Název práce: Regulární zdroje prostoročasů se singularitami

Autor: Matúš Papajčík

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Od formulace Einsteinových rovnic obecné relativity se k jejich řešení používaly analytické metody. Jejich složitý charakter a nelinearita znamenala velkou náročnost takovýchto postupů. Teprve nedávno se přidal obor numerické relativity, který přinesl další možnosti výzkumu vlastností Einsteinových rovnic.

V této práci jsme nejprve metodu napojování ilustrovali na problému regularizace singularního newtonovského potenciálu. Dále jsme metodu použili v obecné teorii relativity, kde jsme pro stejný případ sféricky symetrického gravitačního pole našli odpovídající zdroj a rozložení hustoty tlaků v něm. Zdroje tohoto známého Schwarzschildova řešení jsme dále zkoumali ve Weylových souřadnicích a porovnali se zdroji metriky Curzonovy nalezenými v práci Bonnora.

Klíčová slova: Obecná relativita, Einsteinove rovnice, Černá díra, Energetické podmínky

Title: Regular sources of spacetimes with singularities

Author: Matúš Papajčík

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. Tomáš Ledvinka Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: Since the formulation of Einstein's equations of general relativity, analytical methods were applied to find their solutions. The complexity and the non-linear character of the equations meant big difficulty of searching for solutions. Only recently the field of numerical relativity has been developed, which offered a much wider means of research of the properties of these equations.

In this thesis we firstly solved the problem of regularization of newtonian singular potential by the method of binding potentials. Next we applied the methods in general theory of relativity, where we found a suitable source and its pressures of the same spherically symmetrical problem. Further we investigated this known Schwarzschild solution in Weyl coordinates for better understanding and comparison of Bonnor's results.

Keywords: General relativity, Einstein equations, Black hole, Energy conditions

Obsah

Úvod	2
1 Klasická teória gravitácie	4
1.1 Regularizácia sféricky symetrického potenciálu	4
1.2 Regularizácia všeobecného potenciálu	7
1.3 Regularizácia potenciálu dvoch hmotných bodov na ose	9
2 Zdroje statických riešení Einsteinových rovníc	13
2.1 TOV riešenie	13
2.2 Energetické podmienky	19
2.3 Regularizácia Schwarzschildovho riešenia	20
2.4 Obmedzenia metódy	23
2.5 Regularizácia Schwarzschildovho riešenia v isotropických súradniciach	25
3 Zdroje statických axiálne-symetrických riešení Einsteinových rovníc	29
3.1 Schwarzschildovo riešenie vo Weylových súradniciach	30
3.2 Curzonové riešenie	34
Záver	37
Zoznam použitej literatúry	38
A Prílohy	39
A.1 Výpočet tenzoru energie a hybnosti pomocou programu Mathematica	39
A.2 Regularizácia Schwarzschildovej metriky vo Weylových súradniciach	39

Úvod

Sto rokov od Einsteinovej formulácie všeobecnej relativity je už jasné, že táto teória popisuje veľmi dobre aj tie najsilnejšie gravitačné polia, aké sú nám dnes vo vesmíre známe. Okrem čiernych dier, kde hmota navždy zmizne pod horizontom událostí, tu sú aj neutrónové hviezdy, kde hmota nadobúda extrémnej husoty a tlakov. Zrážky čiernych dier aj neutrónových hviezd boli nedávno pozorované observatóriami gravitačných vln LIGO a VIRGO. Zhruba v tejto dobe, kedy bola k potrebnej citlivosti privedená konštrukcia detektorov gravitačných vln, dospel aj obor numerickej relativity. Ten dokázal pre pozorované gravitačné vlny urobiť výpočty simulujúce podobu zrážok s dostatočnou presnosťou. Jedným z krokov, ktoré bolo predtým potreba vyriešiť, bola analýza povahy Einsteinových rovníc z hľadiska matematických vlastností, pretože len dobre formulované rovnice je možné riešiť na počítači.

Dlho pred týmito nedávnymi úspechmi boli Einsteinové rovnice riešené prostredníctvom matematických postupov. Osvedčenou metódou bolo využiť relevantné symetrie, ktoré viedli k značnému zjednodušeniu a umožnili nájsť riešenie v analytickej podobe, teda popísané matematickým vzorcom. Rovnako dôležitým predpokladom takýchto riešení, bol vákuový charakter priestoročasu. Analogicky ako aj nekonečné hodnoty potenciálov v miestach hmotných bodov v newtonovej fyzike, vedie tento predpoklad k tomu, že hmota pri takýchto riešeniach Einsteinových rovníc je zdánlivo sústredená do oblastí, ktoré predstavujú singulárne miesta riešenia. V rámci všeobecnej teórií relativity existujú postupy, ako tieto oblasti skúmať avšak postup značne komplikuje nelinearita Einsteinových rovníc. Výnimkou sú čierne diery, kde sú takéto oblasti skryté za horizontom události a sú považované za miesta, kde končí platnosť klasickej fyziky a kde nastupuje doposiaľ neznáma kvantová gravitácia. Ale existujú aj ďalšie riešenia, kde singularita nie sú skryté za horizontom a sú tak považované za nefyzikálne.

Hľadnie tzv. vnútorných riešení, ktoré budia známe analytické vonkajšie riešenie má dlhú tradíciu. Pri niektorých riešeniach boli však nájdené matematické argumenty, že dané vonkajšie riešenie nemôže mať za zdroj objekt tvorený ideálnou kvapalinou. Výnimkou je dôležitý prípad TOV rovnice popisujúcej štruktúru sféricky symetrickej hviezdy, ktorá mimo hviezdu budí rovnaké pole ako Schwarzschildova čierna diera rovnakej hmotnosti. Toto je ale moderný pohľad, keďže keď Tollman, Oppenheimer a Volkoff prišli so svojími riešeniami v roku 1939, pojem čiernej diery ešte neexistoval. Je prirodzené, že ideálna kvapalina zaujme pri statickom prípade sféricky symetrický tvar a preto ostatné analytické riešenia, ktoré nie sú sféricky symetrické, budú musieť byť popísané inou látkou, ako je statická ideálna tekutina.

Existuje aj možnosť nahradiť singulárne sa chovajúce vákuové riešenie vnútri nejakej uzavretej plochy nejakou, dostatočne hladkou metrikou a skúmať dosa-

dením do Einsteinových rovníc, aký zdroj jej odpovedá. Jeho vlastnosti ide ďalej skúmať z pohľadu všeobecných požiadavok kladených na ľubovoľnú hmotu vo všeobecnej relativite, teda pozitivitu hustoty energie a jej toku z pohľadu rôznych pozorovateľov. Tieto kritéria sa nazývajú energetické podmienky. V princípe ide o priamočiary problém, ale komplikovaná štruktúra Einsteinových rovníc prináša rôzne komplikácie.

V tejto práci budeme skúmať túto konštrukciu zdrojov pre sféricky symetrickú Schwarzschildovú metriku, vrátane prípadov zdrojov, ktoré nie sú sféricky symetrické a pre tvz. Curzonové riešenie, ktorého zdroj našiel v roku 2013 Bonnor [1]. Táto práca tak predkladá niekoľko základných príkladov, ktorých vlastnosti by mohli inšpirovať budúci záujem o vnútorné riešenia analyticky daných statických vákuových priestoročasov metódou napájania. Podobne ako u analýzy povahy Einsteinových rovníc z hľadiska ich matematických vlastností za účelom ich správneho riešenia v numerickej relativite, kde stručne povedané bolo potreba dostať na správne miesto druhé časové parciálne derivácie metriky, aj u tu uvažovanej metódy hladkého napájania vnútorných riešení, ukazuje táto bakalárska práca, ako kľúčová je v Einsteinových rovniciach určujúcich hustoty a tlaky prítomnosť, respektíve neprítomnosť druhých derivácií rôznych metrických funkcií v smere kolmom k rozhraniu medzi vnútorným a vonkajším riešením.

Kapitola 1

Klasická teória gravitácie

K popisu gravitačného poľa v jazyku newtonovskej klasickej mechaniky, definujeme potenciál $\Phi(x, y, z)$, ktorý spĺňa Poissonovu rovnicu

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho. \quad (1.1)$$

Výhodou tohto popisu je, že namiesto hľadania troch komponentov vektorovej funkcie, stačí vyriešiť parciálnu diferenciálnu rovnicu pre jedinú funkciu troch premenných, z ktorej výsledné pole získame zapôsobením gradientu, $\vec{g}(\vec{x}) = -\nabla\Phi(\vec{x})$. Napriek tomu, pri komplikovanejších pravých stranách sa riešenie rovnice 1.1, kvôli výskytu odmocnín v integráloch hľadá ťažko. Pomocou metódy Greenovej funkcie sme schopný analytické riešenie vyjadriť len v integrálnom tvare a ďalšie skúmanie riešenia vyžaduje numerické metódy. V snahe vyhnúť sa podobnému problému môžeme zdroje gravitačných polí skúmať tak, že na známe riešenie rovnice

$$\Delta\Phi = 0 \quad (1.2)$$

napojíme na hranici nejakej oblasti vnútorný potenciál spôsobom, ktorým vytvoríme nový dostatočne hladký potenciál gravitačného poľa. Dostatočná hladkosť potenciálu nie je podmienka nutná, napríklad nespojitosť v prvej derivácii na rozhraní odpovedá plošnému zdroju v lineárnej rovnici 1.1. Tieto zdroje sú niekedy označované ako šupky, ale v tejto práci sa nimi zaoberať nebudeme.

1.1 Regularizácia sféricky symetrického potenciálu

Gravitačný potenciál v oblasti, kde sa nenachádzajú žiadne zdroje poľa je daný riešením Laplaceovej rovnice 1.2

$$\Phi(r) = -G\frac{M}{r}, \quad (1.3)$$

kde sme označili $r = |\vec{x}|$. Takéto riešenie je platné v oblasti s nulovou hustotou telesa, teda mimo telesa. Navyše je funkcia 1.3 singulárna v počiatku, čo je dôvodom aproximácie reálneho telesa pomocou hmotných bodov. Na to, aby sme obišli tieto komplikácie zavedieme nový potenciál, ktorý sa na hranici nami zvolenej oblasti bude zhodovať funkčnou hodnotou a hodnotou prvej derivácie s

príslušnými hodnotami potenciálu 1.3. Pre sférický symetrický prípad je hranica oblasti daná jednoduchou podmienkou $r = a$, ktorá hovoríme, že nami študované teleso je guľa o polomere a . Preto gravitačný potenciál takéhoto telesa zavedieme v tvare

$$\Phi(r) = \begin{cases} Ar^n + B & r \leq a \\ -G\frac{M}{r} & r > a \end{cases}. \quad (1.4)$$

Konštanty A a B dostaneme z už spomínaných podmienok aby funkcia $\Phi(r)$ bola v bode a spojitá a mala spojitú aj prvú deriváciu. Tým dostaneme sústavu dvoch rovníc

$$AR^n + B = -G\frac{M}{a} \quad (1.5)$$

$$nAR^{n-1} = G\frac{M}{a^2}. \quad (1.6)$$

Vyriešením tejto sústavy dostaneme pre $r \leq a$ potenciál vo vnútri telesa

$$\Phi^{in}(r) = \frac{GM}{na^{n+1}}(r^n - (n+1)a^n). \quad (1.7)$$

Po zapôsobení Laplaceovým operátorom dostaneme výsledok

$$\Delta\Phi^{in} = (n+1)\frac{GM}{a^{n+1}}r^{n-2}. \quad (1.8)$$

Z tohto výsledku je vidieť, že pre rozumný model hustoty telesa je vhodné voliť $n = 2$, keďže voľba $n > 2$ by viedla k nulovej hustote telesa v počiatku. Pre takto zvolené n dostaneme pomocou rovnice 1.1 hustotu telesa

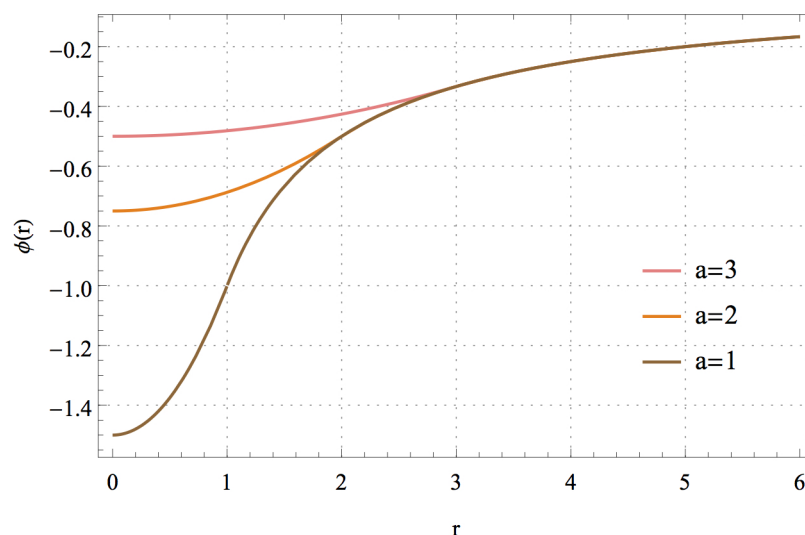
$$\rho = \frac{3}{4}\frac{M}{\pi a^3} = \frac{M}{V_k(a)}. \quad (1.9)$$

Výsledok určite neprekvapí, pretože sme dostali hustotu telesa rovnú hmotnosti telesa podelenej objemom gule $V_k(a)$ o polomere a . Tým sme kompletne určili potenciál vnútri aj mimo sféricky symetrické teleso

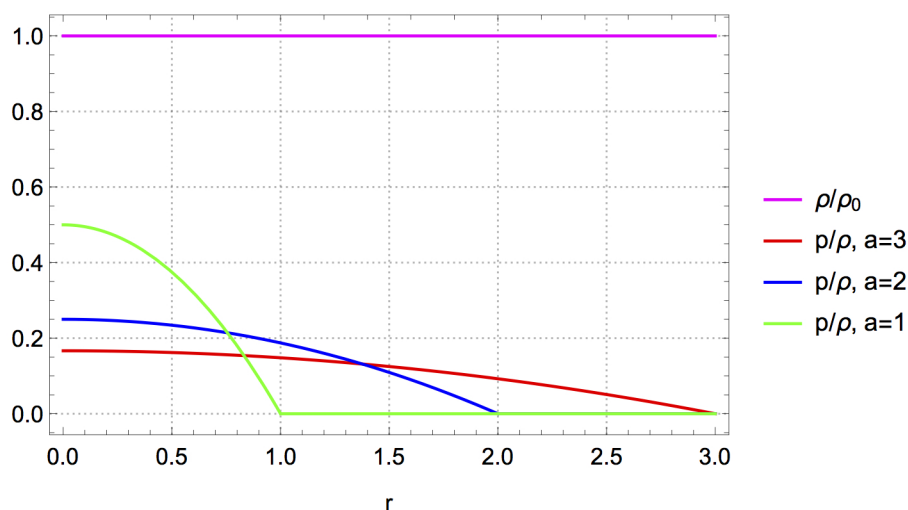
$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{GM}{2a^3}(r^2 - 3a^2) & r \leq a \\ -G\frac{M}{r} & r > a \end{cases} \quad (1.10)$$

a navyše sme získali výsledok zhodný s riešením Poissonovej rovnice 1.1 s konštantnou hustotou $\rho = M/V_k(a)$, bez toho aby sme Poissonovu rovnicu riešili. Pre rôzne hodnoty polomeru telesa je graf tejto funkcie uvedený na obrázku 1.1, kde sme zvolili jednotky $G = 1$ a $M = 1$. Zostáva nám vyriešiť problém hydrostatickej rovnováhy telesa. Pre sférický symetrický problém budeme funkciu tlaku uvažovať závislú iba na vzdialenosti od centra r . Potom môžeme rovnicu hydrostatickej rovnováhy písať v tvare

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{d\Phi(r)}{dr}\rho(r). \quad (1.11)$$



Obr. 1.1: Závislosť potenciálu 1.10 na r , pre rôzne hodnoty rozmerov telesa



Obr. 1.2: Graf hustoty a tlaku vnútri telesa pre rôzne polomery telesa

Túto rovnicu môžeme integrovať, čím získame výsledok

$$p(r) = - \int \frac{d\Phi(r)}{dr} \rho(r) dr. \quad (1.12)$$

Dosadením potenciálu pre sféricky symetrické teleso konštantnej hustoty z rovnice 1.10 získame výraz pre tlak vnútri telesa

$$p(r) = - \int \frac{3GM^2}{4\pi a^6} r dr = - \frac{3GM^2}{8\pi a^6} r^2 + C, \quad (1.13)$$

kde integračnú konštantu zafixujeme požiadavkom, že tlak na povrchu telesa zmizne, teda $p(a) = 0$. Použitím tohto požiadavku získame konštantu

$$C = \frac{3GM^2}{8\pi a^4}, \quad (1.14)$$

čím sme jednoznačne určili hľadanú funkciu tlaku vnútri telesa

$$p(r) = \frac{3GM^2}{8\pi R^6} (a^2 - r^2). \quad (1.15)$$

Táto závislosť, spolu s hustotou telesa je uvedená na obrázku 1.2. V grafe používame relativistické jednotky, teda $G = 1 = c$ a uvedený tlak v grafe je p/c^2 , pričom sme ešte hmotnosť telesa volili $M = 1$. Aby sme do grafu vynášali bezrozmerné veličiny je tlak podelený hustotou telesa a hustota je podelená strednou hustotou definovanou ako

$$\rho_0 = \frac{3M}{4\pi a^3}. \quad (1.16)$$

1.2 Regularizácia všeobecného potenciálu

Pri regularizácii všeobecného potenciálu využijeme vlastnosti riešenia úlohy bi-Laplacovej rovnice s Dirichletovými hraničnými podmienkami

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{v } \Omega \\ u = f & \text{na } \partial\Omega \\ \partial_{\vec{n}} u = g & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.17)$$

Riešenia tejto úlohy sa hodia na napájanie na existujúce singulárne riešenia Laplaceovej rovnice, pretože takto zadaná úloha má tú vlastnosť, že jej riešenie minimalizuje funkcionál

$$I[w] = \int_{\Omega} (\Delta w)^2 dV, \quad (1.18)$$

kde funkcie w patria do množiny

$$A = \left\{ w \in C^4(\bar{\Omega}), w = f \text{ na } \partial\Omega, \partial_{\vec{n}} w = g \text{ na } \partial\Omega \right\}.$$

Toto tvrdenie si následne dokážeme.

Teorém 1.1. Nech $u \in C^4(\bar{\Omega})$ a rieši úlohu 1.17, potom

$$I[u] = \min_{w \in A} I[w]. \quad (1.19)$$

Taktiež platí obrátené tvrdenie, ak $u \in A$ a spĺňa rovnicu 1.19, potom u rieši úlohu 1.17.

Dôkaz. Voľme $w \in A$ ľubovoľné. Keďže u spĺňa úlohu 1.17 dostaneme

$$0 = \int_{\Omega} (u - w) \Delta^2 u dV.$$

Použitím Greenovej identity prepíšeme výraz na

$$0 = \int_{\partial\Omega} (u - w) \nabla(\Delta u) \cdot \vec{dS} - \int_{\Omega} \nabla(u - w) \cdot \nabla(\Delta u) dV.$$

Integrál cez hranicu množiny Ω bude nulový, keďže na hranici platí $u - w = f - f = 0$. Na integrál cez množinu Ω znova použijeme Greenovu identitu a prepíšeme ho do tvaru

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u \Delta(u - w) dV - \int_{\partial\Omega} \Delta u \nabla(u - w) \cdot \vec{dS},$$

kde integrál cez hranicu je opäť nulový, keďže tam platí $\partial_{\vec{n}}u - \partial_{\vec{n}}w = g - g = 0$. Ďalej môžeme uvažovať iba normálovú deriváciu, pretože plošný element môžeme zapísať ako $\vec{dS} = \vec{n}dS$, kde vektor \vec{n} je normála k ploche a tento člen vystupuje v skalárnom súčine s gradientom. Tým sme dospeli k výrazu

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u \Delta(u - v) dV \quad (1.20)$$

a po jednoduchej úprave dostaneme výsledok

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dV &= \int_{\Omega} \Delta u \Delta w dV \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\Delta u)^2 + \frac{1}{2} (\Delta w)^2 dV, \end{aligned}$$

kde sme využili nerovnosti $\Delta u \Delta w \leq \frac{1}{2} (\Delta u)^2 + \frac{1}{2} (\Delta w)^2$. Dospeli sme k nerovnici

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dV \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta w)^2 dV,$$

čím sme ukázali, že $I[u] \leq I[w]$ a tým sme dokázali prvú časť tvrdenia a to že u je skutočne minimizér funkcionálu 1.18. Druhú časť dokážeme následovne. Vieme že u spĺňa rovnicu 1.19, potom reálna funkcia $f(\epsilon) = I[u + \epsilon v]$, ($\epsilon \in \mathbb{R}$) má minimum v bode $\epsilon = 0$, keďže funkcia $u + \epsilon v \in A$. Z toho dostávame aj požiadavky na ľubovoľnú funkciu $v \in C^\infty(\Omega)$, ktorá musí spĺňať $v = 0$ na $\partial\Omega$ a $\partial_{\vec{n}}v = 0$ na $\partial\Omega$. Dosadením do funkcionálu 1.18 dostaneme vzťah

$$f(\epsilon) = I[u + \epsilon v] = \int_{\Omega} (\Delta u)^2 + 2\epsilon \Delta u \Delta v + \epsilon^2 (\Delta v)^2 dV.$$

Vieme, že funkcia $f(\epsilon)$ má v bode $\epsilon = 0$ minimum, a preto spĺňa rovnicu $f'(\epsilon = 0) = 0$. Tým dospejeme k výrazu

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dV.$$

Dvojnásobným použitím Greenovej identity upravíme výraz na tvar

$$0 = \int_{\partial\Omega} \Delta u \nabla v \cdot \vec{dS} - \int_{\partial\Omega} v \nabla(\Delta u) \cdot \vec{dS} + \int_{\Omega} v \Delta^2 u dV,$$

kde oba integrály cez $\partial\Omega$ sú rovné nule, čo vyplíva z podmienok kladených na funkciu v . Dospeli sme teda k rovnici

$$0 = \int_{\Omega} v \Delta^2 u dV,$$

ktorá má byť splnená pre ľubovoľnú funkciu v a z toho plynie, že musí byť splnená rovnica $\Delta^2 u = 0$, čím sme dokázali tvrdenie. \square

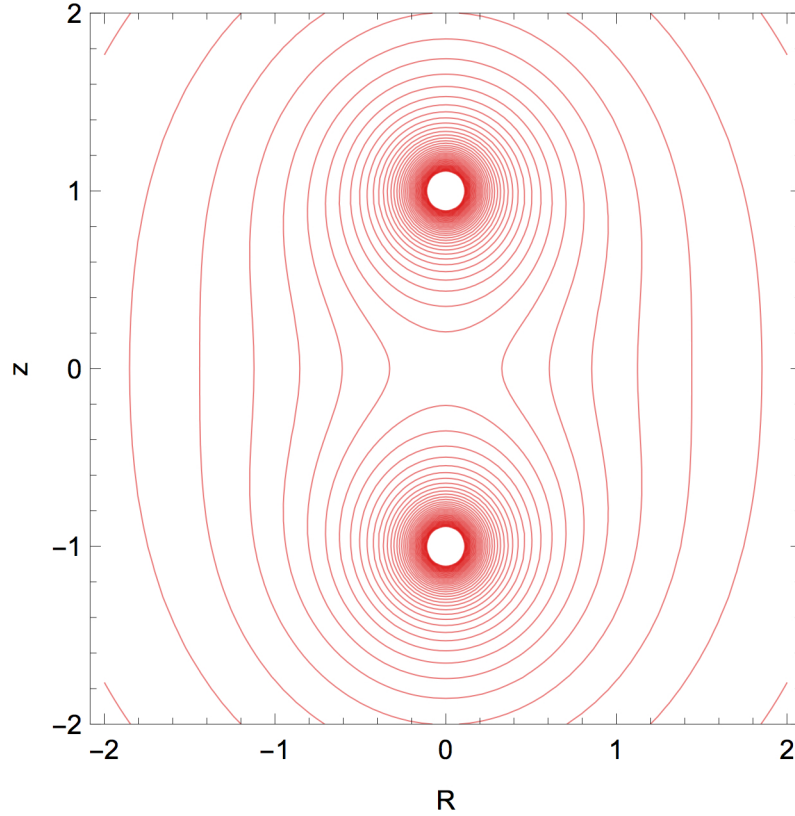
Konkrétne si postup ukážeme na regularizácii potenciálu dvoch hmotných bodov hmotnosti M a symetricky umiestnených okolo počiatku.

1.3 Regularizácia potenciálu dvoch hmotných bodov na ose

Zvolíme si súradný systém tak, aby sa hmotné body o hmotnosti M , nachádzali na ose z v bodoch $z = 1$ a $z = -1$. Gravitačný potenciál takéhoto systému je

$$\Phi(R, z) = -GM \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z+1)^2}} \right), \quad (1.21)$$

kde R a z sú cylindrické súradnice. Problémovými miestami sú body na ose $z = 1$ a $z = -1$, čo je ilustrované na obrázku 1.3. Preto túto oblasť nahradíme guľou o polomere a , kde na hranici tejto oblasti budeme požadovať podmienku spojitého potenciálu a na základe bi-Laplaceovej úlohy stačí na hranici požadovať zhodu normálovej derivácie potenciálov. Aby sme dosiahli tento cieľ, prevedieme najskôr potenciál do sférických súradníc a následne urobíme jeho multipólový rozvoj. Pomocou transformácie medzi sférickými a cylindrickými súradnicami $R = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$ dostaneme



Obr. 1.3: Gravitačné pole budené dvoma hmotnými bodmi umiestnenými v $z = -1$ a $z = 1$

$$\Phi(r, \theta) = -GM \left(\frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}} + \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 + 2r \cos \theta}} \right). \quad (1.22)$$

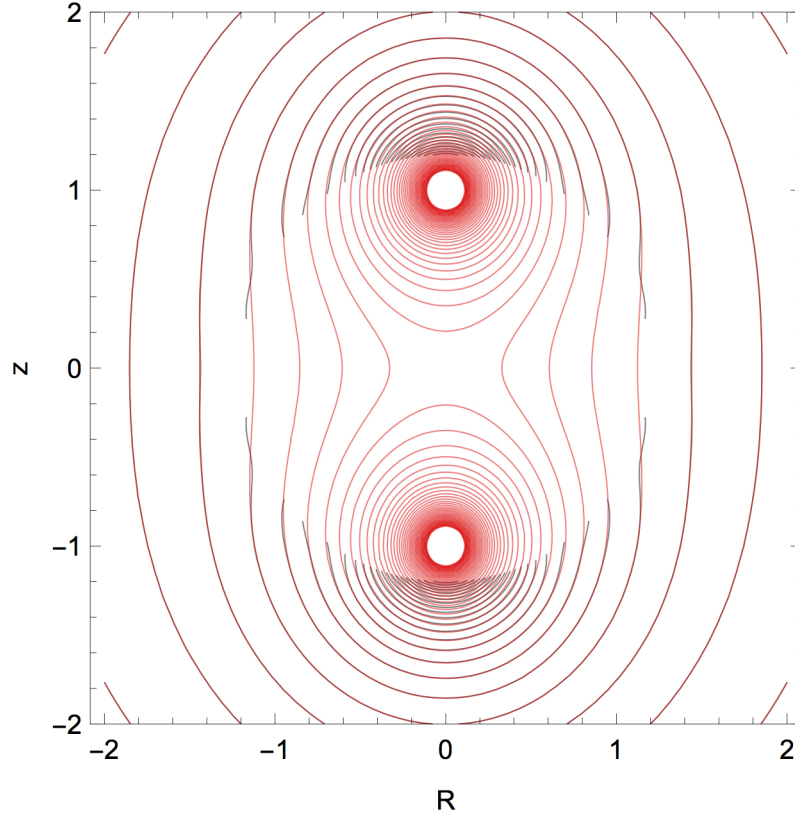
Bude nás zaujímať pole ďaleko od zdroja, preto výraz prevedieme do tvaru

$$\Phi(r, \theta) = -GM \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \cos \theta}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r} \cos \theta}} \right). \quad (1.23)$$

Ak teraz urobíme Taylorov rozvoj v $\frac{1}{r}$, výrazu 1.23 v okolí 0, získame multipólový rozvoj potenciálu

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= -GM \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} (P_l(\cos \theta) + P_l(-\cos \theta)) = \\ &= -GM \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} (1 + (-1)^l) P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (1.24)$$

O správnosti rozvoja sa môžeme presvedčiť na obrázku 1.4, kde do rovnakého grafu bol vynesovaný potenciál 1.21 a rozvoj 1.24, pričom sme použili prvých štyroch členov rozvoja. Výrazy $P_l(\cos \theta)$ sú Legenderevé polynómy a v rovnici 1.24 sme



Obr. 1.4: Porovnanie multipólového rozvoja 1.24 s potenciálom 1.21

využili ich vlastnosti $P_l(-\cos \theta) = (-1)^l P_l(\cos \theta)$. Keďže bi-Laplaceovu rovnicu riešia kombinácie $r^l P_l(\cos \theta)$ a $r^{l+2} P_l(\cos \theta)$, pokúsime sa pomocou nich vytvoriť potenciál, ktorý bude spĺňať okrajové podmienky bi-Laplaceovej úlohy. Preto zvolíme vnútorný gravitačný potenciál ako

$$\Phi^{in}(r, \theta) = -GM \sum_{l=0}^{\infty} [A_l f_l(r) + B_l g_l(r)] P_l(\cos \theta), \quad (1.25)$$

kde funkciu $f(r)$ budeme voliť tak, aby $f(a) = 1$ a $f'(a) = 0$, zatiaľ čo na funkciu $g(r)$ budeme klásť podmienky $g(a) = 0$ a $g'(a) = 1$. Potom konštanty A_l a B_l sú rovné

$$A_l = \frac{1 + (-1)^l}{a^{l+1}}, \quad B_l = -\frac{(l+1)(1 + (-1)^l)}{a^{l+2}}. \quad (1.26)$$

Volbou funkcií

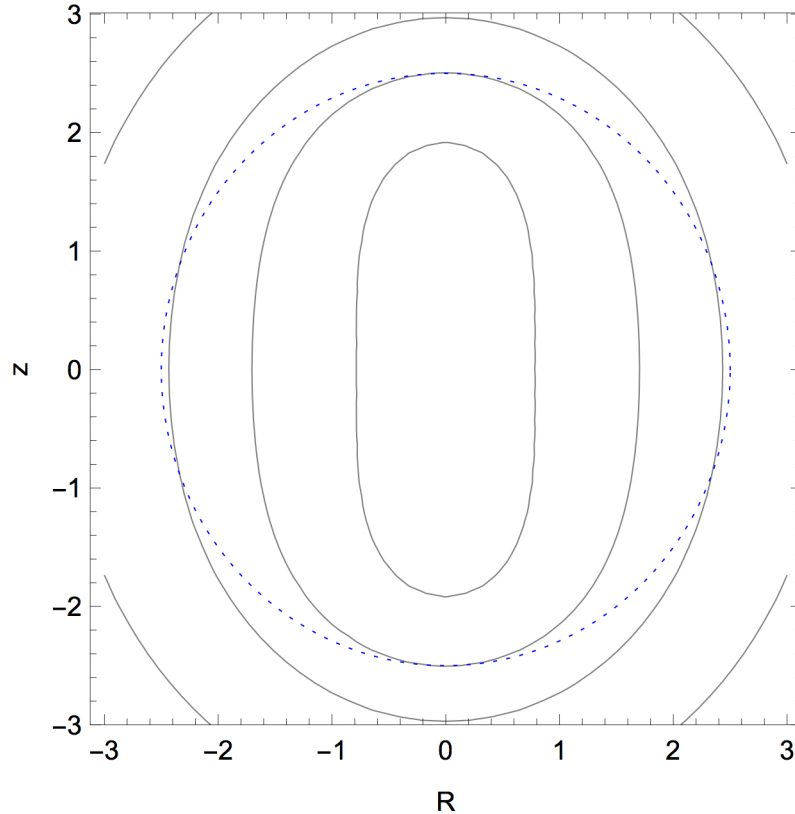
$$f_l(r) = -\frac{r^l (lr^2 - a^2(l+2))}{2a^{l+2}} \quad (1.27)$$

$$g_l(r) = \frac{(r^2 - a^2)r^l}{2a^{l+1}} \quad (1.28)$$

splníme vyššie spomenuté požiadavky a tým sa nám podarilo napojiť potenciál dvoch hmotných bodov hladkou nesingulárnou funkciou. Celkový potenciál takého telesa je

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} -GM \sum_{l=0}^{\infty} [A_l f_l(r) + B_l g_l(r)] P_l(\cos \theta) & r \leq a \\ -GM \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} (1 + (-1)^l) P_l(\cos \theta) & r > a, \end{cases} \quad (1.29)$$

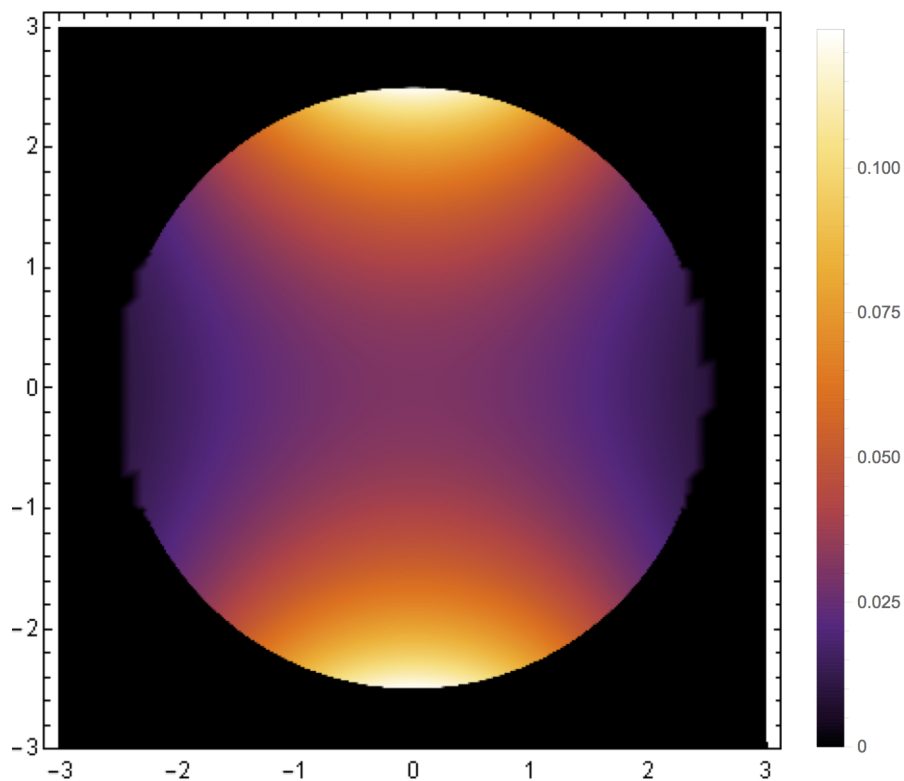
Pričom konštanty A_l a B_l sú určené rovnicou 1.26. Ilustrácia gravitačného poľa



Obr. 1.5: Gravitačné pole telesa s rozmerom $a = 2.5$, po napojení potenciálu hladkou funkciou

budeného takto zkonštruovaným telesom je uvedená na obrázku 1.5, kde je pre-rušovanou čiarou vyznačené teleso o polomere $a = 2.5$. Pomocou rovnice 1.1

spočítame hustotu tohto telesa. Numerická aproximácia hustoty telesa vzniknutého regularizáciou potenciálu je uvedená na obrázku 1.6, v ktorom sme využili prvých desať členov rady rozvoja hustoty.



Obr. 1.6: Graf hustoty telesa pre $a = 2.5$

Kapitola 2

Zdroje statických riešení Einsteinových rovníc

Pri prechode od newtonovskej k Einsteinovej gravitácii sa mení hlavný objekt popisu. Od popisu gravitačného poľa pomocou potenciálu prechádzame k popisu štvor-dimenzionálneho časopriestoru, kde gravitáciu, teda zakrivenie časopriestoru, popisujeme pomocou metrických funkcií. Cieľom tejto kapitoly bude rozšíriť metódu popísanú v prvej kapitole do jazyka Einsteinovej teórie. Poľné rovnice v einsteinovej teórii majú tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Prakticky rovnica 2.1, predstavuje sadu desiatich parciálnych diferenciálnych rovníc druhého rádu pre desať neznámych metrických funkcií. Nájsť však riešenie pre túto sadu rovníc je problematické. Táto rovnica vytvára veľmi úzke spojenie medzi zdrojmi gravitačného poľa a ich vývojom, takže korektne by sa pohyb hmoty a zakrivenie časopriestoru malo riešiť súčasne. Táto okolnosť vytvára Einsteinove rovnice so zdrojmi ťažko riešiteľnými. Jednoduchšie je nájsť riešenie vákuové, teda s nulovou pravou stranou, ktoré taktiež predstavuje časopriestor mimo zdrojov. Takých riešení existujú triedy viz. [2]. V tejto kapitole využijeme väčšej znalosti vákuových riešení tak, že na známe riešenie spojito napojíme metrické funkcie a z Einsteinových rovníc zistíme príslušný tenzor energie a hybnosti a nájdeme aproximáciu reálnej látky, generujúcej dané pole. Predtým ako sa pustíme do vyšetrovania však pripomenieme jedno presné vnútorné riešenie Einsteinových rovníc.

2.1 TOV riešenie

Za predpokladu sférickej symetrie ukázali nezávisle Tolman [3] a Oppenheimer a Volkoff [4], že je možné nájsť a riešiť rovnice pre funkcie popisujúce hustotu a tlak sfériccky symetricky rozloženej hmoty budiacej mimo teleso Schwarzschildovo riešenie. Tieto tzv. TOV riešenia majú dnes miesto v učebniciach relativity ako napríklad Stephani [5], z ktorej v tejto sekcii čerpáme odvodenie. Riešenie pre látku s konštantnou hustotou nám ďalej poslúži ako ideálny vzor vnútorného riešenia, ktoré budeme môcť porovnávať s vlastnosťami nami nájdenej látky pomocou metódy napájania metrických funkcií. Na začiatok riešenia zadefinujeme

tenzor energie a hybnosti modelovanej látky. Pre jednoduchosť budeme uvažovať teleso modelované pomocou ideálnej tekutiny, pre ktorú definujeme tenzor energie a hybnosti

$$T_{\alpha\beta} = \left(\mu + p/c^2\right) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}. \quad (2.2)$$

Ďalej budeme predpokladať že teleso je v našom súradnom systéme v pokoji a preto volíme

$$u^\alpha = \left(c e^{-\nu/2}, 0, 0, 0\right). \quad (2.3)$$

Ako v prípade vákuového Schwarzschildovho riešenia sa budeme pokúšať nájsť riešenie sféricky symetrické a statické. Preto metrické funkcie budeme voliť nezávisle na čase a metriku budeme môcť voliť v tvare

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} c^2 dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.4)$$

Teraz zostáva už len dosadiť do rovnice 2.1 čím dospejeme k vzťahom

$$-\kappa c^2 \mu = -e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (2.5)$$

$$\kappa p = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (2.6)$$

$$\kappa p = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right). \quad (2.7)$$

Pre nájdenie riešenia by sme potrebovali pridať stavovú rovnicu $f(\mu, p) = 0$, aby sme mohli vyriešiť túto sústavu štyroch rovníc pre naše štyri neznáme funkcie μ, p, λ, ν . Namiesto tejto cesty však zvolíme jednoduchšiu. Pomocou Bianchiho identity

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \kappa T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.8)$$

ktorá je obdobou zákona zachovania energie, sa analogicky ako v klasickej mechanike využitím integrálov pohybu riešenie uľahčí. Riešenie rovnice $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ je ekvivalentné s riešením rovníc 2.1. Keďže v statickom riešení zakazujeme závislosť na čase, platí

$$\mu_{,\alpha} u^\alpha = 0, \quad p_{,\alpha} u^\alpha = 0, \quad u^\alpha{}_{;\alpha} = 0, \quad (2.9)$$

potom rovnica

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \left[\left(\mu + p/c^2 \right) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} \right]_{;\beta} \quad (2.10)$$

prejde do tvaru

$$p' + \left(\mu + p/c^2 \right) u_{r;t} u^t = p' - \left(\mu + p/c^2 \right) \Gamma_{rt}^t u_t u^t = 0 \quad (2.11)$$

a znej dostaneme rovnicu

$$p' = -\frac{1}{2} \nu' (p + \mu c^2). \quad (2.12)$$

Táto rovnica je ekvivalentná s rovnicami 2.5 až 2.7 a preto ňou môžeme jednu z rovníc nahradiť. Ďalej budeme riešiť rovnicu 2.5. Tá sa dá upraviť do tvaru

$$\kappa \mu c^2 r^2 = - \left(e^{-\lambda} r \right)' + 1. \quad (2.13)$$

Túto rovnicu integrujeme a zároveň z nej môžeme vyjadriť metrickú funkciu

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (2.14)$$

kde $m(r)$ je definované ako

$$m(r) = \frac{1}{2}\kappa c^2 \int_0^r \mu(x)x^2 dx, \quad (2.15)$$

pričom funkcia $m(r)$ je priamo úmerná hmotnosti telesa. Týmto sme vyjadrili jednu metrickú funkciu bez potreby použitia stavovej rovnice. Pre riešenie ďalších rovníc budeme potrebovať stavovú rovnicu zafixovať. Najjednoduchšia možnosť je model telesa konštantnej hustoty

$$\mu = konst. \quad (2.16)$$

S touto voľbou môžeme integrovať priamo rovnicu 2.12 a dostaneme

$$p + \mu c^2 = B e^{\nu/2}. \quad (2.17)$$

Samozrejme rovnicu 2.14 môžeme teraz zapísať v tvare

$$e^{-\lambda} = 1 - Ar^2, \quad A = \frac{1}{3}\kappa\mu c^2. \quad (2.18)$$

Nakoniec vyriešime kombináciu rovníc 2.5 a 2.6, kde sme odčítali rovnicu 2.5 od 2.6, čím dostaneme rovnosť

$$\kappa(\mu c^2 + p) = B e^{\nu/2} = e^{-\lambda}(\lambda' + \nu')/r. \quad (2.19)$$

Do tejto rovnice môžeme dosadiť z 2.14 a tým prevedieme rovnicu na tvar

$$e^{\nu/2}(2A - Ar\nu' + \nu'/r) = \kappa B \quad (2.20)$$

a aby sme rovnicu 2.20 jednoducho vyriešili prevedieme ju na konečný tvar

$$2(1 - Ar^2)^{3/2} \left[e^{\nu/2} (1 - Ar^2)^{-1/2} \right]' = \kappa B r. \quad (2.21)$$

Jednoduchou integráciou sa nám teraz podarí dostať výraz aj pre druhú metrickú funkciu

$$e^{\nu/2} = \frac{\kappa B}{2A} - D\sqrt{1 - Ar^2}. \quad (2.22)$$

Čím sme kompletne vyriešili našu úlohu. Zostáva nám určiť konštanty B a D , ktoré určíme napojením vnútorného Schwarzschildovho riešenia na vonkajšie. Vonkajšie Schwarzschildovo riešenie je dané metrikou

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.23)$$

Keďže v Einsteinových rovniciach vystupujú druhé derivácie metriky, budeme od nášho riešenia požadovať ich existenciu. V ideálnom prípade by sme požadovali, že metrické funkcie budú mať spojité funkčné hodnoty a spojité prvé derivácie na

hranici telesa. Z riešenia nám ale zostali dva voľné parametre, navyše by bolo dobré nájsť vzťah hustoty μ k hmotnosti telesa M vystupujúcej vo vonkajšom riešení. Preto budeme klásť len podmienky spojitej metriky a fyzikálne motivavej podmienky nulového tlaku na hranici telesa, aby sme určili konštanty A , B , D . Z týchto podmienok dostaneme rovnice

$$1 - Aa^2 = 1 - \frac{2M}{a} \quad (2.24)$$

$$\left(\frac{\kappa B}{2A} - D\sqrt{1 - Aa^2}\right)^2 = 1 - \frac{2M}{a} \quad (2.25)$$

$$3AD\sqrt{1 - Aa^2} = \frac{\kappa B}{2}, \quad (2.26)$$

kde sme ako a označili polomer telesa a tlak p sme vyjadrili z rovnice 2.17 dosadením z 2.22 ako

$$p = Be^{\nu/2} - \mu c^2 = \frac{1}{\kappa} \frac{3AD\sqrt{1 - Ar^2} - \kappa B/2}{\kappa B/(2A) - D\sqrt{1 - Ar^2}}. \quad (2.27)$$

Riešením týchto rovníc sú konštanty

$$M = \frac{1}{2}Aa^3 = \frac{1}{6}\kappa\mu c^2 a^3 \quad (2.28)$$

$$\kappa B = 3A\sqrt{1 - Aa^2} \quad (2.29)$$

$$D = \frac{1}{2}. \quad (2.30)$$

Tým sme kopeľne vyriešili úlohu a pre teleso s konštantnou hustotou μ sme dostali metriku vnútri telesa generovanú tvarom

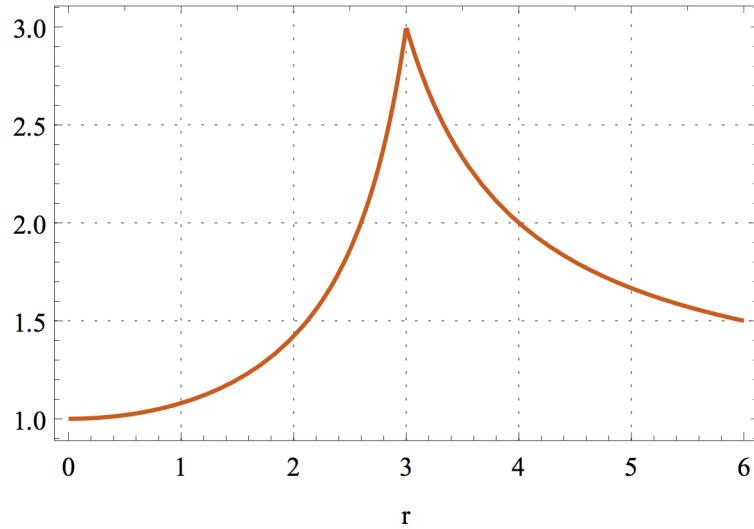
$$ds^2 = - \left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - Aa^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - Ar^2} \right]^2 c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - Ar^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.31)$$

kde hustota súvisí s hmotnosťou pomocou vzťahu 2.28. Keďže ďalej sa nebudeme venovať presnému riešeniu Einsteinových rovníc, uvádzame toto riešenie ako odkaz pre porovnanie s ďalej aproximátnymi riešeniami, ktoré uvedieme v ďalších podkapitolách. Nakoniec si uvedieme grafy metrických funkcií a graf hustoty a tlaku. Tieto výpočty urobíme pre jednoduchosť v relativistických jednotkách a hustotu telesa zvolíme tak aby hmotnosť bola $M = 1$, čo bude odpovedať volbe pri neskorších výpočtoch. Pre metrickú funkciu g_{rr} platí vzťah

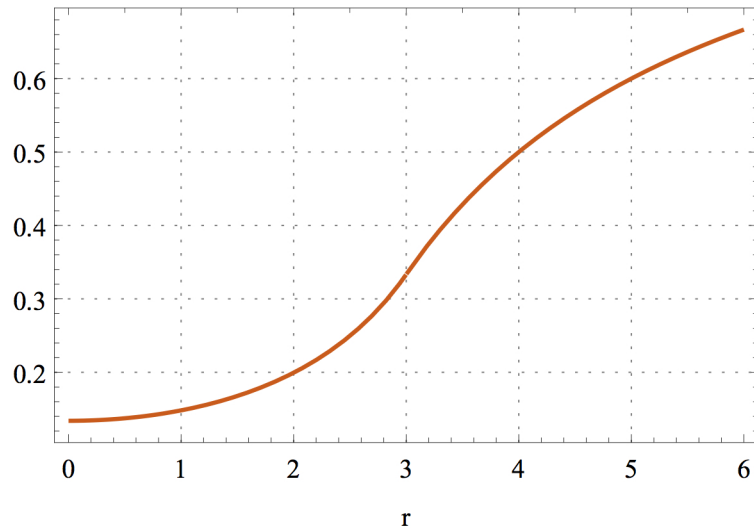
$$g_{rr} = \begin{cases} \frac{1}{1 - Ar^2} & r \leq a \\ \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & r > a \end{cases} \quad (2.32)$$

a pre funkciu g_{tt} platí

$$-g_{tt} = \begin{cases} \left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - Aa^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - Ar^2} \right]^2 & r \leq a \\ 1 - \frac{2M}{r} & r > a \end{cases} \quad (2.33)$$



Obr. 2.1: Graf funkcie g_{rr} danej vzorcom 2.32, pre $a = 3M$



Obr. 2.2: Graf funkcie $-g_{tt}$ danej vzorcom 2.33, pre $a = 3M$

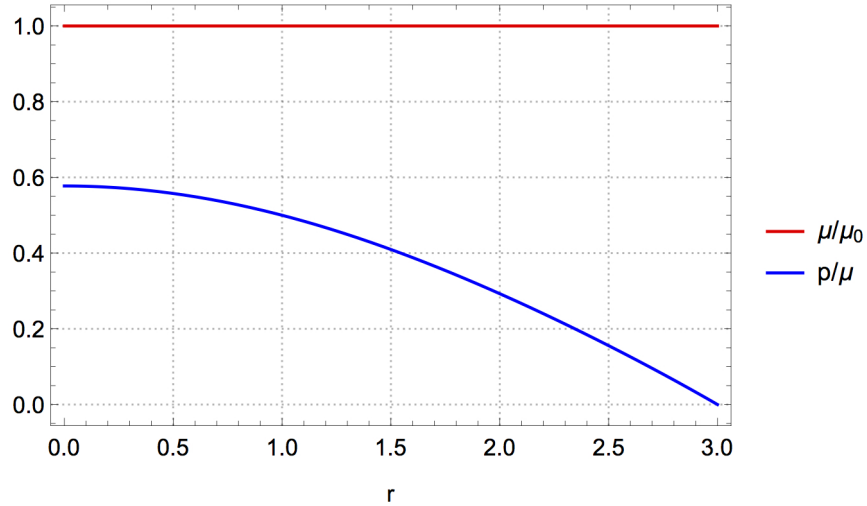
Grafy týchto funkcií sú uvedené na obrázkoch 2.1 a 2.2, kde bolo zvolené $M = 1$.

Z grafu na obrázku 2.1 si je možné všimnúť, že prvá derivácia funkcie 2.32 je na hranici telesa nespojitá, z čoho vyplýva, že druhá derivácia v tomto bode neexistuje. To je dôsledok formulácie napájacích podmienok, ktoré sme formulovali v konkrétnom súradnom systéme, kde sa nám ľahko určila hranica telesa a po integrácií nám nezostalo dostatočné množstvo voľných parametrov, aby sme splnili aj podmienky spojitej derivácie. Táto nespojitosť v tomto prípade nepredstavuje problém, keďže vo výrazoch 2.5 až 2.7 nevystupujú druhé derivácie funkcie g_{rr} , prípadne sa nespojitosť dá odstrániť vhodnou transformáciou do iného súradného systému. V poslednom rade uvedieme ešte graf hustoty a tlaku. Z tenzoru energie a hybnosti dokážeme získať principiálne tlaky, čo rozoberieme v ďalšej kapitole, v tomto modeli sme však položili tieto tlaky vo všetkých smeroch rovnaké a navyše sme predpokladali len závislosť na r , preto do grafu vynášame len jednu funkciu $p = p(r)$. Ďalej sme podľa rovnice 2.28 zvolili hustotu μ tak aby platilo $M = 1$. V grafe na obrázku 2.3 vynášame hodnotu hustoty μ delenú faktorom μ_0 , čo pred-

stavuje newtonovskú hustotu telesa a je definovaná vzťahom 1.16, kde polomer definujeme ako

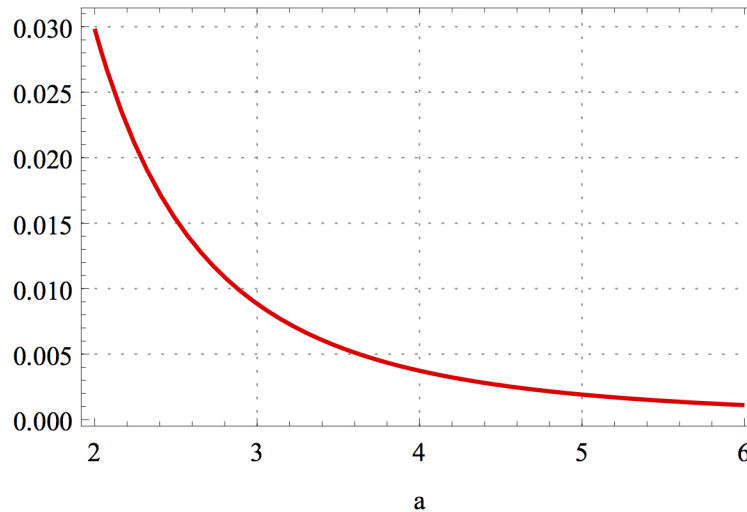
$$\bar{a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi} \left(r = a, \theta = \frac{\pi}{2} \right)} d\phi. \quad (2.34)$$

Na záver uvedieme ešte závislosť hustoty μ na polomere telesa a , obrázok 2.4.



Obr. 2.3: Graf hustoty μ a tlaku p pre $a = 3M$

Zaujímavejšia je však závislosť centrálného tlaku na polomere telesa a , ktorá udáva aspoň numerické obmedzenie na rozmer telesa. Závislosť centrálného tlaku na polomere telesa je

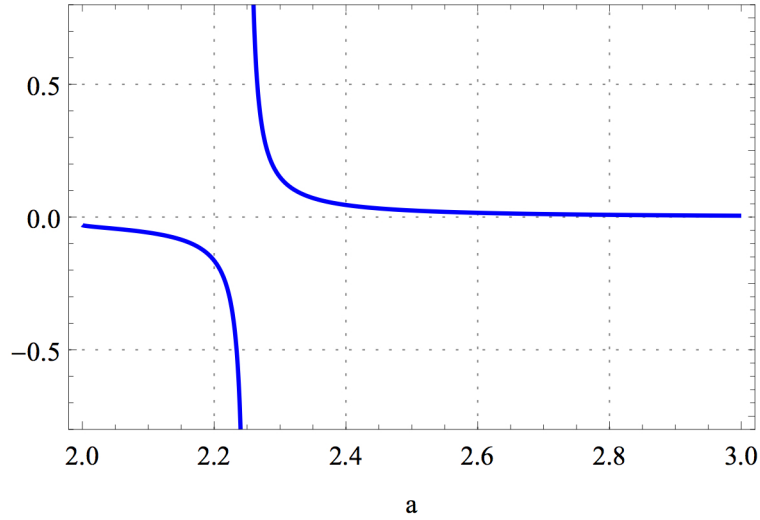


Obr. 2.4: Závislosť hustoty μ na polomere telesa a

$$p(0) = \frac{3 \left(\sqrt{\frac{a-2}{a}} - 1 \right)}{4\pi \left(3\sqrt{\frac{a-2}{a}} - 1 \right) a^3} \quad (2.35)$$

čo sme získali dosadením $r = 0$ do rovnice 3.21 a použitím konštánt z rovníc 2.28 až 2.30. Táto funkcia má singularitu v bode $a = \frac{9}{4}$ a samozrejme v okolí tohto bodu nebudú splnené dominantné energetické podmienky, ktoré sú vysvetlené v nasledujúcej sekcii. Z grafu na obrázku 2.5 je vidieť, že rozumné hodnoty

tlaku sú v okolí bodu $a = 2.3M$, čo tvorí aspoň numerickú aproximáciu platnosti vnútorného schwarzschildovho riešenia.



Obr. 2.5: Závislosť centálneho tlaku $p(0)$ na polomere telesa a

2.2 Energetické podmienky

Einsteinová teória gravitácie nekladie žiadne podmienky na to, čo je prípustný tenzor energie a hybnosti, ktorý v nich vystupuje. Táto okolnosť pripúšťa v Einsteinovej teórii existenciu hmoty v stavoch, ktoré by sa dali považovať za nefyzikálne. Preto vznikla potreba pridať do teórie ďalšie podmienky. Pre potreby tejto práce si vystačíme s nasledujúcim prehľadom spísaným podľa Wald [6]. Keďže nám ide o to aby pozorovateľné veličiny vzniknuté z tenzoru energie a hybnosti boli fyzikálne prípustné, je dobrá motivácia pozrieť sa niektoré skaláry, ktoré takto môžeme vytvoriť. Jedným z nich je Raychaudhuriho skalár, ktorý môžeme zapísať ako

$$R_{ab}\xi^a\xi^b = 8\pi \left(T_{ab}\xi^a\xi^b + \frac{1}{2}T \right) \quad (2.36)$$

Vzťah $T_{ab}\xi^a\xi^b$ vo vzorci 2.36 reprezentuje hustoty energie hmoty, ktorú by nameral pozorovateľ, ktorého štvor-rýchlosť je ξ^a . Všeobecný konsenzus je, že pre fyzikálne prípustnú hmotu, by táto veličina mala zostať nezáporná pre všetky času-podobné vektory ξ^a , teda dostávame podmienku

$$T_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0 \quad (2.37)$$

Táto podmienka je známa ako slabá energetická podmienka. Ďalší prípustný predpoklad je, že nielenže hustota ale aj tlaky hmoty nepresiahnu kritickej hodnoty tak, aby Raychaudhuriho skalár bol záporný. Z tohto predpokladu dostáva tzv. silnú energetickú podmienku

$$T_{ab}\xi^a\xi^b \geq -\frac{1}{2}T \quad (2.38)$$

Je vhodné poznamenať, že zo silnej energetickej podmienky nevyplýva slabá. Názov silná podmienka je volený pretože predpoklad 2.38 je silnejšie fyzikálne obmedzenie na teleso ako slabá energetická podmienka. Ďalšou prípustnou podmienkou je požadovať, že pre všetky do budúcnosti orientované času-podobné vektory ξ^a , $-T^a_b \xi^b$ je tiež do budúcnosti orientovaný času-podobný, alebo nulový vektor. Táto podmienka sa nazýva dominantnou energetickou podmienkou a jej fyzikálna reprezentácia je, že energia sa môže šíriť nanaajvyš rýchlou svetla. Z tejto podmienky vyplýva slabá energetická podmienka aj keď všetky tri podmienky sú matematicky nezávislé predpoklady. V bázi kde tenzor energie a hybnosti naberá diagonálny tvar a môžeme ho zapísať v tvare

$$T_{ab} = \mu t_a t_b + p_1 x_a x_b + p_2 y_a y_b + p_3 z_a z_b \quad (2.39)$$

kde $\{t^a, x^a, y^a, z^a\}$ tvorí ortonormálnu bázu vlastných vektorov s času-podobným vektorom t^a a kde vlastné čísla predstavujú hustotu energie a principiálne tlaky, môžeme energetické podmienky zapísať v nasledujúcom tvare. Slabá energetická podmienka je splnená len ak

$$\mu \geq 0, \quad \mu + p_i \geq 0 \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.40)$$

Silná energetická podmienka je ekvivalentá s

$$\mu + \sum_{i=0}^3 p_i \geq 0, \quad \mu + p_i \geq 0 \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.41)$$

a nakoniec dominantná energetická podmienka je ekvivalentná tvaru

$$\mu \geq |p_i| \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.42)$$

To znamená, že pre fyzikálne prípustné teleso diktujú energetické podmienky, že hustota telesa μ bude nezáporná, $\mu \geq 0$ a že v telese neexistujú tlaky, ktoré by absolútnou hodnotou veľkosti presahovali hustotu μ .

2.3 Regularizácia Schwarzschildovho riešenia

Vonkajšie Schwarzschildovo riešenie je statické, sféricky symetrické riešenie einsteinových rovníc 2.1 bez zdroja. Riešením je časopriestor popísaný metrikou 2.23. Toto riešenie môže predstavovať časopriestor v okolí sféricky symetrického telesa. Aby sme našli príklad telesa, ktoré by toto pole mohlo budiť, obrátíme postup použitý k nájdeniu Schwarzschildovej metriky, kde zo známych metrických funkcií vypočítame pomocou rovníc 2.1 tenzor energie a hybnosti. Polomer tohto telesa označíme ako a . Pre $r > a$ bude platiť Schwarzschildova metrika v tvare 2.23. Pre $r < a$ zavedieme metrické funkcie, tak aby vnútri telesa mala metrika tvar

$$ds^2 = -g_{tt}^{in} dt^2 + g_{rr}^{in} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.43)$$

Na tieto metrické funkcie budeme klást podmienky aby sa na hranici telesa zhodovala ich funkčná hodnota a prvá derivácia, s funkčnou hodnotou a prvou deriváciou metrických funkcií vonkajšieho Schwarzschildovho riešenia. Tým dostaneme

sústavu dvoch rovníc pre dve neznáme metrické funkcie g_{tt}^{in}, g_{rr}^{in} .

$$\begin{aligned} g_{tt}^{in}|_{r=a} &= g_{tt}^{out}|_{r=a} & g_{rr}^{in}|_{r=a} &= g_{rr}^{out}|_{r=a} \\ \frac{\partial g_{tt}^{in}}{\partial r}|_{r=a} &= \frac{\partial g_{tt}^{out}}{\partial r}|_{r=a} & \frac{\partial g_{rr}^{in}}{\partial r}|_{r=a} &= \frac{\partial g_{rr}^{out}}{\partial r}|_{r=a}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

kde sme označili

$$g_{tt}^{out} = 1 - \frac{2M}{r} \quad (2.45)$$

$$g_{rr}^{out} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (2.46)$$

a pre jednoduchosť ďalej označujem funkcie g_{tt}^{in} a g_{rr}^{in} ako

$$g_{tt}^{in} = g(r) \quad (2.47)$$

$$g_{rr}^{in} = f(r).$$

Singulárnu oblasť u Schwarzschildovho riešenia nahradíme vo vnútornom riešení hladkou funkciou. Preto ďalej budeme uvažovať funkcie $f(r)$ a $g(r)$ ako polynóm n -tého stupňa. Po výpočte tenzora energie a hybnosti z rovníc 2.1 budú upresnené ďalšie podmienky, ktoré budeme klásť na funkcie $f(r)$ a $g(r)$. S pomocou softwaru Mathematica viz. príloha A.1, sme našli tvar tenzoru energie a hybnosti, kde sme dosadili za metriku výraz 2.43 a použili značenie metrických funkcií 2.47. Podstatnú fyzikálnu informáciu o telese dostaneme, ak nájdeme vlastné čísla tenzoru ako

$$Det[T_{\sigma\rho} - \lambda g_{\sigma\rho}] = 0. \quad (2.48)$$

Takto nájdené vlastné čísla predstavujú veličiny ako hustotu energie μ a tlaky v príslušných súradnicových smeroch p_i , kde $i \in \{r, \theta, \phi\}$. Uvedeným postupom sme dospeli k vzťahom

$$\kappa\mu = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 f(r)} + \frac{f'(r)}{r f^2(r)} \quad (2.49)$$

$$\kappa p_r = \frac{1}{r^2 f(r)} - \frac{1}{r^2} + \frac{g'(r)}{r f(r) g(r)} \quad (2.50)$$

$$\kappa p_\theta = \frac{g''(r)}{2f(r)g(r)} + \frac{g'(r)}{2rf(r)g(r)} - \frac{(g'(r))^2}{4f(r)g^2(r)} - \frac{f'(r)g'(r)}{4f^2(r)g(r)} - \frac{f'(r)}{2rf^2(r)} \quad (2.51)$$

$$p_\phi = p_\theta. \quad (2.52)$$

Aby sme dosiahli regulárne riešenia v počiatku, je z rovnice 2.49 zrejmé, že $f'(r)$ musí byť polynóm aspoň prvého stupňa a ešte musíme požadovať podmienku $f(r=0) = 1$, zatiaľ čo z rovníc 2.50 a 2.51 vidieť, že $g'(r)$ musí byť taktiež polynóm aspoň prvého stupňa a $g(r=0) \neq 0$. Keďže sa riešením snažíme priblížiť čo najviac fyzikálnej látke, budeme voliť funkciu $f(r)$ ako

$$f(r) = 1 + Ar^2, \quad (2.53)$$

pretože ak by sme zvolili u r väčší exponent, dostali by sme v počiatku nulovú hustotu energie. Jedine funkcie, ktoré obsahujú kvadratický člen, budú mať v počiatku nenulovú hustotu. Takto zvolenú metrickú funkciu doplníme o $g(r)$, ktorú budeme pre ilustráciu metódy uvažovať v tvare

$$g(r) = B + Cr^2. \quad (2.54)$$

Po aplikácii podmienok 2.44 dostávame sadu konštant

$$A = -\frac{2M}{(2M - a)a^2}, \quad B = -\frac{3M - a}{a}, \quad C = \frac{M}{a^3}. \quad (2.55)$$

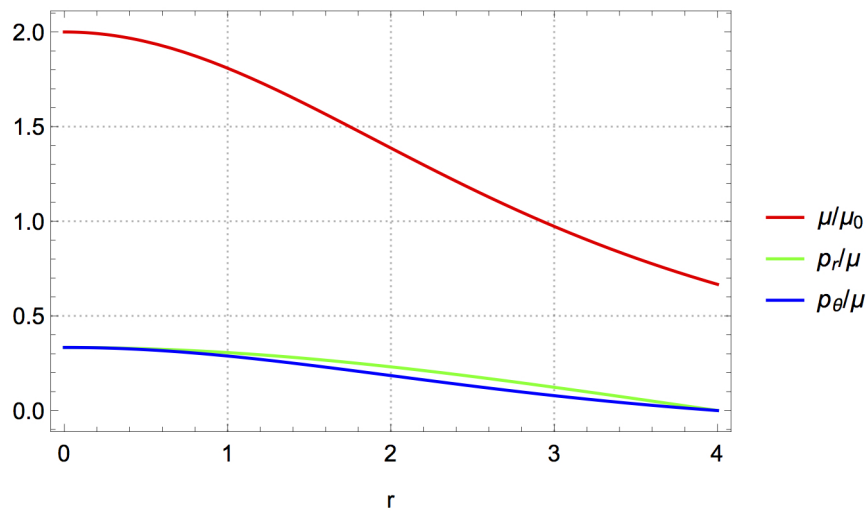
Ďalej zostáva z rovníc 2.49 až 2.51 určiť hustotu a tlaky v telese. Po príslušných výpočtoch získavame vzťahy

$$\mu = \frac{A(3 + Ar^2)}{8\pi(1 + Ar^2)^2} \quad (2.56)$$

$$p_r = \frac{-AB + C(2 - Ar^2)}{8\pi(1 + Ar^2)(B + Cr^2)} \quad (2.57)$$

$$p_\theta = \frac{-AB^2 + C^2r^2(1 - Ar^2) + BC(2 - Ar^2)}{8\pi(1 + Ar^2)^2(B + Cr^2)}. \quad (2.58)$$

Tieto funkcie vyčíslené pre $a = 4M$ a $M = 1$ sú uvedené na obrázku 2.6. Pre Schwarzschildovo riešenie bol v článku Mars [7] nájdený najmenší možný rozmer, ktorý môže reálna látka o hmotnosti M mať. Bolo zistené, že symetrické teleso o hmotnosti M musí mať polomer $a > 2M$. Explicitne sa nepodarila nájsť spodná hranica polomeru, tak aby riešenie stále opisovalo reálnu látku, avšak numerickými metódami sme boli schopný zostrojiť čím ďalej kompaktnějšíe teleso, čo budeme ďalej rozoberať v práci. Nakoniec ešte uvedieme grafy metrických



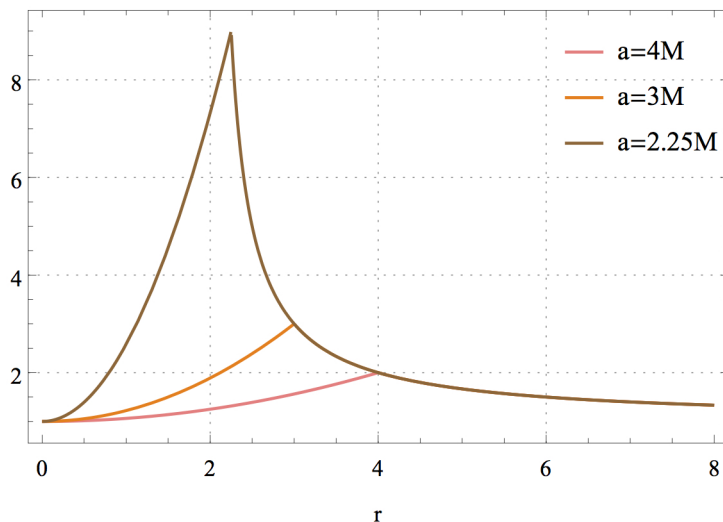
Obr. 2.6: Graf hustoty a tlakov telesa daných rovnicami 2.56 až 2.58 pre $a = 4M$ s voľbou metriky 2.53 a 2.54

fukncií, ktoré majú v tomto riešení tvar

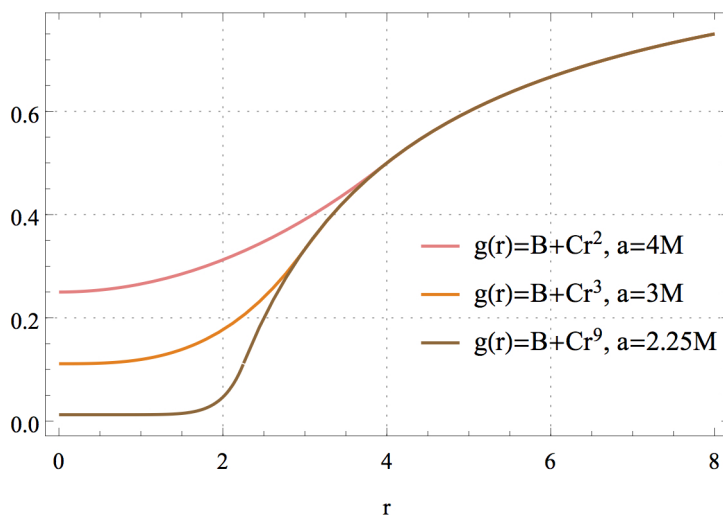
$$g_{rr}(r) = \begin{cases} 1 - \frac{2M}{(2M-a)a^2}r^2 & r \leq a \\ \frac{1}{1-\frac{2M}{r}} & r > a \end{cases} \quad (2.59)$$

$$g_{tt}(r) = \begin{cases} \frac{3M-a}{a} - \frac{M}{a^3}r^2 & r \leq a \\ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & r > a. \end{cases} \quad (2.60)$$

Grafy príslušné týmto funkciám sú uvedené na obrázkoch 2.7 a 2.8.



Obr. 2.7: Graf funkcie $g_{rr}(r)$ danej rovnicou 2.59



Obr. 2.8: Graf funkcie $g_{tt}(r)$ danej rovnicou 2.60

2.4 Obmedzenia metódy

Pri voľbe metrickej funkcie 2.53 bol zamlčaný fakt, že s takto zvolenou funkciou nedokážeme splniť sadu podmienok 2.44. Funkciu sme volili s jediným voľ-

ným parametrom a to konštantou A , na ktorej určenie máme k dispozícii sadu dvoch rovníc. Avšak pre túto sadu rovníc neexistuje riešenie, ktoré by spĺňovalo obidve rovnice, čo je aj evidentné z obrázku 2.7. Preto bola na túto funkciu kladená len podmienka, aby sa zhodovala funkčná hodnota na hranici telesa s funkčnou hodnotou funkcie 2.46. Jednoduchou opravou problému, by bolo pridať k funkcií ďalší voľný parameter a voliť funkciu v tvare

$$f(r) = 1 + Ar^2 + Br^n, \quad (2.61)$$

kde $n > 2$. Tento tvar sme zvolili kvôli striktným podmienkam, ktoré dostaneme z rovnice 2.49, pokiaľ budeme požadovať fyzikálne prijateľné riešenie. Ako sme už spomínali vyššie, táto restriktcia nám fixuje prvú časť funkcie do tvaru $1 + Ar^2$. Pridaním ďalšieho členu síce napojíme funkciu, tak aby sa zhodovala aj prvá derivácia na hranici telesa. Avšak pri výpočte hustoty energie telesa sa s riešením objavil problém a to, že hustota telesa je na hranici nulová, nezávisle na voľbe parametru n . Po priamom výpočte sme dospeli k vzťahom

$$\mu(r) = \frac{A^2r^4 + Ar^2(2Br^n + 3) + Br^n(Br^n + n + 1)}{8\pi r^2(Ar^2 + Br^n + 1)^2}, \quad (2.62)$$

kde

$$A = -\frac{2M(2Mn - na - a)}{a^2(n - 2)(2M - a)^2} \quad B = \frac{2M(4M - 3a)a^{-n}}{(n - 2)(2M - a)^2}. \quad (2.63)$$

Po dosadení bodu $r = a$ do funkcie 2.62 sa po jednoduchých úpravách dopracujeme k výsledku $\mu(r = a) = 0$. Z toho teda vyplýva, že bod $r = a$ je koreňom funkcie 2.62, nezávisle na voľbe parametru n . Preto voľbu funkcie v tvare 2.61 vynecháme, pretože nevedie k fyzikálne priaznivému výsledku. Keďže jediná zostávajúca možnosť na voľbu funkcie $f(r)$ je 2.53, na tvorbu kompaktnějších telies môžeme upravovať len funkciu $g(r)$. Napríklad, voľbou funkcie

$$g(r) = B + Cr^3, \quad (2.64)$$

kde

$$B = -\frac{8M - 3a}{3a} \quad C = \frac{2M}{3a^4}, \quad (2.65)$$

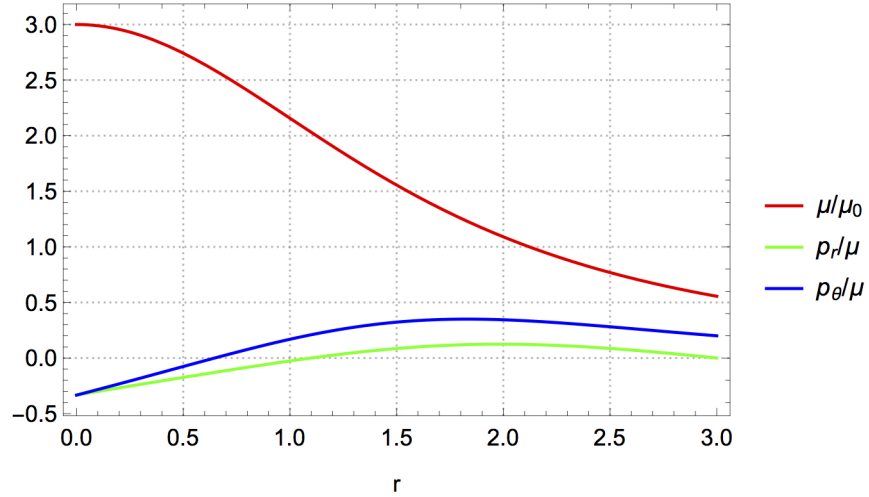
dosiahneme model telesa s rozmerom $a = 3M$. Takoutou voľbou získame sadu funkcií

$$\mu = \frac{A(Ar^2 + 3)}{8\pi(Ar^2 + 1)^2} \quad (2.66)$$

$$p_r = \frac{Cr(3 - Ar^2) - BA}{8\pi(Ar^2 + 1)(B + Cr^3)} \quad (2.67)$$

$$p_\theta = \frac{(-4B^2A + C^2r^4(9 - Ar^2) + 2BCr(9 + 2Ar^2))}{(32\pi(1 + Ar^2)^2(B + Cr^3)^2)}, \quad (2.68)$$

ktorých priebeh je pre $a = 3M$, uvedený na obrázku 2.9.

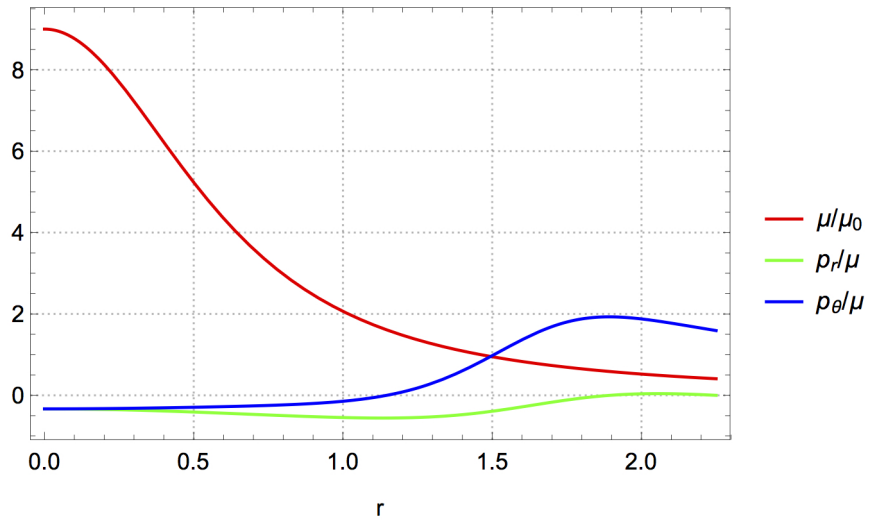


Obr. 2.9: Priebek funkcií 2.66 až 2.68 pre $a = 3M$ pre voľbu metriky 2.64

Iteráciou postupu spomenutého vyššie a zvyšovaním mocniny u funkcie $g(r)$, sa podarilo získať čím ďalej tým kompaktnejšie teleso. Napríklad, voľbou funkcie

$$g(r) = B + Cr^9 \quad (2.69)$$

sme získali sadu rovníc pre μ , p_r , p_θ , ktoré vyhovovali polomeru $a = 2,25M$. Priebek týchto funkcií, v tomto bode je uvedený na obrázku 2.10.



Obr. 2.10: Priebek funkcií μ , p_r , p_θ pre $a = 2.25M$ pre voľbu metriky 2.69

2.5 Regularizácia Schwarzschildovho riešenia v isotropických súradniciach

Ďalej môžeme skúsiť vyšetriť ako sa zmenia vlastnosti riešenia, ak budeme napájať metrické funkcie vyjadrené v iných súradniciach. Jednoduchou transformáciou je prechod k isotropickým súradniciam, ktorých cieľom je zapísať priestorové

časť metriky čo najbližšie k euklidovskej forme, teda

$$ds^2 = -\alpha^2(\tilde{r})dt^2 + \psi^4(\tilde{r})d\Sigma^2, \quad (2.70)$$

kde $d\Sigma^2 = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\theta^2 + \tilde{r}^2 \sin^2\theta d\phi^2$ predstavuje metriku euklidovského priestoru v sférických súradniciach. Polomer \tilde{r} v týchto súradniciach je k polomeru r v Schwarzschildovom riešení daný vzťahom

$$r = \tilde{r} \left(1 + \frac{M}{2\tilde{r}} \right)^2. \quad (2.71)$$

Táto rovnica nám umožní porovnať rozmery telies nájdené v tejto kapitole s rozmermi telies v Schwarzschildových kanonických súradniciach uvažovaných v predchádzajúcej sekcii. Hľadané funkcie pre schwarzschildovo riešenie sú

$$\alpha(\tilde{r}) = \frac{1 - M/(2\tilde{r})}{1 + M/(2\tilde{r})} \quad \psi(\tilde{r}) = 1 + \frac{M}{2\tilde{r}} \quad (2.72)$$

Pre novozvolený tvar metriky treba z rovníc 2.1 získať vlastné čísla tenzoru energie a hybnosti. Tensor energie a hybnosti bol spočítaný na základe A.1 a príslušné vlastné čísla majú tvar

$$\kappa\mu = \frac{4\tilde{r}\psi'' + 8\psi'}{\tilde{r}\psi^5} \quad (2.73)$$

$$\kappa p_{\tilde{r}} = \frac{4\psi(\tilde{r}\alpha' + \alpha)\psi' + 2\psi^2\alpha' + 4\tilde{r}\alpha\psi'^2}{\tilde{r}\alpha\psi^6} \quad (2.74)$$

$$\kappa p_{\theta} = \frac{\psi^2(\tilde{r}\alpha'' + \alpha') - 2\tilde{r}\alpha\psi'^2 + 2\alpha\psi(\tilde{r}\psi'' + \psi')}{\tilde{r}\alpha\psi^6} \quad (2.75)$$

$$p_{\phi} = p_{\theta}. \quad (2.76)$$

Na základe týchto rovníc je vidieť, že pre regularitu v počiatku stačí požadovať aby funkcie $\alpha(\tilde{r})$ a $\psi(\tilde{r})$ boli nenulové v počiatku a minimálne polynómy druhého stupňa bez lineárneho člena. Preto budeme môcť voľiť metrické funkcie pre Schwarzschildovo riešenie v tvare

$$\alpha(\tilde{r}) = \begin{cases} A\tilde{r}^2 + B & \tilde{r} \leq \tilde{a} \\ \frac{1-M/(2\tilde{r})}{1+M/(2\tilde{r})} & \tilde{r} > \tilde{a} \end{cases} \quad (2.77)$$

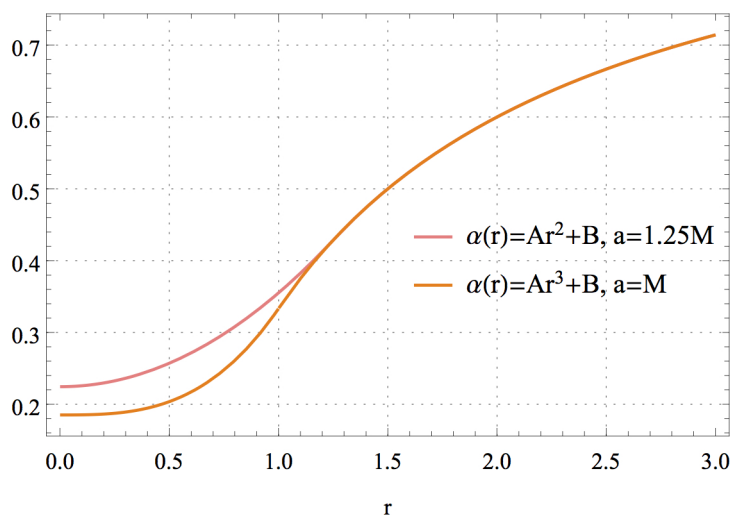
$$\psi(\tilde{r}) = \begin{cases} C\tilde{r}^2 + D & \tilde{r} \leq \tilde{a} \\ 1 + \frac{M}{2\tilde{r}} & \tilde{r} > \tilde{a}, \end{cases} \quad (2.78)$$

kde \tilde{a} sme označili polomer nášho telesa. Vďaka tejto voľbe sme schopný splniť sadu podmienok 2.44, na základe ktorých získame sadu konštant

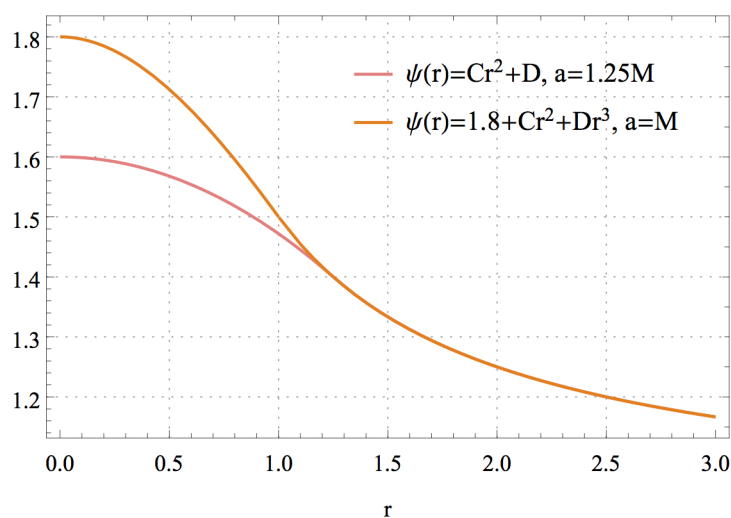
$$A = \frac{2M}{\tilde{a}(M + 2\tilde{a})^2}, \quad B = -\frac{M^2 + 2M\tilde{a} - 4\tilde{a}^2}{(M + 2\tilde{a})^2}, \quad (2.79)$$

$$C = -\frac{M}{4\tilde{a}^3}, \quad D = \frac{3M + 4\tilde{a}}{4\tilde{a}}. \quad (2.80)$$

To, že sme takéto riešenie mohli nájsť, nám zaručí, že po napojení získame spojitú a hladkú funkciu v celom obore hodnôt \tilde{r} . Príklad týchto funkcií je uvedený na obrázkoch 2.11 a 2.12. Dosadením do rovníc 2.73 až 2.76 získame, pre nami takto

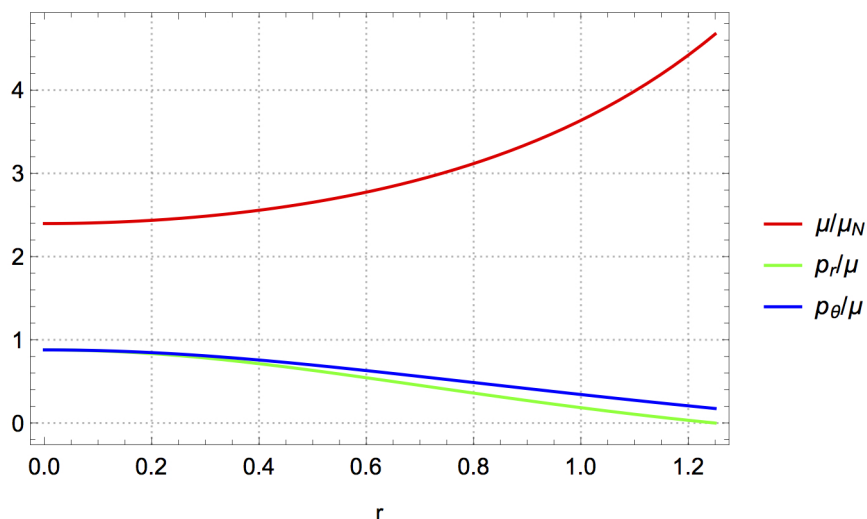


Obr. 2.11: Graf funkcie $\alpha(\tilde{r})$ danej rovnicou 2.77



Obr. 2.12: Graf funkcie $\psi(\tilde{r})$ danej rovnicou 2.78

zvolenú metriku, podstatné informácie o telese. Funkcie sú uvedené na obrázku 2.13, kde sme hustotu μ vydelili newtonovskou hustotou μ_N podľa vzťahu 1.16, kde sme za polomer dosadili \tilde{a} . Aj v týchto súradniciach sa kvôli komplikovaným vzťahom nepodarilo explicitne nájsť spodná hranica telesa pri zadanej metrike. Slabá energetická podmienka $\mu \geq 0$ bola splnená pre $\tilde{a} \geq 0$ avšak zaistiť, aby boli splnené podmienky $\mu \pm p_i \geq 0$, kde $i \in \{\tilde{r}, \theta, \phi\}$, sa ukázalo zložitejšie, keďže pri znižujúcom sa polomere telesa rástli funkcie tlakov okolo bodu \tilde{a} . Najmenší rozmer, pre aký sa podarilo nájsť fyzikálne prijateľné riešenie, bol pre $\tilde{a} = M$,



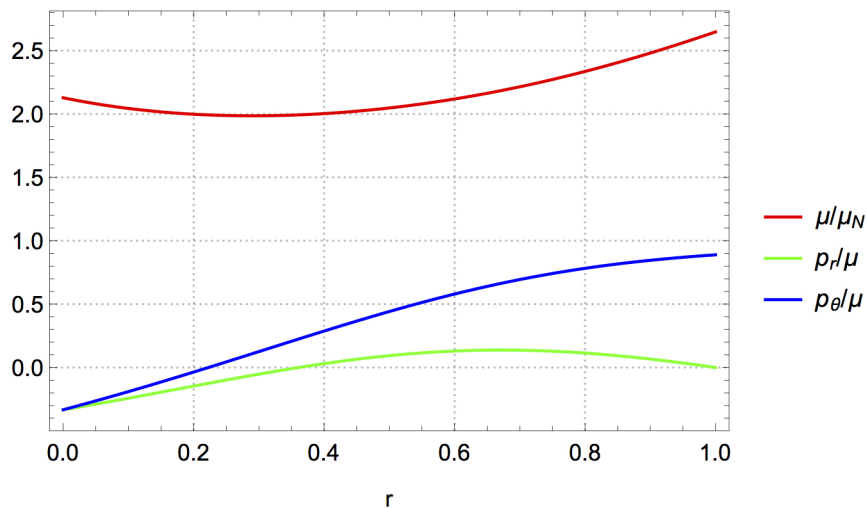
Obr. 2.13: Priebeh funkcií μ , $p_{\tilde{r}}$, p_{θ} pre $\tilde{a} = 1.25M$ pre voľbu metriky 2.77 a 2.78

kde sme zvolili metrické funkcie v tvare

$$\alpha(\tilde{r}) = A\tilde{r}^3 + B \quad (2.81)$$

$$\psi(\tilde{r}) = 1.8 + C\tilde{r}^2 + D\tilde{r}^3. \quad (2.82)$$

Touto voľbou sme dospeli k hustote a príslušným tlakom uvedeným na obrázku 2.14. Ďalej sa už nepodarilo nájsť žiadnu polynomickeú funkciu, ktorá by prekonalala hranicu $\tilde{a} = M$, čo pomocou vzťahu 2.71 odpovedá Schwarzschildovmu polomeru $a = \frac{9}{4}$.



Obr. 2.14: Priebeh funkcií μ , $p_{\tilde{r}}$, p_{θ} pre $\tilde{a} = M$ pre voľbu metriky 2.81 a 2.82

Kapitola 3

Zdroje statických axiálne-symetrických riešení Einsteinových rovníc

Od prvého riešenia Einsteinových rovníc, za ktoré vďačíme Schwarzschildovi, sa podarilo nájsť mnoho ďalších riešení, ktoré sú teraz systematicky roztriedené a uložené v učebniciach ako Kramer [2], odkiaľ čerpáme toto krátke pojednanie o axiálne symetrických vákuových riešeniach Einsteinových rovníc. Axiálne symetrický časopriestor je vo Weylových kanonických súradniciach (ρ, z) popísaný metrikou

$$ds^2 = e^{-2\nu} \left[e^{2\zeta} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 B^2 d\phi^2 \right] - e^{2\nu} dt^2. \quad (3.1)$$

Pri riešení vákuových Einsteinových rovníc v danej metrike, kde sme pre jednoduchosť položili potenciál $B = 1$, spĺňajú funkcie ν a ζ rovnice

$$\Delta\nu = 0, \quad \partial_\rho\zeta = \rho \left((\partial_\rho\nu)^2 + (\partial_z\nu)^2 \right), \quad \partial_z\zeta = 2\rho\partial_\rho\nu\partial_z\nu. \quad (3.2)$$

Všeobecné riešenie týchto rovníc sa dá zapísať v tvare rozvoja

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta), \quad (3.3)$$

$$\zeta = - \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{a_l a_m (l+1)(m+1)}{(l+m+2)r^{l+m+2}} (P_l(\cos\theta)P_m(\cos\theta) - P_{l+1}(\cos\theta)P_{m+1}(\cos\theta)), \quad (3.4)$$

kde sme použili polárne súradnice spojené s Weylovými kanonickými súradnicami transformáciou $\rho = r \sin\theta$, $z = r \cos\theta$ a $P_n(\cos\theta)$ označuje Legenderovi polynómy. Medzi najjednoduchšie riešenia patrí Curzonové riešenie

$$\nu = -\frac{m}{r}, \quad 2\zeta = -\frac{m^2 \sin^2\theta}{r^2} \quad (3.5)$$

pre ktoré vlastnosti vnútorné riešenia rozoberá v článku Bonnor [1]. Ďalšie riešenie, ktoré má pre nás dôležitý význam je Schwarzschildovo riešenie vo Weylových

súradniciach,

$$\nu = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_+ + r_- - 2m}{r_+ + r_- + 2m} \right) \quad (3.6)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{(r_+ + r_-)^2 - 4m^2}{4r_+ r_-} \right) \quad (3.7)$$

$$r_{\pm}^2 = \rho^2 + (z \pm m)^2, \quad (3.8)$$

ktorého tvar čerpáme z Kramer [2]. Regularizáciu tohto riešenia rozoberieme v nasledujúcej podkapitole.

3.1 Schwarzschildovo riešenie vo Weylových súradniciach

Weylová metrika má v polárnych súradniciach tvar

$$ds^2 = -e^{2\nu(r,\theta)} dt^2 + e^{2\zeta(r,\theta) - 2\nu(r,\theta)} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + r^2 \sin^2 \theta e^{-2\nu(r,\theta)} d\phi^2 \quad (3.9)$$

Pomocou rovnice 2.1 spočítame tenzor energie a hybnosti, ktorý má tvar

$$8\pi T_{\alpha}^{\beta} = 8\pi \begin{pmatrix} T_t^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_r^r & T_r^{\theta} & 0 \\ 0 & T_{\theta}^r & T_{\theta}^{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{\phi}^{\phi} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

kde

$$T_t^t = \frac{K}{r} \left(\zeta_{,\theta\theta} + \nu_{,\theta}^2 - 2\nu_{,\theta} \cot(\theta) - 2\nu_{,\theta\theta} + r^2 \nu_{,r}^2 + r^2 \zeta_{,rr} - 2r^2 \nu_{,rr} + r \zeta_{,r} - 4r \nu_{,r} \right) \quad (3.11)$$

$$T_r^r = K \left(-\zeta_{,\theta} \cot(\theta) + \nu_{,\theta}^2 + r \left(\zeta_{,r} - r \nu_{,r}^2 \right) \right) \quad (3.12)$$

$$T_r^{\theta} = \frac{K}{r} \left(\zeta_{,\theta} + r \cot(\theta) \zeta_{,r} - 2r \nu_{,\theta} \nu_{,r} \right) \quad (3.13)$$

$$T_{\theta}^r = r^2 K \left(\frac{\zeta_{,\theta}}{r} + \cot(\theta) \zeta_{,r} - 2\nu_{,\theta} \nu_{,r} \right) \quad (3.14)$$

$$T_{\theta}^{\theta} = K \left(\zeta_{,\theta} \cot(\theta) - \nu_{,\theta}^2 + r \left(r \nu_{,r}^2 - \zeta_{,r} \right) \right) \quad (3.15)$$

$$T_{\phi}^{\phi} = K \left(\zeta_{,\theta\theta} + \nu_{,\theta}^2 + r \left(\zeta_{,r} + r \left(\nu_{,r}^2 + \zeta_{,rr} \right) \right) \right), \quad (3.16)$$

kde sme zaviedli

$$K = \frac{e^{2\nu - 2\zeta}}{r^2}. \quad (3.17)$$

Riešením problému vlastných čísel získame vzťahy pre hustotu a principiálne tlaky telesa, ktorých tvar je

$$\mu = K \left(\zeta_{,\theta\theta} + \nu_{,\theta}^2 - 2\nu_{,\theta} \cot(\theta) - 2\nu_{,\theta\theta} + r^2 \nu_{,r}^2 + r^2 \zeta_{,rr} - 2r^2 \nu_{,rr} + r \zeta_r - 4r \nu_{,r} \right) \quad (3.18)$$

$$p_\phi = K \left(\zeta_{,\theta\theta} + \nu_{,\theta}^2 + r \left(\zeta_{,r} + r \left(\nu_{,r}^2 + \zeta_{,rr} \right) \right) \right) \quad (3.19)$$

$$p_+ = K \sqrt{(\zeta_{,\theta} + r \cot(\theta) \zeta_r - 2r \nu_{,\theta} \nu_{,r})^2 + \left(-\zeta_{,\theta} \cot(\theta) + \nu_{,\theta}^2 + r \left(\zeta_{,r} - r \nu_{,r}^2 \right) \right)^2} \quad (3.20)$$

$$p_- = -p_+ \quad (3.21)$$

Tieto tvary hustoty a tlakov sú všeobecne platné pre Weylovú metriku v tvare 3.9 a zatiaľ sme tvar Schwarzschildovho riešenia nepotrebovali použiť. Podobne ako v kapitole 1 sme nahradili potenciál dvoch hmotných bodov spojitým, rovnakou metódou naviažeme na metrické funkcie Schwarzschildovho riešenia funkcie, tak aby metrika bola na hranici telesa spojitá a mala spojité prvé derivácie. Schwarzschildovo riešenie 3.6 a 3.8 transformujeme do polárnych súradníc

$$e^{2\nu} = \frac{\sqrt{m^2 + 2 \cos \theta m r + r^2} + \sqrt{m^2 - 2 \cos \theta m r + r^2} - 2m}{\sqrt{m^2 + 2 \cos \theta m r + r^2} + \sqrt{m^2 - 2 \cos \theta m r + r^2} + 2m} \quad (3.22)$$

$$e^{2\zeta} = \frac{r^2 - m^2 - \sqrt{(r^2 + m^2)^2 - 4m^2 r^2 \cos^2 \theta}}{2r^2 (\cos^2 \theta) \sqrt{(r^2 + m^2)^2 - 4m^2 r^2 \cos^2 \theta}} \quad (3.23)$$

rozvinutím týchto funkcií do rady v premennej $\cos \theta$ získame separovaný tvar

$$e^{2\nu} = \left(\frac{2m \left(m - \sqrt{m^2 + r^2} \right)}{r^2} + 1 \right) - \frac{\cos^2 \theta m^3 r^2}{(m^2 + r^2)^{3/2} \left(\sqrt{m^2 + r^2} + m \right)^2} + o(\cos^3 \theta) \quad (3.24)$$

$$e^{2\zeta} = \frac{1}{\frac{r^4}{m^2} + r^2} + \frac{\cos^2 \theta m^4 (m^2 + 3r^2)}{r^2 (m^2 + r^2)^3} + o(\cos^3 \theta) \quad (3.25)$$

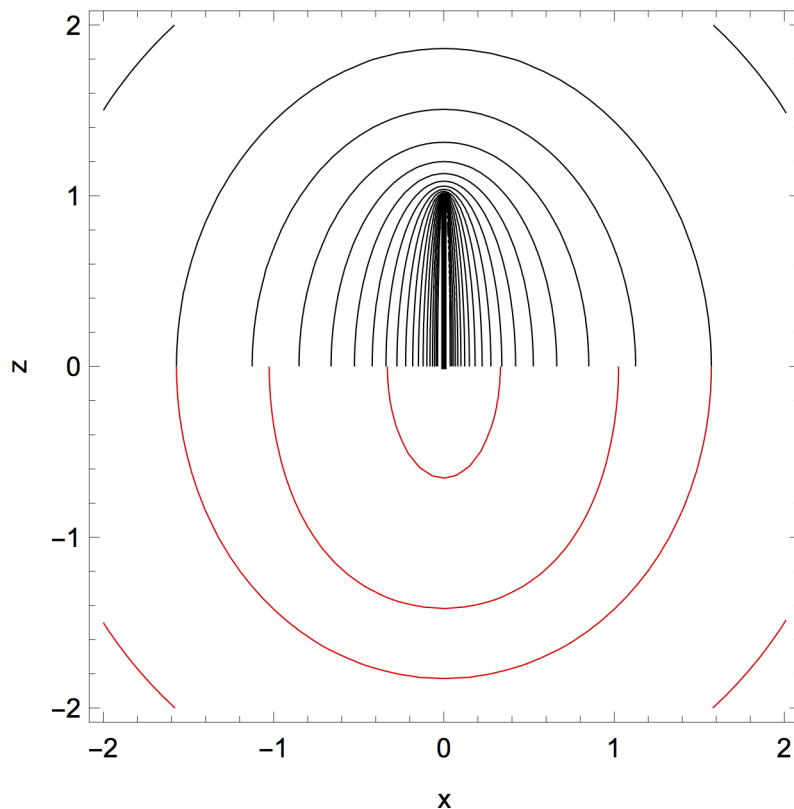
Funkcie ktorými rozšírime metrické funkcie vnútri telesa budeme voliť ako

$$e^{2\nu_{in}} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k r^2) r^k \cos^k \theta \quad (3.26)$$

$$e^{2\zeta_{in}} = 1 + r^2 \sin^2 \theta \sum_{k=0}^{\infty} (A_k r^k P_k(\cos \theta) + B_k r^{k+2} P_k(\cos \theta)). \quad (3.27)$$

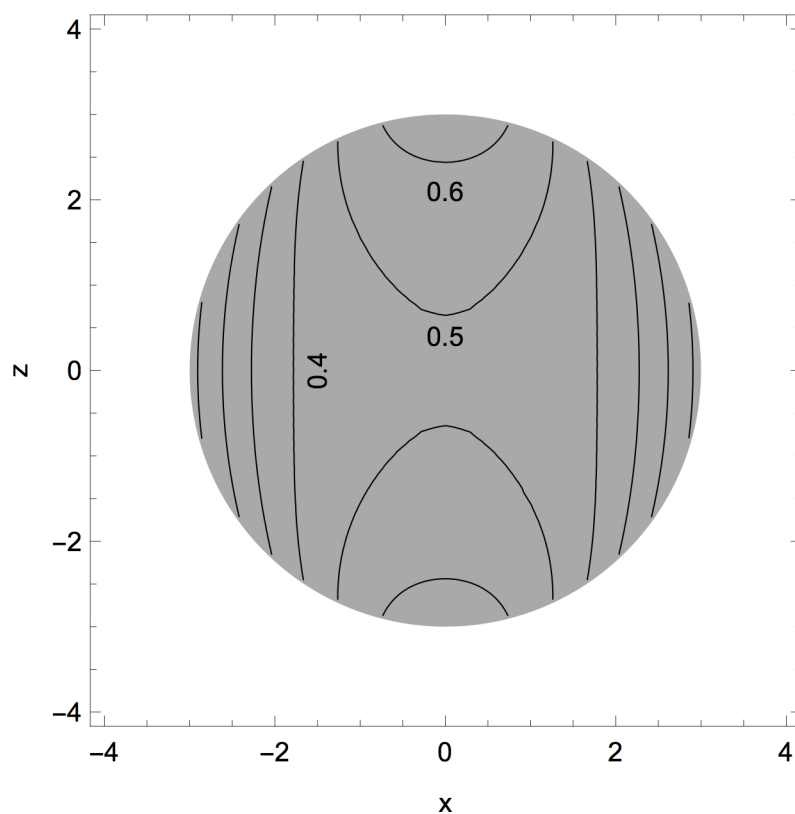
Konštanty A_k, a_k, B_k a b_k určíme z požiadavku aby sa konštanty pred príslušným rádom funkcie $\cos \theta$ zhodovali funkčnou hodnotou a deriváciou v bode $r = a$ viz. príloha A.2. Takto vytvorený potenciál ν_{in} je vykreslený na obrázku 3.1, kde sme rozvoj funkcie zobrali do štvrtého rádu a kde sme do hornej polovice obrázku

vykreslili pôvodnú metrickú funkciu. Rovina (x, z) v grafoch, predstavuje rovinu (ρ, z) vo Weylových súradniciach. Zvolený tvar funkcií je motivovaný regularitou v počiatku, keďže $\cos \theta = \frac{z}{r}$ a z rovnakého dôvodu je v druhej metrickej funkcii volený faktor r^2 pred funkciou $\sin^2 \theta$, ktorá je rovná $\sin \theta = \frac{\rho}{r}$. Voľba funkcie $\sin^2 \theta$ je z dôvodu vyhnutia sa kónickej singularite, ktorá vyžaduje aby funkcia $k(r, \theta)$ bola na ose z rovná nule, teda $k(r, 0) = 0$. Teraz zostáva len takto nájdené funkcie

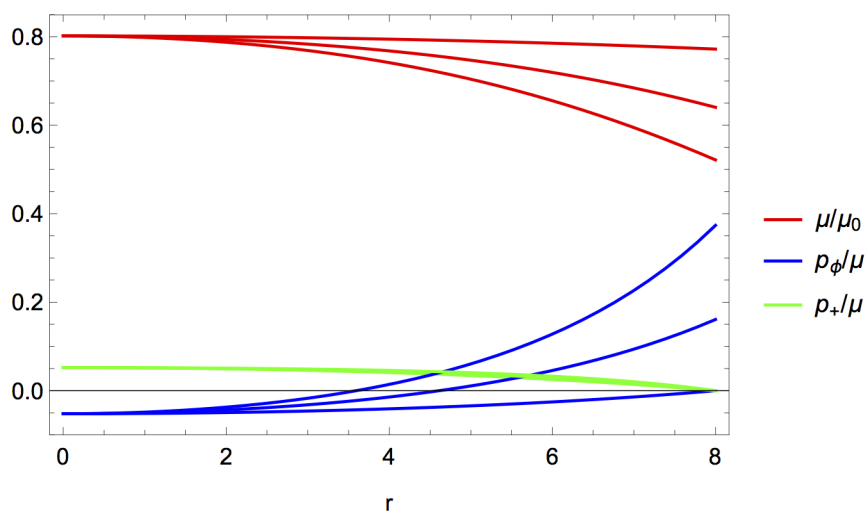


Obr. 3.1: Porovnanie vákuového riešenia s regularizovaným riešením 3.27 metrickej funkcie pre $a = 3$

dosadiť do vzorcov 3.18 až 3.21, čím získame veličiny popisujúce fyzikálne vlastnosti telesa. Hustota telesa je uvedená v grafe na obrázku 3.2, zatiaľčo závislosť hustoty a principiálnych tlakov na sférickej súradnici r je pre niekoľko prípadov θ uvedená na obrázku 3.3.



Obr. 3.2: Hustota v newtonovských jednotkách pre vnútorné Schwarzschildovo riešenie vo Weylových súradniciach 3.18 pre $a = 3$



Obr. 3.3: Závislosť hustoty a tlakov vnútorného riešenia pre hodnoty uhlu θ volené ako $\theta = 10^{-4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi-0.01}{4}$ pre $a = 8$

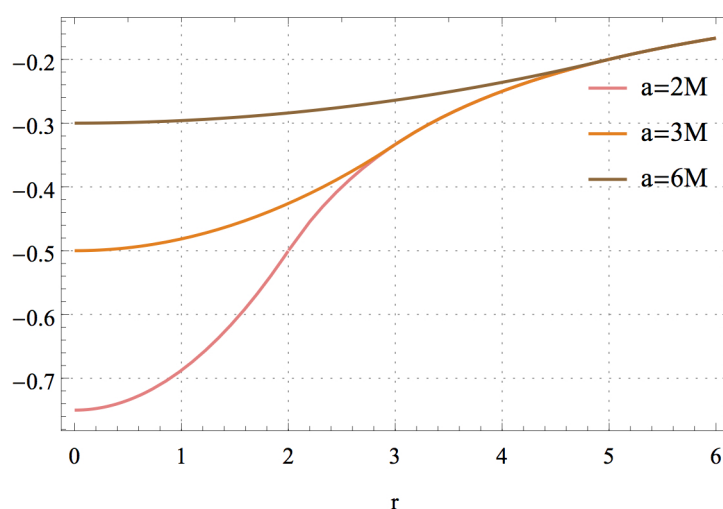
3.2 Curzonové riešenie

Vnútorným riešením ku Curzonovému riešeniu sa zaoberal Bonnor v článku Bonnor [1]. V tomto článku boli skúmané funkcie

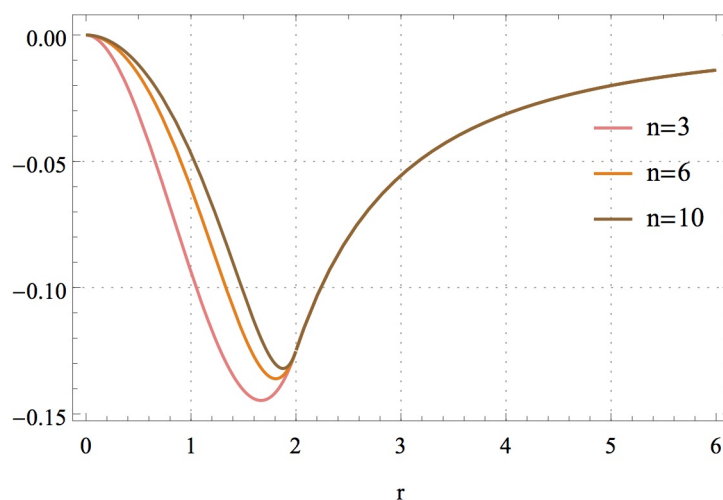
$$\nu = \frac{m}{2a} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 3 \right] \quad (3.28)$$

$$\zeta = -\frac{1}{2(n-2)} \left(\frac{mr}{a^2} \right)^2 \left[(n+2) - 4 \left(\frac{r}{a} \right)^{n-2} \right] \sin^2 \theta \quad (3.29)$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je voľný parameter spĺňajúci $n \geq 3$. Graf funkcie 3.28 pre rôzne hodnoty a uvádzame na obrázku 3.4 a funkcia 3.29 je uvedená na obrázku 3.5 s rôznou voľbou parametru n . Bonnor v článku spočítal hustotu telesa, pre ktorú



Obr. 3.4: Priebeh vnútornej a vonkajšej funkcie ν 3.28 pre rôzne polomery napojenia



Obr. 3.5: Priebeh vnútornej a vonkajšej funkcie $\zeta/\sin^2 \theta$ 3.29 v závislosti na parametre n

našiel vzťah

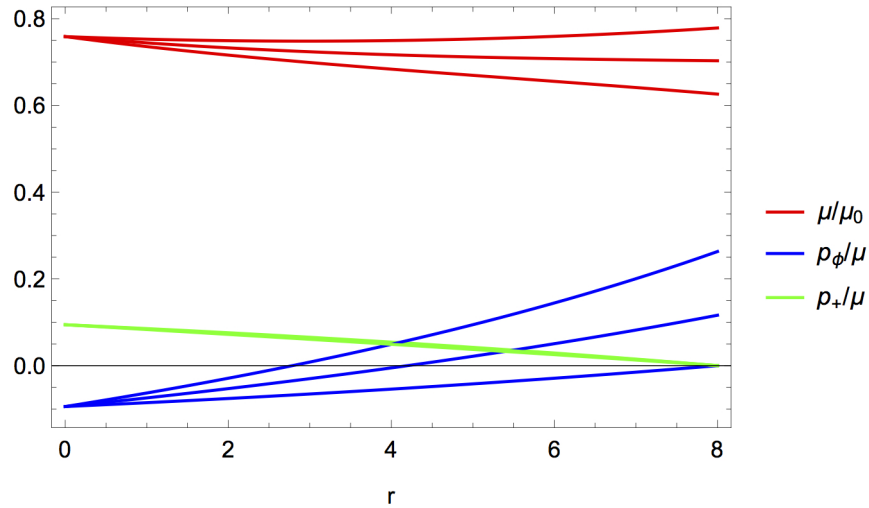
$$\mu = \frac{1}{8\pi} \frac{a^2 x^2 K \beta}{a^2} \left[6 + \beta \frac{n+2}{n-2} - \beta x^2 H \right] \quad (3.30)$$

kde bolo zavedené

$$H = 1 + 2x^{n-4} \left[\frac{(n^2 - 2) - (n^2 - 4) \cos^2 \theta}{n - 2} \right] \quad (3.31)$$

$$\beta = m/a, \quad x = r/a \quad (3.32)$$

Graf tejto funkcie pre zvolené $a = 3$, $n = 3$ a $m = 1$ je na obrázku 3.6. V článku sa ďalej vyšetruje najmenší fyzikálne možný rozmer telesa, kde použitím slabšej energetickej podmienky $\mu \geq 0$ a využitím že minimum funkcie μ sa nachádza v $x = 1$ a $\theta = \pi/2$ sa ukáže, že najmenší rozmer telesa je $a \geq \frac{m(n+2)}{3}$. S pomocou rovníc 3.20 až 3.21 sme boli schopný dopočítať príslušné tlaky, ktoré sú pre niektoré zaujímavé prípady uvedené na obrázkoch 3.6 až 3.8. Ako vidieť z grafov

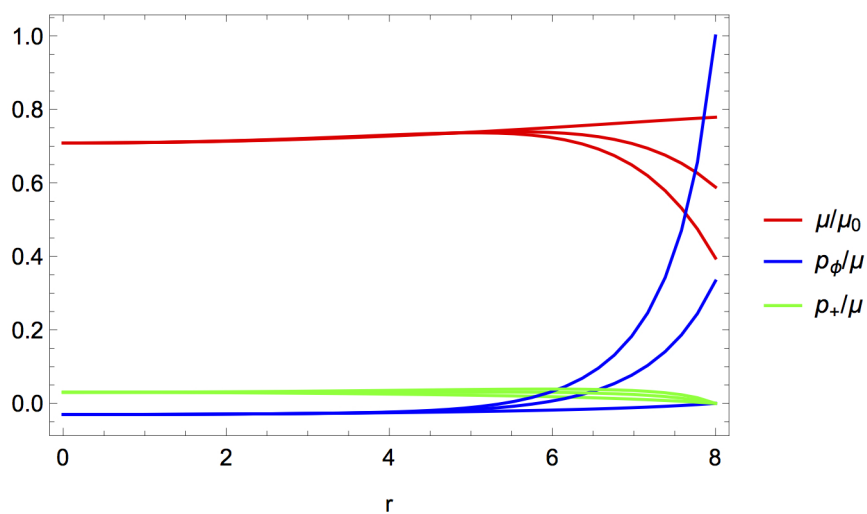


Obr. 3.6: Závislosť hustoty a tlakov vnútorného riešenia s parametrom $a = 8$ a $n = 3$ pre hodnoty uhlu θ volené ako $\theta = 10^{-4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi-0.01}{4}$

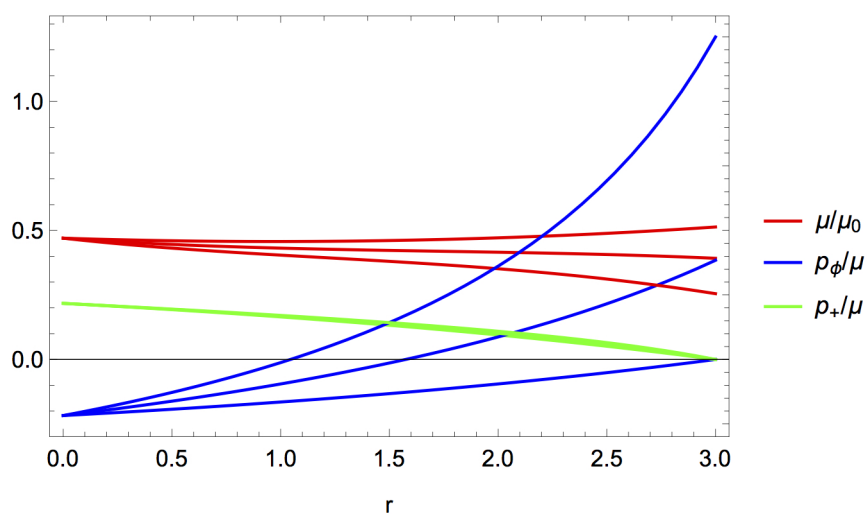
na obrázkoch 3.6 až 3.8 nie všetky hodnoty n a a splňajú dominantné energetickej podmienky. Táto okolnosť je ďalej diskutovaná v článku, kde sa s pomocou podmienky $\mu - p_+ \geq 0$ dostala ďalšia restrikcia na rozmer telesa

$$a \geq \frac{2m(n+2)}{3} \quad (3.33)$$

Zo zvyšných energetických podmienok sa pre všeobecný tvar nepodarili vyriešiť ďalšie restrikcie na rozmer telesa a táto otázka zostáva naďalej otvorená.



Obr. 3.7: Závislosť hustoty a tlakov vnútorného riešenia s parametrom $a = 8$ a $n = 10$ pre hodnoty uhlu θ volené ako $\theta = 10^{-4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi-0.01}{4}$



Obr. 3.8: Závislosť hustoty a tlakov vnútorného riešenia s parametrom $a = 3$ a $n = 3$ pre hodnoty uhlu θ volené ako $\theta = 10^{-4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi-0.01}{4}$

Záver

Na príklade newtonovskej gravitácie sa nám podarilo ukázať princíp regulárizácie gravitačného poľa singulárneho zdroja. Bolo ukázané, že tento postup sa dá uplatniť aj vo všeobecnej teórii relativity, kde sme však narazili na rôzne komplikácie. Pre sféricky symetrické Schwarzschildovo riešenie Einsteinových rovníc sa nám podarilo nájsť tri rôzne sféricky symetrické rozloženia hustoty a tlakov: TOV riešenie, ktoré odpovedá nestlačiteľnej kvapaline, a dve získané pomocou napojenia metrických funkcií v Schwarzschildových a isotropických súradniciach. Tieto riešenia sa vyznačovali neizotropnými tlakmi.

Pre lepšie pochopenie Bonnorových výsledkov týkajúcich sa vnútorného riešenia budiaceho Curzonovu metriku vo Weylových súradniciach, bolo v týchto súradniciach vyšetrené aj Schwarzschildovo riešenie. Napriek tomu, že sme za hranicu telesa opäť volili súradnicovú sféru, charakter Weylových súradníc však zaručil, že výsledné hustoty a tlaky zdrojov neboli sféricky symetrické.

Výsledky poskytujú prvý pohľad na tento problém a ich ďalšia interpretácia je potrebná. Taktiež by bolo vhodné porovnať výsledky Bonnorovho riešenia so zdrojmi získanými z vnútorných riešení v iných súradniciach, napájaním metrických funkcií v týchto súradniciach, na vonkajšie Curzonové riešenie.

Základnou vlastnosťou všeobecnej relativity je princíp kovariancie. Úplne neriešený zostáva problém, ako by mala vypadáť formulácia napájania vnútorného riešenia tak, aby čo najmenej závisela na voľbe súradníc.

Zoznam použitej literatúry

- [1] WB Bonnor. An interior solution for curzon spacetime. *General Relativity and Gravitation*, 45(7):1403–1410, 2013.
- [2] D Kramer, Hans Stephani, M MacCallum, and E Herlt. Exact solutions of einstein’s field equations. *Berlin*, 1980.
- [3] Richard C Tolman. Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid. *Physical Review*, 55(4):364, 1939.
- [4] J Robert Oppenheimer and George M Volkoff. On massive neutron cores. *Physical Review*, 55(4):374, 1939.
- [5] Hans Stephani. *Relativity: An introduction to special and general relativity*. Cambridge university press, 2004.
- [6] Robert M Wald. General relativity(book). *Chicago, University of Chicago Press, 1984, 504 p*, 1984.
- [7] Marc Mars, M Mercè Martín-Prats, and JoséM M Senovilla. The $2m \leq r$ property of spherically symmetric static space-times. *Physics Letters A*, 218(3-6):147–150, 1996.
- [8] Pekka Janhunen. Calculating the Einstein Tensor, 1992.
- [9] T. Ledvinka. Konzultácia s vedúcim práce, Praha 2019.

Dodatok A

Prílohy

A.1 Výpočet tenzoru energie a hybnosti pomocou programu Mathematica

Výpočet Einsteinovho tenzoru 2.1 pre metriku v tvare 2.4 s pomocou knihovny EinsteinTensor Janhunen [8]

```
Needs["EinsteinTensor`"]
x = {t, r,  $\theta$ ,  $\phi$ }
metric = DiagonalMatrix[{-Exp[ $\nu$ [r]], Exp[ $\lambda$ [r]], r2, r2 (Sin[ $\theta$ ])2} ]
Einstein = Simplify[EinsteinTensor[metric, x]]
```

Výpočet Einsteinovho tenzoru 2.1 pre metriku v tvare 2.70 s pomocou knihovny EinsteinTensor Janhunen [8]

```
Needs["EinsteinTensor`"]
x = {t, r,  $\theta$ ,  $\phi$ }
metric = DiagonalMatrix[{-( $\alpha$ [r])2, ( $\psi$ [r])4, ( $\psi$ [r])4 r2, ( $\psi$ [r])4 r2 (Sin[ $\theta$ ])2} ]
Einstein = Simplify[EinsteinTensor[metric, x]]
```

A.2 Regularizácia Schwarzschildovej metriky vo Weylových súradniciach

Program vytvorený na základe [9]. Jedná sa o regulárne napojenie metriky 3.26 a 3.27 na vonkajšiu metriku Schwarzschildovho riešenia vo Weylových súradniciach.

```
Needs["xAct`xCoba`"]
DefManifold[M, 4, {a, b, c, d, e}]
DefChart[Sph, M, {0, 1, 2, 3}, {t[], r[],  $\theta$ [],  $\phi$ []}]
Sph /: CIndexForm[0, Sph] = "t"; Sph /:
  CIndexForm[1, Sph] = "r"; Sph /:
  CIndexForm[2, Sph] = " $\theta$ "; Sph /:
  CIndexForm[3, Sph] = " $\phi$ ";
DefConstantSymbol[Mass, PrintAs -> "M"]
DefScalarFunction[ $\nu$ ]
```

```

DefScalarFunction[B]
DefScalarFunction[ζ]
ds2 = - Exp[ 2 ν[r[], θ[] ] dt^2 +
      Exp[- 2 ν[r[], θ[] ] +
      2 ζ[r[], θ[] ] (dr^2 + r[]^2 dθ^2) +
      B[r[], θ[]]^2 Exp[ -2 ν[
      r[], θ[] ] r[]^2 Sin[θ[]]^2 dφ^2
      MatrixForm[
      KMatrix =
      CoefficientArrays[ds2, {dt, dr, dθ, dφ},
      "Symmetric" -> True][[3]] // Normal // Simplify]
      metricg = CTensor[KMatrix, {-Sph, -Sph}];
metricg[-a, -b]
SetCMetric[metricg, Sph, SignatureOfMetric -> {3, 1, 0}]
MetricCompute[metricg, Sph,
"Riemann"[-1, -1, -1, 1] (*, Verbose\[Rule]True*)]
cd = CovDOfMetric[metricg];
tensorGab = (Einstein[cd][-a, +b] // Head) /. CTensor -> (#1 &) /.
  r[] -> r /. theta[] -> θ
  xy2rθ = {
  x -> (Sqrt[r^2 Sin[θ]^2 + (r Cos[θ] + M)^2] +
      Sqrt[r^2 Sin[θ]^2 + (r Cos[θ] - M)^2])/(2 M),
  y -> (Sqrt[r^2 Sin[θ]^2 + (r Cos[θ] + M)^2] -
      Sqrt[r^2 Sin[θ]^2 + (r Cos[θ] - M)^2])/(2 M) }
shwMetric = {
  B -> Function[{r, θ}, 1],
  ν ->
  Function[{r, θ},
  Evaluate[1/2 Log[(x - 1)/(x + 1)] /. xy2rθ ]],
  ζ ->
  Function[{r, θ},
  Evaluate[1/2 Log[(x^2 - 1)/(x^2 - y^2)] /. xy2rθ]]
};
tensorGab /. shwMetric // Simplify
mkNicer = {
\!\(\*SuperscriptBox[\(d_\),
TagBox[
RowBox[{"(",
RowBox[{"0", ",", "1"}], ")"}],
Derivative],
MultilineFunction->None]\)[r, θ] -> Subscript[d, θ],
\!\(\*SuperscriptBox[\(d_\),
TagBox[
RowBox[{"(",
RowBox[{"0", ",", "2"}], ")"}],
Derivative],
MultilineFunction->None]\)[r, θ] ->
  Subscript[d, θθ],
\!\(\*SuperscriptBox[\(d_\),
TagBox[

```



```

RowBox[{"(",
RowBox[{"1", ",", "1"}], ")"},
Derivative],
MultilineFunction->None][r,  $\theta$ ] -> Subscript[d,  $r\theta$ ],
\!\(\*\SuperscriptBox[\(d_\),
TagBox[
RowBox[{"(",
RowBox[{"1", ",", "0"}], ")"},
Derivative],
MultilineFunction->None][r,  $\theta$ ] -> Subscript[d, r],
\!\(\*\SuperscriptBox[\(d_\),
TagBox[
RowBox[{"(",
RowBox[{"2", ",", "0"}], ")"},
Derivative],
MultilineFunction->None][r,  $\theta$ ] -> Subscript[d, rr],
d_[r,  $\theta$ ] -> d}
tensorGabSimplified = (tensorGab /. B -> Function[{r,  $\theta$ }, 1] //
Simplify) /. mkNicer
T00 = tensorGabSimplified[[1, 1]]
T33 = tensorGabSimplified[[4, 4]]
Tplus = FullSimplify[
Sqrt[ tensorGabSimplified[[2,
2]]^2 + (r tensorGabSimplified[[2, 3]])^2], Assumptions -> r > 0]
Tminus = -Tplus;
spojiteF[k_, ff_, r0_] := Block[{f0, f1},
f0 = ff /. r -> r0;
f1 = D[ff, r] /. r -> r0;
Cos[ $\theta$ ]^k (ff HeavisideTheta[r - r0] +
1/2 ((r/r0)^
k (f0 (2 + k) - f1 r0) + (r/r0)^(2 + k) (f1 r0 -
f0 k)) HeavisideTheta[r0 - r]
)
]shwMetric2 = {
 $\nu$  -> 1/2 Log[(x - 1)/(x + 1)] /. xy2r $\theta$  ,
Subscript[ $\nu$ ,  $\theta$ ] ->
D[1/2 Log[(x - 1)/(x + 1)] /. xy2r $\theta$  ,  $\theta$ ],
Subscript[ $\nu$ ,  $\theta\theta$ ] ->
D[1/2 Log[(x - 1)/(x + 1)] /. xy2r $\theta$  , { $\theta$ , 2}],
Subscript[ $\nu$ , r] ->
D[1/2 Log[(x - 1)/(x + 1)] /. xy2r $\theta$  , r],
Subscript[ $\nu$ , rr] ->
D[1/2 Log[(x - 1)/(x + 1)] /. xy2r $\theta$  , {r, 2}],
 $\zeta$  -> 1/2 Log[(x^2 - 1)/(x^2 - y^2)] /. xy2r $\theta$ ,
Subscript[ $\zeta$ ,  $\theta$ ] ->
D[1/2 Log[(x^2 - 1)/(x^2 - y^2)] /. xy2r $\theta$ ,  $\theta$ ],
Subscript[ $\zeta$ ,  $\theta\theta$ ] ->
D[1/2 Log[(x^2 - 1)/(x^2 - y^2)] /. xy2r $\theta$ , { $\theta$ , 2}],
Subscript[ $\zeta$ , r] ->
D[1/2 Log[(x^2 - 1)/(x^2 - y^2)] /. xy2r $\theta$ , r],
Subscript[ $\zeta$ , rr] ->

```

```

D[1/2 Log[(x^2 - 1)/(x^2 - y^2)] /. xy2rθ, {r, 2}]
};
{T00, T33, Tplus^2} /. shwMetric2 // Simplify
toμ = {Cos[θ] -> μ,
Csc[θ] -> 1/Sqrt[1 - μ^2],
Sin[θ] -> Sqrt[1 - μ^2]};

order = 4;
e2ν = (x - 1)/(x + 1) /. xy2rθ
tmpe2ν = e2ν /. toμ // Simplify
FullSimplify /@ Series[tmpe2ν, {μ, 0, order}]
tmpf = Normal[%];

CoefficientRules[ tmpf, μ] // Simplify
% /. Rule[a_, b_] :> spojiteF[a[[1]], b, r0] // Total // Normal;
e2νapprox =
Collect[%, {HeavisideTheta[r - r0], HeavisideTheta[r0 - r]};
νapprox = 1/2 Log[e2νapprox /. μ -> Cos[θ]];

ByteCount@νapprox
e2ζ = (x^2 - 1)/(x^2 - y^2) /. xy2rθ;
tmpζ = (1 - %)/(r^2 Sin[θ]^2) /. toμ // Simplify

FullSimplify /@ Series[tmpζ, {μ, 0, order}]
tmpf = Normal[%];

CoefficientRules[ tmpf, μ] // Simplify
% /. Rule[a_, b_] :> spojiteF[a[[1]], b, r0] // Total // Simplify;
tmpζapprox =
Collect[%, {HeavisideTheta[r - r0], HeavisideTheta[r0 - r]};
ζapprox =
1/2 Log[1 - r^2 Sin[θ]^2 tmpζapprox /. μ ->
Cos[θ]]
shwMetric3 = {
ν -> νapprox,
Subscript[ν, θ] -> D[νapprox, θ],
Subscript[ν, θθ] -> D[νapprox, {θ, 2}],
Subscript[ν, r] -> D[νapprox, r],
Subscript[ν, rr] -> D[νapprox, {r, 2}],
ζ -> \[Zeta]approx,
Subscript[ζ, θ] -> D[ζapprox, θ],
Subscript[ζ, θθ] ->
D[ζapprox, {θ, 2}],
Subscript[ζ, r] -> D[ζapprox, r],
Subscript[ζ, rr] -> D[ζapprox, {r, 2}]
};
{J00, J33, Jplus} = {-T00, T33, Tplus} /. shwMetric3

```