



Pod'akovanie za spoluprácu s fyzikálnou aj technickou stránkou práce patrí v prvom rade vedúcemu, mgr. Ledvinkovi, v druhom tiež Jozefovi Veselému. Ďalej NBS a rodine Freibertovej za zapožičanie počítačov po dobu jej písania a Jane Freibertovej za výdatnú psychickú podporu, hlavne v záverečných fázach písania.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 31. května 2007

---

Branislav Štepita

# Obsah

<u>Úvod</u>	5
-------------	---

## TEORETICKÁ ČASŤ

<u>Tóny a Harmónie</u>	5
------------------------	---

<u>Mechanika kontinua</u>	6
---------------------------	---

<u>Módy</u>	9
-------------	---

## VÝPOČETNÁ ČASŤ

<u>Tyč – analyticky</u>	11
-------------------------	----

<u>Tyč numericky</u>	18
----------------------	----

<u>Zvon</u>	31
-------------	----

## DODATKY

<u>Dodatok I – výpočty</u>	40
----------------------------	----

<u>Dodatok II – maple</u>	42
---------------------------	----

<u>Dodatok II – separácia</u>	46
-------------------------------	----

<u>LITERATÚRA</u>	48
-------------------	----

Název práce : Jak zvoní zvon  
Autor: Branislav Štepita  
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky  
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D.  
E-mail vedoucího: [ledvinka@gmail.com](mailto:ledvinka@gmail.com)

Abstrakt: Zvon je fascinující hudební nástroj, protože jeho tvar vyplývá z netriviální fyziky, a napriek tomu bol skonštruovaný dávno predtým, než boli dané oblasti fyziky preskúmané a popísané. V tejto práci sa venujem najprv teoretickému pozadiu problému, teda mechanike kontinua v priblížení elasticity kovov. Ďalej tu na jednoduchšom príklade rovnej tenkej tyče (xylofónu) demonštrujem ako analytickú tak numerickú metódu zisťovania vlastných kmitov kovového telesa. Ukazujem tiež, že zvon sa dá separáciou Lagrangiánu previesť na mierne zozložitú variantu tyče a na záver sa venujem popisne vlastným kmitom zvonu, ich výskytu a vplyvu na jeho zvuk.

Klíčová slova: Zvon, elastické kmity, vlastní kmity, separace Lagrangiánu

Title: How the bell rings  
Author: Branislav Štepita  
Department: Ústav teoretické fyziky  
Supervisor: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D.  
Supervisor's e-mail address: [ledvinka@gmail.com](mailto:ledvinka@gmail.com)

Abstract: A bell is a fascinating musical instrument, because its shape results from non-trivial physics and in spite of that it was constructed long time before those areas of physics were researched and described. In this work I at first study theoretical background of this problem, which involves continuum mechanics in the approximation of metal elasticity. Next I demonstrate analytical and numerical methods of finding the modes of vibration of a metal body on a simpler example of a straight thin rod (xylophone). I also show that a bell can be transformed into a little more difficult case of a rod by Lagrangian separation. In the end I treat the occurrence and sound influence of the vibrational modes of a bell descriptively.

Keywords: Bell, elastic vibrations, modes of vibration, Lagrangian separation

# Úvod

Zvon je jedným z najstarších hudobných nástrojov. Ako nachádzam v [2], str. 577 najstarsie nájdené zvony pochádzajú z číny druhého tisícročia pred Kristom a najstaršia ladená zvonkohra (súbor zvonov, ktoré zvonía rôznymi vzájomne harmonickými tónmi) bola nájdená v čínskej provincii Hubei a pochádza z piateho storočia pred Kristom. Keďže k pochopeniu mechanizmu zvonu je potrebný aparát mechaniky kontinua, ktorý sa začal vyvíjať až v novoveku, je skutočnosť, že bol vytvorený (pravdepodobne) bez jeho znalosti, fascinujúca. Na rozdiel od napr. strunových a dychových nástrojov totiž harmonickosť jeho vyšších módov (bude vysvetlené) nevyplýva automaticky z mechanizmu šírenia zvuku v materiáli, ale je možná iba pri danom konkrétnom tvare. V tejto práci chcem daný mechanizmus priblížiť.

## 1. Tóny a Harmónie

Ako dnešný človek po strednej škole vie, hoci staroveký tvorca zvonu to nemusel ani tušiť, zvuk je mechanické vlnenie, ktoré naše ucho vníma ako zmeny tlaku vzduchu na bubienok. Okrem chaotických zvukov môžeme počuť aj zvuky, ktoré sa na menších časových škálach (desatiny - stotiny sekundy) nemenia, tzv. tóny. Viaceré tóny v časovom slede za sebou tvoria základný prvok hudby – melódiu. Každý hudobný tón má štyri charakteristiky: výšku, farbu, intenzitu a hlasitosť. Výšku tónu udáva základná frekvencia kmitov, ide teda o to, ako vysoký tón počujeme (notový zápis zapisuje v podstate iba túto charakteristiku a trvanie). Farbu udáva rozloženie ďalších frekvencií okrem základnej (to spôsobuje rozdiel medzi notou  $C_5$  zahranou na flaute, klavíri, gitare a zvone) a je daná v prvom rade nástrojom, na ktorom sa hrá (rôzne tóny zahrané na tom istom nástroji majú spravidla veľmi podobnú farbu, pretože sa tam frekvencie vyskytujú v rovnakých pomeroch k tej základnej), prípadne spôsobom hry (na gitare napríklad použitie brnkátka alebo prstu produkuje tóny s odlišnou farbou). Intenzita je objektívna fyzikálna miera sily zvuku, meraná amplitúdou tlaku

(jej jednotka je decibell a má oproti tlaku logaritmickú škálu ako väčšina zmyslových vnemov). Hlasitosť je naopak subjektívna psychická miera sily zvuku a okrem intenzity závisí na výške a farbe tónu, vlastných dispozíciách poslucháča ai.

V tejto práci sa budem venovať prvým dvom vlastnostiam, resp. frekvenciám vychádzajúcim z jednotlivých pohybov a ich skladaniu do farby výsledného tónu. Ľudské vnímanie frekvencií je pomerčné, teda ako rovnaký rozdiel medzi tónmi vnímame to, že ich frekvencie sú v rovnakom pomere. V západnej hudobnej tradícii je základným pojmom oktáva. Je to „vzdialenosť“ medzi dvoma tónmi, ktorých frekvencie sú v pomere  $1:2$ . Táto oktáva je ďalej rozdelená na dvanásť poltónov tak, že pomer frekvencií dvoch nasledujúcich poltónov je  $1:\sqrt[12]{2}$ . O tom, ktoré kombinácie sa považujú za harmonické a ktoré nie, hovorí rozsiahly odbor hudobnej teórie, o ktorom priveľa neviem, keď to ale veľmi zjednoduším, môžem povedať, že za harmonické spojenia sú považované také, kde sa pomery frekvencií dajú vyjadriť v malých celých číslach.

## 2. Mechanika kontinua

Zvon, ako mnohé iné mechanické hudobné nástroje, vydáva zvuk v dôsledku periodických elastických deformácií. Budem sa teda v tejto práci zaoberať elasticitou. Teória elasticity na tej úrovni, ktorou sa budem zaoberať neberie do úvahy mikroštruktúru látky. Látka je pre ňu kontinuum – hmotou, spojite rozloženou v priestore. V celej práci budem uvažovať iba homogénne telesá (vlastnosti zvonoviny nebudem skúmať, zredukujú sa na tri konštanty), kde je hmota rozdelená rovnomerne, preto bude hustota  $\rho$  konštantou nezávislou na polohe.

Kontinuum sa následkom vonkajších a vnútorných síl a napätí deformuje. Táto deformácia spočíva v odchýlení jednotlivých bodov od svojej pôvodnej polohy, označuje sa  $\vec{u}$  a je funkciou polohy. Pohyb jednotlivých bodov telesa sa dá rozložiť na tri zložky – transláciu celého telesa (tj. priamočiary pohyb všetkých jeho bodov rovnakým smerom a rýchlosťou), rotáciu celého telesa (tj. pohyb každého bodu okolo rovnakej

osi a s rovnakou uhlovou rýchlosťou) a deformáciu telesa (tj. vzájomný pohyb jednotlivých bodov telesa a zmeny vzdialeností medzi nimi). Prvé dve nepôsobia zmeny dĺžok medzi jednotlivými bodmi ani nevytvárajú napätia, preto ma bude zaujímať iba tá tretia. V priblížení malých deformácií (kvadratické členy zanedbávam) sa na jej „odfiltrovanie“ používa veličina  $e_{ij}$ , tzv. tenzor deformácie. Pre ten platí

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

To vylučuje transláciu (tá nevstupuje do derivácií, pretože je vo všetkých bodoch rovnaká) aj rotáciu (tá je antisymetrická a je preto symetrizáciou tohoto tenzoru odfiltrovaná). Je to teda tenzor popisujúci iba deformačnú časť pohybu okolia daného bodu.

Vo všeobecnej teórii mechaniky kontinua sa rozlišujú dvoje súradnice – pôvodné (Lagrangeov popis) a okamžité (Eulerov popis). Toto ale odpadá pri malých deformáciách, čo je aj prípad zvonu (resp. všeobecne rezonancie kovových telies), kde sa rozdiel medzi nimi zanedbáva. Z celého popisu pohybu mi teda ostalo dôležité iba  $e_{ij}(t, \vec{x})$ . V tomto priblížení odpadá tiež zmena hustoty v dôsledku deformácie, pretože je rovnako závislá až na kvadratických členoch.

Ďalšou dôležitou veličinou vyskytujúcou sa v popise stavu deformovaného telesa sú sily pôsobiace na jednotlivé body telesa. Sily pôsobia buď na celý objem telesa (napr. tiaž) alebo na jeho povrch. Objemové sily pôsobia vo všetkých bodoch telesa, ale spravidla sú statické, teda spôsobujú statickú deformáciu. Keďže nás zaujíma zvuk zvonu, teda periodické pohyby, nebudem sa nimi príliš zaoberať. Sily dávajú vzniknúť vnútorným napätiam. Toto napätie je opäť tenzorového charakteru a značí sa  $\tau_{ij}$ . Zložka  $\tau_{ij}$  je  $j$ -tou zložkou mechanického napätia na infinitezimálnej ploške kolmej na  $i$ -tý smer, má teda rozmer  $kg\ m^{-1}\ s^{-2}$ . Tento tenzor je tiež symetrický, čo nebudem zdôvodňovať (je to dokázané v [1] str. 116 – 118).

Okrem vonkajších povrchových síl (napr. lis) môže napätie vyvolať aj samotná deformácia telesa, resp. jeho „vôľa zostať nedeformovaným“. Skúmanie spôsobu, akým materiály reagujú na deformáciu, tzv.

reologických vlastností materiálov, tvorí veľkú a rozsiahlu oblasť záujmu mechaniky kontinua, v tomto prípade sa však našťastie stretávame so skoro najjednoduchším prípadom – homogénne, izotropné teleso a deformácie v elastickom obore. Do elastického oboru deformácií spadajú také deformácie, ktoré nie sú dost' veľké na to, aby porušili vnútornú štruktúru materiálu, takže len vyvolajú vnútorné napätie, ktoré po uvoľnení sily, ktorá deformáciu spôsobila vráti teleso do pôvodného stavu. Prirodzený stav telesa sa pri nich nemení. Závislosť vnútorného napätia na deformácii je v prvom priblížení lineárna (a keďže sa pohybujem v obore malých deformácií, stačí mi táto linearita), teda v najvšeobecnejšom prípade platí

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}(t, \vec{x})e_{kl} \quad (2.2)$$

čo sa označuje ako zovšeobecnený Hookov zákon ([1] str. 179 a ďalej). Toto naznačuje iba linearitu tejto reakcie. Homogenita telesa vylúči  $\vec{x}$  z argumentu funkcie  $C$  a to, že sa nemení vnútorná štruktúra látky a teda ani jej vlastnosti, vylúči aj čas, mám teda konštantný tenzor 4. rádu  $C_{ijkl}$ . Izotropná látka je taká, že jej reakcia je vo všetkých smeroch rovnaká. Toto (ale aj samotná jeho definícia) vrhá na tenzor  $C_{ijkl}$  mnoho podmienok takých, že nakoniec máme namiesto 81 veličín iba 2,  $\lambda$  a  $\mu$ , ktorých rozmer je  $kg\ m^{-1}\ s^{-2}$ . Prevod medzi  $C_{ijkl}$  a  $\lambda$  a  $\mu$  je odvodený v [1] na str. 179 – 187 a je nasledovný (v druhom riadku nie je suma, ale iba jednotlivý člen – výnimka z Einsteinovho sumačného pravidla):

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} \mu + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{ij} \mu \\ \mu &= C_{ijij}, \lambda = C_{ijij}, i \neq j \end{aligned} \quad (2.3)$$

Hookov zákon pre izotropnú látku teda znie (tentokrát už používam Einsteinovo sumačné pravidlo):

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \vartheta + 2 \mu e_{ij}, \vartheta = e_{ii} \quad (2.4)$$

Pri ďalšom skúmaní problému sa dá postupovať rôzne, napríklad akousi kontinuovou analógiou na Newtonove pohybové rovnice hmotného bodu alebo inými formalizmami, pretože rozloženie  $e_{ij}$  a  $\tau_{ij}$  v podstate úlohu dostatočne určujú (vo všeobecnejšej teórii mechaniky kontinua sú ešte parametrami hustota  $\rho$ , teplota  $T$ , tepelný tok  $\vec{g}$  a vnútorná energia  $u$ , tie ale neberiem do úvahy, pretože nepočítam buď z ich premenlivosťou alebo s tým, že by ovplyvňovali mnou skúmané javy). Formalizmus, ktorý



použijem ja je Lagrange-ovský, ako ho nachádzam v [1] na str. 219 - 221. Ten používa dve veličiny: potenciálnu energiu deformácie  $W$  a kinetickú energiu  $T$ , resp. ich hustoty  $w$  a  $q$  (hustota kinetickej energie je  $q$  preto, aby nekolidovalo značenie s časom  $t$ ). Ich nájdenie je opäť popísané v [1] na str.203 a 220. Výsledné vzťahy sú:

$$w = \frac{1}{2} e_{ij} \tau_{ij} = \frac{1}{2} \lambda \vartheta^2 + \mu e_{ij} e_{ij}, \quad \vartheta = e_{ii} \quad (2.5)$$

$$q = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 \quad (2.6)$$

### 3. Módy

Pri každom popise pohybu určujeme takzvané stupne voľnosti, teda koľko parametrov potrebujeme na popísanie stavu daného systému. Pri pohybe hmotného bodu bez obmedzení sú napríklad tri – tri karteziánske zložky polohového vektoru. Pri pohybe kyvadla iba jeden – uhol otočenia okolo osy závesu. Pre každú situáciu existuje viac možností ako zapisovať stav – teda viac sád súradníc. Napríklad pri spomínanom pohybe hmotného bodu bez obmedzení to môžu byť karteziánske, sférické, valcové alebo ľubovoľné iné súradnice. V niektorých prípadoch sa však dá nájsť taká sada súradníc, ktorej použitie výrazne zjednoduší úlohu. Toto vynikne pri systémoch, v ktorých na sebe jednotlivé stupne voľnosti závisia – najjednoduchší prípad je jednorozmerný pohyb dvoch pružinou spojených hmotných bodov. Dá sa samozrejme počítať s polohou jedného a polohou druhého, ale je jednoduchšie počítať s polohou ťažiska a vzdialenosťou medzi danými dvoma bodmi, pretože takto mám dva nezávislé parametre. Toto rozdelenie na nezávislé stupne voľnosti sa nazýva separáciou a hrá dôležitú úlohu práve pri skúmaní kmitov kontinua.

Tu je situácia podobná. Samozrejme je v každom prípade nekonečné množstvo stupňov voľnosti, pretože hľadám výchylku  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  v každom bode skúmaného telesa. Takisto bude existovať mnoho možností voľby parametrov popisujúcich tento stav (vyberám zo všetkých množín funkcií, ktoré sú v danom obore úplné). Ale čo je najdôležitejšie, bude tiež

existovať popis, ktorý úlohu výrazne zjednoduší. Jedná sa o tzv. módy, teda o vlastné kmity daného telesa. Ako v predchádzajúcom prípade, aj teraz sa jedná o nezávislé parametre – zastúpenie jedného módu neovplyvní zastúpenie ostatných. Tieto módy sú vlastne jednotlivé pohyby, ktoré by za vhodných počiatkových podmienok boli samostatne možné a všetky body sa pri nich pohybujú s rovnakou frekvenciou (alebo stoja – tzv. uzlové body).

Najjednoduchším príkladom je struna – v nej sú vlastnými módmi telesa sinusoidálne stojaté vlny z  $n \in \mathbb{N}$  polvlnami na dĺžke struny. Ich vlnová dĺžka je

$$\lambda = 2L/n \quad (3.1)$$

kde  $L$  je dĺžka struny. Frekvencia teda bude

$$f = c/\lambda \quad (3.2)$$

kde  $c$  je rýchlosť šírenia vlny na danej strune a je závislá na hrúbke struny, napätí v nej a materiáli, z ktorého je vyrobená..

V zložitejších prípadoch sa módy dajú nájsť tak, že si zvolím nejakú bázu funkcií  $f_n$ , do ktorých chcem rozložiť  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ , teda tak aby platilo

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_n X_n f_n \quad (3.3)$$

V nej vyjadrim pohybové rovnice (napríklad Lagrange-ove) ako maticovú úlohu

$$\ddot{\vec{X}} = A \vec{X} \quad (3.4)$$

kde  $\vec{X}$  je nekonečnorozmerný vektor zložený z koeficientov  $X_n$  a  $\ddot{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ . Nájdením vlastných čísel  $\lambda_i$  a vektorov  $\vec{X}_i$  matice  $A$  dostanem pre jednotlivý vektor rovnicu

$$\ddot{\vec{X}}_i(t) = \lambda_i \vec{X}_i(t) \quad (3.5)$$

ktorej riešením bude

$$\vec{X}_i(t) = \vec{X}_i(0) e^{i\omega_i t}, \quad \omega_i = \sqrt{\lambda_i} \quad (3.6)$$

Celkové riešenie teda bude lineárnou kombináciou všetkých riešení tvaru (3.6), pričom jednotlivé koeficienty tejto kombinácie sa budú dať určiť z počiatkových podmienok.

## 4. Tyč - analyticky

Pre demonštráciu mechanizmu ohybových kmitov, teda tých, ktoré hrajú hlavnú rolu aj pri zvone si zvolím jednoduchší prípad – rovnú tyč, pri ktorej zanedbám pohyb mimo jedného stanoveného smeru. Z rovných tyčí obdĺžnikového prierezu sa skladá napríklad xylofón, preto aj tento prípad niečo k hudbe povie. Ako však uvidíme, povie presne to, prečo sa xylofón ako hudobný nástroj príliš nepoužíva, vyjde mi totiž, že jeho vyššie módy nemajú frekvencie harmonické k tej základnej a preto sa človeku jeho zvuk nezdá byť príjemný.

Majme tyč obdĺžnikového prierezu o rozmeroch  $X$ ,  $2Y$  a  $2Z$  ( $X \gg Z, X \gg Y$ ). Chceme vyšetriť jej pohyb v jednom smere, kolmom na os tyče („najdlhší smer“). Súradnice (karteziánske) označím:  $x$  – smer osi tyče („najdlhší smer“),  $z$  – smer pohybu,  $y$  – smer kolmý na oba spomínané. Ich počiatok bude v strede ľavej steny tyče (tj. tyč bude definovaná ako množina  $\{\vec{x}=(x, y, z), x \in (0, X), y \in (-Y, Y), z \in (-Z, Z)\}$ ). Využijem Bernoulliho predpoklad ([1] str. 254) že každý prierez tyče, pôvodne v kolmej rovine na osu  $x$  zostáva rovinným. Dva „susedné“ rovinné prierezy (teda také, ktoré boli pôvodne vzdialené  $dx$ ) sa teda pri ohybe voči sebe nachýlia o uhol  $d\varphi$  (definujeme si kladný uhol vtedy, keď pomyslený polomer otočenia smeruje v zápornom smere  $z$ ). Vlákna rovnobežné s osou  $x$  ktoré sa nachádzajú nad ňou, teda v kladnom  $z$ , sa tým pádom pri kladnom  $d\varphi$  predĺžia a tie pod ňou, v zápornom  $z$  sa skrátia. Pôvodná os tyče, resp. body, kde  $z=0$  sa teda od seba nevzdialia ani nepriblížia.

Keď zanedbám strižné pohyby (tj. pohyby v smere osi  $x$  proti sebe), bude vždy daný rovinný element kolmý na neutrálne vlákno. Zo stavu neutrálneho vlákna (daného jeho  $z$ -ovým posunutím  $f(x)$ ) teda budem v tomto priblížení schopný určiť celkový stav tyče. Výchylku bodov neutrálneho vlákna budem uvažovať iba v smere  $z$ , pretože skrátene vplyvom zahnutia je kvadratické a preto v priblížení malých deformácií zanedbateľné. Výchylka bodov mimo neutrálneho vlákna sa bude skladať zo  $z$ -ovej a  $x$ -ovej zložky. Tieto môžem zapísať takto:

$$\vec{u}(x, z) = -z \sin\left(\arctan\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) \vec{i}_x + \left[ f + z \left(1 - \cos\left(\arctan\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right) \right] \vec{i}_z \quad (4.1)$$

Keďže sa pohybujem v priblížení malých deformácií, viem, že sin a tan majú okolo nuly rovnaký priebeh a naopak cos sa od jednotky vzdiali až v kvadratickom člene, keďže arctan je okolo nuly lineárny, preto sa mi škaredo vyzerajúci vzťah (4.1) upraví na omnoho krajší

$$\vec{u}(x, z) = -z \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \vec{i}_x + f \vec{i}_z \quad (4.2)$$

z toho (viď dodatok I) určím potenciálnu a kinetickú energiu:

$$W = \frac{2}{3} Y Z^3 (\lambda + 2\mu) \int_0^x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 dx \quad (4.3)$$

$$T = \frac{2}{3} \rho Y Z^3 \int_0^x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\right)^2 dx + 2\rho Y Z \int_0^x \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 dx \quad (4.4)$$

Keďže som si na začiatku určil, že  $Z$  je malé, zanedbám v (4.4) prvý člen a pokračujem vo výpočte bez neho. K opodstatnenosti tohoto kroku sa neskôr vrátim.

Poznám potenciálnu a kinetickú energiu, môžem teda použiť Hamiltonov princíp, ktorý nachádzam napr. v [1]:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - W) dt = \\ &= \frac{2}{3} Y Z \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_0^x \left[ 3\rho \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - Z^2 (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 \right] dx dt = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Prvý člen v hranatej zátvorke upravím per partes na (viď dodatok I)

$$4 Y Z \rho \left( \int_0^x \frac{\partial f}{\partial t} \delta f dx \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^x \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \delta f dx dt \right) \quad (4.6)$$

Kde prvý člen v zátvorke bude nulový z Hamiltonovho princípu, ktorý predpokladá rovnaký počiatkový a konečný stav a preto v časových bodoch

$t_0$  a  $t_1$  bude platiť  $\delta f = 0$ . Druhý člen v hranatej zátvorke upravím na (viď dodatok I)

$$\frac{4 Y Z^3 (\lambda + 2\mu)}{3} \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \delta \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dt \Big|_0^x - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \delta f dt \Big|_0^x + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^x \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \delta f dx dt \right] \quad (4.7)$$

Tu prichádza miesto pre diskusiu okrajových podmienok. Poznám tri základné možnosti. Koniec tyče môže byť (môžu sa vyskytnúť aj iné

prípady – napr. zavesený, tj. taký, ktorý sa môže odchýliť iba jedným smerom apod, ale tieto tri sú najnázornejšie):

- Voľný : na jeho polohu a prvú deriváciu nie sú v krajnom bode nijaké podmienky, keďže ale z vonkajšieho prostredia nepôsobia žiadne sily ani momenty síl, bude krivosť aj jej zmena, teda druhá aj tretia derivácia  $f$  podľa  $x$ , nulová.

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0 \quad (4.8)$$

- Podoprený : poloha jeho krajného bodu sa nemení, jeho sklon ale môže byť ľubovoľný. Opäť zvonku nepôsobí sila, preto bude aj krivosť nulová

$$u_z = f = 0; \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (4.9)$$

- Držaný : jeho krajný bod je pevne držaný na jednom mieste, preto je okrem jeho polohy aj jeho sklon nulový

$$u_z = f = 0; \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (4.10)$$

Prvé dva členy v hranatej zátvorke v (4.7) sa vo všetkých týchto prípadoch vynulujú, pretože vždy buď jeden alebo druhý činiteľ sú nulové, ostane teda člen posledný a (4.5) môžem zapísať:

$$\delta S = \frac{4}{3} Y Z \int_{t_0}^{t_1} \int_{-X}^X \left[ -3\rho \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - Z^2(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right] \delta f dx dt = 0 \quad (4.11)$$

Aby toto platilo pre ľubovoľnú  $\delta f$ , musí byť hranatá zátvorka rovná nule pre všetky  $x$  a  $t$ . Z toho získam diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\frac{Z^2(\lambda + 2\mu)}{3\rho} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \quad (4.12)$$

Toto je základný rozdiel medzi ohybovými kmitmi tyče(xylofón, podobný je aj zvon) a priečnymi či pozdĺžnymi kmitmi napríklad struny(gitara, klavír) alebo vzduchového stĺpca(flauta, trúbka). Zatiaľčo pri strunách a stĺpcoch vyjde rovnica vlnová, teda s druhou časovou aj druhou priestorovou deriváciou a tá vedie na harmonické módy (vyššie módy kmitajú na frekvenciách, ktoré sú celočíselnými násobkami frekvencie základného

módu), pri tyči táto rovnica nie je vlnová a teda nutne nevedie na harmonické módy, ako uvidíme o chvíľu. Genialita zvonu je práve v tom, že jeho tvar je tak modelovaný, aby vyššie frekvencie, napriek tomu že daný pohyb sa správa podľa iných pravidiel, vyšli harmonické.

Vyriešim teda rovnicu (4.12). Predpokladám, že riešenie bude mať harmonický priebeh v čase, preto si označím

$$f(x, t) = F(x) e^{i\omega t} \quad (4.13)$$

a podľa toho rovnicu upravím na

$$F \omega^2 e^{i\omega t} = \frac{Z^2(\lambda + 2\mu)}{3\rho} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} e^{i\omega t} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = \omega^2 \frac{3\rho}{Z^2(\lambda + 2\mu)} F = \frac{\omega^4}{v^4} F; \quad v^2 = \omega Z \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{3\rho}}$$

Poslednú diferenciálnu rovnicu vyriešim tak, že nájdem a vyriešim jej charakteristickú rovnicu:

$$F = A e^{\alpha x} \Rightarrow \alpha^4 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \pm \frac{\omega}{v}; \quad \alpha_{3,4} = \pm i \frac{\omega}{v} \quad (4.15)$$

funkcia  $F$  bude teda pozostávať zo štyroch členov, ktoré jednoduchšie zapíšem, keď si uvedomím:

$$e^{\pm \frac{\omega}{v} x} = \cosh \frac{\omega}{v} x \pm \sinh \frac{\omega}{v} x, \quad e^{\pm i \frac{\omega}{v} x} = \cos \frac{\omega}{v} x \pm i \sin \frac{\omega}{v} x \quad (4.16)$$

Zápis funkcie  $F$  bude teda:

$$F = A \cosh \frac{\omega}{v} x + B \sinh \frac{\omega}{v} x + C \cos \frac{\omega}{v} x + D \sin \frac{\omega}{v} x \quad (4.17)$$

Budem počítat' tyč s voľnými koncami preto, že najlepšie vystihuje xylofón.

Dosadím teda do (4.17) podmienky (4.8) pre krajné body  $x=0, x=X$ .

Získam teda okrajové podmienky:

$$A - C = 0; \quad B - D = 0;$$

$$A \cosh \frac{\omega}{v} X + B \sinh \frac{\omega}{v} X - C \cos \frac{\omega}{v} X - D \sin \frac{\omega}{v} X = 0;$$

$$A \sinh \frac{\omega}{v} X + B \cosh \frac{\omega}{v} X + C \sin \frac{\omega}{v} X - D \cos \frac{\omega}{v} X = 0 \quad (4.18)$$

A z toho dosadením:

$$A \left( \cosh \frac{\omega}{v} X - \cos \frac{\omega}{v} X \right) + B \left( \sinh \frac{\omega}{v} X - \sin \frac{\omega}{v} X \right) = 0;$$

$$A \left( \sinh \frac{\omega}{v} X + \sin \frac{\omega}{v} X \right) + B \left( \cosh \frac{\omega}{v} X - \cos \frac{\omega}{v} X \right) = 0 \quad (4.19)$$

Toto je sústava dvoch homogénnych rovníc o dvoch neznámych, ktorá má netriviálne riešenie iba vtedy, keď je jej determinant nulový. To mi dáva rovnicu:

$$\left( \cosh \frac{\omega}{v} X - \cos \frac{\omega}{v} X \right)^2 - \sinh^2 \frac{\omega}{v} X + \sin^2 \frac{\omega}{v} X = 0 \quad (4.20)$$

$$\cosh \frac{\omega}{v} X \cos \frac{\omega}{v} X = 1$$

Poslednú rovnicu budem riešiť pomocou Maple-u (viď dodatok II). Funkcia  $\cosh m \cos m$  je kladná alebo záporná rovnako ako samotný  $\cos m$ , ale každý ďalší oblúk je exponenciálne vyšší, ako ten predchádzajúci, preto táto funkcia pretína jednotku tým bližšie hodnote  $(k+1/2)\pi$  čím väčšie je  $k$ . Zo známeho  $m$  dostanem potrebné hodnoty frekvencie:

$$m = \frac{\omega}{v} X, \quad v^2 = \omega Z \sqrt{\frac{(\lambda+2\mu)}{3\rho}} \Rightarrow m = X \sqrt{\frac{\omega^4}{Z^4} \frac{3\rho}{(\lambda+2\mu)}} \quad (4.21)$$

$$\omega = \frac{m^2}{X^2} Z \sqrt{\frac{(\lambda+2\mu)}{3\rho}}$$

Tie použijem graficky v kapitole 4, na porovnanie s numerickými výsledkami. Výsledky pre  $m$  a pomery frekvencií ku frekvencii základného módu vyzerajú nasledovne:

$n$	$m/\pi$	$\omega/\omega_0$
3	1,505618731	1,000000000
4	2,499752670	2,756538507
5	3,500010679	5,403917634
6	4,499999538	8,932950350
7	5,500000020	13,34428670
8	6,499999999	18,63788789
9	7,500000000	24,81375606
10	8,500000000	31,87189114
11	9,500000000	39,81229307
12	10,50000000	48,63496188
...	...	...

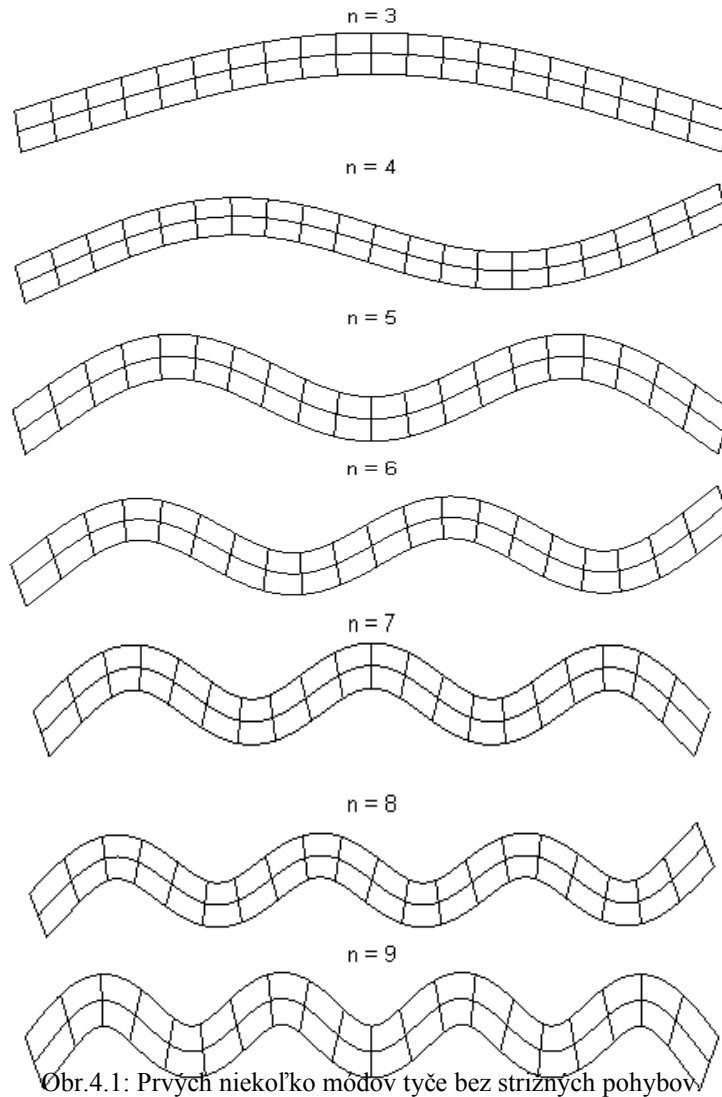
Pokračujem dosadením do (4.17), odkiaľ získam vzťah medzi  $A$  a  $B$ .

$$\left( \frac{A}{B} \right)_n = - \frac{(\sinh m_n - \sin m_n)}{(\cosh m_n - \cos m_n)} \quad (4.22)$$

a z neho samotnú funkciu  $f$ .

$$f_n = -\frac{(\sinh m_n - \sin m_n)}{(\cosh m_n - \cos m_n)} \left( \cosh m_n \frac{x}{X} + \cos m_n \frac{x}{X} \right) e^{i\omega_n t} + \left( \sinh m_n \frac{x}{X} + \sin m_n \frac{x}{X} \right) e^{i\omega_n t} \quad (4.23)$$

Tú potom použijem na vykreslenie grafov jednotlivých funkcií  $f$ . Výsledným riešením bude lineárna kombinácia týchto módov s koeficientami určenými podľa počiatočných podmienok.



Obr.4.1: Prvých niekoľko módov tyče bez strižných pohybov

Číslovanie v Obr.4.1 je volené tak aby bolo konzistentné s číslovaním v kapitole 5, preto začínajú módy od  $n=3$ . Prvé dva módy sú translačný ( $n=1$ ) a rotačný ( $n=2$ ) pohyb, pri ktorých nepôsobí žiadna sila, ktorá by ich vracala do pôvodného stavu, preto nemajú periodický priebeh.

Teraz sa vrátim k vzťahu (4.4) a budem skúmať oprávnenosť



zanedbania prvého členu. Keďže poznám funkciu  $f$ , resp. módy z ktorých je tvorená, môžem priamo spočítať tieto dva členy pre jednotlivé módy. Vyjadrim si potrebné derivácie (pre jednoduchosť si koeficient (4.22) označím  $-K_n$ )

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial t}\right)^2 = -[-K_n \cosh m_n x - K_n \cos m_n x + \sinh m_n x + \sin m_n x]^2 \omega_n^2 e^{i2\omega_n t} \quad (4.24)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial t}\right)^2 = -[-K_n \sinh m_n x + K_n \sin m_n x + \cosh m_n x + \cos m_n x]^2 \frac{m_n^2}{X^2} \omega_n^2 e^{i2\omega_n t} \quad (4.25)$$

Po roznásobení a vyintegrovaní pomocou maplu aj papieru som dostal pomery integrálov zátvoriek pre prvých niekoľko módov nasledovné (výpočet marg[k]):

$n$	$\left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial t}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial f_n}{\partial t}\right)^2 \frac{m_n^2}{X^2}$
3	0.94627427477
4	1.00232716134
5	0.99989933800
6	1.00000434966
7	0.99999981203
8	1.00000000812
9	0.99999999965
10	1.00000000002
11	0.99999999999
...	1.00000000000

Takže sa ak sa budú dostatočne líšiť členy predtým, toto ich neovplyvní. Tie sú:

$$T = \frac{2}{3} \rho Y \frac{Z^3}{X^2} m_n^2 \omega_n^2 e^{i2\omega_n t} \int_0^X [...]^2 dx + 2 \rho Y Z \omega_n^2 e^{i2\omega_n t} \int_0^X [...]^2 dx \quad (3.26)$$

teda vidím, že pokiaľ platí

$$\frac{Z^2}{3X^2} \ll \frac{1}{m_n^2} \approx \frac{1}{(n+1/2)^2 \pi^2} \quad (4.27)$$

$$Z \ll \frac{X}{n}$$

Tak môžem zanedbať prvý člen v (4.4). V praxi to znamená, že keď sa vlnová dĺžka módu začne blížiť šírke tyče, nastáva s týmto zanedbaním problém, lebo prvý člen predstavuje kinetickú energiu pohybov v  $x$ -ovom smere a tá začne byť porovnateľná s tou v  $z$ -ovom smere. Napríklad ale pri

bežných xylofónoch, kde je pomer  $Z : X$  cca. 1 : 30-100 s tým nastáva problém až pri vyšších módoch a prvých niekoľko je teda spočítaných správne aj s týmto zanedbaním.

## 5. Tyč – numericky

Pre presnejšiu predstavu o ohybových kmitoch a ich previazaní so strižnými pohybmi, ktoré som v predchádzajúcej kapitole zanedbal, sa vrátim k tyči obdĺžnikového prierezu, tentokrát však použitím numerickej metódy rozkladu do Legendre-ových polynómov.

Majme opäť tyč obdĺžnikového prierezu o rozmeroch  $2X, 2Y$  a  $2Z$  ( $X \gg Z, X \gg Y$ ) neuchytenú v priestore bez gravitácie (tj. dva voľné konce). Chcem vyšetriť jej pohyb v jednom smere, kolmom na os tyče („najdlhší smer“). Súradnice (karteziánske) označím:  $x$  – smer osi tyče („najdlhší smer“),  $z$  – smer pohybu,  $y$  – smer kolmý na oba spomínané. Ich počiatok bude v strede tyče. Jednotlivé body sa teda hýbu hlavne v smere  $z$ , ale ich pohyb má aj  $x$ -ovú zložku a tú tentokrát neurčím jednoznačne z polohy neutrálneho vlákna, lebo nezanedbám strižné pohyby. V priblížení malých deformácií je možné pohyb vrchného (<sup>u</sup>) a spodného (<sup>l</sup>) bodu s rovnakou pôvodnou hodnotou  $x$  zapísať nasledovne.

$$\begin{aligned} u^u(x, t) &= f(x, t)\vec{i}_z + g(x, t)\vec{i}_x \\ u^l(x, t) &= f(x, t)\vec{i}_z - g(x, t)\vec{i}_x \end{aligned} \quad (5.1)$$

Ešte by som mohol pridať premenlivú zložku deformácie v  $z$ -ovom smere a nepremenlivú v  $x$ -ovom, to ale vedie k separátnemu Lagrangianu (viď dodatok III) a preto sa tým nebudem zaoberať. Medzi týmito krajnými bodmi budem predpokladať lineárne rozdelenie, tj. body pôvodne v jednej rovine kolmej na  $x$ -ový smer budú aj vychýlené stále v jednej rovine.

V najobecnejšom prípade, keď nemám nijaké podmienky na  $f(x)$  ani  $g(x)$ , bude teda výchylka obecného bodu s pôvodnými súradnicami  $x, y$  a  $z$  nasledovná:

$$u(x, y, z, t) = f(x, t)\vec{i}_z + \frac{z}{Z}g(x, t)\vec{i}_x \quad (5.2)$$

Z tohoto môžem určiť potenciálnu a kinetickú energiu (viď dodatok I)

$$W = \frac{2}{3} YZ (\lambda + 2\mu) \int_{-X}^X \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 dx + 2\mu YZ \int_{-X}^X \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx +$$

$$+ 2\mu Y \int_{-X}^X \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) g dx + 2\mu \frac{Y}{Z} \int_{-X}^X g^2 dx \quad (5.3)$$

$$T = 2\rho YZ \int_{-X}^X \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{2}{3} \rho YZ \int_{-X}^X \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 dx \quad (5.4)$$

Z toho, že všetky členy okrem tretieho v (5.3) sú štvorcami vidím, že by bolo osožné rozložiť funkcie  $f$  a  $g$  do nejakej ortogonálnej bázy. Keďže sa pohybujem v obore funkcií na ohraničenom intervale  $x \in \langle -X, X \rangle$ , použijem Legendre-ove polynómy (napr. [3]), ktoré môžem zapísať napr. takto:

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} [(z^2 - 1)^l] \quad (5.5)$$

s upravenou premennou  $P_l\left(\frac{x}{X}\right)$ . Funkcie  $f$  a  $g$  rozložím teda na

$$f(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{f}_l(t) P_l\left(\frac{x}{X}\right)$$

$$g(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{g}_l(t) P_l\left(\frac{x}{X}\right) \quad (5.6)$$

Aby som mohol kinetickú energiu vyjadriť pohodlnejšie, upravím ešte obidve sumy nejakými konštantami

$$f(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2l+1}{8\rho XYZ}} \tilde{f}_l(t) P_l\left(\frac{x}{X}\right)$$

$$g(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{3(2l+1)}{8\rho XYZ}} \tilde{g}_l(t) P_l\left(\frac{x}{X}\right) \quad (5.7)$$

Z toho teraz, podľa pravidla ortogonalít Legendre-ových polynómov z [3], ktoré hovorí

$$\int_{-1}^1 P_l P_m dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm} \quad (5.8)$$

dostanem kinetickú energiu v jednoduchom tvare (bodka nad veličinou znamená jej deriváciu podľa času –  $dv/dt = \dot{v}$ ,  $d^2v/dt^2 = \ddot{v}$ , ... )

$$T = \sum_{l=0}^{\infty} \dot{f}_l^2 + \dot{g}_l^2 \quad (5.9)$$

Potenciálna energia už v takom jednoduchom tvare nevyjde. Členy vo výraze (5.3) si označím

$$\begin{aligned}
W = & \overbrace{\frac{2}{3} YZ (\lambda + 2\mu) \int_{-X}^X \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 dx}^{(I)} + \overbrace{2\mu YZ \int_{-X}^X \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx}^{(II)} + \\
& \overbrace{2\mu Y \int_{-X}^X \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) g dx}^{(III)} + \overbrace{2\mu \frac{Y}{Z} \int_{-X}^X g^2 dx}^{(IV)}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Najľahšie si poradím s členom (IV). Ten vyintegrujem s pomocou ortogonalnosti Legendre-ových polynómov takto:

$$W_{(IV)} = \frac{3\mu}{4\rho XZ^2} \sum_{l=0}^{\infty} g_l^2 \tag{5.11}$$

Ďalej musím okrem pravidla ortogonalnosti určiť podobné pre derivácie jednotlivých polynómov, teda pre  $\int_{-1}^1 \frac{\partial P_l}{\partial x} P_m dx$  a  $\int_{-1}^1 \frac{\partial P_l}{\partial x} \frac{\partial P_m}{\partial x} dx$ . Tento problém sa len ťažko dá riešiť analyticky, nie je však problém zistiť danú maticu do ľubovoľného rádu (a do nekonečna počítať aj tak nebudem) pomocou nejakého matematického programu (napr. Maple). Preto si maticu

$\int_{-1}^1 \frac{\partial P_l}{\partial x} P_m dx$  označím  $\delta'_{lm}$  a maticu  $\int_{-1}^1 \frac{\partial P_l}{\partial x} \frac{\partial P_m}{\partial x} dx$  si označím  $\tilde{\delta}_{lm}$ . Dôležité je všimnúť si, že zatiaľ čo matica  $\tilde{\delta}_{lm}$  je symetrická (z definície), matica  $\delta'_{lm}$  symetrická nieje. Môžem teda výraz (4.10) prepísať:

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2l+1}\sqrt{2m+1}(\lambda+2\mu)}{\rho X} \tilde{\delta}_{lm} g_l g_m + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2l+1}\sqrt{2m+1}\mu}{\rho X} \tilde{\delta}_{lm} f_l f_m + \\
& + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}\sqrt{2l+1}\sqrt{2m+1}\mu}{\rho XZ} \delta'_{lm} f_l g_m + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho XZ^2} g_l g_l
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Toto prepíšem tak, že si definujem nové matice  $\tilde{\sigma}_{lm}$  a  $\sigma'_{lm}$  (s rovnakou poznámkou o symetrii ako matice  $\tilde{\delta}_{lm}$  a  $\delta'_{lm}$ ) a konštantu  $K$  také, že bude platiť

$$W = (\lambda + 2\mu) \tilde{\sigma}_{lm} g_l g_m + \mu \tilde{\sigma}_{lm} f_l f_m + \mu \sigma'_{lm} f_l g_m + \mu K g_m g_m \tag{5.13}$$

Vidím, že tieto matice sú vyčísliteľné do ľubovoľného zvoleného rádu (opäť za použitia napr. Maple) a niesú závislé ani na  $\vec{x}$  ani na  $t$ .

Na nájdenie pohybových rovníc použijem Lagrange-ovu metódu, ako ju nájdeme napr. v [4]. Mám systém s nekonečným počtom stupňov voľnosti. Za kanonické súradnice  $q$  si zvolím koeficienty  $f_n$  a  $g_n$ , ktoré sú závislé na čase a majú teda aj časové derivácie. Keďže množina Legendre-ových polynómov je úplná v danom obore, bude tým úplne popísaný momentálny stav tyče. Úloha bude veľmi zjednodušená tým, že

okrem vždy platného (vidieť z (5.13))

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{q}}=0 \quad (5.14)$$

bude tentokrát platiť aj (vidieť z (5.9))

$$\frac{\partial T}{\partial q}=0 \quad (5.15)$$

a preto budú Lagrange-ove pohybové rovnice vyzerat' nasledovne:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial W}{\partial q} = 0 \quad (5.16)$$

Jednoduchšie vyjadrim prvý člen. Ten bude

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = 2 \frac{d}{dt} \dot{q} = 2 \ddot{q} \quad (5.17)$$

Druhý člen bude vyzerat' inak pre  $q = f_l$  a pre  $q = g_l$ . V prvom prípade to bude:

$$\frac{\partial W}{\partial f_l} = \mu \tilde{\sigma}_{lm} f_m + \mu \sigma'_{lm} g_m \quad (5.18)$$

a v druhom prípade

$$\frac{\partial W}{\partial g_m} = (\lambda + 2\mu) \tilde{\sigma}_{lm} g_l + \mu \sigma'_{lm} f_l + 2\mu K g_m \quad (5.19)$$

Definujem si vektory  $\vec{f}^{(n)}$  a  $\vec{g}^{(n)}$ , ktorých zložky budú

$$\vec{f}^{(n)} = (f_1, f_2, \dots, f_n); \quad \vec{g}^{(n)} = (g_1, g_2, \dots, g_n) \quad (5.20)$$

Parameter  $n$  používam preto, aby som s tým vedel počítať, keďže budem počítať numericky. Zvyšovaním a znižovaním  $n$  môžem teda zvyšovať presnosť výsledku alebo jednoduchosť výpočtu. Teraz hľadám zápis pohybových rovníc v tvare (3.4). Ten nebude problém dostať z (5.20 – 23).

Ešte si definujem matice  $\tilde{\sigma}^{(n)}$  a  $\sigma'^{(n)}$  rovnako, teda budú to pôvodné matice, ale iba do  $n$ -tého rádu. Zápis (3.4) potom bude vyzerat' takto:

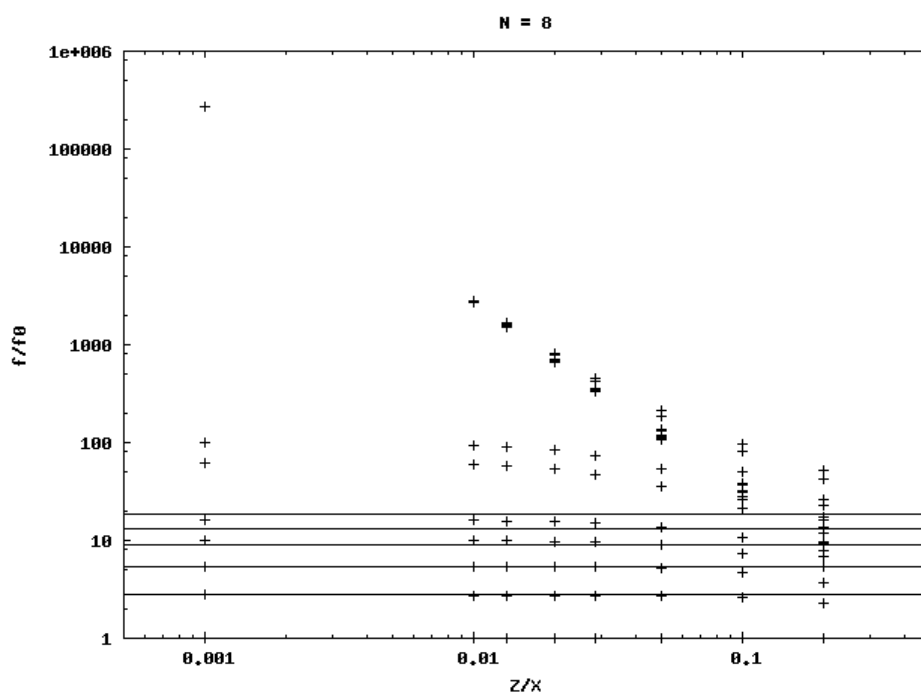
$$\begin{pmatrix} \ddot{\vec{f}}^{(n)} \\ \vec{g}^{(n)} \end{pmatrix} = A^{(n)} \begin{pmatrix} \vec{f}^{(n)} \\ \vec{g}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \tilde{\sigma}^{(n)} & \mu \sigma'^{(n)} \\ \mu \sigma'^{(n)T} & (\lambda + 2\mu) \tilde{\sigma}^{(n)} + 2\mu K \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{f}^{(n)} \\ \vec{g}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Hľadám teda vlastné čísla a vektory matice  $A^{(n)}$ . Tieto hľadám pomocou Maple-u. Vlastné čísla, ktoré dostanem sú podľa (3.6) štvorcami frekvencií jednotlivých módov, to bude teda najzaujímavejšia informácia. Vstup do Maple-u uvádzam v dodatku II. Používam nasledovné parametre:

$$\lambda=2, \mu=1, \rho=1, X=1, Y=\frac{1}{10}, Z=Z, N=N \quad (5.22)$$

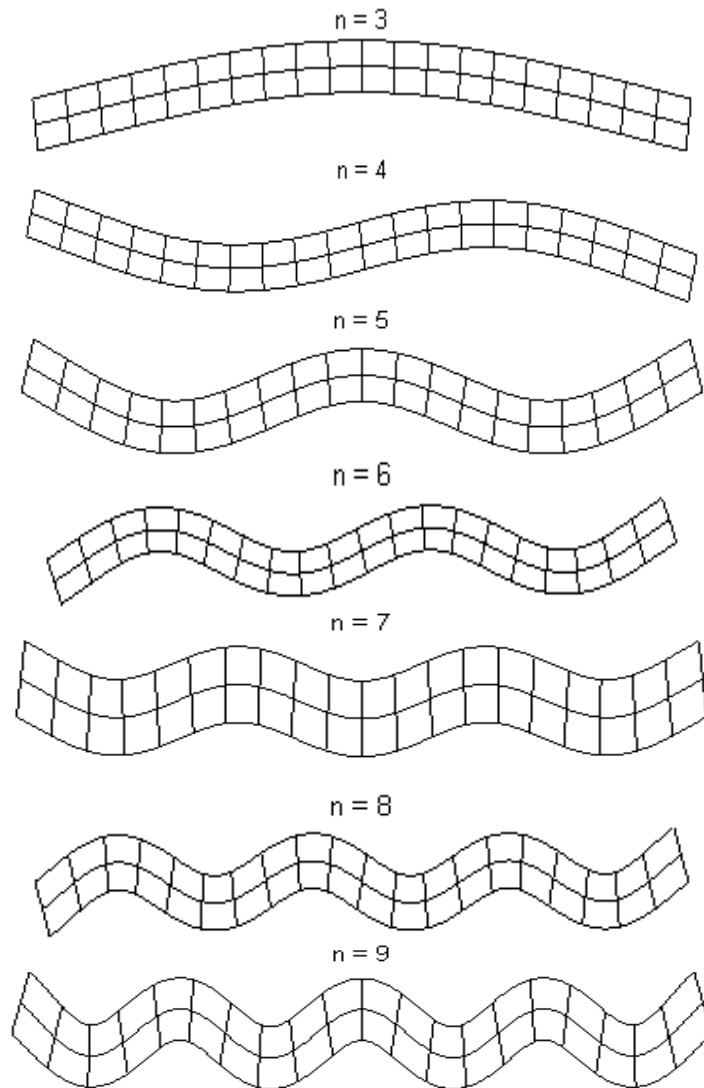
Všetky sú zadané bezrozmerne a jednoducho hlavne preto, že ma zaujímajú v podstate iba pomery frekvencií. Preto aj výsledky budem udávať v násobkoch frekvencie tretieho módu, teda prvého deformačného. Prvý deformačný mód bude až tretím preto, že som do zadania nevložíl nijak zákony zachovania hybnosti a momentu hybnosti a metóda mi spočíta aj posuvný (prvý) a rotačný (druhý) mód s nulovými frekvenciami. Parametre  $Z$  a  $N$  som nezadal, pretože ich budem meniť. Mám teda premenlivú veľkosť bázy Legendre-ových polynómov a hrúbku materiálu (vzhľadom k jeho dĺžke).

V nasledujúcich grafoch ukážem závislosť frekvencií na týchto dvoch premenných (resp. vždy na jednej pri konštantnej druhej). Vyberám len niektoré prípady, na ktorých budem chcieť ilustrovať nejakú konkrétnu javy. Najprv prípad  $N=8$  :



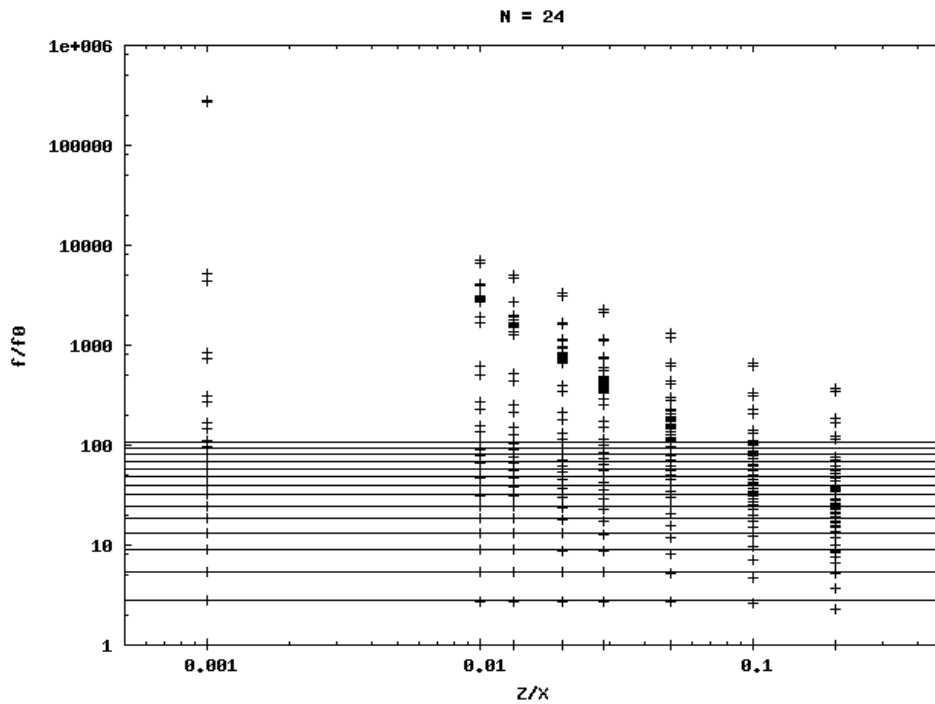
Obr.5.1: spektrum frekvencií pri rôznych hrúbkach tyče pre  $N=8$  .

Na tomto grafe vidím sedem základných ohybových frekvencií. Tieto sa so zmenou hrúbky materiálu menia len minimálne, a to tak, že mierne stúpajú so znižujúcou sa hrúbkou. Vykreslené vyzerajú takto (zobrazujem  $N=16$  a  $Z=\frac{1}{20}$  ale vo všetkých prípadoch sú veľmi podobné):



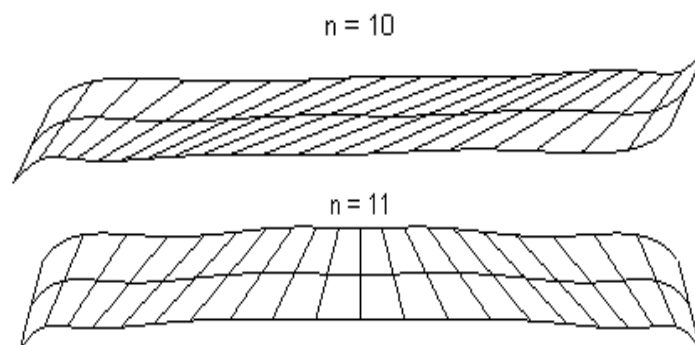
Obr.5.2: 3tí – 9ty mód pri  $N=16$  a  $Z=\frac{1}{20}$  .

Z porovnania numerického (body) s analytickým (čiary) výsledkom v Obr.5.1 vidím, že pri  $N=8$  sa už v móde  $n=6$  ( $n$  označuje poradie módu – pre prvý deformačný mód  $n=3$ ) numerický prípad odlišuje od analytického a to preto, že v numerickom sa do prvých módov miešajú aj neskoršie, pre ktoré nemám dostatočný počet stupňov voľnosti. Toto nebude tak výrazné pre vyššie  $N$ , pretože tam sa vyššie módy, ktoré nepopíšem z nedostatku stupňov voľnosti miešajú až do neskorších a prvých niekoľko je veľmi podobných analytickému riešeniu.

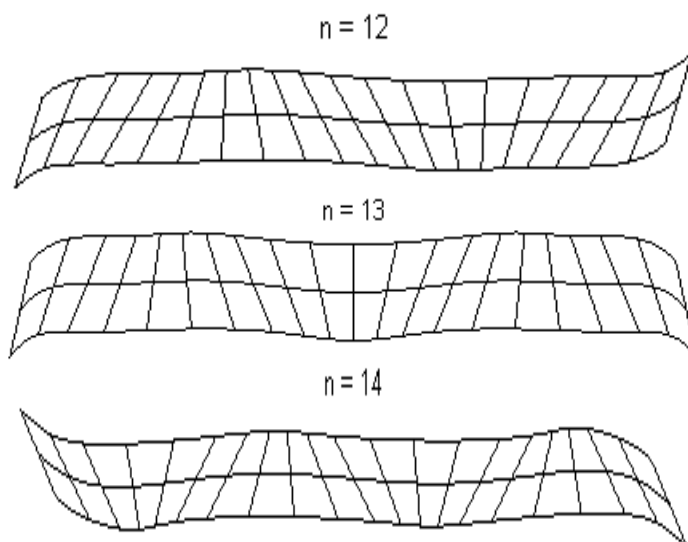


Obr.5.3: Spektrum frekvencií pri rôznych hrúbkach tyče pre  $N=24$  .

Pri hrubších tyčiach sa medzi nimi nachádzajú aj strižné módy, ktorých frekvencia však s klesajúcou hrúbkou kvadraticky (aspoň v tých tenších tyčiach veľmi presne) stúpa, čím sa dostáva ďaleko nad tie ohybové a takisto sa v tenších materiáloch ešte výraznejšie zoskupujú vo veľmi malom rozsahu. Toto naznačuje, že rôzne strižné módy, ktoré sa líšia počtom uzlov majú takmer rovnaké frekvencie, ktoré kvadraticky závisia na hrúbke tyče. Napríklad nasledujúcich päť módov z nastavenia  $N=8$  a  $Z=\frac{1}{100}$  má frekvencie 2683.32, 2684.79, 2686.95, 2690.42 a 2694.19 :

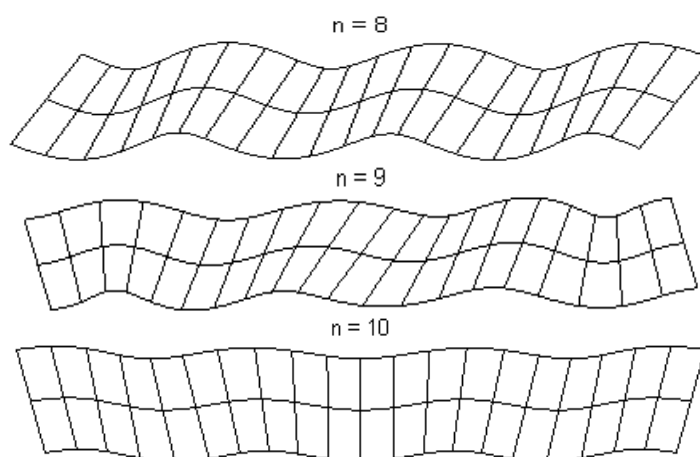






Obr.5.4: 10ty – 14ty mód pri  $N=8$  a  $Z=\frac{1}{100}$  .

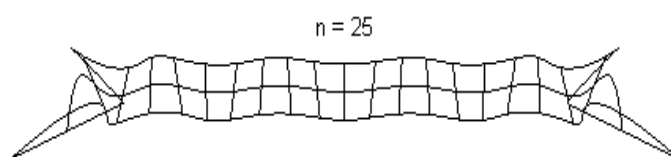
Pri tenších tyčiach sú teda jasne oddelené strižné módy od ohybových a začínajú až  $N+1$ -ým módom (dovtedy sú všetky čisto ohybové viac menej bez vychýlenia rovín kolmých na  $x$  od smeru, ktorým sú natočené v analytickom riešení bez uvažovania strižných pohybov). To, že nachádzam čisto ohybové módy iba do  $N+1$ -ého módu je pochopiteľné, keďže funkciu  $f$  v zadaní (5.2) rozkladám iba do  $N+1$  Legendre-ových polynómov a funkcia  $g$  určuje strižné kmity. V hrubších tyčiach sa ale po niekoľkých prvých čisto ohybových módoch objavujú módy zmiešané, ako napríklad v prípade  $N=12$  ,  $Z=\frac{1}{5}$  .



Obr.5.5: 8my – 10ty mód  $N=12$  a  $Z=\frac{1}{5}$

Toto miešanie módov vysvetľuje prečo majú zhluky módov okolo jednej frekvencie, zodpovedajúcej čistým strižným kmitom predsa šírku a nemajú

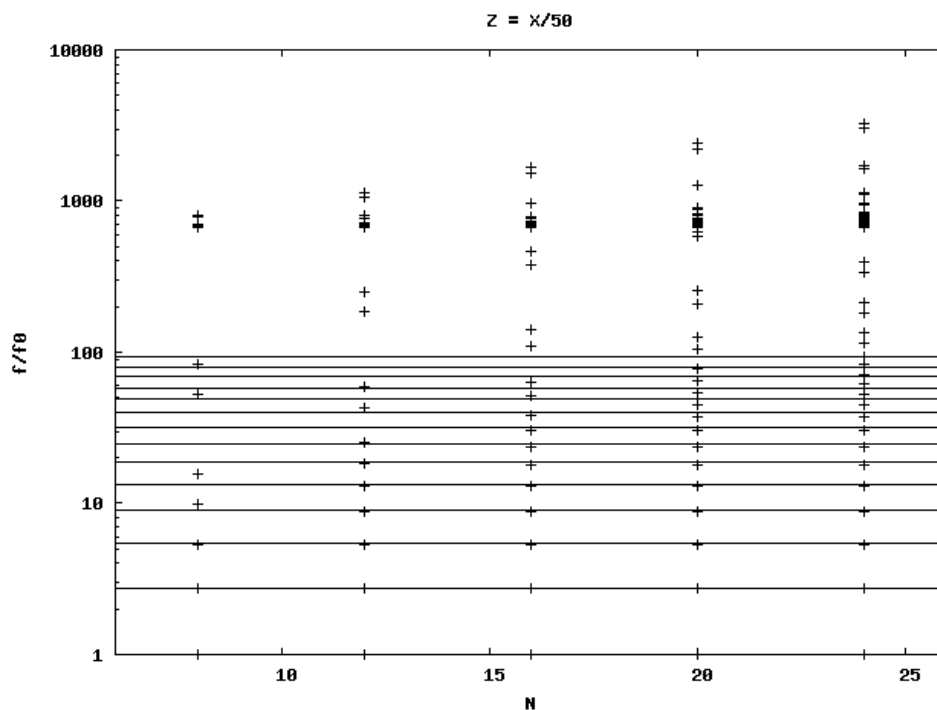
všetky úplne rovnakú frekvenciu. Táto šírka rozptylu zhluku strižných módov je tým vyššia, čím hrubšia je tyč, pretože v hrubších tyčiach sú si tieto dva druhy kmitov frekvenčne bližšie a miešajú sa vyrovnanejšie. Vysvetľuje to tiež rozdiely medzi frekvenciami prvých niekoľkých základných prevažne ohybových módov, do ktorých sa v hrubších tyčiach viac (hoci nie až natoľko, aby to bolo poznať z vykreslenia pohybu) miešajú strižné pohyby ako v tyčiach tenších. Aj pri módoch, ktoré by podľa hore uvedeného mali byť viac strižné, napríklad 25ty mód v prípade  $N=12$  ,  $Z=\frac{1}{50}$  , môže totiž prevládnuť ohybová zložka.



Obr.5.6: 25ty mód pri  $N=12$  a  $Z=\frac{1}{50}$

Pre veľké odchýľky na krajoch tohoto módu (a mnohých ďalších) existujú dve vysvetlenia. Prvé je, že je to chyba metódy, pretože numerické metódy rozkladu do konečnej bázy spravidla zlyhávajú pri krajoch. Druhé je, že sa naozaj tyč viac hýbe na krajoch v danom móde, čo ale nie je pozorovateľné v prvých tridsiatich módoch analytického riešenia, preto predpokladám, že to vychádza z miešania všetkých ďalších, z nedostatku stupňov voľnosti nepopísaných, módov. To podporuje aj fakt, že tieto odchýľky nastávajú pre  $n$  blížiac sa  $2N$  a pri tenších tyčiach aj pre  $n$  blížiac sa  $N$ . Predpokladám, že väčšiu rolu hrá druhý spomínaný dôvod, nevyklúčujem však ani príspevanie prvého.

Ďalším grafom, ktorým chcem ilustrovať závislosť výsledku na hĺbke Legendre-ovskej bázy je prípad  $Z=\frac{1}{50}$  :

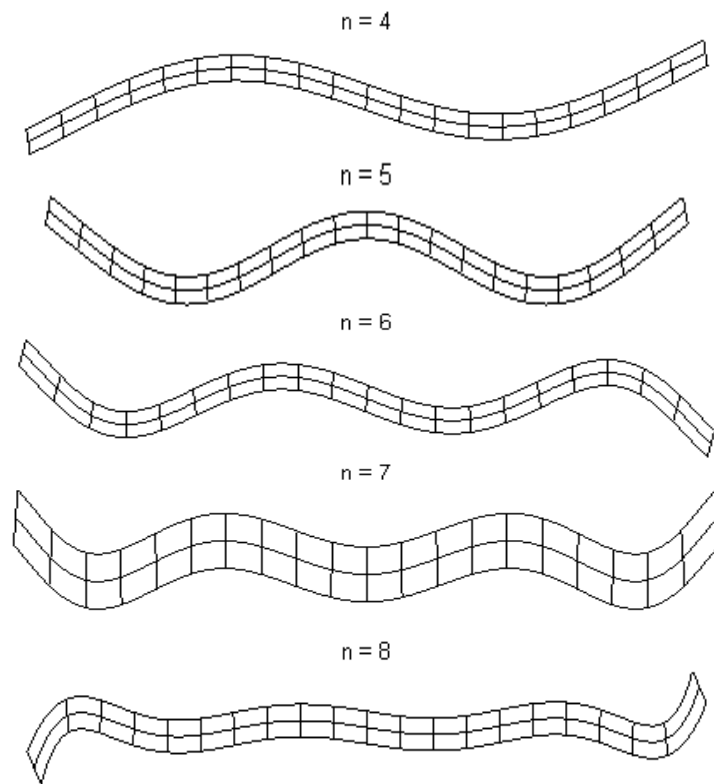


Obr.5.7: Rozloženie spektra frekvencií pri rôznych hĺbkach bázy pre  $Z = \frac{1}{50}$

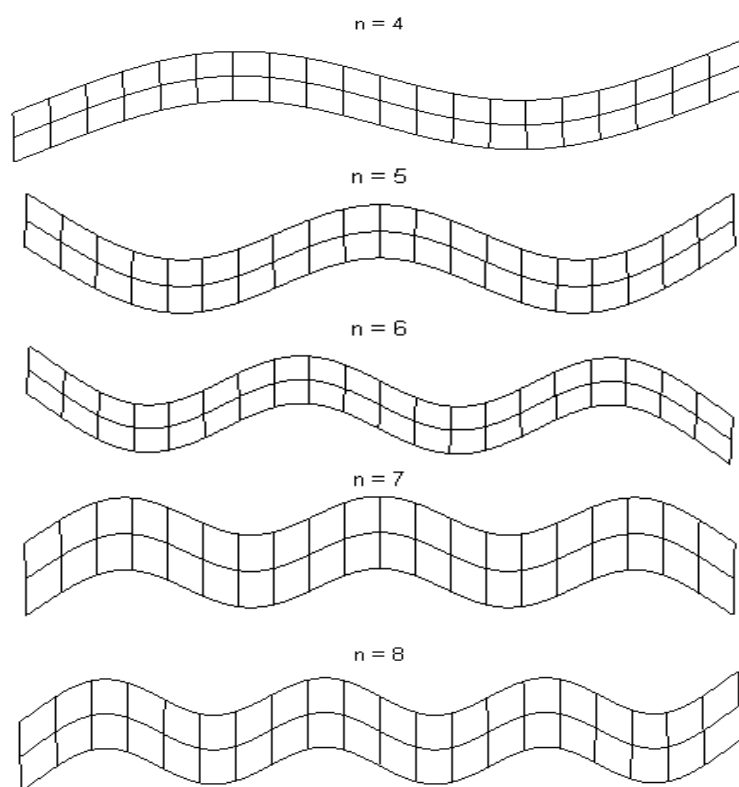
Vidím z neho hneď niekoľko vecí. Za prvé, že prvých niekoľko základných frekvencií sa od seba líši len veľmi málo (pripájam tabuľku).

mód\hĺbka bázy	$N=8$	$N=12$	$N=16$	$N=20$	$N=24$
$n=4$	2.74831534565 307	2.74769677293 291	2.74769677016 599	2.74769677016 723	2.74769677016 726
$n=5$	5.37006611040 269	5.36116490994 227	5.36116453432 544	5.36116453432 687	5.36116453432 704
$n=6$	9.79595298337 279	8.80790419437 176	8.80696916156 498	8.80696912985 603	8.80696912985 606
$n=7$	15.5829617408 623	13.0626034926 665	13.0550842699 920	13.0550832208 497	13.0550832208 349
$n=8$	52.9921683620 122	18.5350225565 158	18.0700211785 356	18.0693571229 754	18.0693570607 656

Najodlišnejšie je to pri  $N=8$ , kde sa z nedostatku stupňov voľnosti viaceré módy miešajú do jedného. Vidieť to aj z obrázkov módov:



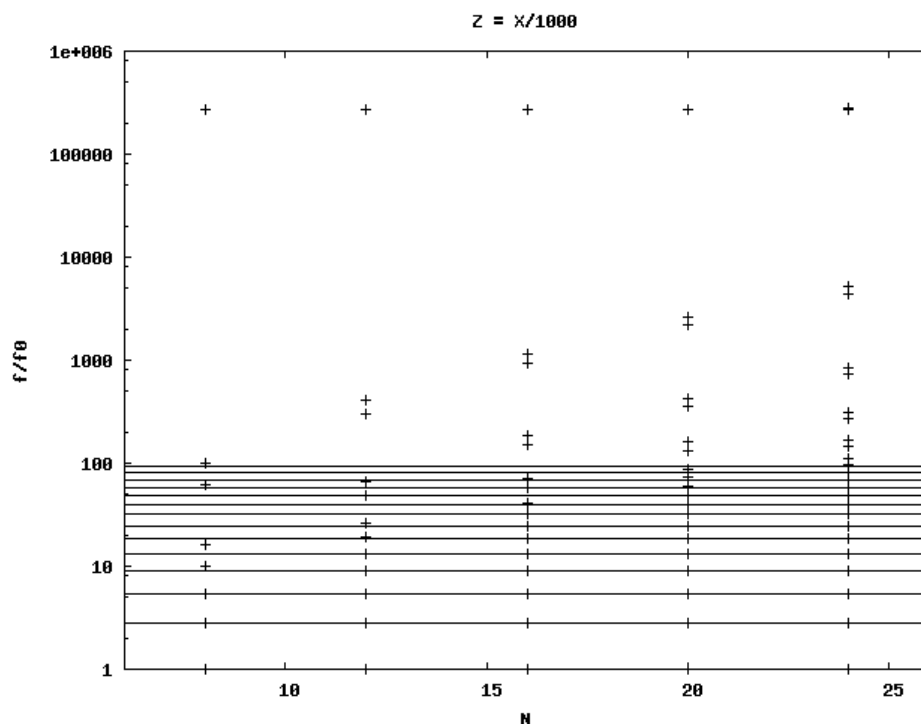
Obr.5.8: 4-tý – 8-my mód pri  $N=8$  a  $Z=\frac{1}{50}$



Obr.5.9: 4-tý – 8-my mód pri  $N=20$  a  $Z=\frac{1}{50}$

Zatiaľčo pri  $N=8$  už na šiestom móde vidieť jasne, že nie je úplne pravidelný a sú doň teda primiešané aj iné, pri  $N=20$  je prvých osem módov oveľa bližšie pravidelným ohybovým (v obrázkoch odchýľku

nerozoznať). Z obr.5.7 tiež vidím, že zhluk strižných módov je okolo rovnakých frekvencií, čo podporuje vysvetlenie týchto zhlukov uvedené vyššie. Vidím ale, že pri hlbších bázach je tento zhluk rozptýlenejší, čo naznačuje, že viac stupňov voľnosti dovoľuje väčšie miešanie strižných módov s ohybovými. Toto ale neplatí na podobnom grafe pre  $Z = \frac{1}{1000}$ , kde sú aj v najhlbšej báze jasne oddelené a s malým rozptylom zhlukené všetky strižné módy.

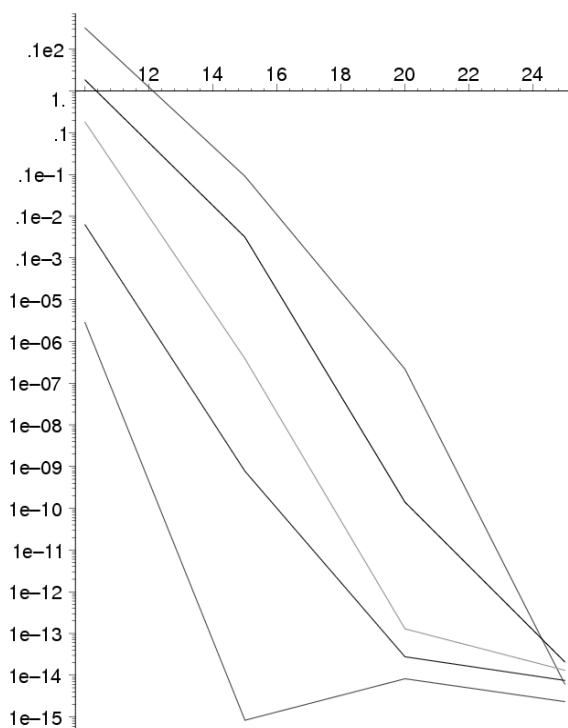


Obr.5.10: Rozloženie spektra frekvencií pri rôznych hĺbkach bázy pre  $Z = \frac{1}{1000}$ .

Z toho usudzujem, že toto miešanie je výrazné len keď sú frekvencie týchto módov blízke (čo v prípade  $Z = \frac{1}{50}$  platí až pre vyššie ohybové módy a preto to nepozorujem pri plytších bázach).

Na záver kapitoly vyhodnotím kvalitu numerickej metódy. V grafe na obr.5.11 je vynesená chyba pomeru frekvencie módov  $n=4$  a  $n=3$  jednotlivých hrúbok tyče ako funkcia hĺbky bázy. Chyby sa vo všetkých prípadoch znižujú s rastúcou hĺbkou, teda výsledok nájdený touto metódou naozaj konverguje k analytickému výsledku. Pri  $N=24$  je chyba pri všetkých tyčiach menšia ako  $10^{-13}$  čo sa dá považovať za veľmi presný výsledok, vidím teda, že metóda je schopná už pri takej hĺbke bázy, s ktorou

vie maple počítať rádovo v sekundách (na 330MHz procesore trval výpočet vlastných čísel matice cca. 15s) dávať veľmi presné výsledky.



Obr.5.11: Porovnanie presnosti num. metódy s analytickým riešením pre rôzne hĺbky bázy.

## 6. Zvon

Pri zvone je situácia omnoho zložitejšia ako pri rovnej tyči obdĺžnikového prierezu, ako však uvidím, niektoré analógie zostanú. Pre popis zvonu budem používať špeciálne „zvonové súradnice“ závislé na tvare zvonu. Tieto pozostávajú z uhlu  $\varphi$  rovnakého ako pri valcových alebo sférických súradniciach, a zo súradníc  $\tilde{r}$  a  $\tilde{h}$ . Súradnica  $\tilde{r}$  je vzdialenosť od stredu zvonu (tj. od jeho najvyššie položeného miesta, kde je aj uchytený) po neutrálnom vlákne (pre toto už nemusí nutne platiť, že sa pri žiadnom móde nepredĺži ani neskráti, definujem ho hlavne kvôli súradniciam ako spojnicu stredov všetkých úsečiek od jedného kraju zvonu k druhému vedeným kolmo k nemu – vyzerá to ako definícia kruhom, ale v strede zvonu je smer neutrálneho vlákna zjavne vodorovný a ďalej sa podľa tejto definície dá infinitezimálne rozširovať, hoci len ak nie je hrúbka nespojitá alebo pridávaná len na jednej strane) a môže nadobúdať iba kladné hodnoty. Súradnica  $\tilde{h}$  je kolmá na toto vlákno a môže nadobúdať aj kladné aj záporné hodnoty, nulu má v tomto vlákne. Výchylka nejakého bodu vo vnútri zvonu sa bude tentokrát skladať zo všetkých troch zložiek pohybu.

Predpokladám ale, že zvon je axiálne symetrický. Toto v skutočnosti nie vždy platí, pretože máloktorý zvon je tzv. panenský, teda iba odlievaný a neladený. Väčšina zvonov po tom, čo ich odlejú neznie presne harmonicky a tak sú doladované – na presne určených miestach sú zvnútra uberané malé kúsky hmoty tak, aby aspoň prvých niekoľko módov znelo harmonicky. Druhým dôvodom axiálnej asymetrie sú tzv. rázy, teda výsledok dvoch módov s veľmi podobnými frekvenciami. Dva čisté tóny (resp. dva módy v jednom tóne) s blízkou frekvenciou sa zložia takto:

$$A e^{i(\omega_0+\delta\omega)t} + B e^{i(\omega_0-\delta\omega)t} = (A e^{i\delta\omega t} + B e^{-i\delta\omega t}) e^{i\omega_0 t} \quad (6.1)$$

kde výraz v zátvorke je zjavne  $\delta\omega$  periodický. Keď je tento rozdiel menší ako najnižšia počuteľná frekvencia  $20\text{Hz}$ , je to počuť ako zvuk s frekvenciou  $\omega_0$ , ktorého intenzita stúpa a klesá s frekvenciou  $\delta\omega$ . Toto si samozrejme výrobcovia zvonov neželajú, preto sa snažia takéto dve frekvencie buď vyladiť, alebo dostať do takého stavu, že srdce zvonu udrie do miesta, kde má jeden mód uzol a druhý kmitňu, tj. rozoznie sa iba jeden z

týchto módov. K tomu je ale nutná axiálna asymetria, niekedy sa používajú napríklad pridané „rebrá“ z vnútornej strany zvonu ([2] str. 591). Napriek týmto faktom, ale budem predpokladať axiálnu symetriu, pretože to zjednoduší výpočty a neovplyvní to veľmi prvých niekoľko základných módov.

Zložky výchylky obecného bodu  $\vec{x}$  môžem zapísať takto:

$$\vec{u}(\vec{x}) = f^{(\varphi)}(\varphi, \tilde{r}, \tilde{h}) \vec{i}_\varphi + f^{(\tilde{r})}(\varphi, \tilde{r}, \tilde{h}) \vec{i}_{\tilde{r}} + f^{(\tilde{h})}(\varphi, \tilde{r}, \tilde{h}) \vec{i}_{\tilde{h}} \quad (6.2)$$

Závislosť na  $\varphi$  môžem rozpísať do fourierovej rady takto:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}, t) = & \sum_{m=0}^{\infty} \left( P_m^{(\tilde{r})}(\tilde{r}, \tilde{h}, t) \cos(m\varphi) + \overline{P_m^{(\tilde{r})}}(\tilde{r}, \tilde{h}, t) \sin(m\varphi) \right) \vec{i}_{\tilde{r}} + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \left( P_m^{(\tilde{h})}(\tilde{r}, \tilde{h}, t) \cos(m\varphi) + \overline{P_m^{(\tilde{h})}}(\tilde{r}, \tilde{h}, t) \sin(m\varphi) \right) \vec{i}_{\tilde{h}} + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \left( P_m^{(\varphi)}(\tilde{r}, \tilde{h}, t) \sin(m\varphi) + \overline{P_m^{(\varphi)}}(\tilde{r}, \tilde{h}, t) \cos(m\varphi) \right) \vec{i}_\varphi \end{aligned} \quad (6.3)$$

Keďže viem, že platí

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi = 0, \forall m, n \in \mathbb{N}_0, \\ & \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi = 0, \forall m \neq n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

zistím, že po vyintegrovaní cez súradnicu  $\varphi$  sa mi, bez ohľadu na to, aké sú funkcie  $P$ , výrazy pre  $T$  aj  $W$  rozdelia na nezávislé sčítance pre každé  $m$ , ktoré navyše nebudú ani medzi sebou závislé pre rôzne  $m$

( $\hat{W}_m$  nezávisí na  $\hat{T}_n$  pre  $m \neq n$ ).

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{T}_m, \quad W = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{W}_m \quad (6.5)$$

Takisto nie je možné nijakou operáciou, z tých, ktoré sa pri výpočte  $T$  a  $W$  používajú zmeniť argument  $\cos$  alebo  $\sin$  (derivovaním a integrovaním sa mení daná funkcia, ale nie jej argument, násobením a mocnením sa nemení ani funkcia), preto môžem  $\hat{T}_m$  a  $\hat{W}_m$  určiť zo sčítancov v (6.3) s rovnakým  $m$ . Stačí mi teda riešiť úlohu pre jedno  $m$  (resp. pre obecné  $m$  – pri tom si ale musím dať pozor na  $m=0$ , pre ktoré bude prípad iný (v druhom riadku (6.4) je výsledný integrál vždy  $\pi$  okrem  $m=0$ , keď je  $2\pi$  pre kosíny a 0 pre síný)) a výsledné vlastné módy budú vlastnými módmí celého zvonu. V takomto prípade ( $m \neq 0$ ) platí pozmenená (6.3):



$$\begin{aligned}\vec{u}_m(\vec{x}, t) = & \left( P_m^{(\tilde{r})}(\tilde{r}, \tilde{h}, t) \cos(m\varphi) + \overline{P_m^{(\tilde{r})}}(\tilde{r}, \tilde{h}, t) \sin(m\varphi) \right) \vec{i}_{\tilde{r}} + \\ & + \left( P_m^{(\tilde{h})}(\tilde{r}, \tilde{h}, t) \cos(m\varphi) + \overline{P_m^{(\tilde{h})}}(\tilde{r}, \tilde{h}, t) \sin(m\varphi) \right) \vec{i}_{\tilde{h}} + \quad (6.6) \\ & + \left( P_m^{(\varphi)}(\tilde{r}, \tilde{h}, t) \sin(m\varphi) + \overline{P_m^{(\varphi)}}(\tilde{r}, \tilde{h}, t) \cos(m\varphi) \right) \vec{i}_{\varphi}\end{aligned}$$

Z toho podľa (2.1) a (2.5) platí (aby som si mohol dovoliť počítať  $e_{ij}$  v iných súradniciach, musia tieto byť ortonormálne alebo musím použiť Lamého koeficienty. Ortogonalitu mám pri „zvonových“ súradniciach tak, ako som si ich definoval splnenú, stačí teda rovnako oškálovať  $\tilde{r}$  a  $\tilde{h}$  a predefinovať si  $P_m^{(\varphi)} \stackrel{def}{=} r P_m^{(\varphi)}$  a  $\overline{P_m^{(\varphi)}} \stackrel{def}{=} r \overline{P_m^{(\varphi)}}$  (nie je to presné označenie, ale znamená to, že odteraz budem pod daným označením rozumieť to čo doteraz vynásobené  $r$ .) kde  $r$  je vzdialenosť od osy zvonu, ktorá je funkciou  $\tilde{r}$  a  $\tilde{h}$  a môžem ju spočítať keď poznám tvar zvonu. Tak mám súradnice ortonormálne.):

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{w}_m d\varphi = & (\lambda + 2\mu) \left( m^2 P_m^{(\varphi)} + \left( \frac{\partial P_m^{(\tilde{r})}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left( \frac{\partial P_m^{(\tilde{h})}}{\partial \tilde{h}} \right)^2 \right) + 2\lambda \left( m P_m^{(\varphi)} \frac{\partial P_m^{(\tilde{r})}}{\partial \tilde{r}} + m P_m^{(\varphi)} \frac{\partial P_m^{(\tilde{h})}}{\partial \tilde{h}} + \frac{\partial P_m^{(\tilde{r})}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial P_m^{(\tilde{h})}}{\partial \tilde{h}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \mu \left( 2 \frac{\partial P_m^{(\tilde{h})}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial P_m^{(\tilde{r})}}{\partial \tilde{h}} + \left( \frac{\partial P_m^{(\varphi)}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left( \frac{\partial P_m^{(\varphi)}}{\partial \tilde{h}} \right)^2 + \left( \frac{\partial P_m^{(\tilde{h})}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left( \frac{\partial P_m^{(\tilde{r})}}{\partial \tilde{h}} \right)^2 \right) + \\ & + (\lambda + 2\mu) \left( m^2 \overline{P_m^{(\varphi)}} + \left( \frac{\partial \overline{P_m^{(\tilde{r})}}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \overline{P_m^{(\tilde{h})}}}{\partial \tilde{h}} \right)^2 \right) + 2\lambda \left( -m \overline{P_m^{(\varphi)}} \frac{\partial \overline{P_m^{(\tilde{r})}}}{\partial \tilde{r}} - m \overline{P_m^{(\varphi)}} \frac{\partial \overline{P_m^{(\tilde{h})}}}{\partial \tilde{h}} + \frac{\partial \overline{P_m^{(\tilde{r})}}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \overline{P_m^{(\tilde{h})}}}{\partial \tilde{h}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \mu \left( 2 \frac{\partial \overline{P_m^{(\tilde{h})}}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \overline{P_m^{(\tilde{r})}}}{\partial \tilde{h}} + \left( \frac{\partial \overline{P_m^{(\varphi)}}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \overline{P_m^{(\varphi)}}}{\partial \tilde{h}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \overline{P_m^{(\tilde{h})}}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \overline{P_m^{(\tilde{r})}}}{\partial \tilde{h}} \right)^2 \right) \quad (6.7)\end{aligned}$$

a podľa (2.6)

$$\int_0^{2\pi} \hat{q}_m d\varphi = \frac{1}{2} \rho \left( \left( \frac{\partial P_m^{(\tilde{r})}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial P_m^{(\tilde{h})}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial P_m^{(\varphi)}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \overline{P_m^{(\tilde{r})}}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \overline{P_m^{(\tilde{h})}}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \overline{P_m^{(\varphi)}}}{\partial t} \right)^2 \right) \quad (6.8)$$

Z toho vidím, že sa nikde nevyskytuje krížny člen  $\overline{P_m^{(i)}} P_m^{(j)}$  ani nejakých ich derivácií a preto sa mi celý problém rozpadne ešte na dva ďalšie podproblémy.

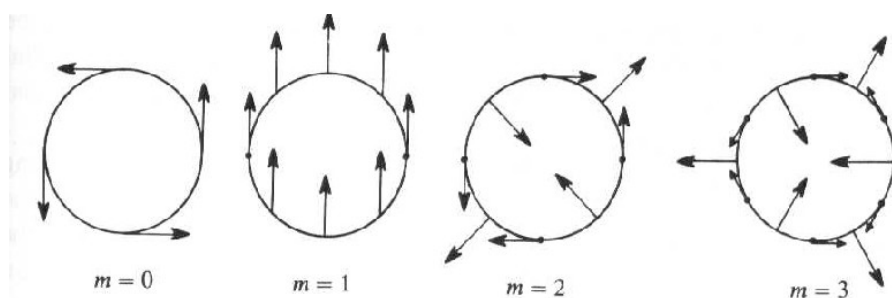
$$L = T - W = \sum_{m=0}^{\infty} (L_m + \overline{L}_m) = \sum_{m=0}^{\infty} (T_m - W_m + \overline{T}_m - \overline{W}_m) \quad (6.9)$$

Tým som odfiltroval závislosť na  $\varphi$  a tak som problém zredukoval na veľmi podobný xylofónu, teda tomu, o čom boli minulé dve kapitoly. Konkrétne sa teraz jedná o výpočet tyče, ktorá ale nemá voľný tvar a jeho následné zrotovanie podľa toho, aké je  $m$ . Zvon (resp. jeho „podtyč“ z (6.9)) je od tyče zložitejší v tom, že pripúšťam aj pohyb v smere  $\varphi$  a tým som oproti predchádzajúcim kapitolám pribral jeden rozmer. Je tiež zložitejší v

tom, že jeho tvar nie je rovný a preto musím počítať v krivočiarych súradniciach. Podobne ako pri tyči môžem ale zjednodušiť závislosť na  $\tilde{h}$ , pretože pri zvonoch sa pomer  $\tilde{H}:\tilde{R}$  (maximálne možné  $\tilde{h}$  a  $\tilde{r}$ ) pohybuje v ráde 1:10 – 1:50, teda v tých rádoch kde ju ešte nemôžem zanedbať úplne (vidno z výsledkov numerických riešení tyčí), ale môžem ju efektívne nahradiť lineárnou závislosťou ako v kapitole o numerickej tyči, lebo z (3.27) viem, že záleží až na druhej mocnine tohoto pomeru a tá je bežne pri zvone dosť malá na to, aby som ju mohol uvažovať iba v prvom priblížení.

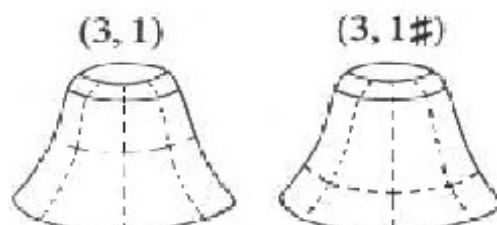
Pri ďalšom riešení by sa teda dalo postupovať podobne ako v predchádzajúcich kapitolách, len by to bolo zložitejšie. Dostal by som ale výsledky pre príliš idealizovaný zvon. Namiesto toho sa radšej odvolám na štúdie v [2] str. 577 a ďalej a v ďalších zdrojoch, ktoré autori [2] používajú (uskutočnené jednak menej zjednodušenou numerickou metódou – metódou konečných prvkov a jednak laboratórnymi meraniami konkrétnych kostolných zvonov) a uvediem niekoľko vlastností kmitov zvonov.

Pri zvonoch, v zhode s predchádzajúcim výpočtom rozoznávam skupiny módov podľa  $m$ , teda polovici počtu uzlových bodov na každom reze zvonu kolmom na jeho os (tj. na kruhových rezoch). Toto nie je presná definícia, pretože niekedy neexistuje nijaké „uzlové rebro“ (také  $\tilde{r}$ , že sa všetky jeho body nehýbu), pretože pohyb v smere  $\tilde{h}$  a v smere  $\varphi$  sú z definície (6.3) posunuté o uhol  $\frac{\pi}{2}$ . Číslo módu  $m$  teda označuje polovicu počtu uzlových bodov pohybu v jednom smere (počet je pre všetky smery rovnaký, len tie „uzlové rebrá“ sa neprekrývajú). Prvých niekoľko skupín neextenzívnych módov (tj. takých pri ktorých sa dĺžka jednotlivých rebier ani kruhov – resp. ich stredových vlákien – nemení.) vyzerá nasledovne:



Obr.6.1: pohľad zdola na pohyby módov pre prvé štyri  $m$  (zdroj [2], str.579)

Okrem parametru  $m$  má ešte každý mód parameter  $n$ . Ten, podobne ako tomu bolo pri tyči, udáva počet uzlových bodov na jednom rebre, teda v rámci zvonu udáva počet tzv. uzlových kružníc. Pri zvone sa ale môže stať, že viac módov má rovnaké  $m$  aj  $n$ , z tých akusticky významných sú to napr. módy (značenie  $(n,m)$ )  $(3,1)$  a  $(3,1\#)$  označené v zhode s [2]. Tie vyzerajú nasledovne:

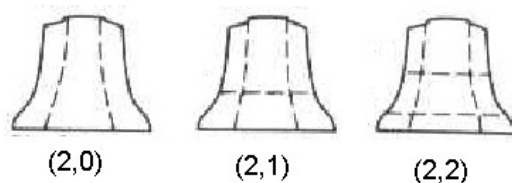


Obr.6.2: Dva módy s rovnakým  $m$  aj  $n$ . zdroj [2] str.578  
(prerušované čiary označujú uzlové rebrá a kružnice)

a líšia sa polohou tej jedinej uzlovej kružnice. Líšia sa takisto frekvenciou.

Akusticky dôležité módy, teda tie, ktoré sa dobre šíria do okolia sú také, pri ktorých prevláda pohyb v smere  $\tilde{h}$ . Preto, ako vidím z obr.6.1 začínajú až od  $m=2$ . Módy  $m=0$  popisujú jednak translačný pohyb v smere osy zvonu a jednak rotačné pohyby okolo tejto osy, prípadne (pre  $n>0$ ) pozdĺžne kmity v smere  $\tilde{r}$  alebo torzné kmity, teda otočenie okolo osy zvonu premenlivé podľa  $\tilde{r}$ . Módy  $m=1$  popisujú húpanie zvonu a (pre  $n>0$ ) jeho celkový ohyb, pri ktorom sa nemení vnútorný objem, teda ani nevyžaruje zvuk a tiež predlžovanie a skracovanie v smere  $\tilde{r}$ , ktoré rovnako nepôsobí zvuk.

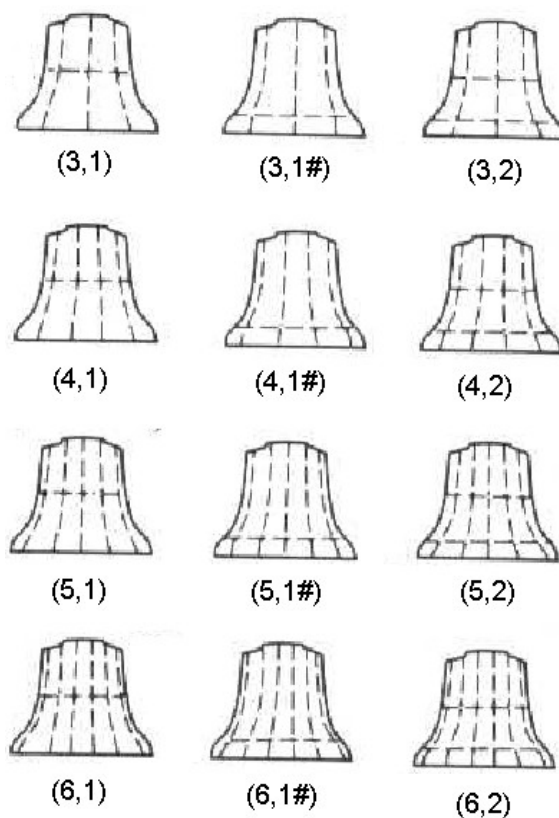
Pri  $m=2$  začínajú akusticky významné módy. Medzi základné patria  $(2,0)$ ,  $(2,1)$  a  $(2,2)$ , tie vyzerajú nasledovne:



Obr.6.3: Módy skupiny  $m=2$   
(Zobrazené sú uzlové čiary). zdroj [2] str.579

Zaujímavé pri zvone je, že za základný mód sa považuje mód  $(2,1)$ , teda nie ten z najnižšou frekvenciou. Je to preto, lebo ľudskému uchu sa

komplexný zvuk zvonu zdá byť tónom s výškou, ktorá zodpovedá tejto frekvencii. Jeho frekvenciu budem teda považovať za základnú a hodnoty ostatných budem vzťahovať pomerom k tejto základnej. Akusticky dôležité módy skupín  $m=3$  ,  $m=4$  ,  $m=5$  a  $m=6$  vyzerajú takto:

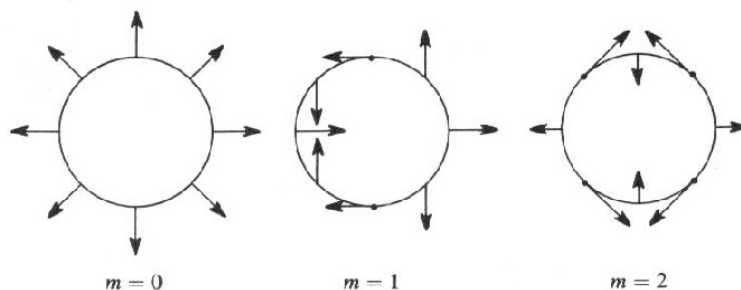


Obr.6.4: Ďalšie akusticky významné módy. zdroj [2] str.579

Podľa časti, v ktorej hlavne vzniká zvuk, delíme módy na obručové a celkové (ring-driven a shell-driven – [2]). Obručové sú také, pri ktorých, keby sme nechali znieť samotnú nižšiu, hrubšiu časť zvonu, teda obruč, našli by sme veľmi podobné módy. Ich odspodu prvá uzlová kružnica je spravidla dosť vysoko. Patria medzi ne (2,0), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1) a iné. Celkové sú také, pri ktorých vzniká zvuk v celom zvone a spodná obruč nehrá takú významnú úlohu. Ich odspodu prvá uzlová kružnica je veľmi blízko spodnej hrany zvonu. Patria sem všetky  $(m,1\#)$  a vyššie  $n$ . Základný mód (2,1) nepatrí priamo do ani jednej z týchto skupín. Jeho prvá uzlová kružnica (nachádza sa v 0.30 jeho výšky) je nižšie ako pri tých z prvej (0.54) a vyššie ako pri tých z druhej (0.19) skupiny. Radí sa teda niekam medzi ne, preto sa v niektorých zdrojoch (aj v [2]) označuje aj (2,1#), ja to

ale nepoužijem.

Okrem týchto módov, vyskytujú sa v pohybe zvonu aj tzv. extenzívne módy. Ide o módy, keď sa predlžujú a skracujú stredové vlákna rebier alebo kružníc. Niektoré príklady vyzerajú takto:



Obr.6.5: Extenzívne módy. zdroj [2] str. 582

iné sú napr. longitudálne kmity v smere  $\tilde{r}$ . Ich vplyv na zvuk je ale malý, preto sa nimi nebudem zaoberať.

To, čo je na zvone najdôležitejšie a dáva mu potrebnú kvalitu, je ladenie, tj. frekvencie jednotlivých módov. Tie sa nezhodujú presne od zvonu na zvon, ale základné, najpoužívanejšie ladenia sú nasledovné:

$(m,n)$	Nota (pri $D_5$ zvone)	$\omega_i : \omega_{(2,1)}$	$\omega_e : \omega_{(2,1)}$	$t_{60dB} [s]$
(2,0)	$D_4$	0.500	0.500	52
(2,1)	$D_5$	1.000	1.000	16
(3,1)	$F_5$	1.200	1.183	16
(3,1#)	$A_5$	1.500	1.506	6
(4,1)	$D_6$	2.000	2.000	3
(4,1#)	$F_6$	2.500	2.514	1.4
(2,2)	$C_6$	2.667	2.662	3.6
(5,1)	$A_6$	3.000	3.011	5
(6,1)	$D_7$	4.000	4.166	4.2
(7,1)	$G_7$	5.333	5.433	3
(8,1)	$B_7$	6.667	6.796	2
(9,1)	$D_8$	8.000	8.215	x

Tabuľka 6.1: Ladenie zvonov a úbytok jednotlivých módov. zdroj [2] str.583 a 591

Prvé, s indexom  $i$  je ideálne ladenie, tomu zodpovedajú aj noty v druhom stĺpci. Druhé, s indexom  $e$  je ladenie tzv. equal temperament, ktoré berie do

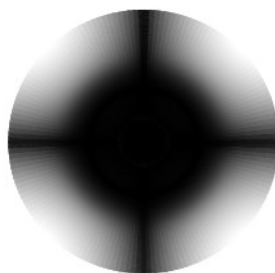
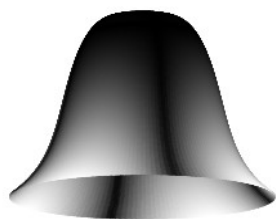
úvahy aj psychoakustické otázky. Väčšinou sa pri ladení zvonu vyladí prvých päť módov v tabuľke, čím aj ostatné dostanú približne harmonické frekvencie. Tým získava zvon svoj uchu lahodiaci, harmonický zvuk, v ktorom dominuje tón na frekvencii (2,1). Mnohé zvony majú niektorý z týchto tónov posunutý vyššie alebo nižšie v hudobnej stupnici, čo im dáva originálny zvuk.

Pri údere srdca na zvon najprv počujeme kovový úder a až po chvíli sa zvuk ustáli na známy zvonový. Kovový zvuk je výsledkom vyšších módov, ktoré ale rýchlo vymiznú. Aj v tomto úvodnom údere je ale po vymiznutí časovo neharmonických súčastí počuť nejaký tón. Tento tón sa môže javiť buď ako ten istý ako základný (2,1) alebo ako jeho dvojnásobok. V [2], str. 584-586 nachádzam, že zo začiatku majú v spektre zvuku najväčšie zastúpenie módy (4,1), (5,1) a (6,1) a tón, ktorý počujem s frekvenciou ako (2,1) je psychicky dotvorený z toho, že tieto tri sú jeho celočíselnými násobkami.

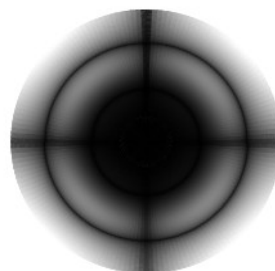
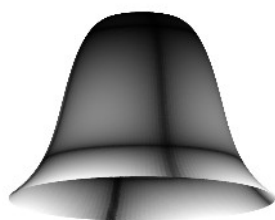
Ako som už spomínal, rôzne módy pohybu zvonu rôzne rýchlo odznievajú. Toto je spôsobené rôznymi mierami vyžarovania zvuku do okolitého vzduchu. Prvý, kovový zvuk prehluší ostatné, pretože sú v ňom dominantné módy, ktoré sa vyžiaria veľmi rýchlo. Naopak najhlbší mód (2,0) vyžaruje len veľmi pomaly a preto ho po dlhšom čase počujeme takmer samotný. U všetkých módov má úbytok tlaku exponenciálny charakter, tj. intenzita ubúda lineárne. Posledný stĺpec tabuľky 3.1 ukazuje časy za ktoré intenzita daného módu klesne o 60dB, teda prakticky prestane byť daný mód počuť. Je to merané na jednom konkrétnom zvone, vysokom 70cm. Je vidieť, že tento čas klesá s frekvenciou, ale ovplyvňujú to aj iné faktory. Pre detailnejší rozbor by bolo potrebné riešiť Helmholtzovu rovnicu vlnenia vzduchu na danej frekvencii a tak určiť vyžiarený akustický výkon, z ktorého by bolo možné späťne spočítať tlmenie daného módu. To ale robiť nebudem.

Na záver prikladám prvých niekoľko módov vykreslených z vrchného a bočného pohľadu.

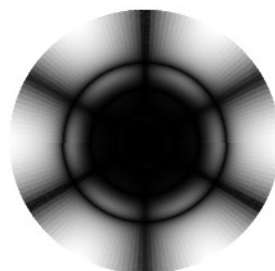
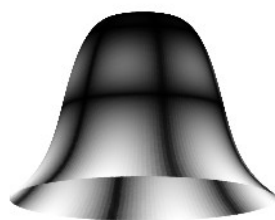
(2,0)



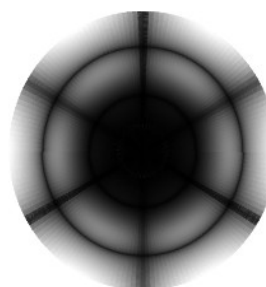
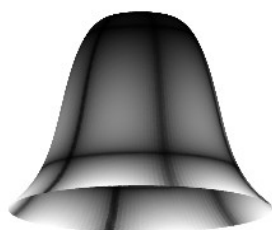
(2,1)



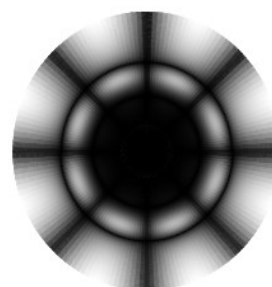
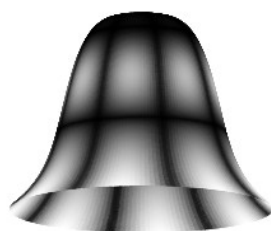
(3,1)



(3,1#)



(4,1)



Obr.6.6: Prvých 5 módov zvonu  
(Čím svetlejšie miesto, tým väčšiu amplitúdu v ňom vlnenie má.)

## Dodatok I – výpočty

Výpočty v kapitole 4

Zo vzťahu pre posunutie bodu tyče

$$\vec{u}(x, z) = -z \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \vec{i}_x + f \vec{i}_z \quad (\text{I.1})$$

podľa vzťahu (2.1) určíme  $e_{ij}$  :

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{I.2})$$

$$e_{zz} = e_{xy} = e_{yx} = e_{zy} = e_{yz} = e_{yy} = 0$$

Z tohoto ďalej podľa (2.4) určíme  $\tau_{ij}$  :

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) e_{xx} = -z(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\tau_{yy} = \tau_{zz} = \lambda e_{xx} = -z\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (\text{I.3})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

Podľa vzťahu (2.5) pre hustotu energie deformácie nájdeme túto hustotu:

$$w = \frac{1}{2} z^2 (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 \quad (\text{I.4})$$

a celková energia deformácie telesa bude tento výraz vyintegrovaný cez objem tyče:

$$W = \frac{2}{3} Y Z^3 (\lambda + 2\mu) \int_0^X \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (\text{I.5})$$

Ďalej potrebujem poznať kinetickú energiu. Jej hustota je podľa (2.6)

$$q = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho z^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \quad (\text{I.6})$$

a teda celá kinetická energia je opäť objemový integrál jej hustoty:

$$T = \frac{2}{3} \rho Y Z^3 \int_0^X \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right)^2 dx + 2 \rho Y Z \int_0^X \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 dx \quad (\text{I.7})$$

Úpravy členov (4.5) per partes

$$2 Y Z \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_0^X \rho \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 dx dt = 4 Y Z \rho \int_{t_0}^{t_1} \int_0^X \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta f) dx dt =$$

$$= 4 Y Z \rho \left( \int_0^X \frac{\partial f}{\partial t} \delta f dx \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^X \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \delta f dx dt \right) \quad (\text{I.8})$$



$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} Y Z \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_0^X (\lambda + 2\mu) Z^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 dx dt &= \frac{4}{3} Y Z \int_{t_0}^{t_1} \int_0^X (\lambda + 2\mu) Z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx dt = \\
&= \frac{4}{3} Y Z \int_{t_0}^{t_1} \int_0^X (\lambda + 2\mu) Z^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dt = \\
&= \frac{4 Y Z^3 (\lambda + 2\mu)}{3} \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) dt \right]_0^X - \frac{4 Z^3 (\lambda + 2\mu)}{3} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^X \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right) \frac{\partial}{\partial x} \delta f dx dt = \\
&= \frac{4 Y Z^3 (\lambda + 2\mu)}{3} \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) dt \right]_0^X - \left[ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \delta f dt \right]_0^X + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^X \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \delta f dx dt
\end{aligned} \tag{I.9}$$

### Výpočty v kapitole 5

Zo vzťahu pre posunutie bodu tyče

$$u(x, y, z, t) = f(x, t) \vec{i}_z + \frac{z}{Z} g(x, t) \vec{i}_x \tag{I.10}$$

môžem určiť všetky zložky  $e_{ij}$  ako funkcie súradníc, funkcií  $f$  a  $g$  a ich derivácií.

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{z}{Z} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{z}{Z} \partial_x g \\
e_{xz} = e_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{Z} g \right) = \frac{1}{2} \left( \partial_x f + \frac{1}{Z} g \right) \\
e_{zz} = e_{yy} = e_{xy} = e_{yx} = e_{zy} = e_{yz} &= 0
\end{aligned} \tag{I.11}$$

Ďalej podľa (2.4) nájdeme  $\tau_{ij}$

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{z}{Z} \partial_x g \\
\tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left( \partial_x f + Z^{-1} g \right) \\
\tau_{zz} = \tau_{yy} &= \lambda \frac{z}{Z} \partial_x g \\
\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{zy} = \tau_{yz} &= 0
\end{aligned} \tag{I.12}$$

Podľa (2.5) nájdeme hustotu energie deformácie

$$w = \frac{1}{2} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{z^2}{Z^2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{Z} g \right)^2 \right) \tag{I.13}$$

Ďalej potrebujem poznať hustotu kinetickej energie. Tá je podľa (2.6):

$$q = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{z}{Z} \right)^2 \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 \right] \tag{I.14}$$

Keď tieto hustoty vyintegrujem cez objem tyče, dostanem

$$\begin{aligned}
W = \int_V w dV &= \frac{1}{2} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y \int_{-Z}^Z \left( (\lambda + 2\mu) \frac{z^2}{Z^2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{Z} g \right)^2 \right) dz dy dx = \\
&= \frac{2}{3} Y Z (\lambda + 2\mu) \int_{-X}^X \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 dx + 2\mu Y Z \int_{-X}^X \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx + 2\mu Y \int_{-X}^X \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) g dx + 2\mu \frac{Y}{Z} \int_{-X}^X g^2 dx
\end{aligned} \tag{I.15}$$

$$\begin{aligned}
T = \int_V q dV &= \frac{1}{2} \rho \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y \int_{-Z}^Z \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{z}{Z} \right)^2 \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 \right] dz dy dx = \\
&= 2\rho Y Z \int_{-X}^X \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{2}{3} \rho Y Z \int_{-X}^X \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 dx
\end{aligned} \tag{I.16}$$

## Dodatok II - maple

V tomto dodatku prikladám výpisy z Maple-u pre výpočet rovníc (4.20), (5.25) a vykresľovanie jednotlivých módov. Konkrétne prikladám analytický prípad a numerický prípad  $N=16$  a  $Z=\frac{1}{20}$ . Parameter 'amplituda' v procedúre 'malujmod' je tam preto, aby som mohol regulovať amplitúdu pohybu pri vykreslení módu tak, aby bolo pohybov na obrázku možné dobre rozoznať. Tento neviem predvídať, pretože určenie vlastných vektorov mi dá nenormované vektory a ich amplitúda môže byť v podstate hocijaká. Určujem ho teda empiricky tak, že si daný mód vykreslím z náhodnou amplitúdou a potom ju zmením podľa toho, ako to vyzerá.

### Analytický prípad

```
> restart;
with(plots):
Digits:=40:
PARAMS:={X=1,Z=0.02}:
gridplot:=proc( Q , a , b, M, N, tit::string)
local xi,eta,ximin,ximax,etamin,etamax;
ximin:=lhs(rhs(a)):ximax:=rhs(rhs(a)):
etamin:=lhs(rhs(b)):etamax:=rhs(rhs(b)):
RETURN( plot( [seq( subs(lhs(a)=xi,lhs(b)=eta,evalf([ Q[1], Q[2] ,
xi=ximin..ximax])) , eta = [(etamin+i/N*(etamax-etamin))$i=0..N]),seq(
subs(lhs(a)=xi,lhs(b)=eta,evalf([ Q[1], Q[2] , eta=etamin..etamax])) , xi =
[(ximin+i/M*(ximax-
ximin))$i=0..M]],scaling=unconstrained,color=black,axes=none,title=tit ) );
end:

malujmod:=proc(fce,x,amplituda,q)
local ff,ff0,gg,ev,z:
```

```

global PARAMS:
ff:=fce:
gg:=-diff(ff,x):
ff0:=abs( eval(ff,x=0)): gg:=gg/ff0: ff:=ff/ff0:
gridplot(subs(PARAMS,[x+amplituda*gg*z,z+amplituda*ff]),x=0..1,z=subs
(PARAMS,-Z..Z),20,2,sprintf("n = %d", q+2));
end:
Warning, the name changecoords has been redefined
> for k from 1 to 28 do m[k]:=fsolve(cosh(m)*cos(m)=1,m,k*Pi..(k+1)*Pi):
      od:
> for k from 1 to 28 do
AB[k]:= -(sinh(m[k]) - sin(m[k]))/(cosh(m[k]) - cos(m[k]));      od:
> for k from 1 to 28 do
funkcia[k](x):=(sinh(m[k]*x)+sin(m[k]*x)+AB[k]*cosh(m[k]*x)+AB[k]*
      cos(m[k]*x)):      od:
  > for k from 1 to 28 do omega[k]:=m[k]^2/m[1]^2;      od:
  > for k from 1 to 14 do amp[k]:=0.05-k*(0.045/15);      od:
  for k from 15 to 28 do amp[k]:=0.015-k*(0.0125/28);      od:
  > for k from 1 to 28 do evalf[10](omega[k]);      od:
  > for k from 1 to 28 do evalf[10](m[k]);      od:
  > for k from 1 to 28 do evalf[10](m[k]/Pi);      od:
  > for k from 1 to 28 do malujmod(funkciaaa[k](x),x,amp[k],k);      od:
  > for k from 1 to 28 do sh[k]:=sinh(m[k]);
      ch[k]:=cosh(m[k]);
      s[k]:=sin(m[k]);
      c[k]:=cos(m[k]);
      od:
  > for k from 1 to 28 do marg[k]:=
(ch[k]*sh[k]*(((AB[k])^2)+1)+4*(((AB[k])^2)*m[k]+c[k]*s[k]*((4*(AB[k])
^2)-4)+sh[k]*c[k]*((2*(AB[k])^2)-
4)+ch[k]*s[k]*((2*(AB[k])^2)+4)+((sh[k])^2)*(-2*AB[k])+sh[k]*s[k]*(-
8*AB[k])+((s[k])^2)*(-8*AB[k]))
/
(ch[k]*sh[k]*(((AB[k])^2)+1)+16*(((AB[k])^2)+8*m[k]+c[k]*s[k]*((4*(AB[k]
])^2)+4)+sh[k]*c[k]*((2*(AB[k])^2)+4)+ch[k]*s[k]*((-
2*(AB[k])^2)+4)+((sh[k])^2)*(-2*AB[k])+ch[k]*c[k]*(-
8*AB[k])+((s[k])^2)*(8*AB[k]))
      od:

```

numerický prípad  $N = 16$  a  $Z = \frac{1}{20}$

```

> restart;
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
> with(orthopoly):
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> Digits:=18:
> N:=16:
> PARAMS:={lambda=2,mu=1,rho=1,X=1,Y=1/10,Z=1/20}:
> W:= 2/3*Y*Z* (lambda + 2*mu) * int((diff(g(x),x)^2),x=-X..X) +
2*mu*Y*Z* int((diff(f(x),x)
> + g(x)/Z)^2, x=-X..X):
> SL:={g(x) =
sum(sqrt((6*I+3)/(8*rho*X*Z*Y))*g[I]*P(l,x/X),l=0..N),
  f(x) = sum(sqrt((2*I+1)/(8*rho*X*Z*Y))*f[I]*P(l,x/X),l=0..N)}:
> Wn:=simplify( subs(SL,W) ):
> Qi:=[seq(f[I],l=0..N),seq(g[l],l=0..N)]:
> Wij:=hessian(subs(PARAMS,Wn),Qi):
> omega2:=sort( [eigenvalues(evalf(evalm(Wij)))] ):
> map(t->(t/omega2[3]),omega2):
> map(t->sqrt(t/omega2[3]),omega2):
> fg:=[eigenvectors(evalf(evalm(Wij)))]):
> fgs:=sort(fg,(t,s)->evalb(t[1]<s[1])):
> gridplot:=proc(Q,a,b,M,N,tit::string) local
xi,eta,ximin,ximax,etamin,etamax;
  ximin:=lhs(rhs(a)):ximax:=rhs(rhs(a)):
  etamin:=lhs(rhs(b)):etamax:=rhs(rhs(b)):
  RETURN( plot( [ seq( subs(lhs(a)=xi,lhs(b)=eta,evalf([Q[1], Q[2],
xi=ximin..ximax ] ) ), eta =
  [(etamin+i/N*(etamax-etamin))$i=0..N] ),seq( subs(lhs(a)=xi,
lhs(b)=eta,evalf([ Q[1], Q[2],
  eta=etamin..etamax])), xi = [(ximin+i/M*(ximax-ximin))$i=0..M] ] ),
scaling=unconstrained,

```

```

color=black, axes=none, title=tit );
end:
> malujmod:=proc(MOD,amplituda)
local ff,ff0,gg,ev:
ev:={seq(Qi[j]=fgs[MOD][3][1][j],j=1..2*(N+1))}:
ff:=subs(ev,subs(PARAMS,subs(SL,f(x))):ff0:=abs(eval(ff,x=-1)):
ff:=ff/ff0:
gg:=subs(ev,subs(PARAMS,subs(SL,g(x))): gg:=gg/ff0:
gridplot(subs(PARAMS,[x+amplituda*gg*z/Z,z+amplituda*ff]),x=-
1..1,z=subs(PARAMS,-
Z..Z),20,2,sprintf("n = %d", MOD));
end:
> for k from 1 to 2*N+2 do malujmod(k,amp[k]);
od:

```

### Dodatok III - separácia

Obecnejším prípadom (5.1) by bolo

$$\begin{aligned} u^u(x, t) &= [f(x, t) + h(x, t)] \vec{i}_z + [g(x, t) + k(x, t)] \vec{i}_x \\ u^l(x, t) &= [f(x, t) - h(x, t)] \vec{i}_z + [-g(x, t) + k(x, t)] \vec{i}_x \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

a celkové posunutie by teda vyzeralo nasledovne:

$$u(x, y, z, t) = \left[ f(x, t) + \frac{z}{Z} h(x, t) \right] \vec{i}_z + \left[ \frac{z}{Z} g(x, t) + k(x, t) \right] \vec{i}_x \quad (\text{III.2})$$

určil by som ďalej rovnako ako v kapitole 5  $e_{ij}$  a  $\tau_{ij}$  :

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{z}{Z} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial x} \\ e_{xz} = e_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{z}{Z} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{Z} g \right) \\ e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{Z} h \\ e_{yy} = e_{xy} = e_{yx} = e_{zy} = e_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \left[ \frac{z}{Z} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \lambda \frac{1}{Z} h \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{z}{Z} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{Z} g \right) \\ \tau_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{Z} h + \lambda \left[ \frac{z}{Z} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial x} \right] \\ \tau_{yy} &= \lambda \left[ \frac{z}{Z} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{Z} h \right] \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{zy} = \tau_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

hustota energie deformácie by bola

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \left( \frac{z}{Z} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda \frac{1}{Z} h \left( \frac{z}{Z} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{z}{Z} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{Z} g \right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \frac{1}{Z^2} h^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{Z} h \left( \frac{z}{Z} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \frac{z^2}{Z^2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial k}{\partial x} \right)^2 + (\lambda + 2\mu) \frac{z}{Z} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{2} \lambda \frac{z}{Z^2} h \frac{\partial g}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{Z} \lambda h \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \frac{z^2}{Z^2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{Z^2} \mu g^2 + \mu \frac{z}{Z} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \frac{1}{Z} \frac{\partial f}{\partial x} g + \\ &\quad + \mu \frac{z}{Z^2} \frac{\partial h}{\partial x} g + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \frac{1}{Z^2} h^2 + \frac{1}{2} \frac{z}{Z^2} h \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{1}{Z} h \frac{\partial k}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Vyintegrovaním cez objem, teda cez všetky tri karteziánske súradnice (funkcie  $f$ ,  $g$ ,  $h$  a  $k$  sú funkciami iba súradnice  $x$  a času) mi zmiznú všetky členy lineárne závislé na  $z$  (pretože integrujem od  $-Z$  do  $Z$ ). Vidím, že takto

zmiznú všetky členy, v ktorých sa niektorá z funkcií  $f$  a  $g$  vyskytuje v súčine s niektorou z funkcií  $h$  a  $k$ . Podobný prípad nastane pre hustotu kinetickej energie, ktorá bude

$$q = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{z}{Z} \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{z}{Z} \frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 = \quad (\text{III.6})$$

$$= \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho z^2}{2Z^2} \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho z}{2Z} \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial k}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho z^2}{2Z^2} \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho z}{2Z} \frac{\partial k}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial t}$$

Z (I.5) a (I.6) vidím, že obidve energie budú mať odseparované členy s funkciami  $f$  a  $g$  a členy s funkciami  $h$  a  $k$ . Z toho vyplýva, že tieto dva pohyby sa nijako nebudú ovplyvňovať a teda zanedbanie učené v (5.1) nijak neovplyvní výsledok, iba ním prídeme o ďalší druh pohybu. Pohyb určený funkciami  $h$  a  $k$  sú kompresné vlny, šíriace sa v  $x$ -ovom smere so smerom kompresie aj  $x$ -ovým aj  $z$ -ovým (jedna na druhej sú závislé – existujú ich krížne členy – preto tieto dva smery už odseparovať nepôjdu).

## LITERATÚRA

[1] Brdička, M. Samek, L. Sopko, B.: Mechanika Kontinua, Academia Praha, 2. vydání 2000

[2] Fletcher, Rossing: The Physics of musical instruments. Springer-Verlag, 1991

[3] Morse, P. Feshbach, H.: Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill. 1953

[4] Brdička, M. Hladík, A.: Teoretická mechanika, Academia, Praha, 1987

•  
•  
•  
a  
zazvonil  
zvo zvo  
nec nec  
a a  
b b  
a a  
k k  
a a  
l l  
á á  
r r  
k k  
e e  
je je  
ko ko  
nec nec