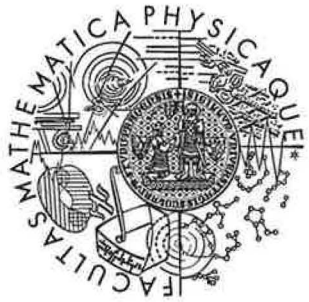
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Stanislav Pařez

Slupkové zdroje newtonovského gravitačního pole - srovnání s OTR

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Martin Žofka, Ph.D.
Studijní program: Fyzika, obecná fyzika

2007

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 29. května 2007 Stanislav Pařez

Obsah

1 Newtonovské modely v galaktické dynamice **6**

1.1 Kuzminova metoda 6

1.2 Potenciály důležité v astronomii 8

1.2.1 Plummer-Kuzminovy modely 8

1.2.2 Logaritmický potenciál 10

1.2.3 Elipsoidální systémy 12

1.3 Obrácená úloha 15

2 Singulární nadplochy v obecné relativitě **19**

2.1 Israelův formalismus 20

2.2 ... a jeho aplikace 21

2.2.1 Prachová slupka 24

2.2.2 Sférická prachová slupka 25

3 Disky jako zdroje statických vakuových prostoročasů **28**

3.1 Protirotující disky 28

3.1.1 Vlastnosti disků 30

3.1.2 Kuzmin-Curzonův disk 32

3.1.3 Schwarzschildův disk 35

3.2 Shrnutí: porovnání newtonovských a relativistických modelů 39

Literatura **41**

Název práce: Slupkové zdroje newtonovského gravitačního pole - srovnání s OTR
Autor: Stanislav Pařez
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Martin Žofka, Ph.D.
e-mail vedoucího: zofka@mbox.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: Úvodní kapitola předkládá přehled modelů gravitačních polí disků a zploštělých systémů významných pro galaktickou. V souvislosti s tím je navržen algoritmus konstrukce modelu z experimentálních dat. Druhá kapitola se týká navazovacích podmínek pro gravitační pole na hraničních nadplochách v OTR. Závěr práce je věnován pozoruhodné aplikovatelnosti disků v obecné relativitě. Je zde vyložena možnost vytváření statických, axiálně symetrických metrik splňujících Einsteinovy rovnice pomocí disků, uvnitř nichž proti sobě proudí 2 toky hmoty, tvořené neinteragujícími částicemi. Jedná se o jeden z nejúspěšnějších výsledků při hledání fyzikálních zdrojů generující uvedená řešení Einsteinových rovnic. Zároveň tato metoda nabízí příležitost srovnat vlastnosti těchto řešení s řešeními klasického gravitačního zákona, neboť požadované metriky jsou budovány právě pomocí newtonovských potenciálů, na které také v limitě slabého pole přecházejí.

Klíčová slova: galaktická dynamika, hraniční podmínky v OTR, statické vakuové prostoročasy, protirotující disky

Title: Shell sources of the Newtonian gravitational field - comparison to GR
Author: Stanislav Pařez
Department: Institute of Theoretical Physics
Supervisor: Mgr. Martin Žofka, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: zofka@mbox.troja.mff.cuni.cz

Abstract: In the opening chapter we review some astronomically important solutions that represent the Newtonian gravitational field which involve infinitely thin sources and flattened systems. In addition, for a given rotation curve, we introduce a technique that enables us to calculate the gravitational potential of the disk generating the field, or the mass distribution within it. The second chapter deals with the relativistic formulation of junction conditions on boundary hypersurfaces. The concluding chapter presents a

special kind of disks generating static, axially symmetric spacetimes. The disks consist of 2 equal streams of collisionless particles rotating in opposite directions. The method was a major advance in the search for physical sources generating a given metric. At the same time, it allows us to compare some physical characteristics of the solutions to their classical counterparts because the required metrics can be constructed from the Newtonian potentials.

Keywords: galactic dynamics, junction conditions in GR, static vacuum spacetimes, counter-rotating discs.

Kapitola 1

Newtonovské modely v galaktické dynamice

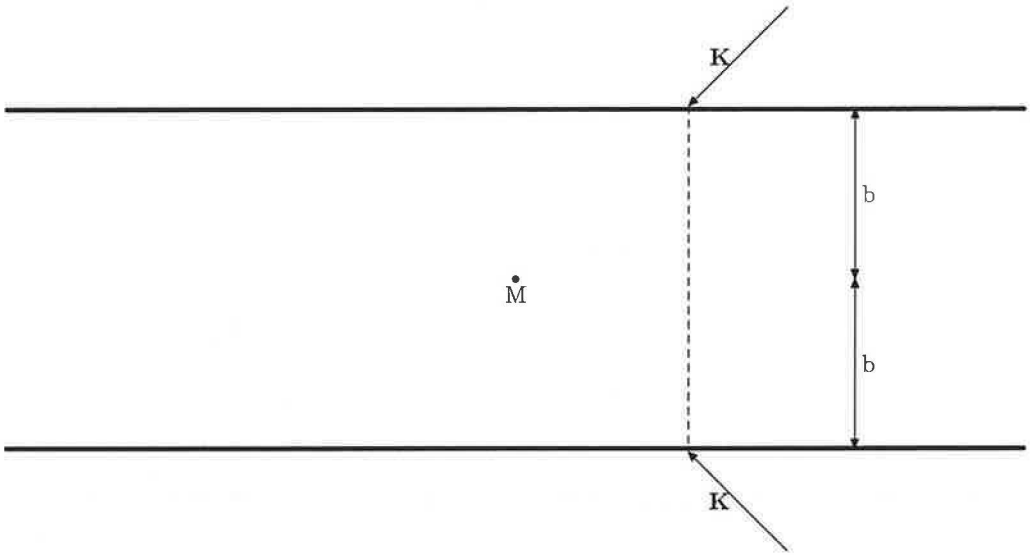
K přesnému určení galaktické dynamiky hvězd bychom museli zcela znát silové pole napříč celé galaxie, což je vzhledem k rozlehlosti systému nereálný požadavek. Navíc naše experimentální informace nezachycují všechny stupně volnosti. Základem zdrojových dat jsou spektroskopická měření dopplerovských posuvů frekvence hvězdami vyzařovaného záření, z nichž usuzujeme na velikosti oběžných rychlostí. Přesněji takto získáme pouze projekci oběžné rychlosti na spojnici zdroje a pozorovatele. Jsme tak odkázáni na hledání modelů pasujících co nejlépe k měřeným datům. Pro běžné účely dokonce stačí znalost základní struktury dané galaxie. Ta bývá kvůli zploštělosti systémů modelována pomocí disků, nejčastěji s osově symetrickým rozložením hmoty.

Jednu z nejvýznamnějších metod, jak konstruovat modely gravitujících disků vynalezl G.G.Kuzmin [1].

1.1 Kuzminova metoda

Představme si pole generované hmotným bodem, který se nachází na ose z ve vzdálenosti b pod rovinou $z = 0$. Gravitační pole všude nad touto rovinou splňuje jistě Laplaceovu rovnici (vždyť ji splňuje v celém prostoru, kromě bodu, kde sídlí náboj), stejně tak, pokud systém zrcadlíme vzhledem k rovině $z = 0$ a zkoumáme pole pod rovinou $z = 0$. Představme si dále, že oba zkoumané poloprostory na sebe navážeme. Odpovídá to ekvivalentní situaci, kdybychom symetricky vyřízli pás prostoru kolem hmotného bodu a zbytek, včetně pole, které obsahuje, k sobě slepili bez vzájemného posunutí

nebo rotace; ilustruje to obrázek 1.1.



OBR. 1.1: Vyříznutí části prostoru kolem hmotného bodu.

Na stykové ploše: $z \equiv 0$ jsou díky symetrii konstrukce tečné vektory gravitační intenzity $\mathbf{K}$ spojité, normálové však vykazují skok. V newtonovské gravitaci je nespojitost normálových složek intenzity spojena s plošnou hustotou hmoty σ slupkového zdroje:

$$-4\pi G\sigma(r) = K_n(r^+) - K_n(r^-)\,, \tag{1.1}$$

kde index n značí normálovou složku a polohový vektor r^+ resp. r^- ukazuje těsně nad resp. pod slupku. Vzniklé pole je tedy polem disku nacházejícího se v rovině $z = 0$, jehož potenciál a plošná hustota (ve standardních cylindrických souřadnicích) jsou

$$\Phi_K(R,z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (b+|z|)^2}}\,, \tag{1.2}$$

$$\sigma_K(R) = \frac{1}{2\pi} \frac{Mb}{(R^2 + b^2)^{3/2}} . \tag{1.3}$$

Přeintegrováním této hustoty přes celou rovinu $z = 0$ samozřejmě dostaneme hmotnost původního hmotného bodu M.

Diskům s průběhem potenciálu a hustoty (1.2) a (1.3) se říká Kuzminovy disky. Lze dokonce dokázat (viz [2]), že libovolný axiálně symetrický disk může být rozložen do superpozice Kuzminových disků s různými parametry b:

$$\Phi = -G \int \frac{w(b)\mathrm{d}b}{\sqrt{R^2 + (b + |z|)^2}} , \tag{1.4}$$

a podobně pro plošnou hustotu. V principu je možnost takové superpozice výrazem linearity rovnice (1.1), respektive obecněji výrazem linearity Laplace-Poissonovy rovnice

$$\Delta\Phi = -4\pi G\rho , \tag{1.5}$$

tj., lineární kombinace řešení je opět řešením.

Formule (1.4) v řeči ukázané metody znamená, že každému axiálně symetrickému disku odpovídá rozložení hmoty na úsečce nebo na polopřímce s lineární hustotou $w(b)$ (může jít o distribuci). Mohlo by se zdát, že v případě generování pole disku pomocí rozložení hmoty na polopřímce metoda selhává, protože v tomto případě „vyřezáváme" nekonečně velký kus prostoru. Ke konstrukci disku však stačí pouze pole nad polopřímkou, protože pole v celém prostoru získáme jen zrcadlením podle roviny řezu.

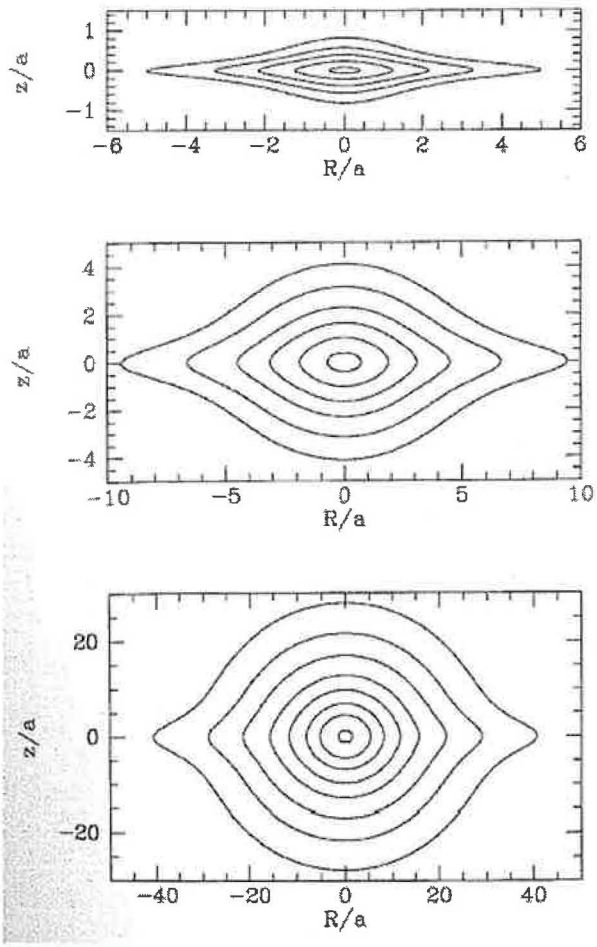
Kuzminova metoda se také názorně nazývá metodou „cut&paste". Obecně její význam spočívá v možnosti nahrazení singularity typu $\delta^3(\mathbf{x})$ singularitou pouze jednorozměrnou $\delta(z)$.

1.2 Potenciály důležité v astronomii

Následující přehled potenciálů a jim odpovídajících hustot hmoty čerpá z Binney & Tremaine [3], kapitoly 2.2, 2.3.

1.2.1 Plummer-Kuzminovy modely

Pro hlubší pochopení gravitačních vlastností objektů při jejich postupném zplošťování jsou výhodné Plummer-Kuzminovy modely.



OBR. 1.2: Plochy stejné hustoty v rovině $R - z$ pro rozložení hmoty budící Miyamoto-Nagai potenciál (1.7) s parametrem $b/a = 0.2$ (nahoře), $b/a = 1$ (uprostřed) a $b/a = 5$ (dole). Převrácený poměr a/b přitom charakterizuje míru zploštělosti systému. Obrázek je převzat z Binney & Tremaine [3].

V roce 1911 použil H.C.Plummer k modelování kulových hvězdokup následující potenciál:

$$\Phi_P(r; b) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}\,. \tag{1.6}$$

Pokud jej modifikujeme dalším parametrem:

$$\Phi_{MN}(R, z; a, b) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}\,, \tag{1.7}$$

získáme potenciál, který při $a = 0$ přechází na Plummerův potenciál (1.6) generovaný sféricky symetrickým tělesem, kdežto pro $b = 0$ dostáváme známý potenciál Kuzminova disku. Nastavením parametrů a, b tak předepisujeme pole zdrojů od nekonečně tenkého disku až po sféricky symetrické těleso, jak demonstruje obrázek 1.2. Tento typ potenciálu představili Miyamoto a Nagai [4]. Jemu příslušná hustota hmoty je dle rovnice (1.5):

$$\rho_M(R,z) = \left(\frac{b^2 M}{4\pi}\right) \frac{aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2+b^2})(a+\sqrt{z^2+b^2})^2}{[R^2 + (a+\sqrt{z^2+b^2})^2]^{5/2}\,(z^2+b^2)^{3/2}}. \tag{1.8}$$

Častým trikem pro konstrukci celých tříd párů potenciál-hustota je diferencování již známých párů závislých na parametru. Opět tím využíváme linearity (1.5). Na příklad charakteristiky n-tých Toomreových disků lze obdržet jako:

$$\Phi^n = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^2}\right)^{n-1} \Phi_K\,, \tag{1.9}$$

$$\sigma^n = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^2}\right)^{n-1} \sigma_K\,, \tag{1.10}$$

podobně jako Satohův (1980) n-tý model odvodíme z Miyamoto-Nagai modelu:

$$\Phi^n = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^2}\right)^{n} \Phi_{MN}\,, \tag{1.11}$$

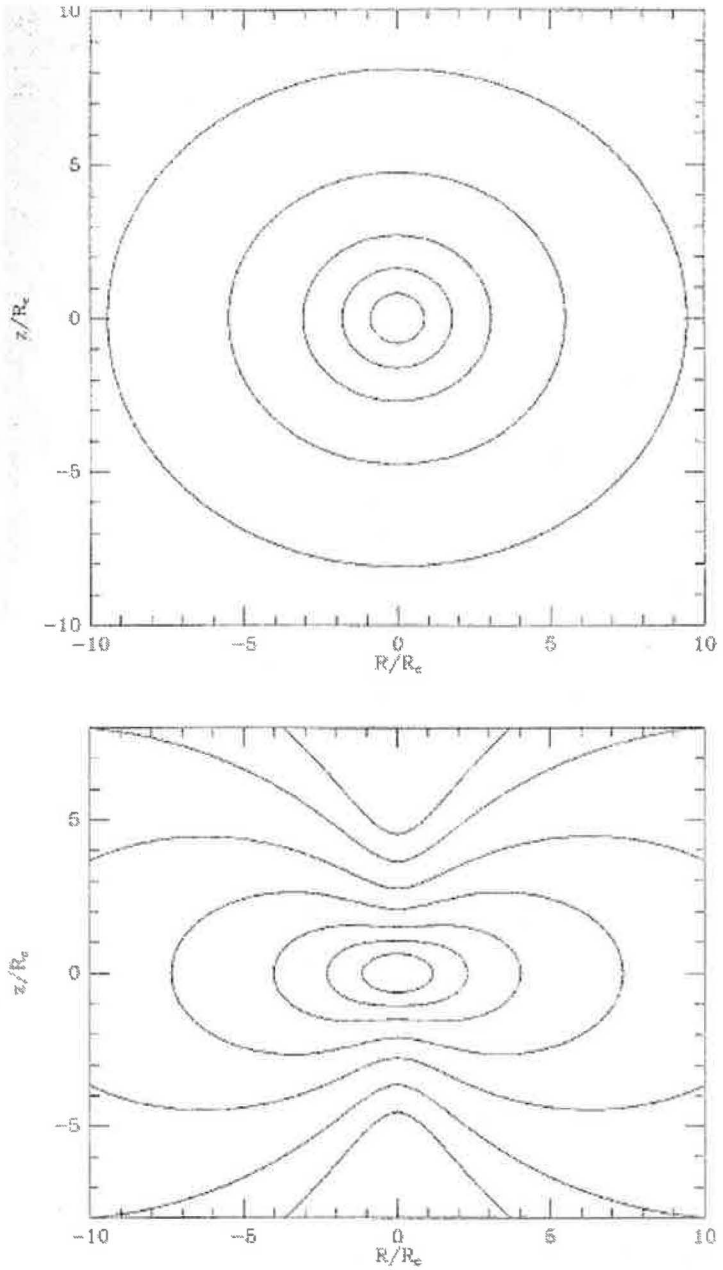
$$\sigma^n = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^2}\right)^{n} \sigma_{MN}\,. \tag{1.12}$$

1.2.2 Logaritmický potenciál

Jak jsem již poznamenal, informace o oběžných rychlostech hvězd tvoří základ analýzy uspořádání hmoty uvnitř galaktického disku. Jako charakteristiky systému přitom uvádím gravitační potenciály. Z nich totiž přes Poissonovu rovnici (1.5) (nebo přes její distribuční analogii (1.1)) spočteme hustotu hmoty objektu, i cirkulární rychlosti hvězd v dané radiální vzdálenosti:

$$|K_R| = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right|_{z=0} = \frac{v^2}{R}\,, \tag{1.13}$$

neboť radiální síla způsobuje dostředivé zrychlení. Velikostí rychlosti v je přitom rozuměna velikost tangenciální rychlosti.



OBR. 1.3: Plochy stejné hustoty v rovině $R - z$ pro rozložení hmoty (1.15) s $q_\Phi = 0.95$ (nahoře) a $q_\Phi = 0.7$ (dole). Parametr q_Φ má význam poměru os rotačních elipsoidů, které tvoří ekvipotenciály. Obrázek je převzat z Binney & Tremaine [3].

Snadno zjistíme, že potenciál Plummer-Kuzminových modelů klesá ve velké vzdálenosti úměrně $1/R$. Oběžná rychlost hvězd tedy ubývá podobně jako v keplerovské úloze. Pozorování spirálních galaxií však ukazují stagnaci oběžných rychlostí ve velkých vzdálenostech, nebo dokonce tendenci mírného růstu (stále však omezeného rychlostí světla). Požadujeme-li, aby pro velká R platilo $v \approx v_0$, klade rovnice (1.13) na potenciál podmínku $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}R \to v_0^2/R$, a proto $\Phi \approx v_0^2 \ln R + const.(z)$. Uvažme přímočaře potenciál

$$\Phi_L = \frac{1}{2} v_0^2 \ln \left(R_c^2 + R^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2} \right) , \tag{1.14}$$

kde R_c je konstanta a $q_\Phi \leq 1$.

Takovému průběhu potenciálu přísluší hustota

$$\rho_L(R,z) = \frac{v_0^2}{4\pi G q_\Phi^2} \frac{(2q_\Phi^2 + 1)R_c^2 + R^2 + (2 - q_\Phi^{-2})z^2}{(R_c^2 + R^2 + z^2 q_\Phi^{-2})^2}. \tag{1.15}$$

Ekvipotenciálními plochami potenciálu (1.14) jsou rotační elipsoidy s axiálním poměrem q_Φ. Slupky stejné hustoty jsou však deformovanější a více zploštělé – viz obrázek 1.3. Z rovnice (1.15) dokonce vidíme jistá omezení logaritmického modelu: volbou $q_\Phi < 1/\sqrt{2}$ dostaneme v určité oblasti kolem osy z zápornou hustotu.

Pro úplnost dodejme ještě závislost cirkulární rychlosti na vzdálenosti v ekvatoriální rovině

$$v = \frac{v_0 R}{\sqrt{R_c^2 + R^2}}. \tag{1.16}$$

1.2.3 Elipsoidální systémy

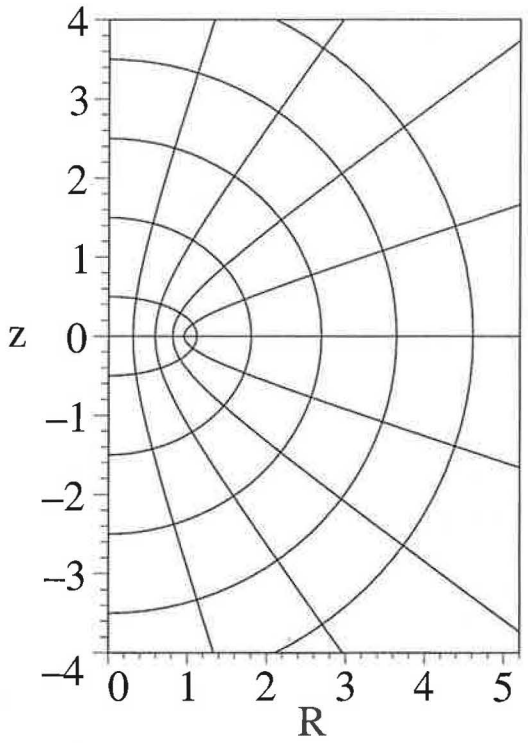
Atraktivnost elipsoidálních objektů zvyšuje kromě jejich analytické řešitelnosti experimentální fakt, že plochy stejné hustoty jistého typu galaxií jsou téměř elipsoidální.

Zkusme nalézt zdroje pole s ekvipotenciálami tvaru sféroidu (hranice rotačního elipsoidu). Přizpůsobením souřadnic (viz. [5])

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{s^2 + l^2} \sin\theta \cos\varphi \\ y &= \sqrt{s^2 + l^2} \sin\theta \sin\varphi \\ z &= s \cos\theta \end{aligned}$$

parametrizujeme ekvipotenciály tvaru rotačního elipsoidu jako $s = konst.$ V rovině $R - z$ tvoří křivky konstantního θ, resp. s soustavu konfokálních

hyperbol, resp. elips, přičemž hyperboly protínají elipsy kolmo – viz obrázek 1.4. Parametr l značí vzdálenost ohniska elips $s = konst.$ od jejich středu; θ a φ jsou normální sférické souřadnice.



OBR. 1.4: Průmět souřadnicových ploch $s = konst.$ a $\theta = konst.$ do roviny $R - z$.

Díky ortogonalitě souřadnic lze normálové složky gravitační intenzity jednoduše vyjádřit

$$K_n(s) = -\frac{1}{h_s}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}, \tag{1.17}$$

kde h_s je příslušný Lamého koeficient a gravitační potenciál Φ získáme řešením Laplaceovy rovnice

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(s) &= 0, \\ \frac{1}{h_s h_\theta h_\varphi}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{h_\theta h_\varphi}{h_s}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(s)\right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}\left[(s^2+l^2)\frac{\partial}{\partial s}\Phi(s)\right] &= 0, \end{aligned}$$

$$\Phi(s) = \frac{GM}{l}\left(\arctan\frac{s}{l} - \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.18}$$

kde M značí celkovou hmotnost elipsoidu vytvářející pole (1.18).

Věnujme se případu, kdy zdroj pole tvoří ekvipotenciální plochu. Umístěme jej na souřadnici s_0. Indukovanou hmotu spočteme s využitím Gaussovy věty (pro tok $\nabla\Phi = \frac{1}{h_s}\frac{\partial\Phi}{\partial s}\mathbf{e_s}$ skrz sféroid s_0), která také zaručuje nulovou intenzitu pole uvnitř sféroidu

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{M}{\sqrt{s_0^2 + l^2}\sqrt{s_0^2 + l^2\cos^2\theta}} = \frac{1}{4\pi}\frac{M}{a\sqrt{b^2 + a^2e^2\cos^2\theta}}. \tag{1.19}$$

V poslední rovnosti je výraz přepsán pro velikosti hlavních poloos a a b sféroidu a pro jeho excentricitu e. Všimněme si, že hustota je nejnižší v oblasti, kde končí kratší osa sféroidu, a vrcholí v nejvíce zaoblené části. To je pochopitelně důsledkem požadavku, aby zdroj byl zároveň ekvipotenciální plochou.

Položíme-li $s_0 = 0$ představuje (1.19) polovinu plošné hustoty disku o poloměru l ležícího v rovině xy. Polovinu proto, protože jsme výraz získali limitním procesem z plošných hustot elipsoidů, jejichž povrchy splynuly v jedinou plochu. Přímou integrací pak můžeme ověřit, že celková hmota disku zůstává M.

Hustotu (1.19) získáme také jako limitní výsledek ztenčování homogenní vrstvy mezi 2 podobnými sféroidy: $\frac{R^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ a $\frac{R^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 + \delta$. Představíme-li si pak nehomogenní elipsoid rozvrstvený na takové sferoidální vrstvičky s různými hustotami, umožní nám to vytvořit jednoduchý model popisující změny tvaru ekvipotenciálních ploch v důsledku změn rozložení hmoty uvnitř elipsoidu. Jelikož potenciál (1.18) je konstantní na sféroidech konfokálních s povrchem dané homogenní vrstvičky, s rostoucím parametrem s se ekvipotenciály velmi rychle stávají téměř sférickými. Naopak zploštělé ekvipotenciální plochy jsou způsobeny vrstvami nacházejícími se těsně pod místem, v němž zkoumáme tvar potenciálu (vrstvy nad ním přispívají k potenciálu pouze konstantou). Pokud je tedy hmota elipsoidu koncentrována v blízkosti středu elipsoidu, je výsledný potenciál vysoce sférický, je-li však hmota nahuštěna ve vnějších vrstvách, ekvipotenciální plochy jsou téměř sféroidy, konfokální s těmito okrajovými vrstvami.

1.3 Obrácená úloha

Neúplnost informace o rozložení hvězd uvnitř galaktického disku a o jejich pohybovém stavu nutí astronomy konstruovat modely reflektující určitou interpretaci experimentálních dat. Některé z těchto modelů jsem představil v předcházejících paragrafech. V úvodu kapitoly jsem poznamenal, že převážnou část experimentálních dat tvoří měření projekce oběžných rychlostí hvězd. Zabývejme se proto otázkou, jak z těchto dat rekonstruovat rozložení hmoty uvnitř pozorovaného objektu, či celkový potenciál. Je taková rekonstrukce vůbec jednoznačná? Nyní potřebujeme postupovat opačně oproti minulému přehledu, kdy jsme z vhodných potenciálů vyjádřili rozložení hmoty i velikost oběžných rychlostí. Omezíme se přitom na případ axiálně symetrických disků.[1]

V rámci nejjednoduššího axisymetrického modelu orientujeme naměřené rychlosti zcela ve směru tečny na daném poloměru a necháme hvězdy obíhat střed disku po kružnicích ležících v jedné rovině. Celá úloha přeformulovaná do matematického jazyka pak zní: hledáme potenciál $\Phi(R, z)$ splňující Laplaceovu rovnici v poloprostoru $z \geq 0$ (celý problém zahrnuje symetrii vůči zrcadlení podle $z = 0$) s okrajovou podmínkou $\lim_{z\to 0} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{v^2(R)}{R}$ a zkoumáme jeho jednoznačnost.

Hledejme nejprve řešení

$$\Delta\Phi(R, z) = 0$$

nezávisle na okrajové podmínce. Po transformaci do cylindrických souřadnic

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial R} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.20}$$

nám tvar rovnice umožňuje kruciální separaci proměnných:

$$\Phi = \rho(R)\zeta(z)\,.$$

Funkční část potenciálu závislá pouze na z musí vyhovovat podmínce

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} = konst.\,\zeta \tag{1.21}$$

[1] Složitější metody viz například [6].

Požadujeme-li navíc, aby $\lim_{z\to\infty}\Phi = 0$, jsou přípustná pouze řešení úměrná

$$\zeta(z) = \exp(-m|z|)\,, \quad m > 0\,.$$

Pro radiální část potenciálu tak dostáváme rovnici

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\rho}{\partial R} + m^2\rho = 0\,, \tag{1.22}$$

která po vynásobení R^2 nápadně připomíná Besselovu rovnici:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - l^2)y = 0\,,$$

jejímž řešením jsou cylindrické funkce řádu l. Porovnáním posledních 2 rovnic zjišťujeme, že radiální závislost potenciálu je úměrná funkci

$$\rho(R) = J_0(mR)\,.$$

Druhé nezávislé řešení rovnice (1.22) – Besselova funkce 2. druhu $Y_0(mR)$ diverguje v okolí počátku, a jako takovou ji vyřadíme z výběru vhodných kandidátů na potenciál (chceme, aby potenciál byl spojitý a konečný v celém prostoru).

Báze všech „fyzikálních“ řešení tedy sestává z funkcí

$$\Phi_m(R,z) = J_0(mR)\exp(-m|z|)\,, \quad m > 0\,.$$

Pro naši výchozí úlohu je významné, že uvnitř bázových funkcí je separována závislost na R a na z. Okrajová podmínka je totiž pouze funkcí R. Pokud se nám ji podaří zapsat jako následující superpozici s váhou $w(m)$

$$-\int_R^\infty \frac{v^2(R')}{R'}\mathrm{d}R' = \Phi(R, z=0) = \int_0^\infty w(m)J_0(mR)\mathrm{d}m\,, \tag{1.23}$$

pak celkový potenciál je stejnou superpozicí vybraných bázových funkcí

$$\Phi = \int_0^\infty w(m)\Phi_m\mathrm{d}m\,. \tag{1.24}$$

Současně však vyvstává nesnáz, jak z předepsané radiální závislosti cirkulárních rychlostí určit superpozici $w(m)$. Naštěstí má rovnice pro radiální závislost potenciálu (1.22) tvar rovnice generující ortogonální systém polynomů

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\rho}{\partial R}\right) = -m^2R\rho\,, \tag{1.25}$$

jen s tím rozdílem, že parametr m zde nenabývá pouze přirozených hodnot, ale může probíhat všechna kladná reálná čísla. Tato podobnost dává tušit, že řešení rovnice by mohla být v jistém smyslu ortogonální. V pokročilé matematické analýze pak ověříme (viz například [7]), že $J_0(mR)$ tvoří integrační jádro Hankelovy transformace na prostoru funkcí se skalárním součinem

$$\Big(f(R),\, g(R)\Big)_{L^2_R} = \int f(R)g(R)\, R\,\mathrm{d}R\,. \tag{1.26}$$

Této vlastnosti využijeme k vyjádření hledané váhové funkce $w(m)$. Spočtěme skalární součin (1.26) funkce $\Phi(R, z = 0)$ získané integrací experimentálních dat $\frac{v^2(R)}{R}$ s funkcí $J_0(m'R)$. Použitím (1.23) dostáváme

$$\begin{aligned}
&\Big(\Phi(R, z=0),\, J_0(m'R)\Big)_{L^2_R} = \int_0^\infty \left(-\int_R^\infty \frac{v^2(R')}{R'}\mathrm{d}R'\right) J_0(m'R)R\,\mathrm{d}R = \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty w(m)J_0(mR)\mathrm{d}m\right) J_0(m'R)R\,\mathrm{d}R = \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty J_0(mR)J_0(m'R)R\,\mathrm{d}R\right) w(m)\mathrm{d}m = \\
&= \int_0^\infty \frac{\delta(m-m')}{m} w(m)\mathrm{d}m = \frac{w(m')}{m'}
\end{aligned}$$

Konečně, rekonstruovaný potenciál v celém prostoru má tvar

$$\Phi(R,z) = \int_0^\infty \Big(\Phi(R, z=0),\, J_0(mR)\Big)_{L^2_R} J_0(mR)\exp(-m|z|)\, m\,\mathrm{d}m\,. \tag{1.27}$$

Jednoznačnost tohoto potenciálu závisí na tom, zda existuje potenciál $\Psi(R,z)$, pro který platí

$$\begin{aligned}
\Delta\Psi(R,z) &= 0 \quad \text{pro } z>0 \\
\frac{\partial\Psi}{\partial R}(R, z=0) &= 0 \\
\lim_{z\to 0}\frac{\partial\Psi}{\partial z}(R,z) &\neq 0 \quad \text{na } \Omega
\end{aligned}$$

kde Ω je množina bodů disku nenulové míry. Potenciál $\Phi + \Psi$ by potom byl konzistentní s výchozími daty, avšak vedl by k rozdílnému rozložení hmoty uvnitř disku.

Protože Ψ v blízkosti disku disponuje pouze z-tovou složkou gradientu a zároveň i zde splňuje Laplaceovu rovnici, musí platit

$$\lim_{z\to 0} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}(R,z) = 0\,.$$

Pro separovanou z-tovou závislost potenciálu to znamená, že konstantu v rovnici (1.21) musíme volit rovnou nule. Taková Ψ ovšem nevymizí s rostoucím z, a tedy původní potenciál (1.27) je na třídě zvolených funkcí jednoznačný.

Zbývá doplnit, zda jsme v uvedené metodě uvažovali dostatečně širokou třídu funkcí, t.j. zda nám některá řešení úlohy neunikla. Omezení na spojité nedivergující funkce například eliminuje řešení ve tvaru homogenního pole ve směru osy z - viz předchozí rovnice. Závažnější je ovšem, jaké všechny funkce je metoda vůbec schopná najít ještě před tím, než některé vyřadíme. Jádrem úlohy je hledání vlastních funkcí Laplaceova operátoru. Laplaceův operátor pro axiálně symetrické funkce je hermitovský na podprostoru $L^2(R^3)$, na němž platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(R,z)\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial g(R,z)}{\partial R}\right) 2\pi R\,\mathrm{d}R\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} g(R,z)\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial f(R,z)}{\partial R}\right) 2\pi R\,\mathrm{d}R\mathrm{d}z\,, \qquad (1.28)$$

čili vymizí okrajové členy při úpravách integrálu per-partes. Vlastní funkce pak tvoří bázi na tomto podprostoru. Proto si můžeme být jisti pouze tím, že jsme zachytili všechna řešení patřící do $L^2(R^3)$ a zároveň splňující (1.28).

Kapitola 2

Singulární nadplochy v obecné relativitě

V newtonovské gravitaci je chování gravitační intenzity v blízkosti plošných zdrojů vystiženo požadavkem spojitosti tečných složek a vhodným skokem normálových složek – viz rovnice (1.1). Tyto podmínky získáme aplikací Gaussovy věty na newtonovské gravitační pole. Očima obecné teorie relativity je však Newtonův gravitační zákon nepřípustný, a tak není divu, že nový gravitační zákon vyžaduje také jiné rovnice pro navazovací podmínky na nadplochách vykazujících nespojitost v hustotě hmoty. Takovými nadplochami jsou například povrchy hvězd, nebo disky, chápané jako nekonečně tenké pásy.

V obecné relativitě přibývá problém s rozhodnutím, do jaké míry je příčina nespojitosti vypočteného gravitačního pole fyzikální povahy, neboť může být podmíněna nespojitostí souřadnic. Často je totiž výhodné volit na obou stranách takové nadplochy zcela nezávislé souřadnice, od kterých nepožadujeme nic jiného než spojitost metriky, aby pozorovatel procházející nadplochou naměřil z obou stran stejné vzdálenosti odpovídajících si bodů.

Původní články věnující se tomuto problému prezentovaly souřadnice, v nichž souřadnicové nespojitosti vymizí. Jejich nevýhodou ale bylo, že často zamaskovaly také různé symetrie prostoročasů, a v jistém smyslu též takový postup neuspokojuje princip obecné kovariance. Východisko podal ve svém článku W. Israel [8]:

2.1 Israelův formalismus ...

Symboly x^α_+, x^α_- budeme označovat souřadnice v částech prostoročasu V^+, V^- rozdělených nadplochou Σ parametrizovanou souřadnicemi ξ^a (jako obvykle řeckých indexů je 4, zatímco latinských 3). 4-rozměrná metrika přitom indukuje 3D metriku nadplochy:

$$g_{ab} = g_{\alpha\beta} e^\alpha_{(a)} e^\beta_{(b)} , \tag{2.1}$$

kde $e^\alpha_{(i)} \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i}$ jsou 4-vektory triády nadplochy.

Gravitační působení na nadploše je plně determinováno metrickým tenzorem g_{ab}. Například absolutní derivaci nějaké vektorové dynamické veličiny $\mathbf{A}$ v Σ zjistíme jako

$$A^i_{;j} = \frac{\partial A^i}{\partial \xi^j} + \Gamma^i_{kj} A^k , \tag{2.2}$$

přičemž komponenty vektoru $\mathbf{A}$ v Σ jsou $A^i = A^\alpha e^{(i)}_\alpha$.

Absolutní derivaci 4-vektoru $\mathbf{A}$ v metrice nadplochy získáme však také projekcí absolutní derivace $\mathbf{A}$ na triádu nadplochy, jejíž uložení v prostoročase je charakterizováno jednotkovou normálou n^α obvykle volenou směřující z V^- do V^+:[1]

$${}^3\frac{\mathrm{D}\mathbf{A}}{\mathrm{d}\xi^a} = \frac{\mathrm{D}\mathbf{A}}{\mathrm{d}\xi^a} - \mathbf{n}\left(\mathbf{n}\cdot\frac{\mathrm{D}\mathbf{A}}{\mathrm{d}\xi^a}\right) . \tag{2.3}$$

Z toho je vidět, že metrické vlastnosti celého prostoročasu v místě Σ jsou dány metrikou nadplochy a jejím uložením v prostoročase:

$$g^{\alpha\beta} = g^{ab} e^\alpha_{(a)} e^\beta_{(b)} + n^\alpha n^\beta . \tag{2.4}$$

Vnitřní metrika ploché nadplochy a nadplochy ohnuté do cylindru je stejná, avšak gravitační působení na obě nadplochy z hlediska celkového prostoročasu je různé.

Vnější charakteristikou nadplochy je tedy způsob jejího uložení v prostoročasu. Ten lze měřit variací $\frac{\mathrm{D}n^\alpha}{\mathrm{d}\xi^i}$. Z normalizace vektoru $\mathbf{n}$ se navíc můžeme ujistit, že předchozí vektor je na něj kolmý, takže jej můžeme přepsat

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{n}}{\mathrm{d}\xi^i} = K_i{}^j \mathbf{e}_{(j)} , \tag{2.5}$$

[1] Trojka u ${}^3\frac{\mathrm{D}\mathbf{A}}{\mathrm{d}\xi^a}$ a u dalších tenzorů dále zdůrazňuje, že se jedná o vnitřní vlastnost nadplochy.

čímž je definován 3-tenzor *vnější křivosti* $K_i^{\ j}$.

Snadno ověříme, že tenzor vnější křivosti je symetrický:

$$K_{ij} = \mathbf{e}_{(j)} \cdot \frac{\mathrm{D}\mathbf{n}}{\mathrm{d}\xi^i} = -\mathbf{n} \cdot \frac{\mathrm{D}\mathbf{e}_{(j)}}{\mathrm{d}\xi^i} = -\mathbf{n} \cdot \frac{\mathrm{D}\mathbf{e}_{(i)}}{\mathrm{d}\xi^j} = K_{ji}\,, \tag{2.6}$$

kde 2. rovnost je důsledkem ortogonality vektorů $\mathbf{e}_{(j)}$ a $\mathbf{n}$.

S využitím (2.2) a (2.6) víme, jak se mění bázové vektory nadplochy při paraelním přenosu podél Σ – jejich rozklad na tetrádu v daném místě je

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{e}_{(i)}}{\mathrm{d}\xi^j} = -\epsilon(\mathbf{n}) K_{ij}\mathbf{n} + \Gamma^h_{ij}\mathbf{e}_{(h)}\,, \tag{2.7}$$

kde $\epsilon(\mathbf{n}) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}$ je +1 pro prostorupodobné 4-vektory a -1 pro časupodobné. Výsledná rovnice se nazývá Gauss-Weingartenova a použijeme ji k výpočtu $\frac{\mathrm{D}^2 e^\beta_{(a)}}{\mathrm{d}\xi^d \mathrm{d}\xi^c} - \frac{\mathrm{D}^2 e^\beta_{(a)}}{\mathrm{d}\xi^c \mathrm{d}\xi^d}$, což je zároveň ex definitione $\mathrm{R}_a{}^\beta{}_{cd} = \mathrm{R}_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} e^\alpha_{(a)} e^\gamma_{(c)} e^\delta_{(d)}$. Tuto veličinu získanou dvěma způsoby dále promítneme jak na $e_{\beta(b)}$:

$$\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} e^\alpha_{(a)} e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)} e^\delta_{(d)} = \mathrm{R}_{abcd} - \epsilon(\mathbf{n})(K_{ac}K_{bd} - K_{bc}K_{ad})\,, \tag{2.8}$$

tak do n_β:

$$\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} e^\alpha_{(a)} n^\beta e^\gamma_{(c)} e^\delta_{(d)} = K_{ad;c} - K_{ac;d}\,. \tag{2.9}$$

Poslední 2 rovnice nesou jména Gauss a Codazzi. Jejich vynásobením $g^{bc}g^{ad}$, resp. g^{ad} s přispěním (2.4) a zavedením Einsteinova tenzoru $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ dostáváme výsledné invariantní rovnice svazující derivace metriky prostoročasu na levých stranách s derivacemi metriky nadplochy na pravých stranách

$$2\epsilon(\mathbf{n}) G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -{}^3R - \epsilon(\mathbf{n})(K_{ab}K^{ab} - K^2)\,, \tag{2.10}$$

$$-G_{\alpha\beta} n^\alpha e^\beta_{(b)} = K_{;b} - K_b{}^a{}_{;a}\,. \tag{2.11}$$

Tyto rovnice tedy suplují navazovací podmínky na nadplochách nespojitosti derivací metriky v OTR. Upozorněme ještě, že se jedná o 2 sady dvojic rovnic, protože oba vztahy musí platit jak v prostoročase V^-, tak ve V^+.

2.2 ... a jeho aplikace

Nechť K^-_{ij}, K^+_{ij} jsou vnější křivosti 3D nadplochy Σ vnořené do dvou 4D variet V^-, V^+. Jednotková normála $\mathbf{n}$ mířící z V^- do V^+ bude v následujícím

uvažována vždy prostorupodobná.

Nejprve se věnujme situaci, kdy $K_{ij}^- = K_{ij}^+$. To je případ všech *hraničních povrchů*, charakterizovaných nespojitostí tenzoru energie a hybnosti bez přítomnosti slupkových zdrojů. Příkladem hraničního povrchu je povrch hvězdy.

Napojovací podmínky (2.10), (2.11) v tomto případě vyžadují

$$G_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta\big|^+ = G_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta\big|^- , \qquad G_{\alpha\beta}n^\alpha e^\beta_{(b)}\big|^+ = G_{\alpha\beta}n^\alpha e^\beta_{(b)}\big|^- . \tag{2.12}$$

Normálové a smíšené složky Einsteinova tenzoru zůstávají při průchodu nadplochou spojité. Za vnější prostor V^+ se obvykle pokládá vakuum; pak musíme na levé strany rovnic dosadit 0.

Nadplochy, pro něž platí $K_{ij}^- \neq K_{ij}^+$, se nazývají *povrchové vrstvy* a setkáme se s nimi blíže v následující kapitole.

Jak jsme již viděli – viz například (2.3), (2.4), metrické vlastnosti a tedy i dynamické vlastnosti nadplochy a celého prostoročasu, v němž je uložena, jsou provázány. Ovlivnění prostoročasu přítomností singulární nadplochy musí souviset s 3-tenzorem

$$\gamma_{ij} = K_{ij}^+ - K_{ij}^- ,$$

mající význam změny zakřivení nadplochy vůči prostoročasu při průchodu skrz ní. Upozorněme, že až dosud jsme v této kapitole nepotřebovali pracovat v nějakých konkrétních souřadnicích. Pro heuristické nastínění významu γ_{ij} je však nejschůdnější pracovat v tzv. přirozených (též Gaussových) souřadnicích. V nich souřadnice x_1 měří geodetickou vzdálenost normálovou k Σ a ostatní ortogonální souřadnice parametrizují Σ. V okolí Σ je tedy

$${}^4g_{11} \stackrel{*}{=} 1 , \qquad {}^4g_{i1} \stackrel{*}{=} 0 ,$$

kde $\stackrel{*}{=}$ značí rovnost pouze ve speciálních souřadnicích. Na samotné nadploše Σ nabývají souřadnice:

$$\begin{aligned} x_1 &\stackrel{*}{=} 0 , \qquad {}^4g_{ij} \stackrel{*}{=} {}^3g_{ij} \\ n_\alpha &\stackrel{*}{=} \delta^1_\alpha , \qquad e^\alpha_{(a)} \stackrel{*}{=} \delta^a_\alpha \\ K_{ij}^\pm &\stackrel{*}{=} -{}^4\Gamma^1_{ij}\big|^\pm \stackrel{*}{=} \frac{1}{2}{}^4\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1}\Big|^\pm . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Význam těchto souřadnic spočívá v následujících relacích připomínajících klasické napojovací podmínky:

$$[x^\alpha] \stackrel{*}{=} 0\,, \qquad [g_{\alpha\beta}] \stackrel{*}{=} 0\,, \tag{2.14}$$

$$[n_\alpha] \stackrel{*}{=} 0\,, \tag{2.15}$$

$$\left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\right] \stackrel{*}{=} 2[K_{\alpha\beta}]n_\mu \stackrel{*}{=} 2\gamma_{\alpha\beta}n_\mu\,, \tag{2.16}$$

$$[\Gamma^\mu_{\alpha\beta}] \stackrel{*}{=} \gamma_\alpha{}^\mu n_\beta + \gamma_\beta{}^\mu n_\alpha - \gamma_{\alpha\beta}n^\mu\,, \tag{2.17}$$

kde $[\Phi]$ znamená skok libovolné veličiny Φ na Σ, t.j. $\Phi^+ - \Phi^-$. Jestliže původně 3-tenzory mají řecké indexy (které nabývají 4 hodnot), jako u $\gamma_{\alpha\beta}$ v předchozích vztazích, jedná se o 4-dimenzionální rozšíření:

$$\gamma^{\alpha\beta} = \gamma^{ab}e^\alpha_{(a)}e^\beta_{(b)} \quad \text{na } \Sigma\,, \qquad \gamma^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{jinde.}$$

Výhodou přirozených souřadnic je, že tenzor $2\gamma_{\alpha\beta}$ v nich lze interpretovat jako skok normálových derivací $g_{\alpha\beta}$, jak vidno z rovnice (2.16).

Představme si dále vznik nadplochy limitním procesem ztenčování 4-vrstvy, jejíž povrchy mají souřadnice $x^1 = 0$ a $x^1 = \epsilon$. Každé nadploše uvnitř tenké 4-vrtvičky přitom umíme přiřadit její vnější křivost – viz rovnice (2.13), z níž také odvodíme vztah mezi Ricciho tenzorem celého prostoročasu a dané nadplochy:

$${}^4R_{ij} \stackrel{*}{=} -\frac{\partial K_{ij}}{\partial x^1} + Z_{ij}\,, \quad \text{kde} \quad Z_{ij} = {}^3R_{ij} + KK_{ij} - 2K^p_iK_{pi}\,. \tag{2.18}$$

Integrací Einsteinových rovnic

$$R_{\alpha\beta} = \kappa(T_{\alpha\beta} - 1/2\,Tg_{\alpha\beta})$$

skrz vrstvičku dostáváme

$$-\kappa\int_0^\epsilon (T_{ij} - 1/2\,Tg_{ij})\mathrm{d}x^1 \stackrel{*}{=} K^+_{ij} - K^-_{ij} - \int_0^\epsilon Z_{ij}\mathrm{d}x^1\,.$$

V limitě $\epsilon \to 0$ výraz napravo vymizí, protože Z_{ij} je uvnitř vrstvičky omezené.

Získáváme tak výslednou interpretaci γ_{ij}:

$$\gamma_{ij} = -\kappa(S_{ij} - 1/2\,Sg_{ij})\,, \tag{2.19}$$

kde

$$S_{ij} \stackrel{*}{=} \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^\epsilon T_{ij} \mathrm{d}x^1$$

je tzv. *plošný tenzor energie a hybnosti.* Můžeme jej také zapsat v souladě s rovnicí (2.19) jako

$$-\kappa S_{ij} = \gamma_{ij} - \gamma_p^p g_{ij} \,. \tag{2.20}$$

Vraťme se k původnímu problému navazovacích podmínek pro gravitační pole na povrchové vrstvě. Díky tomu, že vrstva se nachází ve vakuu, je $G_{\alpha\beta}$ okolních prostoročasů V^+, V^- nulový a výchozí rovnice (2.10) (2.11) tak nabývají tvaru

$$^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 = 0 \,,$$
$$K_a{}^b{}_{;b} - K_{;a} = 0 \,.$$

Jejich sečtením a odečtením dospějeme k názorné ekvivalentní sadě

$$S^{ab}{}_{;b} = 0 \,, \tag{2.21}$$

$$\widetilde{K}_a{}^b{}_{;b} - \widetilde{K}_{;a} = 0 \,, \tag{2.22}$$

$$\widetilde{K}_{ab}S^{ab} = 0 \,, \tag{2.23}$$

$$^3R + \widetilde{K}_{ab}\widetilde{K}^{ab} - \widetilde{K}^2 = -\frac{1}{4}\kappa^2(S_{ab}S^{ab} - \frac{1}{2}S^2) \,, \tag{2.24}$$

kde

$$\widetilde{K}_{ab} = \frac{1}{2}(K^+_{ab} + K^-_{ab}) \,, \qquad \widetilde{K} = g^{ab}\widetilde{K}_{ab} \,. \tag{2.25}$$

2.2.1 Prachová slupka

Aplikujme rovnice odvozené pro povrchové slupky na speciální slupku charakterizovanou plošným tenzorem energie

$$S^{ab} = \sigma u^a u^b \,. \tag{2.26}$$

Křivky $\mathrm{d}\xi^a/\mathrm{d}s = u^a$ tečné k Σ pak přímočaře interpretujeme jako světočáry neinteragujících prachových částic.

Rovnice zachování energie a hybnosti (2.21) vede k rovnicím

$$u^a{}_{;b}u^b = 0 \,, \tag{2.27}$$
$$(\sigma u^a)_{;a} = 0 \,, \tag{2.28}$$

které ukazují, že světočáry jsou geodetikami na Σ (zrychlení způsobené negravitačními silami $a^a = 0$), a že tok prachu splňuje rovnici kontinuity, což je důsledkem neexistence jiné interakce, než samotné gravitační.

K vyřešení dynamiky celého systému potřebujeme znát 4-zrychlení částic, jak se jeví vůči V^+, V^-. Přestože se částice pohybují v Σ po její geodetice, kvůli různým možnostem uložení Σ ve V^+ a V^- mohou nabývat rozličných 4-zrychlení.

Protože známe vztah mezi absolutní derivací bázových vektorů ve 4-rozměrné metrice a v její indukované metrice (2.7), umíme absolutně derivovat i tečná vektorová pole, speciálně pro pole rychlostí:

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\xi^j} = u^i_{;j}\mathbf{e}_{(\mathrm{i})} - \epsilon(\mathbf{n})u^i K_{ij}\mathbf{n}\,. \tag{2.29}$$

4-zrychlení pak už jednoduše spočteme jako (s je vlastní čas prachových částic)

$$\left.\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{d}s}\right|^{\pm} = \left.\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\xi^j}\right|^{\pm}\frac{\mathrm{d}\xi^j}{\mathrm{d}s} = -u^i K^{\pm}_{ij} u^j \mathbf{n}\,, \tag{2.30}$$

kde jsme navíc využili (2.27).

Projekcemi tohoto vektoru dostaneme pohybové rovnice slupky

$$e^{\alpha}_{(a)}\left.\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}_{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right|^{\pm} = 0\,, \tag{2.31}$$

$$n_{\alpha}\left.\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right|^{+} + n_{\alpha}\left.\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right|^{-} = -2u^a u^b \widetilde{K}_{ab} = [\text{viz. (2.23)}] = 0\,, \tag{2.32}$$

$$n_{\alpha}\left.\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right|^{+} - n_{\alpha}\left.\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\right|^{-} = -u^a u^b \gamma_{ab} = [\text{viz. (2.19)}] = \frac{1}{2}\kappa\sigma\,. \tag{2.33}$$

Zdůrazněme ještě jednou, že uvedené rovnice jsou skalární, mohou být vyčísleny zvlášť v nezávislých souřadnicích x^{α}_{+}, x^{α}_{-}.

Abyhom demonstrovali sílu těchto invariantních rovnic, použijeme je k elegantnímu vyřešení pohybu konkrétní prachové slupky:

2.2.2 Sférická prachová slupka

V souhlase s Birkhoffovým teorémem je vnějším vakuovým prostoročasem V^+ Schwarzschildova varieta s metrikou

$$(\mathrm{d}s^2)^+ = f^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) - f\mathrm{d}t^2\,,$$

kde $f(r) = 1 - 2m/r$.

Ze symetrie úlohy musí být i vnitřní prostoročas sféricky symetrický, a newtonovská limita zde zaručuje, že funkce f je nezávislá na hmotnosti slupky a můžeme ji zvolit rovnou jedné. Vnitřní oblast slupky tedy ztotožníme s plochým Minkowského prostoročasem:

$$(\mathrm{d}s^2)^- = \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) - \mathrm{d}T^2\,.$$

Přitom časové souřadnice t a T nemusíme identifikovat na rozhraní prostoročasů Σ, neboť ani výchozí rovnice (2.31)–(2.33) to nevyžadují. Naproti tomu kvůli spojitosti metriky na Σ se musí radiální souřadnice v obou prostoročasech rovnat (V^+ i V^- indukují stejnou metriku – pozorovatel musí v obou prostoročasech zjistit stejné vzdálenosti na Σ).

Naším úkolem je najít, jak se slupka s povrchovým tenzorem napětí (2.26) pohybuje. Z radiální symetrie má pohybová rovnice tvar

$$r = R(s)\,,$$

kde s je vlastní čas prachových částic. Potom 4-rychlost částic (se složkami po řadě t, r, θ, φ)

$$u_+^\alpha = \frac{\mathrm{d}x_+^\alpha}{\mathrm{d}s} = (X, \dot{R}, 0, 0)\,, \qquad \dot{R} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}$$

a na ní kolmá normála k nadploše Σ

$$n_\alpha^+ = (-\dot{R}, X, 0, 0)\,,$$

s X daným normalizací $u^\alpha u_\alpha = -1$:

$$X = \frac{\sqrt{f(R) + \dot{R}^2}}{f(R)}\,.$$

Diferencováním $u^\alpha u_\alpha = -1$ obdržíme

$$0 = u_\alpha \frac{\mathrm{D}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\bigg|^+ = f^{-1}\dot{R}\frac{\mathrm{D}^2R}{\mathrm{d}s^2}\bigg|^+ - fX\frac{\mathrm{D}^2t}{\mathrm{d}s^2}\bigg|^+\,,$$

čímž jsme zároveň splnili rovnici (2.31).

Abychom eliminovali nepohodlné $\mathrm{D}^2t/\mathrm{d}s^2$, rozepíšeme podobně i

$$n_\alpha \frac{\mathrm{D}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\bigg|^+ = X\frac{\mathrm{D}^2R}{\mathrm{d}s^2}\bigg|^+ - \dot{R}\frac{\mathrm{D}^2t}{\mathrm{d}s^2}\bigg|^+ ,$$

a dostáváme

$$\begin{aligned} n_\alpha \frac{\mathrm{D}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\bigg|^+ &= (fX)^{-1}\frac{\mathrm{D}^2R}{\mathrm{d}s^2}\bigg|^+ = (fX)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^2_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta\right) = \\ &= (fX)^{-1}\left(\ddot{R} + m/R^2\right) . \end{aligned} \tag{2.34}$$

Tato veličina navíc stojí na levých stranách obecných pohybových rovnic (2.32),(2.33), takže jejich substituováním získáme kýženou pohybovou rovnici. Korespondující hodnotu z vnitřní oblasti dostaneme pouhým položením $m = 0$:

$$n_\alpha \frac{\mathrm{D}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\bigg|^- = (1+\dot{R}^2)\ddot{R} . \tag{2.35}$$

Po dosazení posledních 2 rovnic do (2.32) zbývá vyřešit diferenciální rovnici pouze pro R

$$\frac{\ddot{R} + m/R^2}{\sqrt{1+\dot{R}^2 - 2m/R}} + \frac{\ddot{R}}{\sqrt{1+\dot{R}^2}} = 0 .$$

Přenásobení $\dot{R}$ a integrace vede konečně na

$$\sqrt{1+\dot{R}^2} = a + m/(2aR)$$

To je rovnice pro pohyb sférické prachové slupky způsobený self-gravitací.

Význam integrační konstanty a je zřejmý z poslední pohybové rovnice (2.33), kterou upravíme stejným postupem na tvar:

$$4\pi R^2\sigma = m/a . \tag{2.36}$$

Na levé straně stojí celková klidová hmotnost slupky, neboli součet klidových hmotností všech částic. Zato pravá strana obsahuje m, které má význam gravitační síly zdroje, a vztahuje se k hmotnostnímu ekvivalentu energie. Rozdíl těchto hmotností $m - m/a$ proto měří vazebnou energii, čili (záporný) příspěvek ke gravitační hmotnosti vlivem kinetické a potenciální energie částic.

Kapitola 3

Disky jako zdroje statických vakuových prostoročasů

Disky mají v obecné relativitě naprosto zásadní důležitost. Slouží nejen jako modely galaxií pro astrofyziky, ale také, jak uvidíme, je můžeme považovat za fyzikální zdroje statických vakuových metrik. Přestože je známa řada takových řešení Einsteinových rovnic, jen zřídkakdy jsme schopni popsat také zdroj generující vně sebe danou metriku. Máme-li netriviální vakuové řešení v celém prostoročase, narazíme v některé jeho části na singularitu, v níž dynamické veličiny divergují. Disky představují východisko, v němž je tatáž metrika buzena singulární nadplochou (kde je koncentrována hmota) s předepsaným plošným tenzorem energie a hybnosti.

Tato kapitola vychází z článku [9]. Navíc nabízí srovnání výsledků s nerelativistickými případy.

3.1 Protirotující disky

Začněme od Weylovy metriky:

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{2\nu}\mathrm{d}t^2 + e^{2(\zeta-\nu)}(\mathrm{d}R^2 + \mathrm{d}z^2) + R^2e^{-2\nu}\mathrm{d}\varphi^2\,, \tag{3.1}$$

kde ν a ζ jsou funkce R a z – metrika je statická a axiálně symetrická. V celé této kapitole pracujeme v geometrizovaných jednotkách ($c = 1$, $G = 1$).

Dosazením do Einsteinových rovnic zjistíme (následujíce [10]):

$$\nabla^2\nu = 4\pi e^{2(\zeta-\nu)}(T^\varphi_\varphi - T^t_t)\,, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial R} = R\left[\left(\frac{\partial\nu}{\partial R}\right)^2 - \left(\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)^2\right], \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = 2R\frac{\partial\nu}{\partial R}\frac{\partial\nu}{\partial z}, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial R^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} - \nabla^2\nu + \left(\frac{\partial\nu}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)^2 = 4\pi e^{2(\zeta-\nu)}(T^{\varphi}_{\varphi} + T^{t}_{t}). \tag{3.5}$$

Mimo hmotu se (3.2) redukuje na Laplaceovu rovnici. Známá řešení axiálně symetrických potenciálů z newtonovské gravitace a z elektrostatiky tak mohou být použita k vytváření nových metrik typu (3.1). Nepřehlédněme, že v newtonovské limitě je $g_{tt} = -1 - 2\nu$, a tedy ν má opravdu význam potenciálu.

Jak jsem již předeslal v sekci o Kuzminově metodě lze každý klasický axiálně symetrický disk rozložit do superpozice Kuzminových disků. V případě, kdy tenzor energie a hybnosti $T^{\alpha\beta}$ ztenčováním přechází v plošný tenzor energie a hybnosti S^{ab} nenulový pouze na nadploše $z = 0$, umíme jednoznačně přiřadit každé klasické superpozici (1.4) její relativistický protějšek ztotožněním $\Phi = \nu$.

Zbývá dořešit 2 problémy. Zaprvé výsledná metrika musí být axiálně symetrická. Zajímavé a fyzikálně přínosnější je ovšem studovat superpozice rotujících disků. U těchto disků však narozdíl od newtonovských případů vzniká „dragging" inerciálních systémů, a tedy negenerují metriku (3.1). Tuto nepříjemnost můžeme obejít přidáním stejné superpozice opačně rotujících disků. Takové soustavě se říká *protirotující disky.*

Druhou obtíží je určení funkce ζ. Ačkoliv pro pevné ν charakterizované parametrem b (viz (1.2)) docela přímočaře zjistíme

$$\zeta = -\frac{1}{2}\frac{M^2R^2}{r_b^4}, \qquad r_b = \sqrt{R^2 + (|z| + b)^2}, \tag{3.6}$$

určení ζ pro obecnou superpozici v ν je obtížnější, neboť ζ je ve vztazích (3.3), (3.4) kvadratická. Postupem uvedeným v [9] se dovtípíme, že pro obecnou superpozici ν s distribucí $w(b)$ - viz (1.4) je

$$\zeta = -2\int\int \frac{w_1 w_2}{(u_1u_2+1)^2}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2, \tag{3.7}$$

kde

$$w_i = w\left[\frac{1}{2}R\left(u_1 + \frac{1}{u_1}\right)\right].$$

3.1.1 Vlastnosti disků

Protirotující disky si můžeme představit jako 2 stejné, opačně rotující proudy neinteragujících částic, charakterizované tangenciální rychlostí V měřenou statickým pozorovatelem (vůči metrice) v dané radiální vzdálenosti. Proudům tedy přiřadíme plošný tenzor energie a hybnosti hmotného prachu.

Je-li $\sigma_p(R)$ klidová hustota klidové hmotnosti jediného proudu, pak v naší statické soustavě zjistíme hustotu hmotnosti

$$\sigma(R) = 2\sigma_p/(1-V^2) \stackrel{*}{=} -S_t^t = -\int T_t^t e^{\zeta-\nu} \mathrm{d}z\,, \tag{3.8}$$

a tangenciální tlak způsobený opačnými rychlostmi proudů

$$\sigma V^2 \stackrel{*}{=} S_\varphi^\varphi = \int T_\varphi^\varphi e^{\zeta-\nu} \mathrm{d}z\,. \tag{3.9}$$

Rovnost označená hvězdičkou zdůrazňuje platnost pouze v určité vztažné soustavě, a to v soustavě statického pozorovatele v dané vzdálenosti; složky tenzoru S^{ab} totiž nejsou invarianty. Fyzikálně zajímavé veličiny je výhodné vyjadřovat právě vůči statickému pozorovateli, a proto v zájmu zjednodušení v dalším již hvězdičky nevypisuji.

Komponenty tenzoru S^{ab} při zadaném potenciálu $\nu(R,z)$ určíme z Einsteinových rovnic. Dosazením (3.2) do (3.5) a integrováním přes disk dostáváme

$$\left[\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right]_{0-}^{0+} = 8\pi e^{\zeta-\nu} S_\varphi^\varphi = 8\pi e^{\zeta-\nu}\sigma V^2\,, \tag{3.10}$$

a z (3.2)

$$\left[\frac{\partial\nu}{\partial z}\right]_{0-}^{0+} = 4\pi e^{\zeta-\nu}(S_\varphi^\varphi - S_t^t) = 4\pi e^{\zeta-\nu}\sigma(1+V^2)\,. \tag{3.11}$$

Podobně, integrací (3.4)

$$\left[\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right]_{0-}^{0+} = 2R\frac{\partial\nu}{\partial R}\left[\frac{\partial\nu}{\partial z}\right]_{0-}^{0+}\,. \tag{3.12}$$

Konečně spojením posledních 3 rovnic získáme rovnici pro radiální závislost oběžné rychlosti proudů vůči statickému systému

$$R\frac{\partial\nu}{\partial R} = \frac{S_\varphi^\varphi}{S_\varphi^\varphi - S_t^t} = \frac{V^2}{1+V^2}\,. \tag{3.13}$$

Relativistická cirkulární rychlost

$$V = \left(\frac{R\partial\nu/\partial R}{1 - \partial\nu/\partial R} \right)^{1/2} = \left(\frac{v^2}{1 - v^2} \right)^{1/2} \tag{3.14}$$

v limitě slabého pole přechází, jak očekáváme, v klasickou

$$v^2 = R\partial\nu/\partial R\,. \tag{3.15}$$

Stejně můžeme porovnávat i ostatní význačné dynamické veličiny:

Úhlová rychlost proudu vůči pozorovateli v nekonečnu

$$\Omega \equiv \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = V\frac{\sqrt{-g_{tt}}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} = V\frac{e^{2\nu}}{R} \tag{3.16}$$

znamená korekci vůči klasické úhlové rychlosti v plochém prostoru $\omega = v/R$.

Relativistickým protějškem klasického specifického momentu hybnosti $j = Rv$ je h definovaný jako $p_\varphi/m = g_{\varphi\varphi}\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau$, kde τ je vlastní čas proudu o klidové hmotnosti m v dané vzdálenosti:

$$h = \frac{RVe^{-\nu}}{\sqrt{1 - V^2}}\,. \tag{3.17}$$

Veličina je samozřejmě spjatá vždy pouze s jedním proudem částic, celkový moment hybnosti obou proudů je nulový, protože jsme volili rychlost proudů přesně opačnou.

Konečně plošnou hustotu, jakou naměří statický pozorovatel, již neobdržíme ze vztahu

$$\Sigma(R) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\nu}{\partial z}\right]_{0^-}^{0^+}, \tag{3.18}$$

ale pomocí (3.11):

$$\sigma(R) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\nu}{\partial z}\right]_{0^-}^{0^+} e^{\nu-\zeta}\left(1 - R\frac{\partial\nu}{\partial R}\right). \tag{3.19}$$

Porovnání klasických a relativistických veličin ilustruji na dvou známých metrikách.

3.1.2 Kuzmin-Curzonův disk

Jak jsme viděli v předcházející sekci, axiálně symetrické statické metriky splňující Einsteinovy rovnice mohou být generovány klasickými potenciály disků ν. Zdůrazněme, že zadáním takového potenciálu máme opravdu klíč k řešení celého problému: Pomocí (3.6) popřípadě (3.7) dopočteme funkční závislost ζ chybějící k determinování celé metriky, která je konzistentní se zdrojem v podobě protirotujících disků, jejichž vlastnosti jsme opět schopni popsat v závislosti pouze na ν – viz vztahy (3.14)-(3.19).

Vyzkoušejme tento algoritmus na nejjednodušším příkladě, když za ν zvolíme potenciál Kuzminova disku (1.2). Jemu příslušná funkce ζ je (3.6).

Po zavedení bezrozměrných parametrů

$$\begin{aligned} N &= \frac{M}{b} \\ \beta &= \frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}} = \frac{1}{N\sqrt{N^{-2}+(R/M)^2}}, \end{aligned}$$

přepíšeme klasické veličiny (viz sekce Kuzminova metoda, notace je stejná jako v přehledu v minulém paragrafu)

$$\Sigma = \frac{N\beta^3}{2\pi b}, \tag{3.20}$$

$$v^2 = N\beta(1-\beta^2), \tag{3.21}$$

$$j/b = \sqrt{N/\beta}(1-\beta^2), \tag{3.22}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{N\beta^3}}{b}. \tag{3.23}$$

Jejich přesnější relativistická závislost je dána rovnicemi (3.19), (3.14), (3.17) a (3.16):

$$\sigma = \frac{N\beta^3}{2\pi b} e^{\nu_D - \zeta_D}[1 - N\beta(1-\beta^2)], \tag{3.24}$$

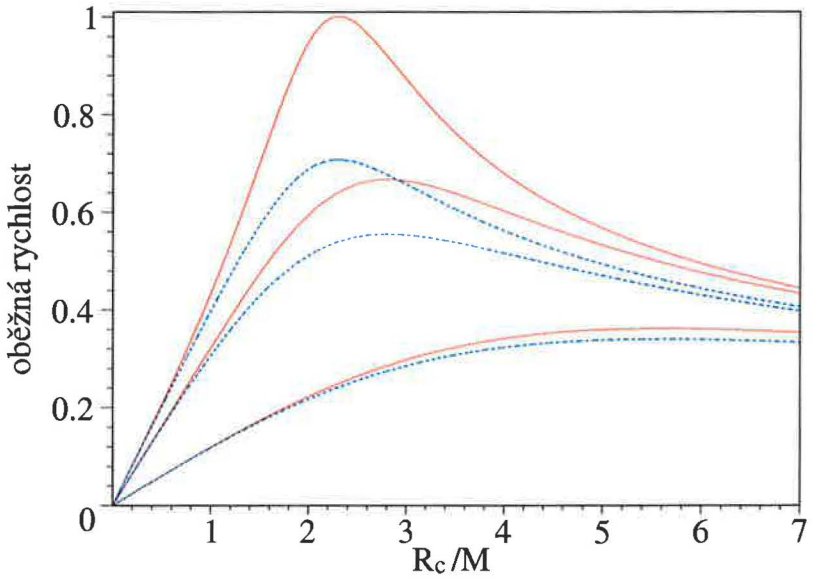
$$V^2 = \frac{N\beta(1-\beta^2)}{1-N\beta(1-\beta^2)}, \tag{3.25}$$

$$h/b = (N/\beta)^{1/2}(1-\beta^2)e^{-\nu_D}[1-2N\beta(1-\beta^2)]^{-1/2}, \tag{3.26}$$

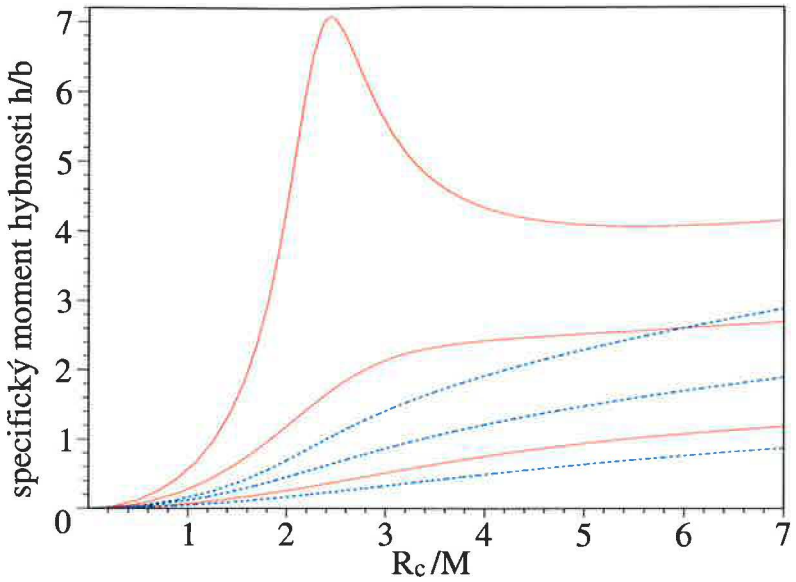
$$\Omega = \omega e^{2\nu_D}[1-N\beta(1-\beta^2)]^{-1/2}, \tag{3.27}$$

kde $\nu_D = -N\beta$ a $\zeta_D = -1/2\, N^2\beta^2(1-\beta^2)$ jsou hodnoty funkcí ν a ζ na disku.

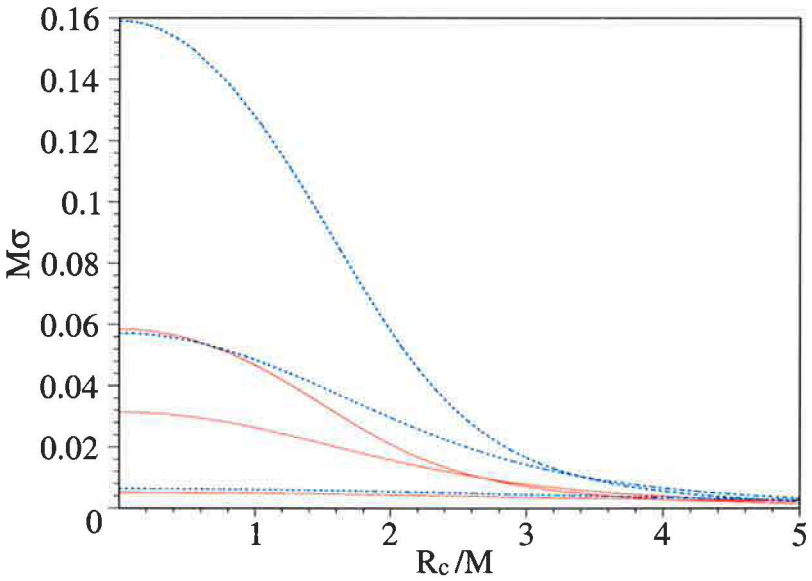
Na následujících obrázcích jsou porovnány jejich průběhy vždy ve 3 případech – slabě, středně a vysoce relativistického pole. Stupeň „relativističnosti" pole je přitom určován velikostí parametru N, v kterém je zachyceno, jak silný je zdroj, a zároveň, s použitím Kuzminovy metody, jak daleko od něj provádíme řez dávající vzniknout disku. Nezávislá proměnná je úměrná obvodovému poloměru $R_c = Re^{-\nu_D}$.



OBR. 3.1: Oběžné rychlosti jako funkce obvodového poloměru $R_c = Re^{-\nu(R,0)}$. Porovnání relativistických výsledků (červeně) s jejich klasickými protějšky (modře přerušovaně) pro 3 parametry $N \equiv M/b = 0.3, 0.8, 1.3$ (odspodu) charakterizující stupeň „relativističnosti" gravitačního pole, neboli míru odchylky klasické závislosti od relativistické.



OBR. 3.2: Specifický moment hybnosti $p_\varphi/(mb)$ jediného proudu částic v závislosti na obvodovém poloměru R_c. Srovnání relativistických výsledků (červeně) s jejich klasickými protějšky (modře přerušovaně) pro 3 společné parametry $N \equiv M/b = 0.4, 0.8, 1.2$ (odspodu).



OBR. 3.3: Plošná hustota hmoty v jednotkách M v závislosti na obvodovém poloměru R_c. Srovnání relativistických výsledků (červeně) s jejich klasickými protějšky (modře přerušovaně) pro 3 společné parametry $N \equiv M/b = 0.2, 0.6, 1$ (odspodu na ose y).

Oběžná rychlost nabývá jak v klasickém, tak v relativistickém případě maxima na souřadnici $R = \sqrt{2}b$, neboli pro $\beta^2 = 1/3$. Aby maximální rychlost nepřesáhla 1 (v jednotkách c), musí být

$$N \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.30\,.$$

Tuto mezní hodnotu jsem proto vybral i pro graf 3.1.

Spokojíme-li se se slabou energetickou podmínkou, která v tomto případě vyžaduje $-S_t^t = \sigma \geq 0$, můžeme interval přípustných N rozšířit až na

$$N \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6\,.$$

Ve vzdálenosti maxima cirkulární rychlosti daného disku $R = \sqrt{2}b$ se nachází v silně relativistických případech také maximum specifického momentu hybnosti – viz. graf 3.2. To je zásadní rozdíl oproti monotónní klasické závislosti. S rostoucí rychlostí proudů totiž vzrůstá poměr hmotnosti částic měřené statickým pozorovatelem a jejich klidové hmotnosti m; v mezním případě $V \to 1$ tak specifický moment úměrný tomuto poměru diverguje.

Plošná hustota měřená statickým pozorovatelem je v blízkosti osy disku potlačena vzhledem ke klasické závislosti především faktorem $e^{-N\beta}$, který pochází od složky metriky g_{zz}. Jakkoli se závislost, podle očekávání, chová v newtonovské limitě ($\nu \ll 1$) jako její klasická paralela, M zde stále znamená pouze parametr metriky bez přímého globálního fyzikálního významu. Měření hmotnosti je v relativistickém případě závislé na poloze pozorovatele a jeho pohybu. Důsledkem tohoto faktu je také to, že přeintegrováním plošné hustoty disku (3.24) nezískáme M jako v případě původního Kuzminova disku.

Kdybychom se podívali na grafy ve větším rozmezí, ověřili bychom, že všechny diskutované relativistické závislosti přecházejí s rostoucí vzdáleností v klasické křivky.

3.1.3 Schwarzschildův disk

Generátorem tohoto typu disků v Kuzminově představě jsou homogenní úsečky s koncovými body ve vzdálenosti a a b pod $z = 0$. Potenciál (1.4) je proto

$$\nu = N \ln \frac{r_a + |z| + a}{r_b + |z| + b}\,, \qquad b \geq a\,, \tag{3.28}$$

kde

$$N = \frac{M}{b-a}\,, \qquad r_a^2 = R^2 + (a+|z|)^2\,, \qquad r_b^2 = R^2 + (b+|z|)^2\,.$$

Skutečně, dosazením ν do Weylovy metriky (3.1) s $N = 1/2$ a přetransformováním do sférických souřadnic obdržíme Schwarzschildovu metriku. Diskům vytvořeným z potenciálu (3.28) s jiným kladným N se říká zobecněné Schwarzschildovy disky.

Nabízí se opět srovnat klasické pozorovatelné v, j/b, Σ (označení zůstávají jako v předchozích 2 paragrafech) s relativistickými průběhy V, h/b, σ. Zavedeme-li podobně jako u Kuzmin-Curzonových disků parametry

$$N_a = \frac{M}{a}\,, \qquad N_b = \frac{M}{b} = \frac{N_a}{2N_a+1}$$

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}} = \frac{1}{N_a\sqrt{N_a^{-2}+(R/M)^2}}\,,$$

$$\beta = \frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}} = \frac{1}{N_b\sqrt{N_b^{-2}+(R/M)^2}}\,,$$

budeme opět schopni vyjádřit zmíněné pozorovatelné v závislosti na R/M (případně R_c/M) pouze pomocí parametru N_a či N_b. Navíc po této substituci získají zkoumané závislosti jednoduchý tvar:

$$v^2 = N(\beta-\alpha)\,, \qquad V^2 = \frac{v^2}{1-v^2} \tag{3.29}$$

$$\frac{j}{b} = \sqrt{\frac{N(\beta-\alpha)(1-\beta^2)}{\beta^2}}\,,$$

$$\frac{h}{b} = \left(\frac{b\,\alpha(1+\beta)}{a\,\beta(1+\alpha)}\right)^N \sqrt{\frac{N(\beta-\alpha)(1-\beta^2)}{\beta^2(1-2N(\beta-\alpha))}} \tag{3.30}$$

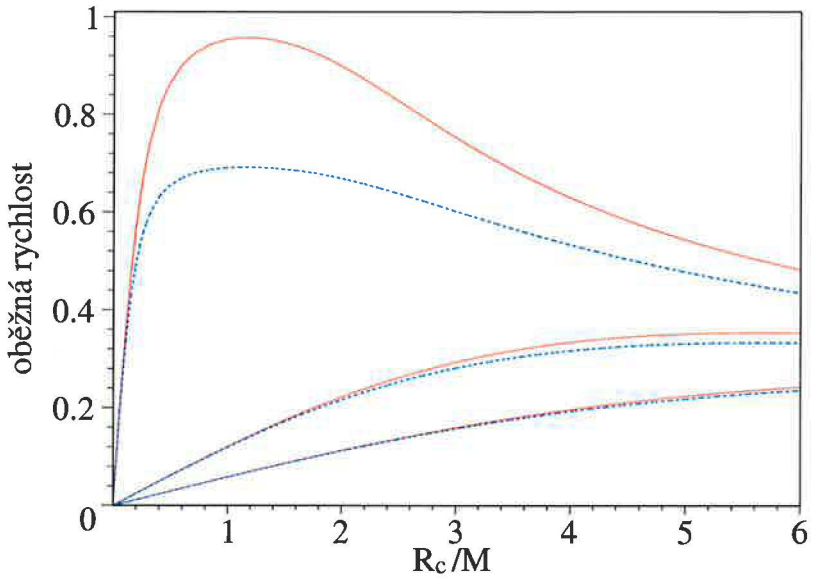
$$\Sigma = \frac{N}{2\pi}\left(\frac{1}{r_{a0}} - \frac{1}{r_{b0}}\right)\,, \qquad \sigma = \Sigma[1-N(\beta-\alpha)]e^{\nu_D-\zeta_D}\,, \tag{3.31}$$

kde r_{a0}, r_{b0} jsou vzdálenosti r_a, r_b na ploše $z=0$ a

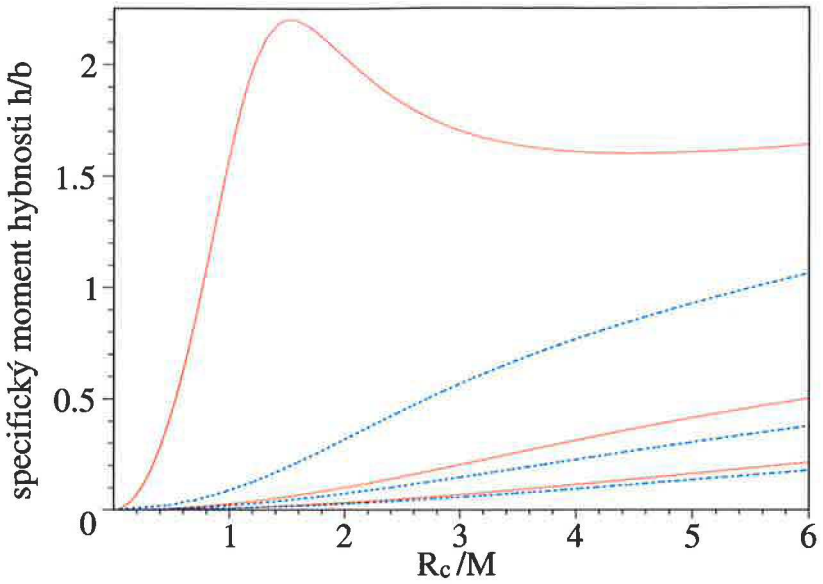
$$\nu_D = N\ln\frac{r_{a0}+a}{r_{b0}+b}\,, \qquad \zeta_D = 2N^2\ln\frac{(r_{a0}+r_{b0})^2-(b-a)^2}{4r_{a0}r_{b0}}$$

jsou taktéž hodnoty v metrice vystupujících funkcí ν a ζ na disku.

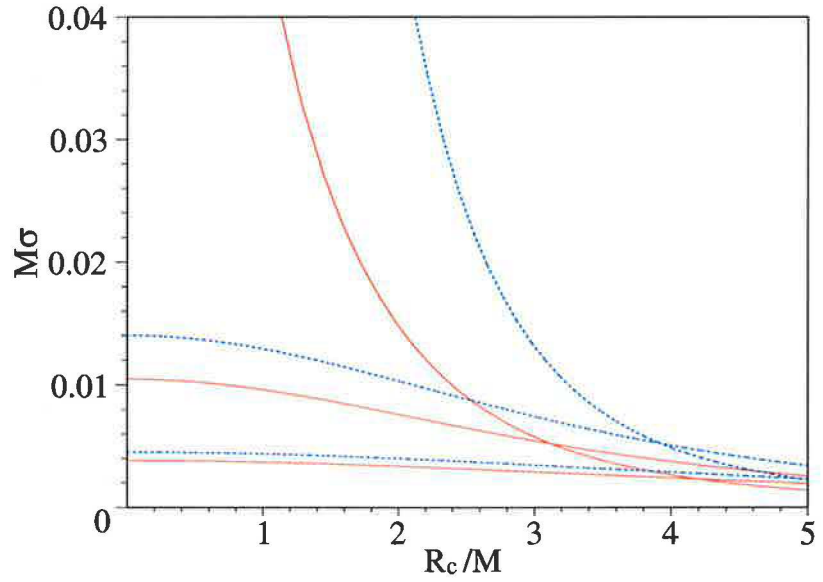
Veličiny jsou sledovány opět vždy ve 3 případech – slabě, středně a vysoce relativistického pole. Stupeň „relativističnosti“ pole je nyní určován velikostí parametru N_a, což je v Kuzminově náhledu poměr síly zdroje vůči charakteristické vzdálenosti, na které působí. Nezávislá proměnná je úměrná obvodovému poloměru $R_c = Re^{-\nu_D}$. Následující grafy se vztahují přímo k Schwarzschildovu disku, tedy $N = 1/2$.



OBR. 3.4: Oběžné rychlosti jako funkce obvodového poloměru $R_c = Re^{-\nu(R,0)}$. Porovnání relativistických výsledků (červeně) s jejich klasickými protějšky (modře přerušovaně) pro 3 parametry $1/N_a \equiv a/M = 0.01, 2.51, 5.01$ (odshora), jejichž převrácená hodnota charakterizuje „relativističnost“ gravitačního pole.



OBR. 3.5: Specifický moment hybnosti $p_\varphi/(mb)$ jediného proudu částic v závislosti na obvodovém poloměru R_c. Srovnání relativistických výsledků (červeně) s jejich klasickými protějšky (modře přerušovaně) pro 3 společné parametry $N_a \equiv a/M = 0.01, 2.51, 5.01$ (odshora).



OBR. 3.6: Plošná hustota hmoty v jednotkách M v závislosti na obvodovém poloměru R_c. Srovnání relativistických výsledků (červeně) s jejich klasickými protějšky (modře přerušovaně) pro 3 společné parametry $N_a \equiv a/M = 0.01, 2.51, 5.01$ (odshora).

Oběžné rychlosti (3.29) nabývají maxima na

$$R^2 = b^2(a/b)^{2/3}(1 + (a/b)^{2/3}) .$$

V tomto bodě je $V^2 \leq 1$, pokud

$$N \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{1}{2}\frac{[1 - (a/b)^2]^{1/2}}{[1 - (a/b)^{2/3}]^{3/2}} .$$

Poslední zlomek roste od 1 pro $a/b = 0$ k ∞ pro $a/b = 1$. Pro Schwarzschildův disk a pro zobecněné Schwarzschildovy disky s $N < 1/2$ je tak dominantní energetická podmínka $V \leq 1$ vždy splněna. Z diskuse je taktéž zřejmé, že u takových disků již nebude specifický moment hybnosti divergovat - viz (3.17); pro nízká N dokonce ani nenabývá maxima.

Chování vykreslených veličin je kvalitativně stejné jako v případě Kuzmin-Curzonových disků a je blíže diskutováno v předchozím paragrafu. Všimněme si však, že Schwarzschildovy disky vykazují strmější nárůst rotačních křivek a jejich plošší maximum, a také méně ostrý vzestup a pád specifického momentu hybnosti než Kuzmin-Curzonovy disky. Zato plošná hustota je v oblasti maxima cirkulární rychlosti silněji potlačována. To je výsledkem společné snahy těchto disků snížit zastoupení nejrychlejších a tedy nejenergičtějších částic.

3.2 Shrnutí: porovnání newtonovských a relativistických modelů

Na předchozích příkladech Kuzmin-Curzonových a schwarzschildovských disků jsem ověřil, co lze nahlédnout již v sekci Vlastnosti disků, a to, že modely splývají s klesajícím poměrem M/b, kde M charakterizuje gravitační schopnosti zdroje a b je jakási charakteristická vzdálenost pod rovinou $z = 0$, v jaké se v Kuzminově metodě nachází zdroj pole řešící Laplaceovu rovnici. Nezávisí tedy na absolutních hodnotách těchto parametrů, nýbrž na jejich poměru. Rychlost konvergence relativistické závislosti ke klasické je však u různých veličin odlišná. To souvisí s faktem, že relativistické modely musí vyhovovat zcela odlišným rovnicím než newtonovské; postačujícím kritériem opravňujícím nás prohlásit, že tyto modely jsou relativistickými a newtonovskými protějšky, je jen, aby v newtonovské limitě $M/r \to 0$ splývaly. V Einsteinových rovnicích jsou vlastnosti zdroje a pole těsněji provázány, a

tak není divu, že vztahy dynamických veličin jsou složitější, různě rychle se odchylují od klasických závislostí a ve vysoce relativistických podmínkách mohou nabývat zcela odlišných průběhů.

Existují také čistě relativistické efekty, jako třeba gravitační frekvenční posuv, umožňující nám citlivými metodami určit odchylky pole od newtonovského případu i u slabě relativistických polí.

Literatura

[1] Kuzmin G 1956 *Astron. Zh.* **33** p 27

[2] Evans N W and Zeeuw P T 1992 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **257** p 152

[3] Binney J and Tremaine S 1987 *Galactic Dynamics* (Princeton, Princeton Univ. Press)

[4] Miyamoto M and Nagai R 1975 *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **27** p 533

[5] Ledvinka T http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka/?278656 (elektronická skripta)

[6] Hogg D W, Blanton M R, Roweis S T and Johnston K V 2005 *Astrophys. J.* **269** pp 268–75

[7] Weisstein E W 1998 *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics* (Boca Raton, FL: CRC Press)

[8] Israel W 1966 *Nuovo Cimento* B **44** p 1 (erratum B **49** p 463)

[9] Bičák J, Lynden-Bell D and Katz J 1993 *Phys. Rev* D **47** p 4334

[10] Synge J L 1971 *Relativity: The General Theory* (Amsterdam)